

## Caracterización de errores en circuitos cuánticos: índice de isotropía para estados de n-qubits

A. Fonseca de Oliveira , E. Buksman , J. García-López , F. García Mazarío

### Introducción

Desde los inicios de la computación cuántica se ha investigado diversas formas de trabajar con los circuitos cuánticos en ambientes con errores [1-3]. Usualmente se asume la hipótesis de que los errores en cada qubit son independientes, según Shor, simplemente por analogía con el modelo clásico [4]. Aunque en algunos casos esta hipótesis pueda ser realista, no está justificada para errores de decoherencia de un estado de n-qubits y errores en puertas cuánticas más de un qubit. En este trabajo se introduce una forma de caracterizar errores más generales en circuitos cuánticos mediante un índice de isotropía.

### Errores isótropos

En [5] se ha definido el concepto de error de decoherencia isótropo, y temporalmente independiente, para estados cuánticos de n-qubits. El error es isótropo respecto a un estado inicial (de referencia)  $\psi_0$ , si la probabilidad de ir a un estado  $\psi$  depende solamente de la distancia entre  $\psi$  y  $\psi_0$ .

Sin perder generalidad, considerando el estado de referencia como  $\psi_0 = |0\rangle$ , el error isótropo puede ser representado como un estado aleatorio

$$|\psi\rangle = a_0|0\rangle + a_1 e^{i\varphi_1}|1\rangle + \dots + a_{2^n-1} e^{i\varphi_{2^n-1}}|2^n-1\rangle, \quad (1)$$

siendo  $|i\rangle$  los vectores de la base,  $\varphi_i$  variables aleatorias con distribución uniforme en el intervalo  $[0, 2\pi)$  y  $a_i$  variables aleatorias con la misma distribución para  $1 \leq i \leq 2^n - 1$  y que cumplen con el vínculo  $\sum_{i=0}^{2^n-1} |a_i|^2 = 1$ .

Con las hipótesis anteriores la matriz de densidad (esperanza) de la variable aleatoria  $|\psi\rangle\langle\psi|$  tiene la forma

$$\rho = E(|\psi\rangle\langle\psi|) = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{cases} (\lambda_1 2^n) \frac{I}{2^n} + (\lambda_0 - \lambda_1) \rho_0, & \lambda_0 \geq \lambda_1 \\ (\lambda_0 2^n) \frac{I}{2^n} + ((\lambda_1 - \lambda_0)) \frac{(I - \rho_0)}{(2^n - 1)} & \lambda_0 < \lambda_1 \end{cases}. \quad (2)$$

### Índice de isotropía para estados cuánticos de n-qubits

Sea  $\rho$  la matriz de densidad que representa el error de un circuito cuántico considerando el estado de referencia  $\rho_0 = |0\rangle\langle 0|$  (en caso de otro estado de referencia se realiza un cambio de base),  $M$  la matriz de cambio de base que lleva  $\rho$  a su forma diagonal  $\rho_d = M^+ \rho M$  y

$\lambda = \min(\lambda_i)$ , donde  $\lambda_i$  son los valores propios de  $\rho$ . En este caso  $\rho_d$  se puede descomponer en la forma

$$\rho_d = \lambda I + \Theta = 2^n \lambda \frac{I}{2^n} + \text{Tr}(\Theta) \hat{\rho}_d = p \frac{I}{2^n} + (1-p) \hat{\rho}_d. \quad (3)$$

Si se realiza el cambio de base inverso  $\rho$  tiene la forma  $\rho = p \frac{I}{2^n} + (1-p) \hat{\rho}$ .

**Definición.** Se define el (doble) índice de isotropía para un estado cuántico  $\rho$ , considerando como estado de referencia el estado  $\rho_0$  al par

$$\text{Iso}(\rho) = (A, p), \text{ siendo } \begin{cases} \text{Alineación isotropa: } A = F(\hat{\rho}, \rho_0) - F(\hat{\rho}, \rho_{io}) \\ \text{Ancho isotropo: } p = 2^n \lambda \end{cases} \quad (4)$$

siendo  $\rho_{io} = (I - \rho_0)/(2^n - 1)$  el estado mezcla isotropo ortogonal al estado de  $\rho_0$  y  $F()$  la fidelidad. Un estado  $\rho$  representa un error isotropo cuando  $A = 1$  o  $A = -1$  ( $\forall p$ ), o  $p = 1$ .

### Ejemplo

Como ejemplo se analiza la distorsión de información en un canal cuántico utilizando el código corrector de 5 qubits descrito en [6-7]. Los errores son aplicados a la palabra de código y son del tipo *Depolarizing Channel*, *BitFlip*, *PhaseFlip* y *BitPhaseFlip* en cada qubit del canal, y del tipo *Depolarizing Channel* en el estado completo (5 qubits) [8]. Las figuras a continuación ilustran la variación del índice de isotropía en función de la probabilidad (pn) de aplicación de cada tipo de error.

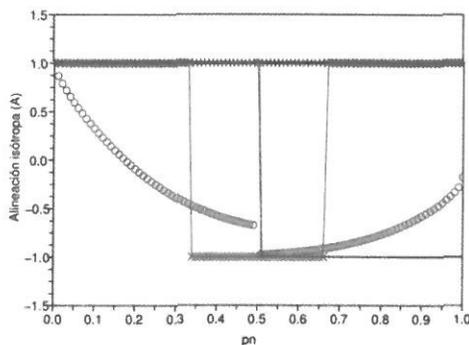


Figura 1. Variación de la alineación isotropa, en el qubit lógico corregido y decodificado, en función de la probabilidad de error. *Depolarizing Channel* en el estado completo (negra sólida, siempre igual a 1), *Depolarizing Channel* por qubit (azul +, siempre igual a 1), *BitFlip* (roja sólida), *PhaseFlip* (verde x) y *BitPhaseFlip* (marrón o).

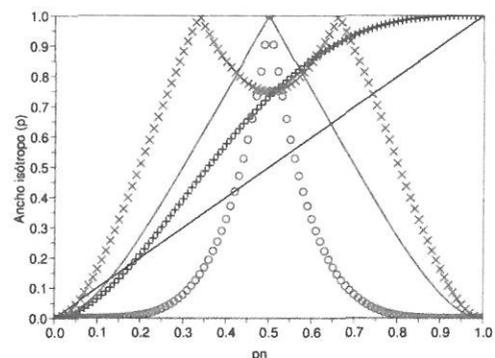


Figura 2. Variación del ancho isotropo, en el qubit lógico corregido y decodificado, en función de la probabilidad de error. *Depolarizing Channel* en el estado completo (negra sólida), *Depolarizing Channel* por qubit (azul +), *BitFlip* (roja sólida), *PhaseFlip* (verde x) y *BitPhaseFlip* (marrón o).

### Referencias

- [1] A. R. Calderbank, P. W. Shor, *Phys. Rev. A* **54** (1996) 1098.
- [2] A.M. Steane, *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 793.
- [3] D. Gottesman, *Phys. Rev. A* **57** (1998) 127.
- [4] P. Shor, *Phys. Rev. A* **52** (1995) 2493.
- [5] J. García-López y F. G. Mazarío, *Modelos continuos de error en computación cuántica*, Primer Congreso Internacional de Matemáticas en Ingeniería y Arquitectura, Madrid, 2007.
- [6] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin, W. K. Wootters, *Phys. Rev. A* **54** (1996) 3824.
- [7] D. P. DiVincenzo, P. W. Shor, *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 3260.
- [8] M. A. Nielsen y I. L. Chuang, *Quantum computation and quantum information*, 8ª ed., Cambridge University Press, 2005.