

Enfoque alternativo al análisis de errores de despolarización en el algoritmo de Grover

André Fonseca de Oliveira , Ilan Cohn , Efrain Buksman , Jesús García-López

Resumen: En este artículo, se analizó el efecto de introducir ruido al algoritmo de Grover, modelado como ruido total de despolarización de canal (TDCh) y como ruido local de despolarización de canal (LDCh), utilizando un índice que caracteriza la propagación de errores en estados cuánticos. Los resultados son comparados con los obtenidos anteriormente por Vrana et. al. [1] y Cohn et. al. [2], concluyendo que la degradación del algoritmo de Grover con error local (LDCh) es aún peor que con error total (TDCh).

Palabras clave: Algoritmo de Grover, Error cuántico de canal de despolarización, Índice de isotropía.

Abstract: In this article the effect of introducing noise to Grover's algorithm has been analyzed, modeled as both total depolarizing channel (TDCh) and local depolarizing channel (LDCh), by using an index that characterizes error propagation in quantum states. The results are compared with those obtained previously by Vrana et. al. [1] and Cohn et. al. [2], concluding that the degradation of Grover's algorithm with local error (LDCh) is even worse than with total error (TDCh).

Keywords: Grover algorithm, quantum error channel depolarization index isotropy.

1. Introducción

Todo sistema físico está inevitablemente contaminado de errores: por su propia construcción o por su interacción con el ambiente. En el caso de los sistemas computacionales cuánticos, esto es debido a la implementación de los circuitos, la preparación de los estados y la decoherencia. La utilización de algoritmos cuánticos en presencia de errores ha sido un tema de interés en las últimas décadas [3-11].

El problema de la propagación de los errores es especialmente importante en algoritmos iterativos, como los algoritmos cuánticos de búsqueda [12][13], donde en cada paso el error se puede acumular. Por esto, es importante diagnosticar hasta dónde éstos pueden ser utilizados en función del modelo de error.

En este artículo, estudiaremos el algoritmo de Grover [14], con error de despolarización de canal total y local en cada qubit, usando un índice de isotropía [15] con la finalidad de comparar semejanzas y diferencias entre estos tipos de error. Considerando el estado mezcla resultante de la propagación de errores de un estado original puro de referencia, el índice de isotropía descompone la información en dos partes: la desinformación que contiene, llamada de *ancho de isotropía*, y la información contenida en la *alineación* con el estado de referencia. En el estudio, se ilustra, mediante este doble índice, la degradación del estado de Grover durante su evolución.

2. Algoritmo de Grover con error de despolarización de canal

2.1. Algoritmo de búsqueda Grover

El algoritmo de Grover es un algoritmo cuántico de búsqueda [14][16] que resuelve el problema de hallar un elemento marcado en un conjunto desordenado de N elementos utilizando $k_{Gr} = \left\lceil \frac{\pi}{4} \sqrt{N} \right\rceil$ veces un oráculo. El problema puede ser descrito como a continuación. Sea un conjunto de $N = 2^n$ estados cuánticos en un espacio de Hilbert ($\mathcal{H} = \mathbb{C}^N$), generado por n qubits, y un estado de la base canónica desconocido marcado entre ellos. Dado un operador que identifica el elemento marcado, denominado oráculo, el objetivo es hallar este elemento con alta probabilidad y con la menor cantidad de consultas (pasos) al oráculo.

Sea $|t\rangle$ el elemento marcado de la base y

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} |i\rangle \quad (1)$$

la superposición uniforme de todos los estados de la base. Con la finalidad de representar errores cuánticos, se utiliza la notación de matriz de densidad ($\mathcal{H} = \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$), obteniéndose: $\rho_t = |t\rangle\langle t|$ y $\rho_{ini} = |s\rangle\langle s|$, respectivamente. El algoritmo de Grover es:

Algoritmo 1 Algoritmo de búsqueda de Grover

- 1) Se inicializa el estado inicial con la superposición $\rho_{ini} = |s\rangle\langle s|$.
- 2) Se aplica el operador del oráculo $O = 2|t\rangle\langle t| - I$,

- 3) Se aplica el operador de difusión $D = 2|s\rangle\langle s| - I$,
- 4) Se repiten $\left\lfloor \frac{\pi}{4}\sqrt{N} \right\rfloor - 1$ veces los pasos 2 y 3,
- 5) Se realiza una medición proyectiva en la base canónica en cada qubit. El estado marcado es obtenido con alta probabilidad para $N \gg 1$.

Considerando $|\bar{t}\rangle$ el estado ortogonal a $|t\rangle$ definido como

$$|\bar{t}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq t}}^{N-1} |i\rangle, \quad (2)$$

se puede observar que el operador de Grover ($G = DO$) realiza una doble reflexión en el hiperplano formado por $|t\rangle$ y $|\bar{t}\rangle$ [12], como el ilustrado en la Fig. 1. Es decir, si el estado $|\psi\rangle$ forma un ángulo $\theta/2$ con $|\bar{t}\rangle$, el oráculo lo refleja sobre $|\bar{t}\rangle$ y el difusor lo vuelve a reflejar sobre el estado original $|\psi\rangle$, obteniéndose un nuevo ángulo θ con $|\bar{t}\rangle$. Luego de una cierta cantidad de pasos, el estado es cercano a $|t\rangle$ ($\theta/2 \approx \pi/2$).

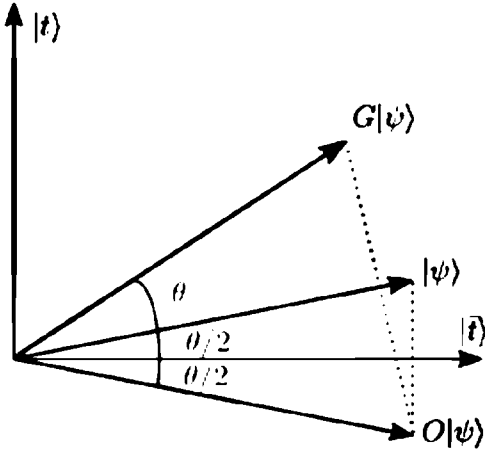


Figura 1. Hiperplano correspondiente al algoritmo de Grover, formado por $|t\rangle$ y $|\bar{t}\rangle$.

Es inmediato ver que luego de aplicar el oráculo y difusor k veces, el resultado es

$$\rho_k = G^k \rho_{ini} (G^+)^k. \quad (3)$$

Se puede demostrar [16] que la matriz de densidad obtenida es

$$\rho_k = |s_k\rangle\langle s_k|, \quad (4)$$

donde

$$|s_k\rangle = \sin((2k+1)\theta) |t\rangle + \cos((2k+1)\theta) |\bar{t}\rangle \quad (5)$$

y $\theta = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$.

Por lo tanto, la probabilidad de encontrar el elemento marcado luego de k iteraciones es

$$p(k) = \sin^2((2k+1)\theta). \quad (6)$$

2.2. Error Total de Canal de Despolarización (TDCh)

Se ha estudiado [1][2][17] el efecto del error modelado como un TDCh con probabilidad de error, cuya definición es

$$\varepsilon(\rho, \gamma) = (1-\gamma)\rho + \gamma \frac{I}{N}. \quad (7)$$

Esto puede ser interpretado probabilísticamente como una distribución Binomial, donde *éxito* o *fracaso* corresponden a ρ o I/N , respectivamente.

Se considera un error del tipo TDCh aplicado en cada paso del algoritmo de Grover, deteniendo el algoritmo en k_{Gr} o en k_{max} , siendo este último el paso en el cual la probabilidad es máxima.

La medida de coste utilizada es la propuesta por [2], que corresponde al valor esperado del número de repeticiones del algoritmo, que denotaremos como $MC = k/p$.

2.2.1. Deteniendo el algoritmo en k_{Gr}

Los resultados obtenidos en Vrana et. al. [1] y Cohn et. al. [2] muestran que, para $\gamma \ll 1$ y $n \gg 1$, el costo esperado es

$$MC \approx \frac{\pi\sqrt{N}}{4} \left(1 + \frac{\pi\sqrt{N}}{4} \gamma \right). \quad (8)$$

Por lo tanto, para $\gamma > 0$ fijo, el algoritmo es de orden $O(N)$. Sin embargo, se puede mantener el orden original $O(\sqrt{N})$ si $\gamma \propto 1/\sqrt{N}$. Para γ grandes (cercanos a uno), el algoritmo se vuelve de orden $O(N\sqrt{N})$.

2.2.2. Deteniendo el algoritmo en k_{max}

Si se tiene una estimación del error cometido (γ), se puede mejorar el algoritmo como propuesto en [2], deteniendo el algoritmo en k_{max} . Los resultados obtenidos en [2] muestran que, para $\gamma \ll 1$ y $n \gg 1$, el costo esperado es

$$MC \approx \frac{\pi\sqrt{N}}{4} \left(1 + \frac{\pi\sqrt{N}}{4} \gamma \left(1 - \frac{2}{\pi^2} \right) \right). \quad (9)$$

Por lo tanto, para $\gamma > 0$ fijo, el algoritmo es de orden $O(N)$ con un factor de aproximadamente 0.8, respecto al resultado con k_{Gr} . De igual manera que en el caso anterior, el orden original se mantiene $O(\sqrt{N})$ si $\gamma \propto 1/\sqrt{N}$. La mejoría con respecto a detenerse en k_{Gr} , ocurre para γ grandes (cercanos a uno), donde el algoritmo se vuelve de orden $O(N)$.

2.3. Error local de canal de despolarización (LDCh)

El error de despolarización local (LDCh) se define como

$$\varepsilon^L(\rho, \alpha) = \varepsilon_1(\rho, \alpha) \circ \varepsilon_2(\rho, \alpha) \circ \dots \circ \varepsilon_n(\rho, \alpha), \quad (10)$$

donde α es la probabilidad de error en cada uno de los qubits y $\varepsilon_i(\rho, \alpha)$ es el error de despolarización aplicado al

qubit i . Como reportado en [2], aplicando este error en cada paso del algoritmo de Grover, se obtienen resultados análogos al caso TDCh. La medida de coste utilizada es la misma que en el caso TDCh, que denotaremos como MC^L .

2.3.1. Deteniendo el algoritmo en k_{Gr}

En [2], se muestra que deteniendo el algoritmo en k_{Gr} , el costo medio esperado para $\alpha \ll 1$ y $n \gg 1$ es

$$MC^L \approx \frac{\pi\sqrt{N}}{4} + f\alpha N \log_2 N, \quad (11)$$

donde f es una constante que está en el intervalo $\left[\frac{\pi^2}{32}, \frac{\pi^2}{16}\right]$. De aquí que para $\alpha > 0$, constante, el orden del algoritmo es $O(N \log_2 N)$ y para mantener el orden original $O(\sqrt{N})$ se necesita $\alpha \propto \frac{1}{\sqrt{N} \log_2 N}$. Por otra parte, para α cercano a uno, el costo medio esperado es aproximadamente $\pi N \sqrt{N}/4$ y el orden del algoritmo es $O(N\sqrt{N})$.

2.3.2. Deteniendo el algoritmo en k_{max}

Análogamente al caso TDCh, los resultados para $\alpha \ll 1$ y $n \gg 1$ muestran que el coste esperado es el mismo que en Ec. (11), donde f es una constante que está en el intervalo $\left[\frac{\pi^2-4}{32}, \frac{2\pi^2-2}{32}\right]$. Al igual que el caso anterior, el algoritmo es $O(N \log_2 N)$ y para mantener el orden original $O(\sqrt{N})$ se necesita $\alpha \propto \frac{1}{\sqrt{N} \log_2 N}$.

3. Índice de isotropía para errores cuánticos

3.1. Errores isótropos

En [18], se ha definido el concepto de error de decoherencia isótropo, y temporalmente independiente, para estados cuánticos de n qubits. El error es isótropo respecto a un estado inicial (de referencia) ψ_0 , si la probabilidad de ir a un estado ψ depende solamente de la distancia entre ψ_0 y ψ . Sin perder generalidad, considerando el estado de referencia $\psi_0 = |0\rangle$, el error isótropo puede ser representado como un estado aleatorio

$$|\psi\rangle = a_0|0\rangle + a_1 e^{i\varphi_1}|1\rangle + \dots + a_{N-1} e^{i\varphi_{N-1}}|N-1\rangle, \quad (12)$$

siendo $|i\rangle$ los vectores de la base, φ_i variables aleatorias con distribución uniforme en el intervalo $[0, 2\pi)$ y a_i variables aleatorias con la misma distribución para $1 \leq i \leq N-1$ y que cumplen con el vínculo $\sum_{i=0}^{N-1} a_i^2 = 1$. Con las hipótesis anteriores, la matriz de densidad (esperanza) de la variable aleatoria $|\psi\rangle\langle\psi|$ tiene la forma

$$\rho = E(|\psi\rangle\langle\psi|) = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{cases} (\lambda_1 N) \frac{I}{N} + (\lambda_0 - \lambda_1) \rho_0, & \lambda_0 \geq \lambda_1 \\ (\lambda_0 N) \frac{I}{N} + (\lambda_1 - \lambda_0) (I - \rho_0), & \lambda_0 < \lambda_1 \end{cases} \quad (13)$$

siendo $\rho_0 = |0\rangle\langle 0|$ la matriz de densidad del estado de referencia.

3.2. Índice de isotropía

Con la finalidad de analizar la propagación de errores en el algoritmo de Grover, se utilizará el doble índice de isotropía descrito a continuación, originalmente introducido en [15]. Sea ρ la matriz de densidad que representa el error de un circuito cuántico considerando el estado de referencia $\rho_0 = |0\rangle\langle 0|$ (en caso de otro estado de referencia se realiza un cambio de base), M la matriz de cambio de base que lleva ρ a su forma diagonal $\rho_d = M^\dagger \rho M$ y $\lambda = \min_i \lambda_i$, donde λ_i son los valores propios de ρ . En este caso ρ_d se puede descomponer en la forma

$$\rho_d = \lambda I + \theta = N\lambda \frac{I}{N} + \text{Tr}(\theta) \hat{\rho}_d = p \frac{I}{N} + (1-p) \hat{\rho}_d. \quad (14)$$

Si se realiza el cambio de base inverso, ρ tiene la forma

$$\rho = p \frac{I}{N} + (1-p) \hat{\rho}. \quad (15)$$

Definición: Índice de isotropía

Se define el (doble) índice de isotropía para un estado cuántico ρ , considerando como estado de referencia el estado puro ρ_0 , al par

$$Iso(\rho) \triangleq (A, p) \quad (16)$$

siendo

□ A , la *Alineación Isótropa*, definida como

$$A = \text{Fid}(\hat{\rho}, \rho_0) - \text{Fid}(\hat{\rho}, \rho_{i0}) \quad (17)$$

donde Fid es la fidelidad entre los estados cuánticos y ρ_{i0} es la mezcla isótropa ortogonal (con el producto interno usual de matrices) a ρ_0 ,

$$\rho_{i0} = \frac{I - \rho_0}{N-1}. \quad (18)$$

□ y $p = N\lambda$, el *Ancho Isótropo*, siendo λ el menor valor propio de ρ .

Un estado ρ representa un error isótropo cuando $A = 1$ o $A = -1$ ($\forall p$), o $p = 1$.

4. Degradación del algoritmo de Grover

En esta sección, se estudiará el efecto de introducir ruido (TDCh y LDCh) en el algoritmo de Grover, analizado desde un punto de vista del índice de

isotropía. Se considera como estado de referencia al estado original del algoritmo sin ruido (ρ_k).

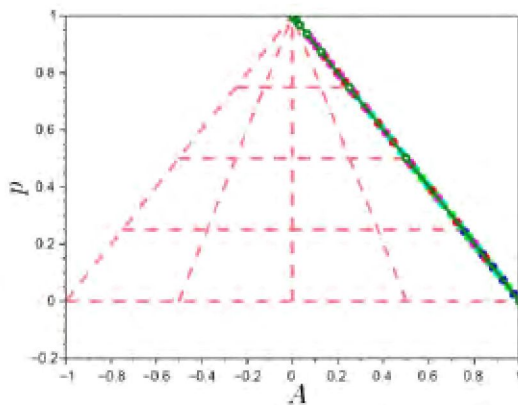
4.1. Error total de canal de despolarización (TDCh)

En [1][2] se muestra que la matriz densidad obtenida luego de k pasos es

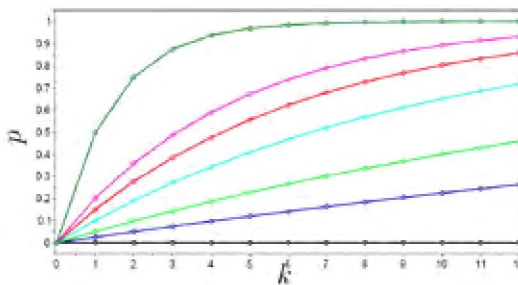
$$\rho = (1 - \gamma)^k \rho_k + [1 - (1 - \gamma)^k] \frac{I}{N}, \quad (19)$$

donde ρ_k es la matriz densidad del algoritmo de Grover sin ruido dada por la Ec. (4). Por lo tanto, el ancho isotrópico es $p = 1 - (1 - \gamma)^k$ y dado que se utiliza el estado de referencia ρ_k , la alineación isotrópica es $A \equiv 1$ (para todos los pasos).

Las figuras 2(a) y 2(b) muestran la evolución del algoritmo para distintos valores de ancho de ruido γ .



(a) Triángulo de isotropía (*Alineación vs Ancho Isótropo*) para diferentes valores de α .



(b) Variación del *Ancho Isótropo* (p) en función del paso k para diferentes valores de α .

Figura 2. Variación del índice de isotropía para diferentes valores de $\alpha \in \{0, 0.025, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.5\}$. Errores del tipo TDCh.

4.2. Error local de canal de despolarización (LDCh)

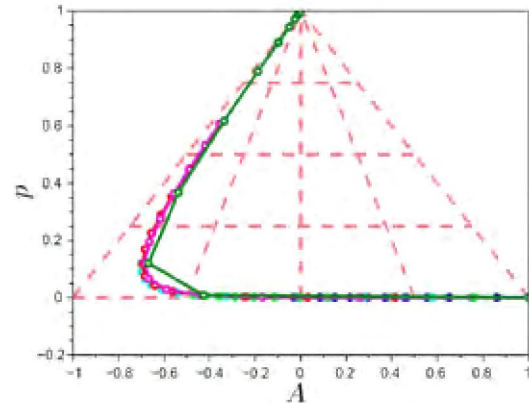
Como se vio en 2.3, cuando se asume un error modelado como LDCh en el algoritmo de Grover el resultado de la búsqueda empeora notablemente. En este caso, incluso para valores pequeños de ancho isotrópico p , la alineación tiene una desviación hacia el -1 , como puede verse en las figuras 3(a), 3(b) y 3(c).

Esto es, ya para valores pequeños de ruido, el error local muestra una clara desviación hacia el estado ortogonal (ρ_{i0}), lo que significa una degradación de la probabilidad.

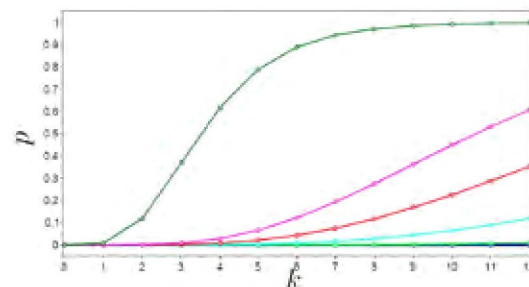
Esto explica la razón por la cual existe una mayor degradación del algoritmo utilizando el error modelado como LDCh respecto del modelado como TDCh, ya que en este último la alineación no varía.

5. Variación de la isotropía respecto al estado marcado

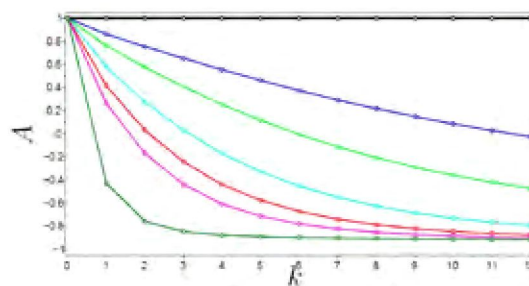
En esta sección, se estudiará el efecto del algoritmo de Grover, tomando como referencia al elemento marcado ($\rho_0 \equiv |t\rangle\langle t|$). En este contexto, es posible interpretar el funcionamiento del algoritmo como la corrección de un estado original con error, gradualmente corregido hacia el elemento marcado.



(a) Triángulo de isotropía (*Alineación vs Ancho Isótropo*) para diferentes valores de α .



(b) Variación del *Ancho Isótropo* (p) en función del paso k para diferentes valores de α .



(c) Variación de la *Alineación Isótropa* (A) en función del paso k para diferentes valores de α .

Figura 3. Variación del índice de isotropía para diferentes valores de $\alpha \in \{0, 0.025, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.5\}$. Errores del tipo LDCh.

5.1. Error total de canal de despolarización (TDCh)

El índice de isotropía puede ser hallado en forma analítica para el caso de error de despolarización de canal. Utilizando la Ec. (19), se puede observar que el *ancho isotrópico* es, al igual que en 4.1, $p = 1 - (1 - \gamma)^k$. Como el estado ρ_k es puro, la alineación es

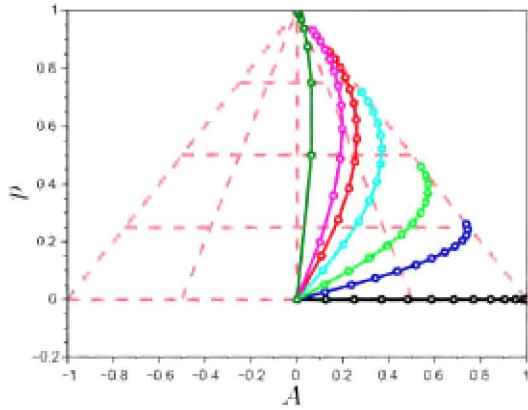
$$A = \sqrt{\langle s_k | \rho_0 | s_k \rangle} - \sqrt{\langle s_k | \rho_{i0} | s_k \rangle}, \quad (20)$$

donde $|s_k\rangle$ está dado por la Ec. (5). Luego, la alineación se reduce a

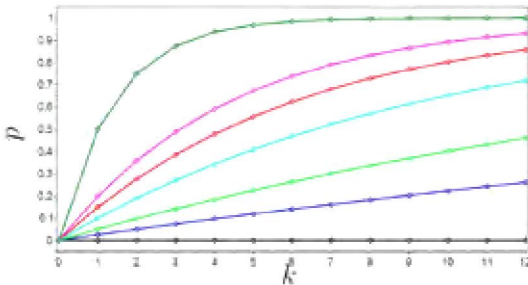
$$A = |\sin((2k+1)\theta)| - \frac{|\cos((2k+1)\theta)|}{\sqrt{N-1}}, \quad (21)$$

que es idénticamente nula para $k = 0$, no negativa (para $0 \leq k \leq k_{Gr}$) y tiende a 1 con $n \rightarrow \infty$ cuando $k = k_{Gr}$.

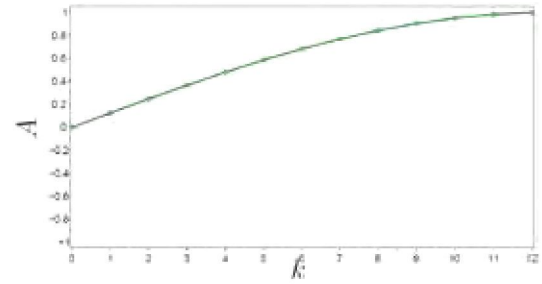
La Fig. 4 ilustra las variaciones de los índices en función del paso k para valores de $\gamma \in \{0, 0.025, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.5\}$. En el caso del algoritmo original sin error ($\gamma = 0$), se puede observar como la *alineación* inicial sale del valor 0 y tiende a 1 (siempre con $p = 0$). Esto se puede interpretar como un estado con error que se corrige con la aplicación del algoritmo. La Fig. 4(c) ilustra que, en este caso, la alineación no depende de cómo previsto en la Ec. (21).



(a) Triángulo de isotropía (*Alineación vs Ancho Isótropo*) para diferentes valores de γ .



(b) Variación del *Ancho Isótropo* (p) en función del paso k para diferentes valores de γ .



(c) Variación de la *Alineación Isótropa* (A) en función del paso k para diferentes valores de γ .

Figura 3. Variación del índice de isotropía para diferentes valores de $\gamma \in \{0, 0.025, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.5\}$. Errores del tipo TDCh.

5.2. Error local de canal de despolarización (LDCh)

Como el *ancho isotrópico* p no depende del estado de referencia, éste es igual al visto anteriormente en la Fig. 3(b). El índice de isotropía se puede observar en la Fig. 5.

La Fig. 5(a) muestra que aun con un error pequeño ($\alpha = 0.025$, Fig. 5(b)) la tendencia a alinearse con el estado marcado desaparece. Esto significa que hay una rápida degradación del algoritmo, ya que el estado tiene una tendencia hacia el estado ortogonal ρ_{i0} . Para valores mayores de ancho de ruido α , el estado tiende fuertemente al estado de máxima mezcolanza (I/N).

6. Conclusiones

En este artículo, se analizó el efecto de introducir ruido al algoritmo de Grover, modelado tanto como ruido total de despolarización de canal (TDCh) como ruido local de despolarización de canal (LDCh). Para ello, se utilizó el índice de isotropía definido en [15] y se compararon los resultados con los obtenidos en [1][2]. En [2], se muestra que la degradación del algoritmo de Grover con error local (LDCh) es más importante que con error total (TDCh). Una explicación para esto es que el LDCh tiende a desalinearse el estado respecto del algoritmo sin ruido, mientras que el TDCh no desalinearse (la alineación es siempre 1). Es decir, el error modelado como TDCh sustituye al estado original por el estado máximamente mezclado (con cierta probabilidad), pero deja intacto el estado original si esto no sucede. Por otro lado, el error local saca al estado original del plano del algoritmo de Grover (Fig. 1), resultando en una desalineación del mismo.

En la sección 5, se interpreta al algoritmo como corrector de un error del estado marcado. Los resultados obtenidos son análogos a los obtenidos en la sección 4.

Como trabajo futuro se propone aplicar este índice a otros algoritmos conocidos, así como también a códigos correctores de errores.

Referencias bibliográficas

[1] Peter Vrana, David Reeb, Daniel Reitzner, and Michael M. Wolf. Fault-ignorant quantum search. *New J. Phys.*, 16:073033, 2014.

[2] I. Cohn, A. Fonseca de Oliveira, E. Buksman, and J. García-López. Order of grover's search algorithm with both total and local depolarizing channel error. In *XXXV Reunión Bienal de la Real Sociedad Española de Física*, España, 2015.

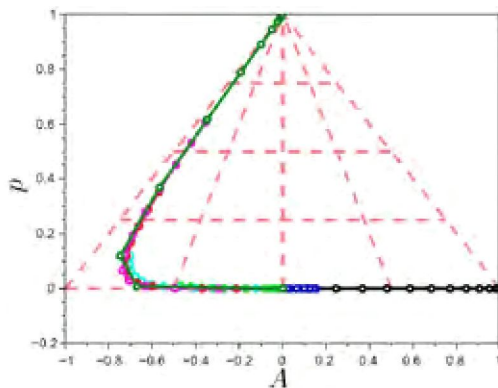
[3] Peter W. Shor. Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory. *Phys. Rev. A*, 52:R2493–R2496, Oct 1995.

[4] A. R. Calderbank and Peter W. Shor. Good quantum error-correcting codes exist. *Phys. Rev. A*, 54:1098–1105, Aug 1996.

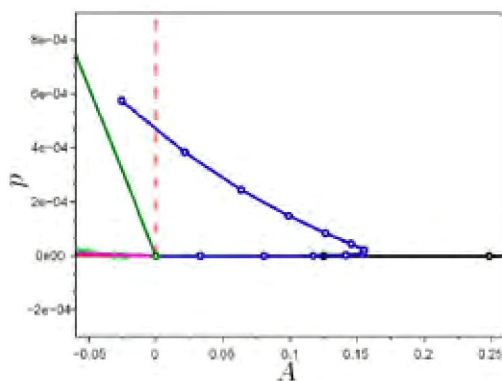
[5] Raymond Laflamme, Cesar Miquel, Juan Pablo Paz, and Wojciech Hubert Zurek. Perfect quantum error correcting code. *Phys. Rev. Lett.*, 77:198–201, Jul 1996.

[6] D. Aharonov and M. Ben-Or. Fault-tolerant quantum computation with constant error. In *Proceedings of the Twenty-ninth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '97, pages 176–188, USA, 1997.

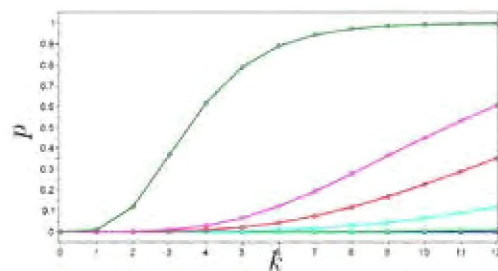
[7] D. Gottesman. *Stabilizer codes and quantum error correction*. PhD thesis, California Institute of Technology, 1997.



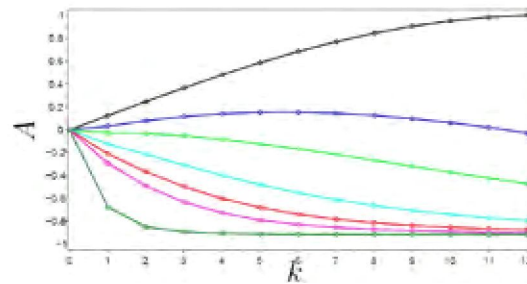
(a) Triángulo de isotropía (*Alineación vs Ancho Isótropo*) para diferentes valores de α .



(b) Detalle del triángulo de isotropía.



(c) Variación del *Ancho Isótropo* (p) en función del paso k para diferentes valores de α .



(d) Variación de la *Alineación Isótropo* (A) en función del paso k para diferentes valores de α .

Figura 3. Variación del índice de isotropía para diferentes valores de $\alpha \in \{0, 0.025, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.5\}$. Errores del tipo LDCh.

[8] Daniel Gottesman. Theory of fault-tolerant quantum computation. *Phys. Rev. A*, 57:127–137, Jan 1998.

[9] J. Preskill. Reliable quantum computers. *Pro. R. Soc. A*, 454(1969):385–410, 1998.

[10] E. Knill, R. Laflamme, and W. H. Zurek. Resilient quantum computation: error models and thresholds. *Pro. R. Soc. A*, 454(1969):365–384, 1998.

[11] Emanuel Knill, Raymond Laflamme, and Lorenza Viola. Theory of quantum error correction for general noise. *Phys. Rev. Lett.*, 84:2525–2528, Mar 2000.

[12] M. A. Nielsen and I. L. Chuang. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge Univ. Press, 2000.

[13] Birgit Hein. *Quantum Search Algorithms*. PhD thesis, University of Nottingham, February 2010.

[14] L. K. Grover. A fast quantum mechanical algorithm for database search. In *Proceedings, Twenty-eighth Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*, STOC '96, p. 212, USA, 1996.

[15] A. Fonseca de Oliveira, E. Buksman, J. García-López, and Francisco García Mazarío. Caracterización de errores en circuitos cuánticos: índice de isotropía para estados de n -qubits. In *XXXV Reunión Bienal de la Real Sociedad Española de Física*, España, 2015.

[16] L. K. Grover. Quantum mechanics helps in searching for a needle in haystack. *Phys. Rev. Lett.*, 79(2):325–328, July 1997.

[17] P. J. Salas. Noise effect on grover algorithm. *The European Physical Journal D*, 46(2):365–373, 2008.

[18] Jesús García-López and F. G. Mazarío. Modelos continuos de error en computación cuántica. In *Primer Congreso Internacional de Matemáticas en Ingeniería y Arquitectura*, España, 2007.