ANTECEDENTES, LAGUNAS Y NUEVOS RESULTADOS EN LOS CONJUNTOS BORROSOS DE TIPO 2

Pablo Hernández[1], **Susana Cubillo**[2], **Carmen Torres-Blanc**[2]

[1] *Departamento de Matemática y Física, Univ. Nacional Experimental del Táchira, San Cristóbal, Táchira, Venezuela,*
{phernandezv}@unet.edu.ve

[2] *Departamento de Matemática Aplicada, Univ. Politécnica de Madrid, 28660 Boadilla del Monte, Madrid, España,*
{scubillo,ctorres}@fi.upm.es

Resumen

A partir del "Principio de Extensión" de Zadeh se han generalizado a los conjuntos borrosos de tipo 2 (T2FSs), definiciones, operaciones, propiedades y resultados obtenidos en los conjuntos borrosos (FSs). Sin embargo, como sucede en cualquier área de investigación, quedan muchas lagunas y problemas abiertos que suponen un reto para cualquiera que quiera hacer un estudio profundo en este campo.

A este reto nos hemos enfrentado los autores del presente artículo, que pretende ser una exposición de algunos de los avances realizados en este sentido de "rellenar huecos" existentes en la teoría de conjuntos de tipo 2. En particular, se abordarán las negaciones que permiten hablar de la propiedad de autocontradicción, las t-normas y t-conormas.

Palabras Clave: Conjuntos borrosos de tipo 2, Funciones normales y convexas, Negación, Autocontradicción, T-norma, T-conorma.

1 INTRODUCCIÓN

Los conjuntos borrosos de tipo 2 (T2FSs) fueron introducidos por L.A. Zadeh en 1975 [35], como una extensión de los conjuntos borrosos de tipo 1 (FSs). Mientras que en estos últimos el grado de pertenencia de un elemento al conjunto viene determinado por un valor en el intervalo $[0,1]$, en el caso de los T2FSs el grado de pertenencia de un elemento es un conjunto borroso en [0,1], es decir, un T2FS queda determinado por una función de pertenencia $\mu : X \rightarrow \mathbf{M}$, donde $\mathbf{M} = [0,1]^{[0,1]} = Map([0,1],[0,1])$, es el conjunto de las funciones de [0,1] en [0,1] (ver [19, 21, 22]).
El hecho de que la función de pertenencia de los conjuntos de tipo 2 sea un nuevo conjunto borroso, los hace más adecuados para modelizar la incertidumbre [17, 19, 18]. En este sentido, existen diversos estudios en los que se muestran las ventajas de este tipo de conjuntos ([2], [31]), en particular, por ejemplo, los trabajos realizados por Niewiadomski [25, 23, 24] en el campo de los resúmenes lingüístico. No obstante, el subconjunto de los T2FSs más utilizado es el de aquéllos donde la pertenencia de un elemento al conjunto es un intervalo $[a,b]$ (ver Definición 4), en lugar de un conjunto borroso, ya que la dificultad operacional y computacional es menor que en los T2FSs generales (ver [18]).

Desde que los T2FSs fueron introducidos, se han extendido a dichos conjuntos (ver [19, 21, 22, 32]), a partir del "Principio de Extensión" de Zadeh, muchas de las definiciones, operaciones, propiedades y resultados obtenidos en los FSs. Sin embargo, los autores han detectado muchas lagunas en estas extensiones. Por ejemplo, en el caso de las operaciones empleadas para modelar el complementario de un conjunto, la extensión se ha realizado exclusivamente a partir de la negación estándar en [0,1], $(n = 1 - id)$. En [15] los autores demostraron que la operación resultante, no cumple todos los axiomas que debe verificar cualquier operación para ser considerada negación en un conjunto ordenado como es $\mathbf{M}$. Es de notar que en [8] y [9], se han considerado otras operaciones de negación, sin embargo, dichos trabajos no realizan un estudio riguroso de sus propiedades.

Por otra parte, hasta el momento existen muchas propiedades que no han sido extendidas a los T2FSs, por ejemplo la autocontradicción, la contradicción entre conjuntos, la incompatibilidad, etc. En este sentido, en la Sección 3, se presentarán la definición y propiedades de autocontradicción en el marco de los T2FSs. Para este estudio ha sido necesario previamente establecer de forma correcta las negaciones en estos conjuntos.

Respecto a las operaciones denominadas normas triangulares (t-normas) y conormas triangulares (t-conormas), empleadas habitualmente para modelar, respectivamente, la intersección (conjunción) y la unión (disjunción) entre conjuntos, Walker et al. han realizado extensiones a **L** (ver [32, 33]), pero dejando abierto el problema de encontrar nuevas t-normas y t-conormas sobre este conjunto.

Así pues, el principal objetivo de este trabajo es recopilar algunos de los resultados obtenidos por los autores en diferentes publicaciones dedicadas precisamente a exponer estas lagunas encontradas, y a completar con un estudio más exhaustivo lo que hasta el momento había sido realizado por otros autores.

El artículo se organiza como sigue: en la Sección 2 se recuerdan algunas definiciones y propiedades de los FSs y T2FSs.

En la Sección 3, Subsección 3.1 se presentan algunos conceptos y resultados realizados por otros autores en relación con las negaciones en los conjuntos borrosos, y se exponen los principales resultados de [15] sobre las negaciones sobre los T2FSs. La Subsección 3.2 se dedica a la autocontradicción y N-autocontradicción en los conjuntos borrosos, resumiendo los resultados obtenidos en [14]. En la Sección 4 el principal objeto de estudio lo constituyen las t-normas y t-conormas. Se recuerdan las principales ideas sobre las mismas, y se abordan los resultados obtenidos en [13, 16]. La última sección se dedica a exponer algunas conclusiones.

2 PRELIMINARES

En todo el trabajo se denotará por X un conjunto no vacío que representará el universo de discurso. Además, $\leq$ denotará la relación usual de orden en el retículo de los números reales.

Definición 1. ([34]) Un conjunto borroso de tipo 1 (FS), A, queda caracterizado por una *función de pertenencia* μ_A,

$$\mu_A : X \to [0,1],$$

donde $\mu_A(x)$ es el grado de pertenencia de un elemento $x \in X$ al conjunto A.

Definición 2. ([21], [22]) Un conjunto borroso de tipo 2 (T2FS), A, queda caracterizado por una *función de pertenencia*:

$$\mu_A : X \to \mathbf{M} = [0,1]^{[0,1]} = Map\,([0,1],[0,1]).$$

Esto es, $\mu_A(x)$ es un conjunto borroso en el intervalo $[0,1]$, y es el grado de pertenencia de un elemento $x \in X$ al conjunto A. Por tanto,

$$\mu_A(x) = f_x, \quad \text{donde } f_x : [0,1] \to [0,1].$$

Se denota por $F_2(X)$, $F_2(X) = Map(X,\mathbf{M})$, al conjunto de todos los conjuntos borrosos de tipo 2 sobre X.

Definición 3. ([32]) Sea $a \in [0,1]$. La función característica de a es $\bar{a} : [0,1] \to [0,1]$, donde

$$\bar{a}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \\ 0 & \text{si } x \neq a \end{cases}$$

Sea $\mathbf{J} \subset \mathbf{M}$ el conjunto de todas las funciones características de los elementos de [0,1].

Definición 4. ([32]) Sea $[a,b] \subseteq [0,1]$. La función característica de $[a,b]$ es $\overline{[a,b]} : [0,1] \to [0,1]$, donde

$$\overline{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{si } x \notin [a,b] \end{cases}$$

Sea $\mathbf{K} \subset \mathbf{M}$ el conjunto de todas las funciones características de los subintervalos cerrados de $[0,1]$. Un conjunto borroso intervalo de tipo 2 (IT2FS) es un T2FS, con todos los grados de pertenencia en $\mathbf{K}$.

En [32], se justifica que las operaciones sobre $Map(X,\mathbf{M})$ se pueden definir de forma natural a partir de las operaciones sobre $\mathbf{M}$, verificando las mismas propiedades. Por tanto, en este artículo trabajaremos en $\mathbf{M}$, ya que todos los resultados se pueden extender directa y fácilmente a $Map(X,\mathbf{M})$.

Definición 5. ([12], [32], [9]) En $\mathbf{M}$ se definen las operaciones $\sqcup$ (unión), $\sqcap$ (intersección), $\neg$ y los elementos $\bar{0}$ y $\bar{1}$ de la siguiente forma:

$$(f \sqcup g)(x) = sup\{f(y) \wedge g(z) : y \vee z = x\},$$

$$(f \sqcap g)(x) = sup\{f(y) \wedge g(z) : y \wedge z = x\},$$

$$\neg f(x) = sup\{f(y) : 1 - y = x\} = f(1-x),$$

$$\bar{0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}, \quad \bar{1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \neq 1. \end{cases},$$

donde $\vee$ y $\wedge$ son las operaciones máximo y mínimo, respectivamente, en el retículo $[0,1]$.

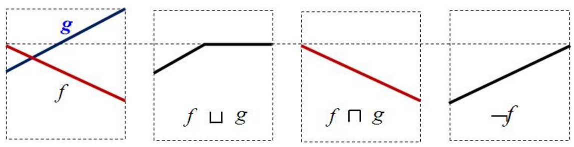

Figura 1: Ejemplo de las operaciones $\sqcup$, $\sqcap$, y $\neg$.

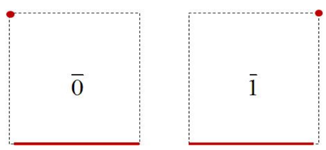

Figura 2: Funciones $\bar{0}$ y $\bar{1}$.

El álgebra $\mathbb{M} = (\mathbf{M}, \sqcup, \sqcap, \neg, \bar{0}, \bar{1})$ no tiene estructura de retículo, ya que no se cumple la ley de absorción [12], [32]. Por otra parte, las operaciones $\sqcup$ y $\sqcap$ cumplen las propiedades requeridas para definir, cada una de ellas, un orden parcial sobre $\mathbf{M}$.

Definición 6. ([22], [32]) En $\mathbf{M}$ se definen los dos órdenes parciales siguientes:

$$f \sqsubseteq g \quad \text{si } f \sqcap g = f; \quad f \preceq g \quad \text{si } f \sqcup g = g.$$

En general, estos dos órdenes no coinciden [22, 32]. $f \sqcap \bar{1} = f$, por lo que $f \sqsubseteq \bar{1}$, $\forall f \in \mathbf{M}$, es decir, $\bar{1}$ es el mayor elemento del orden parcial $\sqsubseteq$. Por otra parte, $\bar{0} \sqcup f = f$, por tanto $\bar{0} \preceq f$, $\forall f \in \mathbf{M}$ ([32]), y $\bar{0}$ es el menor elemento del orden parcial $\preceq$. Además, la función constante $g = 0$ ($g(x) = 0$, $\forall x \in [0,1]$) es el menor y mayor elemento de $\sqsubseteq$ y $\preceq$, respectivamente.

Con el fin de facilitar las operaciones sobre **M**, en trabajos anteriores se presentaron la Definición y Teorema siguientes:

Definición 7. ([12], [32], [9]) Si $f \in \mathbf{M}$, se definen $f^L, f^R \in \mathbf{M}$ como

$$f^L(x) = sup\{f(y) : y \leq x\}, \quad f^R(x) = sup\{f(y) : y \geq x\}.$$

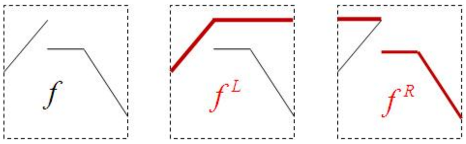

Figura 3: Ejemplos de f^L y f^R.

f^L y f^R son monótonas creciente y decreciente, respectivamente. Obsérvese que estas funciones, en cierto sentido, podrían representar los modificadores lingüísticos "menos que" y "más que", respectivamente.

A continuación se considerará **L**, subconjunto de las funciones normales y convexas de **M**; en este conjunto se va a tener una estructura de retículo acotado y completo, lo que va a permitir construir negaciones, t-normas y t-conormas de forma adecuada. Recordemos que:

Definición 8. Una función $f \in \mathbf{M}$ es normal si $sup\{f(x) : x \in [0,1]\} = 1$.

Llamamos **N** el conjunto de todas las funciones normales en **M**.

Definición 9. Una función $f \in \mathbf{M}$ es convexa, si para cualquier $x \leq y \leq z$, se cumple que $f(y) \geq f(x) \wedge f(z)$.

El conjunto de todas las funciones normales y convexas de **M** será denotado por **L**. El álgebra $\mathbb{L} = (\mathbf{L}, \sqcup, \sqcap, \neg, \bar{0}, \bar{1})$ es un subálgebra de $\mathbb{M}$. En **L**, los órdenes parciales $\sqsubseteq$ and $\preceq$ coinciden, y $\mathbb{L}$ es un retículo acotado ($\bar{0}$ y $\bar{1}$ son el mínimo y el máximo, respectivamente) y completo (ver [11], [12], [22], [32]). Además, es evidente que $\mathbf{J} \subset \mathbf{K} \subset \mathbf{L} \subset \mathbf{M}$.

La siguiente caracterización nos ayudará a establecer nuevos resultados:

Teorema 1. ([11], [12]) Sean $f, g \in \mathbf{L}$. $f \sqsubseteq g$ si y sólo si

$$g^L \leq f^L \text{ y } f^R \leq g^R.$$

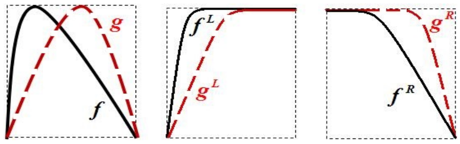

Figura 4: Ejemplo donde $f \sqsubseteq g$.

3 NEGACIONES Y AUTOCONTRADICCIÓN EN LOS T2FSs

3.1 NEGACIONES SOBRE LOS T2FSs

Recordemos la definición de negación en [0,1].

Definición 10. Una función decreciente $n : [0,1] \to [0,1]$, tal que $n(0) = 1$ y $n(1) = 0$, se le denomina negación. Si, además, se cumple que $n(n(x)) = x$ para todo $x \in [0,1]$, entonces se dice que es una negación fuerte.

En esta Subsección se presenta el estudio realizado en [15] sobre las negaciones en el marco de los T2FSs, resumiendo los principales resultados y caracterizaciones obtenidos en los T2FSs con grados de pertenencia en **L**.

La Definición 10 nos sugiere una extensión de la definición de negación a cualquier conjunto parcialmente ordenado (poset) con elementos mínimo y máximo (acotado).

Definición 11. Sea un conjunto A, y un orden parcial en A, $\leq_A$, tal que $(A, \leq_A)$ tiene elemento mínimo $Min_{\leq_A}$ y elemento máximo $Max_{\leq_A}$. Una negación en $(A, \leq_A)$ es una función $N : A \to A$, tal que N es decreciente, $N(Min_{\leq_A}) = Max_{\leq_A}$ y $N(Max_{\leq_A}) = Min_{\leq_A}$. Si además satisface que $N(N(x)) = x$, para todo $x \in A$, se dice que es negación fuerte.

Teniendo en cuenta las propiedades que satisface la operación $\neg$ en **M**, es sencillo constatar que $\neg$ no cumple todos los axiomas de negación fuerte en **M**, pero sí en el retículo $(\mathbf{L}, \sqsubseteq)$ (ver [32]).

Definición 12. Sean $f \in \mathbf{M}$, y n una negación suprayectiva en [0,1]. Se define la operación N_n asociada a n como

$$(N_n(f))(x) = sup\{f(y) : n(y) = x\}.$$

Nótese que $\neg = N_n$, cuando n es la negación estándar $n = 1 - id$.

Obsérvese que para que N_n esté bien definida es necesario que n sea suprayectiva (y por tanto, continua), ya que de otro modo, existe algún x que no pertenece a la imagen de n, y para dicho x, no estaría definido $(N_n(f))(x)$.

Entre los resultados más importantes obtenidos por los autores, se tienen los siguientes.

Teorema 2. Sea la operación N_n asociada a n, una negación suprayectiva en $[0,1]$. Entonces, para todo $f \in \mathbf{M}$

1. $(N_n(f))^L = N_n(f^R)$, $(N_n(f))^R = N_n(f^L)$.

2. $(N_n(f))(x) = f(n(x)) \Leftrightarrow n$ es fuerte.

3. N_n es una negación sobre $\mathbf{L}$.

4. N_n es una negación fuerte (involutiva) sobre $\mathbf{L}$ si y sólo si n es fuerte.

3.2 AUTOCONTRADICCIÓN EN LOS T2FSs

Trillas et al. en [29, 30], iniciaron el estudio de la autocontradicción y contradicción de conjuntos en el contexto de la lógica borrosa, no sólo como un tema de interés teórico, sino también práctico, en el análisis de las posibles consecuencias contradictorias en los procesos de inferencia borrosa. En artículos posteriores (ver [1, 4]): se abordó con más profundidad la autocontradicción y contradicción en los FSs; se propusieron formas de medir el grado en que estas propiedades se cumplen; se desarrolló una axiomática para las medidas de autocontradicción, contradicción entre conjuntos, autocontradicción respecto a una negación fuerte N (N-autocontradicción) y contradicción entre conjuntos respecto a una negación fuerte N (N-contradicción).

Así mismo, en [3] se aborda la contradicción en el marco de los conjuntos borrosos intuicionistas de Atanassov (IFSs) que son otra extensión de los FSs. A continuación se recogen los resultados obtenidos por los autores en [14], sobre la N-autocontradicción y autocontradicción, en los conjuntos de tipo 2, con grados de pertenencia en $\mathbf{L}$.

Definición 13. Sea $f \in \mathbf{L}$ y sea $N_n : \mathbf{L} \to \mathbf{L}$ una negación fuerte (ver Teorema 2). Decimos que f es N_n-*autocontradictorio* si y sólo si $f \sqsubseteq N_n(f)$, para todo $x \in [0,1]$. Y f es *autocontradictorio*, si es N_n-autocontradictorio respecto a alguna negación N_n.

El siguiente resultado presenta algunas caracterizaciones de dichas propiedades sobre $\mathbf{L}$.

Teorema 3. Sea $f \in \mathbf{L}$, y sea $N_n : \mathbf{L} \to \mathbf{L}$ una negación fuerte. Entonces

1. f es N_n-autocontradictorio si y sólo si $f^R(x) \leq f^L(n(x)), \forall x \in [0,1]$. Equivalentemente, si y sólo si $f^R(n(x)) \leq f^L(x), \forall x \in [0,1]$.

2. Sea $\alpha = \inf\{w\,;\, \lim_{x\to w^+} f(x) = 1, \text{ o } \lim_{x\to w^-} f(x) = 1, \text{ o } f(x) = 1\}$, y p el punto fijo de la negación fuerte n, es decir, $n(p) = p$. Entonces f es N_n-autocontradictorio si y sólo si $p \geq \alpha$, y $\forall x \leq \alpha$, es $f(n(x)) \leq f(x)$.

3. Si $f(0) < f(1)$ entonces f no es autocontradictorio.

4. f es autocontradictorio si y sólo si $\exists\ \varepsilon > 0$ y una negación en [0,1], n, donde $n|_{[0,\varepsilon]} : [0,\varepsilon] \to [n(\varepsilon),1]$, tal que $f(n(x)) \leq f(x), \forall x \in [0,\varepsilon]$.

4 T-NORMAS Y T-CONORMAS SOBRE LOS T2FSs

Las normas triangulares (t-normas) fueron introducidas por Menger [20]; más tarde Schweizer y Sklar en [28], [27] dieron la axiomática, usada actualmente, para definir las t-normas en $[0,1]$.

Debido a la estrecha conexión entre la teoría de los conjuntos borrosos y la teoría del orden (ver, por ejemplo, [10]), distintos autores han estudiado las t-normas sobre conjuntos parcialmente ordenados acotados (posets acotados), como por ejemplo en [6] y en [5]. En [26] se consideró la extensión de las t-normas sobre retículos acotados exigiendo unos axiomas (en adelante se llamarán “axiomas básicos”, y la operación que satisface dichos axiomas se denominará simplemente t-norma), que coinciden con los dados en [6] y [5]. Recordemos que una t-norma en $[0,1]$ ([17]) es una operación binaria $T : [0,1]^2 \to [0,1]$, conmutativa, asociativa, creciente en cada argumento, y con elemento neutro 1. Análogamente, una t-conorma en $[0,1]$ es una operación binaria $S : [0,1]^2 \to [0,1]$, conmutativa, asociativa, creciente en cada argumento, y con elemento neutro 0. Definiciones similares se aplican para los retículos acotados.

En [7] se extendieron las definiciones de t-norma y t-conorma a los conjuntos borrosos intervalo valorados (IVFSs), agregando otras restricciones o propiedades a los axiomas básicos, estableciendo los “axiomas restrictivos”.

Posteriormente, en [32], [33] los autores extendieron estos axiomas restrictivos a los T2FSs, y presentaron dos familias de operaciones binarias sobre $\mathbf{M}$, obteniendo las condiciones bajo las cuales se cumplían los axiomas restrictivos sobre $\mathbf{L}$.

Definición 14. ([33]) La operación binaria $T : \mathbf{L}^2 \to \mathbf{L}$ es una t$_r$-norma (t-norma según los axiomas restrictivos) sobre $\mathbf{L}$ si: 1) T es conmutativa, 2) T es asociativa, 3) $T(f, \bar{1}) = f$ para cualquier $f \in \mathbf{L}$ (elemento neutro), 4) Si $f, g, h \in \mathbf{L}$ son tales que $g \sqsubseteq h$, entonces $T(f,g) \sqsubseteq T(f,h)$ (creciente en cada argumento), 5) $T(\overline{[0,1]}, \overline{[a,b]}) = \overline{[0,b]}$, 6) T es cerrada en $\mathbf{J}$, 7) T es cerrada en $\mathbf{K}$.

De forma similar, una operación binaria $S : \mathbf{L}^2 \to \mathbf{L}$ es una t$_r$-conorma si satisface: los axiomas 1, 2, 4, 6 y 7, anteriores; el axioma 3': $S(f, \bar{0}) = f$; y el axioma 5': $S(\overline{[0,1]}, \overline{[a,b]}) = \overline{[a,1]}$. Los axiomas 1, 2, 3, 3' y 4, son llamados “axiomas básicos”, y la operación que satisface dichos axiomas será denominada simplemente t-norma o t-conorma, según sea el caso.

Los mismos autores defineron las operaciones $\blacktriangle$ y $\blacktriangledown$. Para todo $f, g \in \mathbf{M}$,

$$(f \blacktriangle g)(x) = sup\{f(y) \wedge g(z) : y \vartriangle z = x\},$$

$$(f \blacktriangledown g)(x) = sup\{f(y) \wedge g(z) : y \triangledown z = x\},$$

donde $\triangle$ y $\triangledown$ son, respectivamente, t-norma y t-conorma sobre [0,1]. Además, se demostró que si $\triangle$ ($\triangledown$), es continua, entonces $\bar{\blacktriangle}$ ($\bar{\blacktriangledown}$) es t_r-norma (t_r-conorma) sobre $\mathbf{L}$. Obviamente, el problema de encontrar otras t_r-normas y t_r-conormas quedaba totalmente abierto.

El objetivo de esta Sección es recoger los resultados presentados por los autores en [13, 16] respecto al estudio de operaciones binarias sobre $\mathbf{M}$, unas más generales y otras diferentes a las presentadas en [32], [33].

Definición 15. Sea $\star$ una operación binaria sobre $[0,1]$, $\triangle$ una t-norma y $\triangledown$ una t-conorma sobre $[0,1]$. Definimos las operaciones binarias $\blacktriangle$ y $\blacktriangledown$, para todo $f,g \in \mathbf{M}$, como:

$$(f\blacktriangle g)(x) = sup\{f(y)\star g(z) : y \triangle z = x\},$$

$$(f\blacktriangledown g)(x) = sup\{f(y)\star g(z) : y \triangledown z = x\}.$$

Obsérvese que $\blacktriangle = \bar{\blacktriangle}$ y $\blacktriangledown = \bar{\blacktriangledown}$, justo cuando $\star = \wedge$.
Cabe destacar que, anteriormente, en [8] estudiaron varias propiedades de $\blacktriangle$ y $\blacktriangledown$ en el caso particular de que $\star$ y $\triangle$ sean la t-norma de Lukasiewicz, y $\triangledown$ la t-conorma de Lukasiewicz, pero no determinaron si son t-norma y t-conorma, respectivamente, sobre $\mathbf{L}$.

Definición 16. Para todo $f,g \in \mathbf{M}$ se definen las operaciones binarias

$$f \circledcirc g = f^R \wedge g^R \, , \quad f \circledast g = f^L \wedge g^L \, .$$

$$f \bar{\circledcirc} g = \begin{cases} f, \text{ si } g = \bar{1} \\ g, \text{ si } f = \bar{1} \\ f \circledcirc g, \text{ otro caso} \end{cases} , \; f \bar{\circledast} g = \begin{cases} f, \text{ si } g = \bar{0} \\ g, \text{ si } f = \bar{0} \\ f \circledast g, \text{ otro caso.} \end{cases}$$

Algunos resultados respecto a las operaciones dadas en las definiciones 15 y 16 son:

Teorema 4.
1. Si $\star$ es una t-norma continua en [0,1], y $\triangle$ ($\triangledown$) es una t-norma (t-conorma) continua en [0,1], entonces $\blacktriangle$ ($\blacktriangledown$) es una t_r-norma (t_r-conorma) sobre $\mathbf{L}$.
2. (Leyes de De Morgan) $N_n(f\blacktriangle g) = N_n(f)\blacktriangledown N_n(g)$, $N_n(f\blacktriangledown g) = N_n(f)\blacktriangle N_n(g)$, $\forall f,g \in \mathbf{M}$, siempre que $\triangle$ y $\triangledown$ sean n-duales, respecto a la negación fuerte en [0,1], n.
3. Si $\star$ es una t-conorma en [0,1], entonces $\blacktriangle$ ($\blacktriangledown$) no es una t-norma (t-conorma) sobre $\mathbf{L}$.
4. La operación $\circledcirc$ ($\circledast$) satisface los axiomas restrictivos de t-norma (t-conorma) sobre $\mathbf{L}$, excepto el elemento neutro y la clausura en $\mathbf{J}$.
5. La operación $\bar{\circledcirc}$ ($\bar{\circledast}$) satisface los axiomas restrictivos de t-norma (t-conorma) sobre $\mathbf{L}$, excepto la clausura en $\mathbf{J}$.
6. $\circledcirc$ y $\circledast$ satisfacen las leyes de De Morgan sobre $\mathbf{M}$, con la operación N_n asociada a cualquier negación fuerte en [0,1], n.

5 CONCLUSIONES

En este trabajo los autores han expuesto, por una parte, las principales lagunas que encontraron respecto a las operaciones algebraicas, al adentrarse en el estudio sobre los conjuntos tipo 2. Por otra, han expuesto cómo al intentar clarificar estas lagunas, en sus últimos trabajos han obtenido algunos resultados que han contribuido en el estudio de estos conjuntos.

La Sección 3 se ha dedicado a las negaciones en cualquier conjunto parcialmente ordenado y acotado con el propósito de encontrar negaciones en $\mathbf{L}$. En particular se ha definido la función N_n a partir de cualquier negación suprayectiva en $[0,1]$, dando condiciones para ser negación fuerte .

También en la Sección 3 se han extendido al marco del conjunto $\mathbf{L}$, los conceptos de N-autocontradicción y autocontradicción establecidos previamente en los FSs, determinando algunos criterios para verificar dichas propiedades en un elemento en $\mathbf{L}$.

En la Sección 4 se han definido nuevas operaciones en $\mathbf{M}$, estudiando bajo qué condiciones satisfacen cada uno de los axiomas introducidos.

Agradecimientos

Este artículo esta parcialmente financiado por CICYT (España) proyecto TIN2011-29827-C02-01, UPM-CAM, FONACIT (Venezuela) y UNET (Venezuela).

Referencias

[1] E. Castiñeira, C. Torres-Blanc, S. Cubillo: Un modelo para medir la N-contradicción de conjuntos borrosos. En: *Actas ESTYLF 2008*, Mieres (España), pp. 113–119, 2008.

[2] S. Coupland, M. Gongora, R. John, K. Wills: A comparative study of fuzzy logic controllers for autonomous robots. En *Proc. IPMU*, Paris (France), pp. 1332–1339, Jul. 2006.

[3] S. Cubillo, E. Castiñeira: Contradiction in intuitionistic fuzzy sets. En: *Proceedings IPMU*, Perugia (Italia), pp. 2180–2186, 2004.

[4] S. Cubillo, E. Castiñeira: Measuring contradiction in fuzzy logic. *International Journal of General Systems*, 34(1), pp. 39–59, 2005.

[5] B. De Baets, R. Mesiar: Triangular norms on product lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 104, pp. 61–75, 1999.

[6] G. De Cooman, E. Kerre: Order norms on bounded partially ordered sets. *Journal Fuzzy Mathematics*, 2, pp. 281–310, 1994.

[7] M. Gehrke, C. Walker, E. Walker: Some comments on interval-valued fuzzy sets. *Internat. J. Intell. Systems*, 11, pp. 751–759, 1996.

[8] Z. Gera, J. Dombi: Exact calculations of extended logical operations on fuzzy truth values. *Fuzzy Sets and Systems*, 159(11), pp. 1309–1326, 2008.

[9] Z. Gera, J. Dombi: Type-2 implications on non-interactive fuzzy truth values. *Fuzzy Sets and Systems*, 159(22), pp. 3014–3032, 2008.

[10] J. Goguen: L-Fuzzy Sets. *J. Math. Anal. Appli.*, 18(1), pp. 623–668, 1967.

[11] J. Harding, C. Walker, E. Walker: Convex normal functions revisited. *Fuzzy Sets and Systems*, 161, pp. 1343–1349, 2010.

[12] J. Harding, C. Walker, E. Walker: Lattices of convex normal functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 159, pp. 1061–1071, 2008.

[13] P. Hernández, S. Cubillo, C. Torres-Blanc: About t-norms on type-2 fuzzy sets. En: *Proc. EUSFLAT2013*, Milán (Italia), pp. 171–178, 2013.

[14] P. Hernández, S. Cubillo, C. Torres-Blanc: Autocontradicción en el conjunto de las funciones de $[0,1]^{[0,1]}$ normales y convexas. En: *Proc. ESTYLF2012*, Valladolid (España), pp. 48–53, 2012.

[15] P. Hernández, S. Cubillo, C. Torres-Blanc: Negations on type-2 fuzzy sets, aceptado para su publicación en *Fuzzy Sets and Systems*.

[16] P. Hernández, S. Cubillo, C. Torres-Blanc: Nuevas operaciones binarias sobre los conjuntos borrosos de tipo 2. En: *Proc. CEDI2013*, Madrid (España), pp. 1250–1259, 2012.

[17] P. Klement, R. Mesiar, E. Pap: Triangular Norms. *Trends in Logic. Studia Logica Library*, 8, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 2000.

[18] O. Linda, M. Manic: Monotone Centroid Flow Algorithm for Type Reduction of General Type-2 Fuzzy Sets. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 20(5), pp. 805–819, 2012.

[19] J. Mendel, R. Jhon: Type-2 fuzzy sets made Simple. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 10(2), pp. 117–127, 2002.

[20] K. Menger: Statical metrics. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 37, pp. 535-537, 1942. 535–537.

[21] M. Mizumoto, K. Tanaka: Fuzzy sets of type-2 under algebraic product and algebraic sum. *Fuzzy Sets and Systems*, 5, pp. 277–290, 1981.

[22] M. Mizumoto, K. Tanaka: Some properties of fuzzy sets of type-2. *Inf. Control*, 31, pp. 312–340, 1976.

[23] A. Niewiadomski: A type-2 fuzzy approach to linguistic summarization of data. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 16(1), pp. 198–213, 2008.

[24] A. Niewiadomski: On finity, countability, cardinalities, and cylindric extensions of type-2 fuzzy sets in linguistic summarization of databases. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 18(3), pp. 532–545, 2010.

[25] A. Niewiadomski: On two possible roles of type-2 fuzzy sets in linguistic summaries. *Lect. Notes Artif. Intell.*, 3528, pp. 341–347, 2005.

[26] S. Ray: Representation of a Boolean algebra by its triangular norms. *Matheware and Soft Computing*, 4, pp. 63–68, 1997.

[27] B. Schweizer, A. Sklar: Associative functions and statistical triangle inequalities. *Publ. Math.*, 8, pp. 169–186, 1961.

[28] B. Schweizer, A. Sklar: Statistical metric spaces. *Pacific J. Math.*, 10, pp. 313–334, 1960.

[29] E. Trillas, C. Alsina, J. Jacas: On contradiction in fuzzy logic. *Soft Computing*, 3(4), pp. 197–199, 1999.

[30] E. Trillas, S. Cubillo: On non-contradictory input/output couples in Zadeh's CRI. En: *Proceedings NAFIPS*, New York (USA), pp. 28–32, 1999.

[31] C. Wagner, H. Hagras: Toward general type-2 fuzzy logic systems based on zSlices. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 18(4), pp. 637–660, Aug. 2010.

[32] C. Walker, E. Walker: The algebra of fuzzy truth values. *Fuzzy Sets and Systems*, 149, pp. 309–347, 2005.

[33] C. Walker, E. Walker: T-norms for type-2 fuzzy sets. En: *Proc. IEEE Int. Conf. Fuzzy Syst.*, Vancouver (Canadá), pp. 1235–1239, 2006.

[34] L. Zadeh: Fuzzy sets. *Inf. Control*, 20, pp. 301–312, 1965.

[35] L. Zadeh: The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. *Inf. Sci.*, 8, pp. 199–249, 1975.