

# Transmisión Digital

## *Capacidad del canal gaussiano*

José Ignacio Ronda Prieto GTI, SSR, ETSIT, UPM

[jir@gti.ssr.upm.es](mailto:jir@gti.ssr.upm.es)



# Introducción

● title1

Capacidad de canal

● Introducción

- T. de la capacidad del canal gaussiano
- Preparativos
- Demostración del resultado positivo
- El universo de la alta dimensión
- Visualización en el plano
- Esferas y capacidad del canal
- Diagrama para  $L$  grande
- Cálculo de  $P_E$  media
- Demostración del resultado negativo
- Bibliografía
- Cálculos adicionales sobre distribuciones

Presentamos una demostración directa e intuitiva del teorema de Shannon de capacidad del canal gaussiano limitado en banda, debida al propio Shannon.



# T. de la capacidad del canal gaussiano

● title1

Capacidad de canal

● Introducción

● T. de la capacidad del canal gaussiano

● Preparativos

● Demostración del resultado positivo

● El universo de la alta dimensión

● Visualización en el plano

● Esferas y capacidad del canal

● Diagrama para  $L$  grande

● Cálculo de  $P_E$  media

● Demostración del resultado negativo

● Bibliografía

● Cálculos adicionales sobre distribuciones

- Definimos la *capacidad* de un canal como

$$C = W \log_2 \left( 1 + \frac{s}{N_0 W} \right)$$

donde  $s$  es la potencia de señal y  $N_0$  la dep de ruido,  $W$  el ancho de banda.

- Entonces, si  $R < C$ , para todo  $\epsilon$  hay una modulación con  $P_E \leq \epsilon$  (*resultado positivo*).
- Por el contrario, si  $R > C$  esto no es posible (*resultado negativo*).



# Preparativos

Tomamos la base ortonormal libre de IES

$$\phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T_0}} \operatorname{sinc} \left( \frac{t - kT_0}{T_0} \right),$$

$$k = 0, \dots, L - 1, T_0 = \frac{1}{2W}, T = LT_0.$$

● title1

Capacidad de canal

- Introducción
- T. de la capacidad del canal gaussiano
- Preparativos
- Demostración del resultado positivo
- El universo de la alta dimensión
- Visualización en el plano
- Esferas y capacidad del canal
- Diagrama para  $L$  grande
- Cálculo de  $P_E$  media
- Demostración del resultado negativo
- Bibliografía
- Cálculos adicionales sobre distribuciones



# Preparativos

Tomamos la base ortonormal libre de IES

$$\phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T_0}} \operatorname{sinc} \left( \frac{t - kT_0}{T_0} \right),$$
$$k = 0, \dots, L - 1, T_0 = \frac{1}{2W}, T = LT_0.$$

Definiendo  $e_0 = sT_0$  (*energía por dimensión*),  $R_0 = RT_0$  (*bits por dimensión*),

$$\frac{R}{W} = \frac{R_0/T_0}{1/(2T_0)} = 2R_0$$

$$\frac{s}{n} = \frac{e_0/T_0}{N_0/(2T_0)} = 2 \frac{e_0}{N_0}$$

● title1

Capacidad de canal

- Introducción
- T. de la capacidad del canal gaussiano
- Preparativos
- Demostración del resultado positivo
- El universo de la alta dimensión
- Visualización en el plano
- Esferas y capacidad del canal
- Diagrama para  $L$  grande
- Cálculo de  $P_E$  media
- Demostración del resultado negativo
- Bibliografía
- Cálculos adicionales sobre distribuciones



# Preparativos

Tomamos la base ortonormal libre de IES

$$\phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T_0}} \operatorname{sinc} \left( \frac{t - kT_0}{T_0} \right),$$
$$k = 0, \dots, L - 1, T_0 = \frac{1}{2W}, T = LT_0.$$

Definiendo  $e_0 = sT_0$  (*energía por dimensión*),  $R_0 = RT_0$  (*bits por dimensión*),

$$\frac{R}{W} = \frac{R_0/T_0}{1/(2T_0)} = 2R_0$$
$$\frac{s}{n} = \frac{e_0/T_0}{N_0/(2T_0)} = 2 \frac{e_0}{N_0}$$

la condición queda

$$R_0 \leq \frac{1}{2} \log_2 \left( 1 + 2 \frac{e_0}{N_0} \right)$$

● title1

Capacidad de canal

- Introducción
- T. de la capacidad del canal gaussiano
- Preparativos
- Demostración del resultado positivo
- El universo de la alta dimensión
- Visualización en el plano
- Esferas y capacidad del canal
- Diagrama para  $L$  grande
- Cálculo de  $P_E$  media
- Demostración del resultado negativo
- Bibliografía
- Cálculos adicionales sobre distribuciones



# Demostración del resultado positivo

● title1

Capacidad de canal

- Introducción
- T. de la capacidad del canal gaussiano
- Preparativos
- Demostración del resultado positivo
- El universo de la alta dimensión
- Visualización en el plano
- Esferas y capacidad del canal
- Diagrama para  $L$  grande
- Cálculo de  $P_E$  media
- Demostración del resultado negativo
- Bibliografía
- Cálculos adicionales sobre distribuciones

Consideramos códigos de  $M = 2^{RT}$  señales **tomadas aleatoriamente** con distribución uniforme en la bola de radio  $\sqrt{sT}$  de  $\mathbf{R}^L$  (luego  $E_i = \|\mathbf{s}_i\|^2 \leq sT$ ).



# Demostración del resultado positivo

● title1

Capacidad de canal

- Introducción
- T. de la capacidad del canal gaussiano
- Preparativos
- Demostración del resultado positivo
- El universo de la alta dimensión
- Visualización en el plano
- Esferas y capacidad del canal
- Diagrama para  $L$  grande
- Cálculo de  $P_E$  media
- Demostración del resultado negativo
- Bibliografía
- Cálculos adicionales sobre distribuciones

Consideramos códigos de  $M = 2^{RT}$  señales **tomadas aleatoriamente** con distribución uniforme en la bola de radio  $\sqrt{sT}$  de  $\mathbf{R}^L$  (luego  $E_i = \|\mathbf{s}_i\|^2 \leq sT$ ).

Veamos que la **probabilidad de error media**  $\bar{P}_E$  de tales códigos se puede hacer tan pequeña como queramos, tomando  $L$  suficientemente grande.

Por tanto, deben existir códigos con  $P_E$  tan pequeña como deseemos.



# El universo de la alta dimensión

Definimos las señales normalizadas

$$\underline{\mathbf{s}} = \frac{1}{\sqrt{L}}\mathbf{s}, \quad \underline{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{L}}\mathbf{n}, \quad \underline{\mathbf{r}} = \frac{1}{\sqrt{L}}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{s} + \mathbf{n}$$

Las  $\underline{\mathbf{s}}$  están dentro de una esfera de radio  $\sqrt{e_0}$ :

$$\|\underline{\mathbf{s}}\| = \frac{1}{\sqrt{L}}\|\mathbf{s}\| \leq \sqrt{sT/L} = \sqrt{sT_0} = \sqrt{e_0}$$

● title1

Capacidad de canal

- Introducción
- T. de la capacidad del canal gaussiano
- Preparativos
- Demostración del resultado positivo
- El universo de la alta dimensión
- Visualización en el plano
- Esferas y capacidad del canal
- Diagrama para  $L$  grande
- Cálculo de  $P_E$  media
- Demostración del resultado negativo
- Bibliografía
- Cálculos adicionales sobre distribuciones



# El universo de la alta dimensión

Definimos las señales normalizadas

$$\underline{\mathbf{s}} = \frac{1}{\sqrt{L}}\mathbf{s}, \quad \underline{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{L}}\mathbf{n}, \quad \underline{\mathbf{r}} = \frac{1}{\sqrt{L}}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{s} + \mathbf{n}$$

Las  $\underline{\mathbf{s}}$  están dentro de una esfera de radio  $\sqrt{e_0}$ :

$$\|\underline{\mathbf{s}}\| = \frac{1}{\sqrt{L}}\|\mathbf{s}\| \leq \sqrt{sT/L} = \sqrt{sT_0} = \sqrt{e_0}$$

Veamos que, para  $L$  grande,

$$\|\underline{\mathbf{s}}\| \approx \sqrt{e_0}$$

$$\|\underline{\mathbf{n}}\| \approx \sqrt{\frac{N_0}{2}}$$

$$\|\underline{\mathbf{r}}\| = \|\underline{\mathbf{s}} + \underline{\mathbf{n}}\| \approx \sqrt{e_0 + \frac{N_0}{2}}$$

Este fenómeno se conoce como *sphere hardening*.

● title1

Capacidad de canal

- Introducción
- T. de la capacidad del canal gaussiano
- Preparativos
- Demostración del resultado positivo
- El universo de la alta dimensión
- Visualización en el plano
- Esferas y capacidad del canal
- Diagrama para  $L$  grande
- Cálculo de  $P_E$  media
- Demostración del resultado negativo
- Bibliografía
- Cálculos adicionales sobre distribuciones



# El universo de la alta dimensión

● title1

Capacidad de canal

- Introducción
- T. de la capacidad del canal gaussiano
- Preparativos
- Demostración del resultado positivo
- El universo de la alta dimensión
- Visualización en el plano
- Esferas y capacidad del canal
- Diagrama para  $L$  grande
- Cálculo de  $P_E$  media
- Demostración del resultado negativo
- Bibliografía
- Cálculos adicionales sobre distribuciones

## *Distribución de las señales*

El volumen de la esfera  $L$ -dimensional de radio  $R$  es  $\text{Vol}_L(R) = c_L R^L$  ( $L = 2K \Rightarrow c_L = \frac{\pi^K}{K!}$ ), luego dado  $\Delta \in [0, R]$ ,

$$P[R - \Delta \leq \|\underline{s}\| \leq R] = \frac{c_L R^L - c_L (R - \Delta)^L}{c_L R^L} = 1 - \left(\frac{R - \Delta}{R}\right)^L$$

Por pequeño que sea  $\Delta$ , esta probabilidad tiende a uno cuando  $L$  tiende a infinito, luego **probabilidad se concentra cerca de la frontera de la bola.**

Por tanto nuestras señales  $\underline{s}$  se concentran cerca de la esfera de radio  $\sqrt{e_0}$ .



# El universo de la alta dimensión

● title1

Capacidad de canal

- Introducción
- T. de la capacidad del canal gaussiano
- Preparativos
- Demostración del resultado positivo
- El universo de la alta dimensión
- Visualización en el plano
- Esferas y capacidad del canal
- Diagrama para  $L$  grande
- Cálculo de  $P_E$  media
- Demostración del resultado negativo
- Bibliografía
- Cálculos adicionales sobre distribuciones

## *Distribución del ruido*

Usamos  $X \sim N(0, \sigma^2) \Rightarrow E[X^4] = 3\sigma^4$ .

$$E[\|\underline{\mathbf{n}}\|^2] = \frac{N_0}{2}$$

$$V[\|\underline{\mathbf{n}}\|^2] = \frac{1}{L^2} \sum_{i=1}^L V[n_i^2] = \frac{1}{L^2} \sum_{i=1}^L 3V[n_i]^2 = \frac{3}{L} \left(\frac{N_0}{2}\right)^2 \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0$$

Por tanto los vectores de ruido se concentran en la esfera de radio  $\sqrt{N_0/2}$ .



# El universo de la alta dimensión

● title1

Capacidad de canal

- Introducción
- T. de la capacidad del canal gaussiano
- Preparativos
- Demostración del resultado positivo
- El universo de la alta dimensión
- Visualización en el plano
- Esferas y capacidad del canal
- Diagrama para  $L$  grande
- Cálculo de  $P_E$  media
- Demostración del resultado negativo
- Bibliografía
- Cálculos adicionales sobre distribuciones

## *Distribución de la observación*

Se demuestra que

$$E[\|\underline{\mathbf{r}}\|^2] \xrightarrow{L \rightarrow \infty} e_0 + \frac{N_0}{2}$$

$$V[\|\underline{\mathbf{r}}\|^2] \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0$$

(detalles al final del documento)

Por tanto las observaciones se concentran en la esfera de radio  $\sqrt{e_0 + N_0/2}$ .



# Visualización en el plano

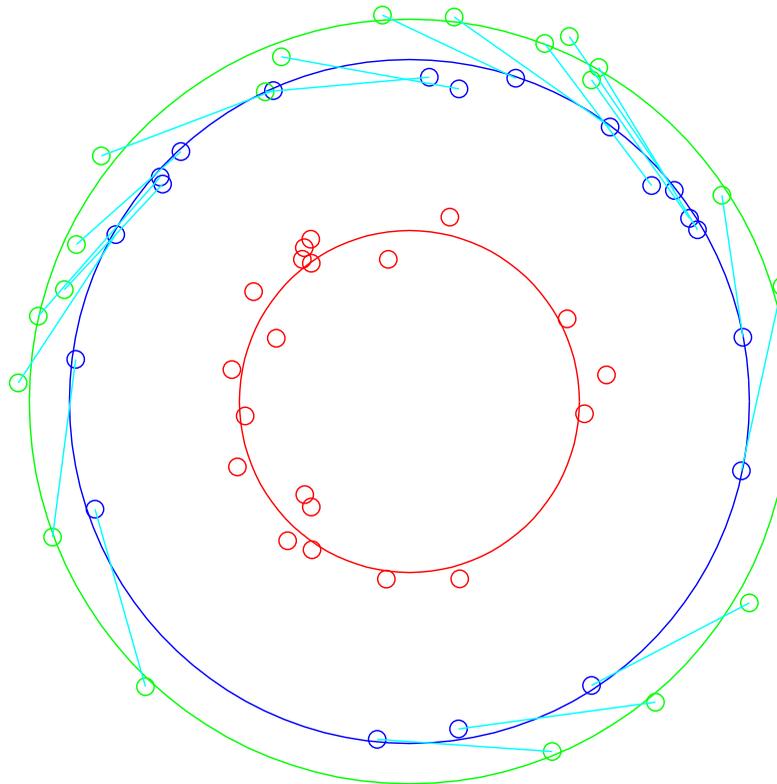
● title1

Capacidad de canal

- Introducción
- T. de la capacidad del canal gaussiano
- Preparativos
- Demostración del resultado positivo
- El universo de la alta dimensión
- Visualización en el plano
- Esferas y capacidad del canal
- Diagrama para  $L$  grande
- Cálculo de  $P_E$  media
- Demostración del resultado negativo
- Bibliografía
- Cálculos adicionales sobre distribuciones

**Experimento:** Generamos señales y vectores de ruido en  $\mathbb{R}^L$  y las visualizamos en el plano respetando normas y ángulos de cada terna ( $\underline{s}$ ,  $\underline{n}$ ,  $\underline{r} = \underline{s} + \underline{n}$ ).

$$e_0 = 1, \frac{N_0}{2} = 0,25, L = 40$$



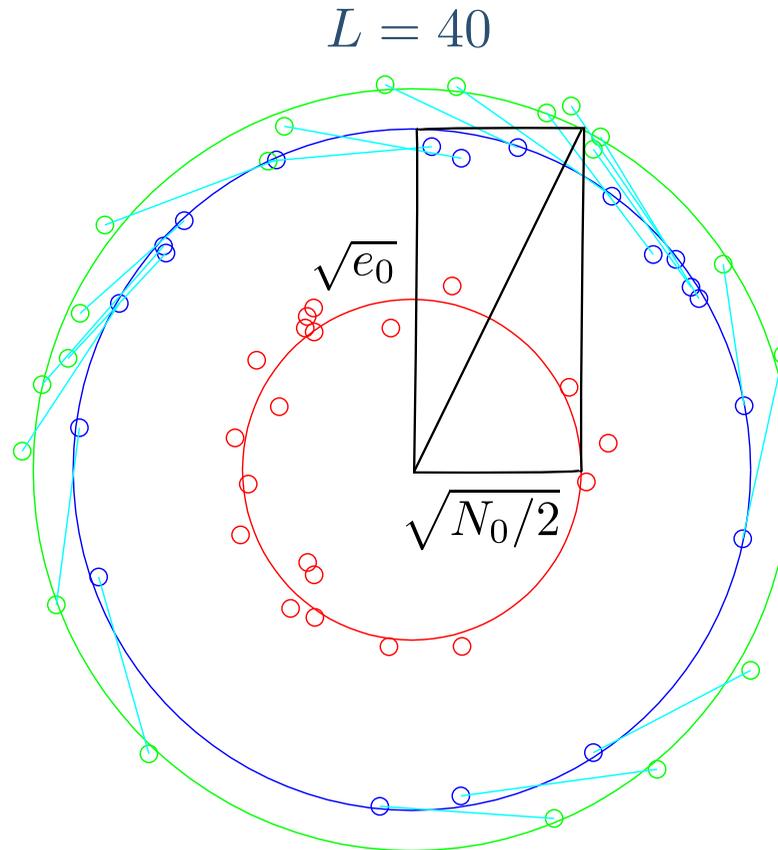


# Visualización en el plano

● title1

Capacidad de canal

- Introducción
- T. de la capacidad del canal gaussiano
- Preparativos
- Demostración del resultado positivo
- El universo de la alta dimensión
- Visualización en el plano
- Esferas y capacidad del canal
- Diagrama para  $L$  grande
- Cálculo de  $P_E$  media
- Demostración del resultado negativo
- Bibliografía
- Cálculos adicionales sobre distribuciones





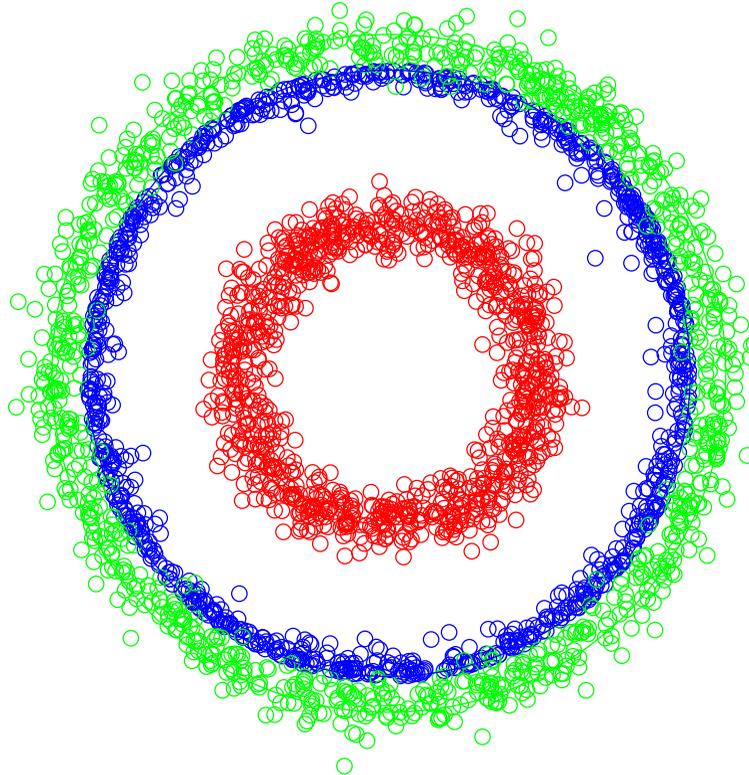
# Visualización en el plano

● title1

## Capacidad de canal

- Introducción
- T. de la capacidad del canal gaussiano
- Preparativos
- Demostración del resultado positivo
- El universo de la alta dimensión
- Visualización en el plano
- Esferas y capacidad del canal
- Diagrama para  $L$  grande
- Cálculo de  $P_E$  media
- Demostración del resultado negativo
- Bibliografía
- Cálculos adicionales sobre distribuciones

$$L = 40$$





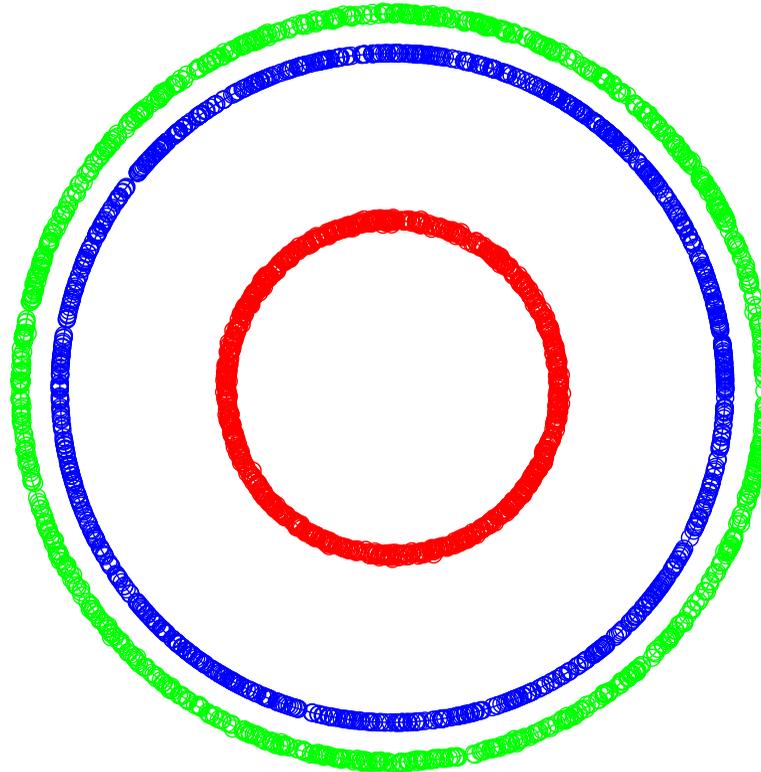
# Visualización en el plano

● title1

Capacidad de canal

- Introducción
- T. de la capacidad del canal gaussiano
- Preparativos
- Demostración del resultado positivo
- El universo de la alta dimensión
- Visualización en el plano
- Esferas y capacidad del canal
- Diagrama para  $L$  grande
- Cálculo de  $P_E$  media
- Demostración del resultado negativo
- Bibliografía
- Cálculos adicionales sobre distribuciones

$$L = 10000$$





# Esferas y capacidad del canal

● title1

Capacidad de canal

- Introducción
- T. de la capacidad del canal gaussiano
- Preparativos
- Demostración del resultado positivo
- El universo de la alta dimensión
- Visualización en el plano
- **Esferas y capacidad del canal**
- Diagrama para  $L$  grande
- Cálculo de  $P_E$  media
- Demostración del resultado negativo
- Bibliografía
- Cálculos adicionales sobre distribuciones

Si  $R = C$  las  $M$  bolas de radio  $\sqrt{N_0/2}$  *caben exactamente* dentro de la bola de radio  $\sqrt{e_0 + N_0/2}$ :

$$\frac{\log_2 M/T}{L/(2T)} = \frac{R}{W} = 2R_0 = \log_2 \left( 1 + \frac{e_0}{N_0/2} \right)$$

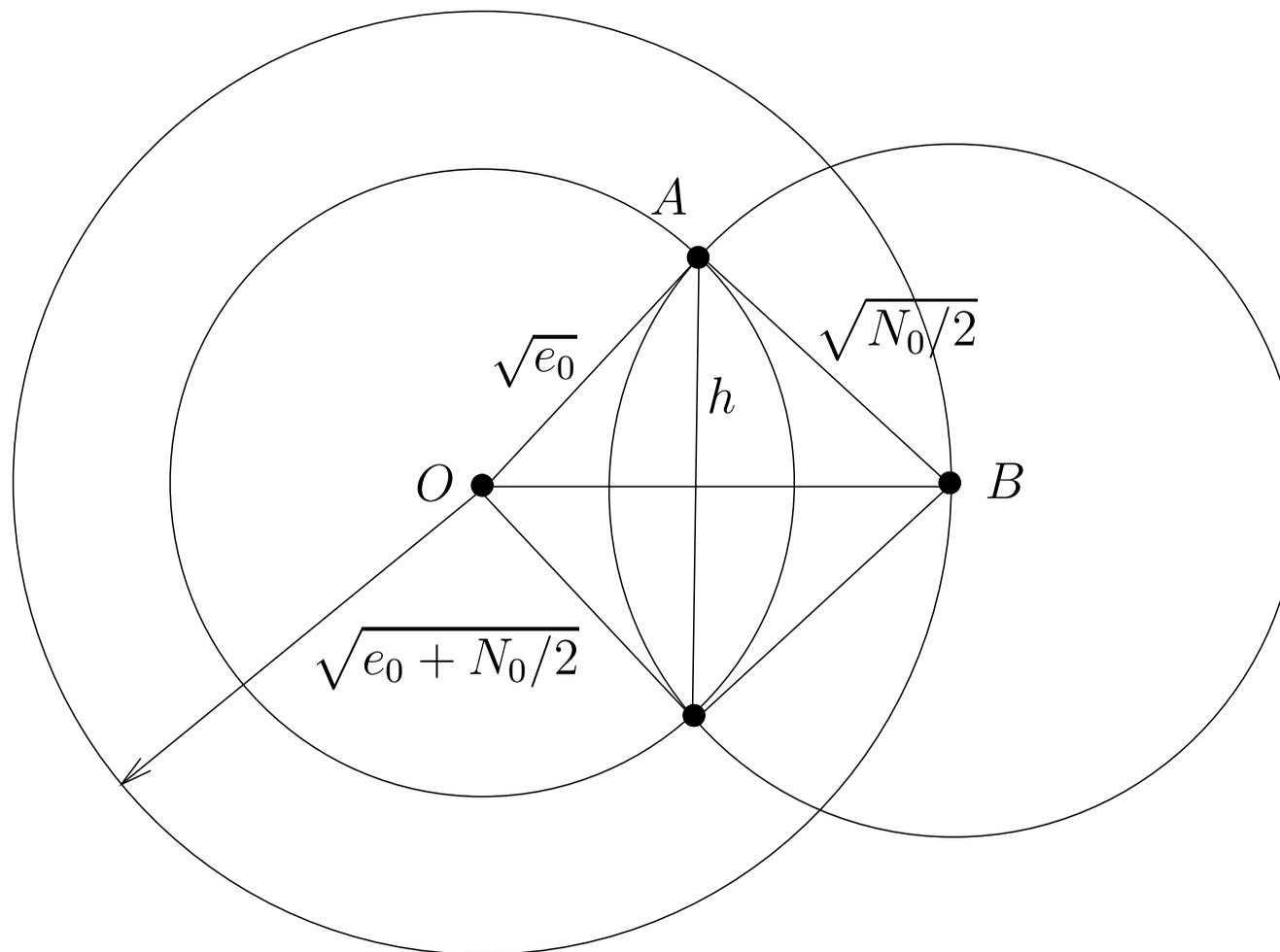
$$\Leftrightarrow 2^{2 \log_2 M/L} = 2^{R/W} = \frac{e_0 + N_0/2}{N_0/2}$$

$$\Leftrightarrow M = \left( \frac{e_0 + N_0/2}{N_0/2} \right)^{L/2} = \frac{\text{Vol}_L \left( \sqrt{e_0 + N_0/2} \right)}{\text{Vol}_L \left( \sqrt{N_0/2} \right)}$$



# Diagrama para $L$ grande

$\bar{P}_E$  es la probabilidad de que haya alguna otra señal del código en la región lenticular.



$A$ : señal transmitida,  $B$ : señal recibida

● title1

Capacidad de canal

- Introducción
- T. de la capacidad del canal gaussiano
- Preparativos
- Demostración del resultado positivo
- El universo de la alta dimensión
- Visualización en el plano
- Esferas y capacidad del canal
- Diagrama para  $L$  grande
- Cálculo de  $P_E$  media
- Demostración del resultado negativo
- Bibliografía
- Cálculos adicionales sobre distribuciones

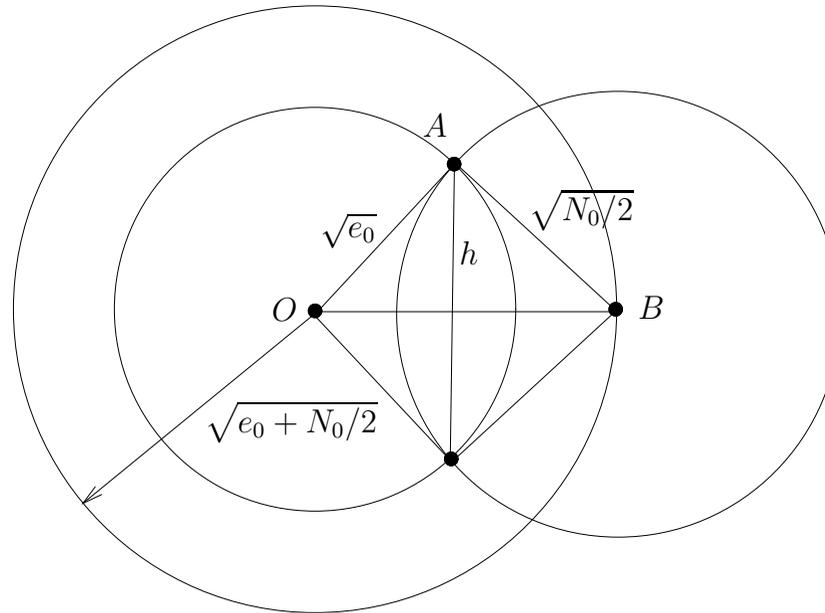


# Diagrama para $L$ grande

● title1

Capacidad de canal

- Introducción
- T. de la capacidad del canal gaussiano
- Preparativos
- Demostración del resultado positivo
- El universo de la alta dimensión
- Visualización en el plano
- Esferas y capacidad del canal
- Diagrama para  $L$  grande
- Cálculo de  $P_E$  media
- Demostración del resultado negativo
- Bibliografía
- Cálculos adicionales sobre distribuciones



Calculamos  $h$  igualando dos expresiones del área del triángulo  $OAB$ :

$$\frac{1}{2}h\sqrt{e_0 + N_0/2} = \frac{1}{2}\sqrt{N_0/2}\sqrt{e_0} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{e_0 N_0/2}{e_0 + N_0/2}}$$



# Cálculo de $P_E$ media

● title1

Capacidad de canal

---

- Introducción
- T. de la capacidad del canal gaussiano
- Preparativos
- Demostración del resultado positivo
- El universo de la alta dimensión
- Visualización en el plano
- Esferas y capacidad del canal
- Diagrama para  $L$  grande
- Cálculo de  $P_E$  media
- Demostración del resultado negativo
- Bibliografía
- Cálculos adicionales sobre distribuciones

$\bar{P}_E$  es la probabilidad de que haya alguna otra señal del código en la región lenticular de la figura anterior.



# Cálculo de $P_E$ media

● title1

Capacidad de canal

- Introducción
- T. de la capacidad del canal gaussiano
- Preparativos
- Demostración del resultado positivo
- El universo de la alta dimensión
- Visualización en el plano
- Esferas y capacidad del canal
- Diagrama para  $L$  grande
- Cálculo de  $P_E$  media
- Demostración del resultado negativo
- Bibliografía
- Cálculos adicionales sobre distribuciones

$\bar{P}_E$  es la probabilidad de que haya alguna otra señal del código en la región lenticular de la figura anterior.

El volumen de esta región será menor que el de la bola de radio  $h$ :

$$\begin{aligned}\bar{P}_E &\leq M \frac{\text{Vol. esfera radio } h}{\text{Vol. esfera radio } \sqrt{e_0}} = M \frac{c_L h^L}{c_L (\sqrt{e_0})^L} \\ &= M \frac{(e_0 N_0 / 2)^{L/2}}{e_0^{L/2} (e_0 + N_0 / 2)^{L/2}} = M \left(1 + 2 \frac{e_0}{N_0}\right)^{-L/2} \\ &= 2^{RT} \left(1 + 2 \frac{e_0}{N_0}\right)^{-L/2} = 2^{RT_0 L} \left(1 + 2 \frac{e_0}{N_0}\right)^{-L/2} \\ &= 2^{L(R_0 - \frac{1}{2} \log_2(1 + 2e_0/N_0))}\end{aligned}$$



# Cálculo de $P_E$ media

● title1

Capacidad de canal

- Introducción
- T. de la capacidad del canal gaussiano
- Preparativos
- Demostración del resultado positivo
- El universo de la alta dimensión
- Visualización en el plano
- Esferas y capacidad del canal
- Diagrama para  $L$  grande
- Cálculo de  $P_E$  media
- Demostración del resultado negativo
- Bibliografía
- Cálculos adicionales sobre distribuciones

$\bar{P}_E$  es la probabilidad de que haya alguna otra señal del código en la región lenticular de la figura anterior.

El volumen de esta región será menor que el de la bola de radio  $h$ :

$$\begin{aligned}\bar{P}_E &\leq M \frac{\text{Vol. esfera radio } h}{\text{Vol. esfera radio } \sqrt{e_0}} = M \frac{c_L h^L}{c_L (\sqrt{e_0})^L} \\ &= M \frac{(e_0 N_0 / 2)^{L/2}}{e_0^{L/2} (e_0 + N_0 / 2)^{L/2}} = M \left( 1 + 2 \frac{e_0}{N_0} \right)^{-L/2} \\ &= 2^{RT} \left( 1 + 2 \frac{e_0}{N_0} \right)^{-L/2} = 2^{RT_0 L} \left( 1 + 2 \frac{e_0}{N_0} \right)^{-L/2} \\ &= 2^{L(R_0 - \frac{1}{2} \log_2(1 + 2e_0/N_0))}\end{aligned}$$

que tiende a cero cuando  $L \rightarrow \infty$ , con lo que tenemos el resultado deseado.



# Demostración del resultado negativo

● title1

Capacidad de canal

- Introducción
- T. de la capacidad del canal gaussiano
- Preparativos
- Demostración del resultado positivo
- El universo de la alta dimensión
- Visualización en el plano
- Esferas y capacidad del canal
- Diagrama para  $L$  grande
- Cálculo de  $P_E$  media
- Demostración del resultado negativo
- Bibliografía
- Cálculos adicionales sobre distribuciones

Hemos visto que si  $R > C$  las  $M$  bolas de radio  $\sqrt{N_0/2}$  no caben dentro de la bola de radio  $\sqrt{e_0 + N_0/2}$ .

Esta observación es la base de la argumentación de que la probabilidad de error en señal tiende a uno cuando  $L$  tiende a infinito.



# Bibliografía

● title1

Capacidad de canal

- Introducción
- T. de la capacidad del canal gaussiano
- Preparativos
- Demostración del resultado positivo
- El universo de la alta dimensión
- Visualización en el plano
- Esferas y capacidad del canal
- Diagrama para  $L$  grande
- Cálculo de  $P_E$  media
- Demostración del resultado negativo
- Bibliografía
- Cálculos adicionales sobre distribuciones

- El teorema es un caso particular del teorema general, basado en los conceptos de entropía e información mutua, introducido por Shannon en C. E. Shannon, “A mathematical theory of communication”, Bell System Technical Journal, vol. 27, pp. 379-423, 623-656, julio, octubre 1948. En los apuntes de la asignatura, apéndice B.2, se proporcionan los resultados principales.
- La versión geométrica intuitiva es también de Shannon: C. E. Shannon, “Communication in the presence of noise”, Proceedings of the IRE, vol. 37, no. 1, pp. 10-21, enero 1949.
- Una demostración rigurosa basada en esta idea se encuentra en J. M. Wozencraft, I. M. Jacobs, “Principles of Communication Engineering”, John Wiley, 1965.



# Anexo: cálculos adicionales

La norma  $\alpha$  de los puntos de la bola tiene fdp

$$f_{\alpha}(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} P[\|\underline{\mathbf{s}}\| \leq \alpha] = \frac{d}{d\alpha} \frac{c_L \alpha^L}{c_L R^L} = LR^{-L} \alpha^{L-1}$$

y de ahí calculamos fácilmente

$$E[\alpha^n] = \int_0^R \alpha^n f_{\alpha}(\alpha) d\alpha = \frac{L}{L+n} R^n$$

Tomando  $R = \sqrt{e_0}$ ,

$$E[\|\underline{\mathbf{s}}\|^2] = \frac{L}{L+2} e_0$$

$$V[\|\underline{\mathbf{s}}\|^2] = E[\|\underline{\mathbf{s}}\|^4] - E[\|\underline{\mathbf{s}}\|^2]^2 = \frac{4L}{(L+4)(L+2)^2} e_0^2$$

● title1

Capacidad de canal

- Introducción
- T. de la capacidad del canal gaussiano
- Preparativos
- Demostración del resultado positivo
- El universo de la alta dimensión
- Visualización en el plano
- Esferas y capacidad del canal
- Diagrama para  $L$  grande
- Cálculo de  $P_E$  media
- Demostración del resultado negativo
- Bibliografía
- Cálculos adicionales sobre distribuciones



# Anexo: cálculos adicionales

● title1

Capacidad de canal

- Introducción
- T. de la capacidad del canal gaussiano
- Preparativos
- Demostración del resultado positivo
- El universo de la alta dimensión
- Visualización en el plano
- Esferas y capacidad del canal
- Diagrama para  $L$  grande
- Cálculo de  $P_E$  media
- Demostración del resultado negativo
- Bibliografía
- Cálculos adicionales sobre distribuciones

## *Distribución de la observación*

$$\|\underline{\mathbf{r}}\|^2 = \|\underline{\mathbf{s}}\|^2 + \|\underline{\mathbf{n}}\|^2 + 2 \sum_{i=0}^{L-1} \bar{s}_i \bar{n}_i$$

$$\begin{aligned} E[\|\underline{\mathbf{r}}\|^2] &= E[\|\underline{\mathbf{s}}\|^2] + E[\|\underline{\mathbf{n}}\|^2] + 2 \sum_{i=0}^{L-1} \underbrace{E[\bar{s}_i]}_{=0} \underbrace{E[\bar{n}_i]}_{=0} \\ &= \frac{L}{L+2} e_0 + \frac{N_0}{2} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} e_0 + \frac{N_0}{2} \end{aligned}$$



# Anexo: cálculos adicionales

● title1

Capacidad de canal

- Introducción
- T. de la capacidad del canal gaussiano
- Preparativos
- Demostración del resultado positivo
- El universo de la alta dimensión
- Visualización en el plano
- Esferas y capacidad del canal
- Diagrama para  $L$  grande
- Cálculo de  $P_E$  media
- Demostración del resultado negativo
- Bibliografía
- Cálculos adicionales sobre distribuciones

$$E[\|\underline{\mathbf{r}}\|^2 | \underline{\mathbf{s}}] = \|\underline{\mathbf{s}}\|^2 + E[\|\underline{\mathbf{n}}\|^2] = \|\underline{\mathbf{s}}\|^2 + \frac{N_0}{2}$$

$$\begin{aligned} V[\|\underline{\mathbf{r}}\|^2 | \underline{\mathbf{s}}] &= V \left[ \|\underline{\mathbf{n}}\|^2 + 2 \sum_{i=0}^{L-1} \bar{s}_i \bar{n}_i \right] \\ &\leq 2V[\|\underline{\mathbf{n}}\|^2] + 2V \left[ 2 \sum_{i=0}^{L-1} \bar{s}_i \bar{n}_i \right] \\ &= 2 \frac{3}{L} \left( \frac{N_0}{2} \right)^2 + 4 \|\underline{\mathbf{s}}\|^2 \frac{1}{L} \frac{N_0}{2} \end{aligned}$$



# Anexo: cálculos adicionales

● title1

Capacidad de canal

- Introducción
- T. de la capacidad del canal gaussiano
- Preparativos
- Demostración del resultado positivo
- El universo de la alta dimensión
- Visualización en el plano
- Esferas y capacidad del canal
- Diagrama para  $L$  grande
- Cálculo de  $P_E$  media
- Demostración del resultado negativo
- Bibliografía
- Cálculos adicionales sobre distribuciones

Usamos  $V[X] = E[V[X|Y]] + V[E[X|Y]]$ :

$$\begin{aligned} V[\|\underline{\mathbf{r}}\|^2] &= E[V[\|\underline{\mathbf{r}}\|^2 | \underline{\mathbf{s}}]] + V[E[\|\underline{\mathbf{r}}\|^2 | \underline{\mathbf{s}}]] \\ &\leq \frac{6}{L} \left(\frac{N_0}{2}\right)^2 + \frac{4}{L} \frac{N_0}{2} e_0 + \frac{4L}{(L+4)(L+2)^2} e_0^2 \\ &\xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$