ELICITACIÓN DE PROBABILIDADES DIFUSAS

Eloy Vicente Cestero[1], **Alfonso Mateos Caballero**[1], **Antonio Jiménez Martín**[1]

[1] *Universidad Politécnica de Madrid. Departamento de Inteligencia Artificial,*
`vicentecestero@upm.es`, `{amateos,ajimenez}@fi.upm.es`

Resumen

En este trabajo exponemos un método interacti-vo cuyo objetivo es extraer de los expertos un número difuso que indique la probabilidad sub-jetiva de un suceso. Este método, basado en los clásicos métodos de apuestas y loterías para la elicitación de probabilidades, evita el uso de es-calas de términos lingüísticos representados por números difusos con amplitud de soporte y sime-tría previamente establecidos, permitiendo a cada experto una mayor o menor precisión y libertad en el establecimiento de sus juicios probabilísti-cos. Además, establecemos una función que mi-de la calidad del juicio probabilístico expresado mediante la agregación de dos componentes que miden la coherencia y la precisión mostrada por el experto durante el proceso de educción.

1 INTRODUCCIÓN.

En multitud de situaciones el enfoque subjetivo es el único posible para la asignación de probabilidades de ocurrencia de sucesos para los cuales no se tiene experiencia ni datos previos, ni existe la posibilidad de poner en práctica mecanismos empíricos para la obtención de datos. Abbas et al [1], Morgan y Henrion [5] y Von Holstein y Matheson [12], entre otros autores, han detallado algunos de los métodos de asignación de probabilidades subjetivas.

El Protocolo SRI (Standford Research Institute) [12, 7, 9] es un procedimiento recomendable para la elicitación de probabilidades subjetivas que trata de evitar la aparición de sesgos en los juicios probabilísticos de los expertos [8]. Sin embargo, en multitud de ocasiones el ambiente en el que se desarrolla un sistema de ayuda a la decisión es de imprecisión y vaguedad, de modo que los expertos son incapaces de dar valores concretos a las probabilidades de ocurrencia de los distintos escenarios y la forma más sencilla de proceder en estos casos consiste en asignar intervalos numéricos.

En los últimos años, se están introduciendo razonamientos de lógica difusa que constituye el paradigma ideal cuando se necesitan modelizar conceptos vagos o imprecisos [2, 4, 10, 11], ya que los números difusos constituyen una generalización de los intervalos numéricos.

Cuando los expertos son incapaces de decidirse por un valor concreto al asignar probabilidades a un suceso, puede ser útil, y de hecho es muy común, establecer escalas de términos lingüísticos como "improbable"< "poco probable"< "probabilidad media"< "probable"< "seguro" para asignar probabilidades sin exigir un compromiso excesivo del experto en cuanto a la precisión de sus juicios. Estos términos lingüísticos se pueden asociar a números difusos trapezoidales normalizados con soporte en [0,1] para poder operar con ellos dentro de una aritmética adecuada.

Sin embargo, esta manera de proceder simplifica demasiado el proceso de asignación de probabilidades, ya que transforma el intervalo [0,1] en un conjunto discreto. Los expertos pueden tener dificultades para elegir entre dos términos lingüísticos consecutivos, y los resultados de elegir uno u otro pueden ser significativamente diferentes. Además, el uso de una escala rígida de términos lingüísticos mediante números difusos con una amplitud fija lleva a una pérdida de información muy valiosa, como es la mayor o menor precisión en los juicios de los expertos a la hora de asignar probabilidades, por otro lado la simetría de los números utilizados en la escala tampoco tiene por qué ser adecuada en todos los casos ni para todos los expertos.

Entonces, en lugar de pedirle al experto que asigne un valor lingüístico de una escala, desarrollaremos un proceso interactivo para asignar un número difuso a una probabilidad subjetiva, de modo que dicho número represente fielmente el valor preferencial de la probabilidad a asignar y la precisión que el experto tiene en tal afirmación.

En la Sección 2 desarrollamos la Teoría de la Probabilidad Lingüística extendiendo a la Teoría Clásica de la Probabilidad y adaptamos este marco de trabajo a los números difusos trapezoidales.

En la Sección 3 describimos los métodos clásicos de asignación de probabilidades subjetivas para variables discretas basados en apuestas y loterías y adaptamos dichos métodos al ambiente difuso mediante el uso de números difusos trapezoidales.

Finalmente, en la Sección 4, construimos una función de evaluación de la calidad del juicio probabilístico expresado por el experto.

2 TEORÍA DE LA PROBABILIDAD LINGÜÍSTICA.

Toda la Teoría Clásica de la Probabilidad se puede construir a partir de los bien conocidos axiomas de Kolmogorov. Nuestro objetivo en esta Sección es extender la teoría clásica al paradigma difuso, de modo que podamos definir una variable aleatoria lingüística.

Un *número difuso trapezoidal normalizado* con soporte en el intervalo $[a_1,a_4]$ de la recta real es una tupla (a_1,a_2,a_3,a_4) con $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$ junto con una función $\mu_{\tilde{A}} : \mathbb{R} \to [0,1]$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a_1 \\ \frac{x-a_1}{a_2-a_1}, & \text{si } a_1 \leq x < a_2 \\ 1, & \text{si } a_2 \leq x < a_3 \\ \frac{x-a_4}{a_3-a_4}, & \text{si } a_3 \leq x \leq a_4 \\ 0, & \text{si } a_4 < x \end{cases}$$

que indica el grado de pertenencia de cada valor $x \in \mathbb{R}$ al número $\widetilde{A}$. Denotaremos por $\mathbb{R}^{\mathcal{T}\mathcal{F}}$ al conjunto formado por todos estos números. Si Además, $a_2 = a_3$ el número se denomina “triangular”.

Denotaremos por $\oplus, \otimes, \ominus$ y $\oslash$ a las operaciones aritméticas usuales entre números difusos trapezoidales descritas en [4].

Dado un número difuso normalizado trapezoidal $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}\mathcal{F}}$ y $\alpha \in [0,1]$ se define el $\alpha - corte$ de $\tilde{A}$ como :

$$\tilde{A}_\alpha = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}, & \text{si } \alpha \in (0,1] \\ \overline{\{x \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}}, & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

donde $\overline{X}$ representa la clausura de un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$.

Nótese que los números difusos extienden de modo natural a los números reales: El número $a \in \mathbb{R}$ se puede representar mediante la función de pertenencia $\mu_{\tilde{a}} = I_{\{a\}}$ donde I es el indicador de un conjunto.

También los intervalos de números reales se pueden representar por medio de números difusos, de modo que el intervalo $A = [a,b]$ corresponde a la función de pertenencia $\mu_{\tilde{A}} = I_A$.

En particular, un número real a se puede escribir como número difuso trapezoidal normalizado como $\tilde{a} = (a,a,a,a)$, y el intervalo $[a,b]$ de números reales se puede escribir como $\tilde{A} = (a,a,b,b)$.

El conjunto $\mathbb{R}^{\mathcal{F}}$ de los números difusos con soporte en $\mathbb{R}$ es un espacio métrico completo con la siguiente distancia [4]:

$$d_\infty : \mathbb{R}^{\mathcal{F}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{F}} \to \mathbb{R},$$
$$d_\infty\left(\tilde{A},\tilde{B}\right) = \underset{\alpha \in [0,1]}{sup} \; d_H\left(\tilde{A_\alpha},\tilde{B_\alpha}\right),$$

con $d_H(X,Y)$ la distancia de Hausdorff en el espacio métrico completo de los intervalos cerrados y acotados de la recta real.

Esta estructura permite definir la convergencia de una sucesión de números difusos o el concepto de serie convergente, fundamental para poder extender el tercer axioma de Kolmogorov a los números difusos.

Los tres axiomas de Kolmogorov se pueden extender a los números difusos normalizados de la siguiente forma [4]:

Un espacio probabilístico difuso es una terna $(\Omega, \mathcal{H}, p^{\mathcal{F}})$ formada por el espacio de eventos Ω de un experimento aleatorio, una σ-álgebra $\mathcal{H}$ sobre el espacio de eventos y una función $p^{\mathcal{F}} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^{\mathcal{F}}$ verificando:

- Axioma 1: $\tilde{0} \leq p^{\mathcal{F}}(E) \leq \tilde{1} \; \forall E \in \mathcal{H}$.
- Axioma 2: $p^{\mathcal{F}}(\Omega) = \tilde{1}$.
- Axioma 3: Dada una familia de eventos disjuntos dos a dos $E_i \in \mathcal{H}$, con $i \in \mathbb{N}$, se tiene que $p^{\mathcal{F}}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\right) \subseteq \sum_{i\in\mathbb{N}} p^{\mathcal{F}}(E_i)$. donde $\subseteq$ denota la operación de subsumción en $\mathbb{R}^{\mathcal{F}}$.

La aritmética usual de números difusos normalizados carece de elementos inversos respecto a las operaciones $\oplus$ y $\otimes$. Esto impide calcular la probabilidad del evento complementario a partir del evento natural mediante la resolución de una sencilla ecuación. Por tanto, es necesario incluir un cuarto axioma en la Teoría de la Probabilidad Lingüística para que ésta pueda extender a la teoría clásica:

- Axioma 4: $p^{\mathcal{F}}(A^c) = \tilde{1} \ominus p^{\mathcal{F}}(A)$.

Con estos cuatro axiomas se verifican las siguientes propiedades:

1. $p^{\mathcal{F}}(\varnothing) = \tilde{0}$, siendo $\varnothing$ un suceso imposible. Basta aplicar los axiomas 4 y 2.

2. $E \subseteq F \Rightarrow p^{\mathscr{F}}(E) \leq p^{\mathscr{F}}(F)$. La demostración puede verse en [4].

3. $p(E \bigcup F) = p(E) \oplus p(F) \ominus p(E \bigcap F)$. La demostración es similar al caso real.

Definido el espacio probabilístico difuso, podemos definir conceptos como el de variable aleatoria lingüística:

Una *variable aleatoria lingüística* es una función $X : (\Omega, \mathscr{H}, p^{\mathscr{F}}) \rightarrow D_X$ de un espacio de probabilidad difuso $(\Omega, \mathscr{H}, p^{\mathscr{F}})$ en un universo de discurso D_X tal que $X^{-1}(x) \in \mathscr{H}$, $\forall x \in D_x$. En particular, si la imagen de X es un conjunto numerable entonces, se dice que la variable es discreta.

La *función de masa* de una variable aleatoria discreta es una función $f : X \rightarrow [0,1]^{\mathscr{F}}$ definida por $f(x) = p^{\mathscr{F}}(w \in \Omega : X(w) = x)$.

En la Teoría Clásica de la Probabilidad es conocido que un conjunto de valores $\pi_i \in [0,1]$ numerable, tal que $\sum_{i \in \mathbb{N}} \pi_i = 1$, es la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta χ que tiene un conjunto numerable de estados d_i con probabilidad $P_\chi(d_i) = \pi_i$. El equivalente difuso de este teorema es el siguiente:

Teorema de representación [4]: Si $D = \{d_i : i \in I\}$ es un conjunto finito no vacío y $\{\tilde{\pi}_i : i \in I\}$ es un conjunto de números difusos tales que $\forall i \in I$ $\tilde{0} \leq \tilde{\pi}_i \leq \tilde{1}$ y $\tilde{\pi}_i \subseteq \tilde{1} \ominus \left[\bigoplus_{j \neq i} \tilde{\pi}_j \right] \in \mathbb{R}^{\mathscr{F}}$, entonces existe un espacio probabilístico difuso $(\Omega, \mathscr{H}, p^{\mathscr{F}})$ y una variable aleatoria difusa discreta X sobre este espacio probabilístico tal que su función de masa es

$$f(d) = \begin{cases} \tilde{\pi}_i, & \text{si } d = d_i \text{ para algún } i \in I \\ \tilde{0}, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

3 ELICITACIÓN DE PROBABILIDADES DIFUSAS MEDIANTE APUESTAS Y LOTERÍAS.

Una vez descrito el marco de la Teoría de la Probabilidad Lingüística, nuestro propósito en esta Sección consiste en desarrollar un método interactivo analista-experto que permita extraer el juicio probabilístico del segundo mediante un número difuso.

Mediante la asignación de probabilidades subjetivas, se trata de establecer la función de probabilidad en el caso de una variable discreta y la función de distribución en el caso de que la variable aleatoria sea continua. En ambos casos se pueden desarrollar métodos directos o indirectos.

Los *métodos directos* para la derterminación de una función de probabilidad, en el caso discreto, consisten en encontrar un sistema completo de sucesos disjuntos dos a dos, y preguntar directamente al experto por la probabilidad de cada uno de los sucesos que forman dicho sistema. Es necesario garantizar los axiomas de Kolmogorov, ya que, de lo contrario, el experto no es coherente en sus juicios probabilísticos.

Estos métodos directos son muy rápidos y fáciles de implementar, sin embargo tienen el inconveniente de que no evitan los sesgos que se pueden producir durante el proceso de elicitación.

Los *métodos indirectos* [3, 6, 13], en el caso discreto, consisten en presentarle al experto la posibilidad de participar en dos juegos diferentes en los cuales se ganan o se pierden determinadas cantidades monetarias con ciertas probabilidades, comparadas con las probabilidades del suceso bajo estudio. El experto debe elegir en qué juego desea participar, y si es coherente elegirá siempre aquella alternativa que le resulte más favorable. El analista cambiará iterativamente las condiciones de los juegos propuestos y aprovechará las respuestas del decisor en cada iteración para inferir la probabilidad de A. Se desarrolla así un proceso que culmina con un par de juegos entre los que el experto es indiferente, y en este momento resulta fácil dar un valor para la probabilidad de A.

El analista puede cambiar las condiciones de los juegos modificando cantidades monetarias o probabilidades. Si cambia cantidades monetarias, el método se denomina *de elicitación mediante apuestas*. Si se modifican las probabilidades, se denomina *de elicitación mediante loterías.*

Asignación basada en apuestas. Para asignar las probabilidades de un suceso S mediante este método tomamos dos cantidades monetarias, x e y, y presentamos al experto las siguientes dos apuestas:

- A_1: Si ocurre el suceso S, usted gana x. Si no ocurre S, usted pierde y (gana $-y$).
- A_2: Si ocurre S, usted pierde x (gana $-x$). Si no ocurre S, usted gana y.

Ahora se le pregunta qué apuesta prefiere. Si ambas apuestas son indiferentes para el decisor entonces la ganancia esperada en ambas es igual:

$$xP(S) - yP(S^c) = -xP(S) + yP(S^c)$$

de donde

$$P(S) = \frac{y}{x+y}$$

En caso contrario, el analista debe reajustar progresivamente los valores x e y hasta obtener la indiferencia del experto. Es decir, si $A_1 \succeq A_2$ se reduce x y/o se incrementa y, y se vuelven a presentar las dos apuestas (y viceversa si $A_2 \succeq A_1$) hasta encontrar dos apuestas indiferentes para el experto.

En multitud de ocasiones el experto tiene dificultades para identificar un único valor de indiferencia, de modo que el resultado de este método será en general un intervalo numérico de [0,1]

Asignación basada en loterías. Si en lugar de cambiar los valores monetarios, modificamos las probabilidades obtenemos el método basado en loterías, que consiste en lo siguiente:

Se consideran un premio muy bueno, que denotaremos por T, y un premio muy malo que denotaremos por W.

Se presentan al experto las siguientes loterías:

- L_1: Si ocurre el suceso S, usted gana el premio T. Si no ocurre el suceso S, usted gana el premio W.
- L_2: Con probabilidad p usted gana el premio T. Con probabilidad $1-p$ usted gana el premio W.

Si el experto es indiferente a ambas loterías, entonces $P(S) = p$, en caso contrario, el analista debe reajustar progresivamente el valor de p hasta obtener la indiferencia del experto. Es decir, si $L_1 \succeq L_2$ entonces el analista debe reducir el valor de p y volver a presentar ambas loterías al experto (y viceversa si $L_2 \succeq L_1$), hasta encontrar dos loterías indiferentes. En este método también resulta más fácil proporcionar un intervalo numérico en lugar de un único valor real.

Supongamos que del método de las loterías obtenemos el intervalo $[a,c]$ y del método de las apuestas obtenemos $[b,d]$.

- Si $[a,c] \bigcap [b,d] = \varnothing$, entonces el experto es incoherente.
- Si $[a,c] \bigcap [b,d] \neq \varnothing$, entonces:
  - Si ninguno de los intervalos está contenido en el otro, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a < b \leq c < d$. Entonces, el experto piensa que la probabilidad del suceso es el número difuso trapezoidal $\tilde{\pi} = (a,b,c,d)$.
  - Si uno de los intervalos está contenido en otro, podemos suponer sin pérdida de genaralidad que $[a,c] \subseteq [b,d]$. Entonces el experto piensa que la probabilidad del suceso es el número difuso trapezoidal $\tilde{\pi} = (b,a,c,d)$.

Una vez que el experto ha asignado la probabilidad a un suceso, se le pide la probabilidad de otro suceso disjunto con el anterior, para lo cual se vuelven a desarrollar los dos métodos anteriores. Ahora bien, al igual que en el caso real exigíamos que la suma de las probabilidades de los sucesos (disjuntos dos a dos) fuera 1, en el paradigma difuso hemos de exigir que se verifiquen las condiciones del teorema de representación dado en la Sección 2, es decir que: $\tilde{\pi}_i \subseteq \tilde{1} \ominus \left[\underset{j \neq i}{\oplus} \tilde{\pi}_j \right]$, siendo $\tilde{\pi}_i$ las probabilidades asignadas sucesivamente a los eventos (recordemos que la aritmética usual de números difusos impide la resolución de ecuaciones sencillas ya que no existe elemento inverso respecto de las operaciones $\oplus$ y $\otimes$). De esta manera, en virtud del citado teorema, definimos una variable aleatoria discreta difusa.

4 CALIDAD DE LA INFORMACIÓN. MEDIDAS DE PRECISIÓN Y COHERENCIA.

La razón de utilizar los métodos indirectos de elicitación de probabilidades se encuentra precisamente, en reducir la influencia de las heurísticas utilizadas por el experto, que le llevan a incluir sesgos en sus juicios probabilísticos [8]. Además,, los protocolos de elicitación usuales [12] recomiendan el uso de varios métodos con objeto de poder contrastar la información suministrada con cada uno de ellos y poder discutir los resultados con el experto, o valorar la calidad de la información suministrada. De este modo, el método propuesto en la Sección 3 para la obtención de un número difuso que indique el juicio probabilístico del experto cumple con dichas recomendaciones. Además, la construcción de dicho número difuso permite valorar cuantitativamente la calidad de la información aportada.

En esta Sección vamos a dar dos medidas que informan sobre la coherencia y la precisión del experto en su juicio probabilístico. Finalmente, agregaremos ambas medidas en una función que indique la calidad de la información aportada.

Coherencia del Experto. Como decíamos en la Sección 3, el experto es incoherente si $[a,c] \bigcap [b,d] = \varnothing$, pero si $[a,c] \bigcap [b,d] = \{\xi\}$ entonces el número difuso que designa el juicio probabilístico dado por el experto es un número difuso triangular (a, ξ, d), ya que $\xi = b = c$. Sin embargo ¿podemos decir que el experto es incoherente si $[a,c] \bigcap [b,d] = \varnothing$, y no lo es si $[a,c] \bigcap [b,d] = \{\xi\}$? Obviamente no, ya que ambas situaciones son prácticamente iguales, de modo que los números difusos triangulares (que no sean reales) también representan situaciones de incoherencia, ya que la intersección de los intervalos es un único número real. De hecho, podemos afirmar que el número triangular no real representa el límite entre la coherencia y la incoherencia en los juicios probabilísticos dados por los métodos de apuestas y loterías.

En caso contrario, si $[a,c] = [b,d]$ el experto ha sido completamente coherente, y el número difuso que designa su juicio probabilístico es un número rectangular (un intervalo nítido). Entonces, la forma del número difuso (rectangular, trapezoidal propiamente dicho, o triangular) indica la coherencia del juicio proporcionado por el experto, y de este modo, podemos medir la coherencia mediante la siguiente función:

Dado un número difuso trapezoidal normalizado $\tilde{A} = (a,b,c,d) \in [0,1]^{\mathcal{TF}}$ que denota el juicio probabilístico de un experto para un evento determinado, llamaremos *coherencia* de $\tilde{A}$ a

$$C(\tilde{A}) = \begin{cases} \frac{c-b}{d-a}, & \text{si } d-a \neq 0 \\ 1, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Propiedades:

1. $C(\tilde{A}) \in [0,1]\ \forall \tilde{A} \in [0,1]^{\mathcal{TF}}$.
2. $C(\tilde{A}) = 1$ si y sólo si $\tilde{A}$ es un número nítido. En particular la coherencia de cualquier intervalo real (visto como número difuso) contenido en $[0,1]$ es 1.
3. $C(\tilde{A}) = 0$ si y sólo si $\tilde{A}$ es un número triangular.
4. C es una función continua en $[0,1]^{\mathcal{TF}}$.

Demostración. Las tres primeras propiedades son triviales, ya que $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 1$. Veamos la cuarta:

Sea $\{\tilde{X}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1]^{\mathcal{TF}}$ una sucesión convergente:

$$\tilde{X}_n \underset{n\to\infty}{\to} \tilde{Y} \in [0,1]^{\mathcal{TF}} \Leftrightarrow d_\infty\left(\tilde{X}_n, \tilde{Y}\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Por tanto $\underset{\alpha \in [0,1]}{sup} \left\{d_H\left(\tilde{X}_{n\alpha}, \tilde{Y}_\alpha\right)\right\} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ y, en particular para $\alpha = 1$ se tiene $d_H\left(\tilde{X}_{n1}, \tilde{Y}_1\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, y para $\alpha = 0$, $d_H\left(\tilde{X}_{n0}, \tilde{Y}_0\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Luego:

$$d_H(\tilde{X}_{n1}, \tilde{Y}_1) = inf\left\{r > 0 : \left[\tilde{X}_{n1} \subseteq \bigcup_{x\in\tilde{Y}_1} B(x,r)\right] \wedge \right.$$
$$\left. \wedge \left[\tilde{Y}_1 \subseteq \bigcup_{x\in\tilde{X}_{n1}} B(x,r)\right]\right\} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Leftrightarrow \tilde{X}_{n1} \underset{n\to\infty}{\to} \tilde{Y}_1$$

y

$$d_H(\tilde{X}_{n0}, \tilde{Y}_0) = inf\left\{r > 0 : \left[\tilde{X}_{n0} \subseteq \bigcup_{x\in\tilde{Y}_0} B(x,r)\right] \wedge \right.$$
$$\left. \wedge \left[\tilde{Y}_0 \subseteq \bigcup_{x\in\tilde{X}_{n0}} B(x,r)\right]\right\} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Leftrightarrow \tilde{X}_{n0} \underset{n\to\infty}{\to} \tilde{Y}_0$$

Para concluir, basta tener en cuenta que, por definición, $C(\tilde{X}_n) = \frac{l(\tilde{X}_{n1})}{l(\tilde{X}_{n0})}$ y $C(\tilde{Y}) = \frac{l(\tilde{Y}_1)}{l(\tilde{Y}_0)}$, donde l denota la longitud del intervalo. Por tanto, $C(\tilde{X}_n) \underset{n\to\infty}{\to} C(\tilde{Y})$. Nótese que si $l(\tilde{Y}_0) = 0$ entonces $max\{(d-a),(c-b)\} = 0$, y $C(\tilde{X}_n) \underset{n\to\infty}{\to} 1$.

Precisión del Experto. Por otro lado, también puede interesarnos la precisión con la que el experto ha expresado su juicio probabilístico:

Dado un número difuso trapezoidal normalizado $\tilde{A} = (a,b,c,d) \in [0,1]^{\mathcal{F}}$ que denota el juicio probabilístico de un experto para un evento determinado. Llamaremos *precisión* de $\tilde{A}$ a

$$S(\tilde{A}) = 1 - \frac{d-a+c-b}{2}.$$

Propiedades:

1. $S(\tilde{A}) \in [0,1]\ \forall \tilde{A} \in [0,1]^{\mathcal{F}}$.
2. $S(\tilde{A}) = 1$ si y sólo si $\tilde{A}$ es un número real.
3. $S(\tilde{A}) = 0$ si y sólo si $\tilde{A}$ es el intervalo $[0,1]$.
4. S es una función continua en $[0,1]^{\mathcal{TF}}$.
5. $\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Rightarrow S(\tilde{A}) \geq S(\tilde{B})$ donde $\subseteq$ es la relación de subsumción dada en la Sección 2.

Demostración: Las tres primeras propiedades son triviales. La demostración de la cuarta propiedad es similar a la demostración de la continuidad de la coherencia ya que, por definición, $S(\tilde{A}) = 1 - \frac{d-a+c-b}{2} = 1 - \frac{l(\tilde{A}_1)+l(\tilde{A}_0)}{2}$, siendo $\tilde{A}_\alpha$ el $\alpha - corte$ de $\tilde{A}$ para $\alpha = 0, 1$.

Veamos la quinta propiedad:

Sean $\tilde{A} = (a_1,b_1,c_1,d_1)$ y $\tilde{B} = (a_2,b_2,c_2,d_2)$. Si $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ entonces $a_1 \leq a_2$, $b_1 \leq b_2$, $c_1 \geq c_2$ y $d_1 \geq d_2$, por tanto $d_1 - a_1 \geq d_2 - a_2$ y $c_1 - b_1 \geq c_2 - b_2$. Luego, $S(\tilde{A}) \geq S(\tilde{B})$.

Calidad del juicio probabilístico asignado por el experto. Podemos medir la calidad del juicio probabilístico dado por el experto mediante:

$$\psi(\tilde{A}) = C(\tilde{A}) \times S(\tilde{A}).$$

Propiedades:

1. $\psi(\tilde{A}) \in [0,1]$.
2. $\psi(\tilde{A}) = 1 \Leftrightarrow \tilde{A} = (a,a,a,a) \in \mathbb{R}$.
3. $\psi(\tilde{A}) = 0 \Leftrightarrow \tilde{A}$ es triangular, o $\tilde{A} = (0,0,1,1) = [0,1]$.
4. ψ es una función continua en $[0,1]^{\mathcal{TF}}$.

Demostración.

1. Trivial si se consideran las propiedades de las medidas de coherencia y precisión indicadas anteriormente.

2. $\psi(\tilde{A}) = 1 \Leftrightarrow C(\tilde{A}) = 1$ y $S(\tilde{A}) = 1 \Leftrightarrow d-a+c-b = 0$, $\frac{c-b}{d-a} = 1 \Leftrightarrow d-a = b-c$ y $c-b = d-a$ por tanto, $b-c = c-b = d-a \Leftrightarrow b-c = d-a = 0 \Leftrightarrow a = b = c = d$, ya que $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 1$.

3. $\psi(\tilde{A}) = 0 \Leftrightarrow C(\tilde{A}) = 0$ o $S(\tilde{A}) = 0$. Por un lado, $C(\tilde{A}) = 0 \Leftrightarrow c-b = 0$ ($\tilde{A}$ es triangular). Y, por otro lado, $S(\tilde{A}) = 0 \Leftrightarrow d-a+c-b = 2 \Leftrightarrow d-a-1 = 1-c+b$ y, puesto que $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 1$, se tiene que $d-a-1 \leq 0$ y $1-c+b \geq 0$, luego $d-a-1 = 1-c+b = 0$, y por tanto, $d-a = c-b = 1$, luego $\tilde{A} = (0,0,1,1)$.

4. ψ es una función continua por ser el producto de dos funciones continuas en un espacio métrico completo.

La utilidad de la función de calidad dada es obvia: En un proceso de elicitación interactivo, si el experto ha dado un número difuso con una calidad por debajo de un cierto umbral determinado previamente por el analista, teniendo en cuenta las condiciones del problema, se puede discutir el resultado con el experto e incluso, se podría optar por desechar la información de este experto y consultar a otros.

5 CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un método de elicitación de probabilidades difusas que consiste en extraer el juicio probabilístico de un experto en forma difusa, en el marco de la Teoría de la Probabilidad Lingüística. Además, se ha definido una función de calidad de la información obtenida, útil en un proceso de filtrado y mejora de la información

Agradecimientos

El desarrollo de este trabajo ha sido posible gracias a la financiación de la Comunidad Autónoma de Madrid a través del proyecto S-2009/ESP-1685 y del Ministerio de Ciencia y Tecnología del Gobierno de España a través del proyecto MYTM2011-28983-C03-03.

Referencias

[1] Abbas, Ali E., Budescu, David V., Hsiu-Ting Yu, Haggerty, Ryan. A Comparison of Two Probability Encoding Methods: Fixed Probability vs. Fixed Variable Values. *Decision Analysis* Vol. 5, No. 4. pp 190-202. 2008.

[2] Dokas, I.M, Karras, D.M., Panagiotakopoulos, D.C. Fault tree analysis and fuzzy expert systems: Early warning and emergency response of landfill operations. *Environmental Modelling and Software*. Vol 24 pp 8-25. 2009.

[3] Finetti, B. Foresight: its Logical Laws, its Subjective Sources. In emphStudies in Subjective Probability. H.E. Kyburg and H.E. Smokler Eds. Wiley. 1964.

[4] Halliwell J. *Linguistic Probability Theory*. PhD Thesis. University of Edinburgh. 2007.

[5] Morgan, M.G. and Henrion, M. *Uncertainty: A guide to dealing with Uncertainty in Quantitative Risk and Policy Analysis*. Cambridge University Press. Cambridge G.B. 1990.

[6] Savage, L.J. *The Fundations of Statistics*. Wiley. Nueva York. 1954.

[7] VV.AA. *Expert Elicitation: Methodological suggestions for its use in environmental health impact assessments*. National Institute for Public Health and the Environment 2008.

[8] Tversky, A. and Kahneman, D. Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases. *Science, New Series*, Vol. 185, No. 4157. pp. 1124-1131. 1974.

[9] U.S. Nuclear Regulatory Commission. *Severe Accident Risks: An Assessment for Five U.S. Nuclear Power Plants*. NRC Publications. 1990.

[10] Vicente, E., Jiménez, A. and Mateos, A. A Fuzzy Approach to Risk Analysis in Information Systems. *Proceedings of the 2nd International Conference on Operations Research and Enterprise Systems*. 2013a.

[11] Vicente, E., Mateos, A. and Jiménez, A. A new similarity function for generalized trapezoidal fuzzy numbers. *Lecture Notes on Artificial Intelligence*. Part I, pp 400-411. 2013b

[12] Stäel Von Holstein C.A. and Matheson, H. A *Manual For Encoding Probability Distributions. SRI International*, Standford Research Institute 1979.

[13] Winkler, R.L. The quantification of judgment: some methodological suggestion. *Journal of the American Statis. Assoc.*, 1967 b, Vol. 62, n2 320, pp: 1105-1120. 1968