UNIVERSIDAD POLITECNICA DE MADRID
FACULTAD DE INFORMATICA

TESIS DOCTORAL

APROXIMACIONES DEL CONJUNTO EFICIENTE EN DECISION MULTICRITERIO

Autor: Alfonso Mateos Caballero
Director: Sixto Ríos Insua

Madrid, 1995

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE MADRID

Facultad de Informática

Departamento de Inteligencia Artificial

APROXIMACIONES DEL CONJUNTO EFICIENTE EN DECISION MULTICRITERIO

Alfonso Mateos Caballero

Director: Sixto Ríos Insua

Madrid, 1995

Aproximaciones del Conjunto Eficiente en Decisión Multicriterio

Alfonso Mateos Caballero
Departamento de Inteligencia Artificial
Facultad de Informática
Universidad Politécnica de Madrid

Resumen

El conjunto eficiente en la Teoría de la Decisión Multicriterio juega un papel fundamental en los procesos de solución ya que es en este conjunto donde el decisor debe hacer su elección más preferida. Sin embargo, la generación de tal conjunto puede ser difícil, especialmente en problemas continuos y/o no lineales.

El primer capítulo de esta memoria, es introductorio a la Decisión Multicriterio y en él se exponen aquellos conceptos y herramientas que se van a utilizar en desarrollos posteriores.

El segundo capítulo estudia los problemas de Toma de Decisiones en ambiente de certidumbre. La herramienta básica y punto de partida es la función de valor vectorial que refleja imprecisión sobre las preferencias del decisor. Se propone una caracterización del conjunto de valor eficiente y diferentes aproximaciones con sus propiedades de encaje y convergencia. Varios algoritmos interactivos de solución complementan los desarrollos teóricos.

El tercer capítulo está dedicado al caso de ambiente de incertidumbre. Tiene un desarrollo parcialmente paralelo al anterior y utiliza la función de utilidad vectorial como herramienta de modelización de preferencias del decisor. A partir de la consideración de las distribuciones simples se introduce la eficiencia en utilidad, su caracterización y aproximaciones, que posteriormente se extienden a los casos de distribuciones discretas y continuas.

En el cuarto capítulo se estudia el problema en ambiente difuso, aunque de manera introductoria.

Concluimos sugiriendo distintos problemas abiertos.

Aproximaciones del Conjunto Eficiente en Decisión Multicriterio

Alfonso Mateos Caballero
Departamento de Inteligencia Artificial
Facultad de Informática
Universidad Politécnica de Madrid

Resumen

El conjunto eficiente en la Teoría de la Decisión Multicriterio juega un papel fundamental en los procesos de solución ya que es en este conjunto donde el decisor debe hacer su elección más preferida. Sin embargo, la generación de tal conjunto puede ser difícil, especialmente en problemas continuos y/o no lineales.

El primer capítulo de esta memoria, es introductorio a la Decisión Multicriterio y en él se exponen aquellos conceptos y herramientas que se van a utilizar en desarrollos posteriores.

El segundo capítulo estudia los problemas de Toma de Decisiones en ambiente de certidumbre. La herramienta básica y punto de partida es la función de valor vectorial que refleja imprecisión sobre las preferencias del decisor. Se propone una caracterización del conjunto de valor eficiente y diferentes aproximaciones con sus propiedades de encaje y convergencia. Varios algoritmos interactivos de solución complementan los desarrollos teóricos.

El tercer capítulo está dedicado al caso de ambiente de incertidumbre. Tiene un desarrollo parcialmente paralelo al anterior y utiliza la función de utilidad vectorial como herramienta de modelización de preferencias del decisor. A partir de la consideración de las distribuciones simples se introduce la eficiencia en utilidad, su caracterización y aproximaciones, que posteriormente se extienden a los casos de distribuciones discretas y continuas.

En el cuarto capítulo se estudia el problema en ambiente difuso, aunque de manera introductoria.

Concluimos sugiriendo distintos problemas abiertos.

Approximations of the Efficient Set in Multicriteria Decision-Making

Alfonso Mateos Caballero
Departamento de Inteligencia Artificial
Facultad de Informática
Universidad Politécnica de Madrid

Abstract

The efficient set of a Multicriteria Decicion-Making Problem plays a fundamental role in the solution process since the Decision Maker's preferred choice should be in this set. However, the computation of that set may be difficult, specially in continuous and/or nonlinear problems.

Chapter one introduces Multicriteria Decision-Making. We review basic concepts and tools for later developments.

Chapter two studies Decision-Making problems under certainty. The basic tool is the vector value function, which represents imprecision in the DM's preferences. We propose a characterization of the value efficient set and different approximations with nesting and convergence properties. Several interactive algorithms complement the theoretical results.

We devote Chapter three to problems under uncertainty. The development is parallel to the former and uses vector utility functions to model the DM's preferences. We introduce utility efficiency for simple distributions, its characterization and some approximations, which we partially extend to discrete and continuous classes of distributions.

Chapter four studies the problem under fuzziness, at an exploratory level.

We conclude with several open problems.

Agradecimientos

La presente memoria ha sido realizada bajo la dirección del Profesor D. Sixto Ríos Insua, a quién quiero expresar mi más profundo agradecimiento por su permanente apoyo, estímulo y eficaz ayuda. Sin cuya colaboración no hubiera sido posible realizarse.

A David Ríos agradezco sus valiosas sugerencias y comentarios sobre el tema.

También deseo hacer extensiva mi gratitud a los componentes del Grupo de Análisis de Decisiones, con los cuales siempre pude intercambiar impresiones. En particular, a Jacinto Gonzalez quién supo aconsejarme en mis primeros congresos científicos. A Jacinto Martín y Concha Bielza por sus conversaciones y ayuda en la edición.

Mi mujer, Carmen, ha sido fundamental en todo el desarrollo de este trabajo. Ella me animó a comenzarlo y me ha proporcionado el apoyo moral necesario para llevarlo a buen fin.

Finalmente, doy las gracias a mis padres y hermanos, pues, aunque ellos son ajenos al contenido de este trabajo, su cariño es coautor del mismo.

Deseo agradecer también el apoyo a esta investigación de la DGICYT y UPM.

Indice

Capítulo 1

Introducción

En la vida real se presentan continuamente problemas complejos en que se ha de elegir entre varias alternativas posibles para seguir la óptima o una satisfactoria. Para esta toma de decisiones no basta la experiencia, el sentido común o la intuición de los expertos ya que, frecuentemente, intervienen múltiples criterios, incertidumbre, varios decisores, diversas etapas, etc.

La publicación a principio de los años cuarenta de los trabajos pioneros de Von Neumann representan el comienzo del tratamiento formal de los problemas de decisión individual en ambiente de riesgo, para hacer compatible la racionalidad científica con la inevitable presencia de lo subjetivo en tales situaciones. Los trabajos del premio Nobel profesor Debreu son, paralelamente a partir del 1954, el motor de desarrollo de la decisión en ambiente de certidumbre.

El amplio espectro de problemas reales de decisión humana ha hecho necesarios los esfuerzos de científicos de diferentes áreas para ir desarrollando a lo largo del tiempo una sucesión de esquemas coherentes, cada vez más amplios, pero siempre insuficientes y en espera de nuevos progresos, lo que constituye un gran atractivo de este estudio.

Superada hace unos treinta años la etapa en que la Investigación Operativa tenía como norma reducir todos los factores que influían en un proceso de decisión a unidades monetarias, comienza el enfoque, más realista, de la decisión multicriterio o multiobjetivo, que considera de manera explícita criterios múltiples para abordar correctamente los problemas de decisión. Tales problemas multicriterio están presentes no sólo en nuestro hacer diario sino también en importantes y variados problemas tales como la planificación energética de un país o de sus gastos en defensa, el desarrollo de nuevos productos, selección de proyectos de investigación, etc. A nivel individual la compra de un automóvil o de una vivienda son ejemplos de tales problemas. Incluso, en decisiones rutinarias como la elección de un menú en un restaurante o la asignación de trabajadores a tareas constituyen problemas en que se tienen criterios múltiples.

Los problemas multiobjetivo tratan de optimizar simultáneamente n funciones objetivos diferentes sujetas a un conjunto de restricciones. La formulación matemática, también conocida como el problema de máximo vectorial, es

$$\begin{array}{ll} \max & z(x) = \{z_1(x), ..., z_n(x)\} \\ \text{sa:} & x \in \mathcal{X} \end{array}$$

donde x es un vector N-dimensional de variables de decisión, $\mathcal{X}$ es el espacio de decisiones y $z(\cdot)$ es un vector de n funciones reales. Para tener un problema no trivial, asumimos que los objetivos están en conflicto.

Debido a la naturaleza conflictiva de los objetivos, generalmente no es posible una solución óptima que simultáneamente optimice todos los objetivos. En cambio existen varias soluciones, llamadas soluciones eficientes (no dominadas, optimales de Pareto,...), que tienen la propiedad: No es posible la mejora en un objetivo sin empeorar uno o más de los restantes objetivos.

El conjunto de todas las soluciones eficientes es conocido como *conjunto eficiente (no dominado u Optimal de Pareto).*

Con el concepto anterior, la solución al problema de máximo vectorial se reduce al problema no sencillo de encontrar todas las soluciones eficientes y seleccionar alguna de ellas. Muchas veces, son en número infinito y difícilmente comparables. Un enfoque de solución consiste en asumir que el decisor tiene una función de preferencia real ν, definida sobre el espacio de objetivos $z(\mathcal{X})$. Con esta suposición, el problema de máximo vectorial se transforma en el problema de máximo escalar

$$\begin{array}{ll} \max & \nu(z(x)) \\ \text{sa:} & x \in \mathcal{X} \end{array}$$

En las dos últimas décadas, muchos investigadores han desarrollado métodos de solución basados en diferentes suposiciones y aproximaciones para asignar la función de preferencia. Así, los métodos de solución para problemas multiobjetivo se pueden clasificar según las suposiciones básicas hechas con respecto a la función de preferencia: (1) cuando el decisor tiene información completa sobre la función de preferencia; (2) cuando no existe información o no es posible obtenerla; y (3) cuando se puede obtener de modo progresivo información parcial, generalmente, en sesiones interactivas con el decisor.

Bajo la primera suposición, se asigna la función de preferencia del decisor o este revela sus aspiraciones antes de resolverse el problema multiobjetivo. Así, el problema multiobjetivo se reduce a otro problema de optimización con un sólo objetivo global (Teorías del Valor y de la Utilidad, Fishburn, 1970; Keeney y Raiffa, 1976), o a una serie de problemas de optimización escalar (Programación Lexicográfica o Programación por Metas, Lee, 1974; Charnes et al., 1968; Ignizio, 1976; Zanakis y Gupta, 1985). Sin embargo, la determinación de la forma explícita de la función de preferencia puede requerir un esfuerzo y niveles económicos y de tiempo difíciles de alcanzar. Incluso, cuando la programación por metas requiere sólo comparación entre pares de objetivos, asume una estructura muy simple de la función de preferencia que no considera intercambios entre objetivos.

El propósito bajo la segunda suposición, es la generación de todas las soluciones eficientes. En este caso, el conjunto de soluciones eficientes se enumera parcial o completamente y se le presenta al decisor. Ejemplos de métodos en esta categoría son, las ponderaciones de objetivos o problemas P_λ (Geoffrion, 1966; 1967; 1968), el método de reducción de criterios (Bacopoulas y Singer, 1977; Yu, 1973; 1974) y el método de la norma de Tchebycheff (Bowman, 1975), entre otros. Estos métodos se han criticado, esencialmente, por el excesivo trabajo computacional que conllevan en problemas reales la generación de todo el conjunto eficiente, además de la carga cognoscitiva sobre el decisor que tiene que seleccionar una alternativa de entre un número infinito. Sin embargo, estos métodos pueden ayudar a generar alternativas eficientes para su utilización en las aproximaciones interactivas.

La tercera suposición no requiere a priori información sobre preferencias, sino, que obtiene la estructura de preferencia del decisor a lo largo de las interacciones decisor-analista. Dentro de esta categoría podemos considerar dos clases: la articulación a posteriori y la articulación progresiva de preferencias. La articulación a posteriori tiene la dificultad de la generación previa de todas las soluciones eficientes. En la articulación progresiva, también llamada método interactivo, el decisor proporciona reiteradamente información sobre las sucesivas soluciones. Ya que el decisor está directamente implicado en el proceso de solución, esta aproximación ha encontrado en la práctica buena aceptación.

Entre todos los métodos de solución, los que siguen la filosofía interactiva son los que han tenido mayor aceptación, considerándose más atractivos en la resolución de los problemas multiobjetivos como se refleja en algunos estudios comparativos (Evans, 1984; Klein et al., 1986; Rosenthal, 1985; Shin y Ravindran, 1988; Zionts, 1979). Detalles teóricos de distintos enfoques, así como aplicaciones potenciales a este tipo de problemas se pueden ver en los artículos de Zanakis y Gupta (1985), Evans (1984), Kuhn y Tucker (1951), Geoffrion (1966; 1967), Bacopoulas y Singer (1977), Yu (1973; 1986), Bowman (1975), Evans (1984), Hwang et al. (1980), Johnson (1968) y Roy (1971) y en los libros de, por ejemplo, Goicochea et al. (1982), Chankong y Haimes (1983), Hwang y Masud (1978), Steuer (1986), White (1986) y Zeleny (1982).

Los métodos interactivos en programación multiobjetivo se encuentran dentro del enfoque de articulación progresiva de las preferencias del decisor. Estos métodos pueden caracterizarse por el siguiente esquema: (1) encontrar una solución (preferiblemente factible y eficiente); (2) interaccionar con el decisor para obtener su reacción y respuesta a la solución; y, (3) repetir los pasos (1) y (2) hasta que se encuentre satisfecho o se haya llegado a un criterio de terminación del proceso de solución.

Cuando se aplican los algoritmos interactivos a problemas del mundo real, los factores más críticos son las restricciones funcionales sobre los objetivos y restricciones, y el desconocimiento de la función de preferencia. Otro factor importante son las formas de obtención de las preferencias del decisor. La carga cognoscitiva sobre el decisor durante el proceso de solución depende fuertemente de las formas de interacción. Algunas formas típicas de interacción son:

(a) *Comparación de dos vectores:* el decisor debe comparar un par de vectores p-dimensionales especificando una preferencia.

(b) *Comparación vectorial:* el decisor debe comparar un conjunto de vectores p-dimensionales y especificar el mejor, el peor o el orden de preferencia (notar que esto puede hacerse mediante una serie de comparaciones de dos vectores).

(c) *Tasa de intercambio local:* el decisor debe especificar valores precisos de la tasa de intercambio local en un punto dado. Entendemos por tasa de intercambio local a la cantidad que el decisor está dispuesto a ceder en un objetivo j por aumentar una unidad en el objetivo i.

(d) *Intervalo de tasa de intercambio:* el decisor debe especificar un intervalo para cada tasa de intercambio local.

(e) *Tasa de intercambio comparativa:* el decisor debe especificar su preferencia para una tasa de intercambio dada.

(f) *Especificación de los índices y valores de intercambio:* el decisor debe dar la lista de los índices de los objetivos que se mejorarán o empeorarán especificando las cantidades asociadas.

(g) *Niveles de aspiración (o punto de referencia):* el decisor debe especificar o ajustar los valores de las metas a las que desea aproximarse o alcanzar.

Algunos autores (Malakooti y Ravindran, 1985; Marcotte y Soland, 1985; Zionts y Wallenius, 1976) creen que es más fácil dar respuestas a las comparaciones de vectores que a los valores de intercambio o a precisar tasas de intercambios locales. Sin embargo, los métodos que usan comparaciones de vectores pueden requerir, en general, más interacciones. Además, el decisor podría preferir una cierta forma de interacción y, así, la selección de una forma de interacción es algo subjetivo. Notemos que los intercambios locales pueden reemplazarse por una serie de comparaciones de pares de vectores binarios (Dyer, 1973; Lazimy, 1986), aunque esto aumentará el número de interacciones con el decisor.

Vamos a describir brevemente a contiuación algunos de los métodos interactivos más utilizados, dentro de una clasificación basada en las características de sus enfoques.

- *Métodos de reducción de la región factible.* Cada iteración de estos métodos consiste, generalmente, en tres fases: una fase de cálculo, donde obtenemos una solución eficiente que es la más próxima a la *solución ideal*[1], en el sentido minimax para unos pesos dados. En la fase de decisión, el decisor interacciona con el método, y sus respuestas se usan para construir restricciones adicionales en la fase de reducción de la región factible. El método continúa realizando las tres fases hasta que el decisor considera que la solución alcanzada es la de mejor compromiso.

- *Métodos de dirección factible.* Esta clase es una extensión directa de

[1] La solución ideal se obtiene por maximización de cada función objetivo separadamente bajo las restricciones dadas.

los métodos de dirección factible desarrollados para resolver problemas de programación no lineal uniobjetivo. Comienzan con una solución factible y realizan iterativamente dos pasos: (i) dada la solución actual encontrar una "dirección posible" (entre las que la preferencia del decisor aumenta) llamado el paso para *encontrar la dirección*; y (ii) determinar el tamaño del paso desde la solución actual a lo largo de la dirección posible, llamado *búsqueda en la línea.* En el paso para encontrar la dirección, el decisor provee información sobre sus preferencias en las cercanías de la solución actual especificando valores de intercambio local entre los criterios. Esto, trasladado al método del gradiente de la función de preferencia, conduce a la selección de una nueva solución con mayor preferencia.

- *Métodos de ponderaciones para los criterios.* Cuando el espacio de decisiones es un conjunto convexo, compacto y las funciones objetivo son concavas, una solución eficiente puede obtenerse resolviendo un problema uniobjetivo en el que los objetivos se combinan usando pesos. El dominio de los pesos se define como el *espacio de ponderaciones de los criterios*, y estos métodos conducen a la mejor solución de compromiso mediante el examen del espacio de ponderaciones o reduciéndolo sucesivamente. Esta clase se ha utilizado bastante en la práctica, pero está limitada ya que muchos métodos se aplican sólo a problemas lineales.

- *Métodos de planos de corte con intercambio.* Esta clase puede verse como una variante de los métodos de la dirección factible. Reducen iterativamente el espacio de objetivos (equivalente a la reducción del espacio factible) con planos de corte. Los métodos son aplicables a problemas no lineales generales, sin embargo su mayor dificultad está en que para su aplicación necesitan de la determinación de tasas de intercambio local.

- *Métodos de multiplicadores de Lagrange.* Está formada por los métodos interactivos que usan los multiplicadores de Lagrange.

- *Métodos interactivos visuales.* Estos métodos se caracterizan porque asumen que la función de preferencia, no conocida, no cambia durante el proceso interactivo y por la presentación de gráficas en cada iteración, que facilita la interacción con el decisor.

- *Métodos de ramificación y acotación.* Los métodos de ramificación y acotación dividen el espacio de decisiones en subconjuntos. Cada subconjunto es una rama del espacio de decisiones original. Ellas a su vez se ramifican en subconjuntos más pequeños si una rama puede proporcionar una solución mejor. En cada subconjunto, determinan una solución ideal y usan la solución ideal para formar un cota superior para cada subconjunto. Notemos que la solución ideal de un subconjunto, domina todos los puntos eficientes de ese subconjunto. Cada subconjunto forma un nodo y en cada nodo las soluciones se comparan con la solución actual interaccionando con el decisor. Un nodo es terminal si la solución ideal perteneciente a ese subconjunto está dominada por la solución actual.

- Finalmente apuntemos que la clasificación no termina aquí, sino que existen otros procedimientos tales como: *métodos de relajación, métodos* *secuenciales, métodos de las funciones escalares, etc*, que no describimos.

Los métodos interactivos requieren respuestas del decisor a una serie de preguntas que se realizan en cada iteración. Por tanto, la consistencia del decisor es uno de los factores más importantes para su buen desarrollo. Ya que los decisores pueden ser muy subjetivos, diferentes soluciones iniciales pueden conducir a diferentes soluciones de mejor compromiso. Además, los métodos usan distintos tipos de preguntas o formas de interacción y como consecuencia llevarán, en general, a diferentes soluciones. Por tanto, todos los métodos interactivos requieren respuestas consistentes del decisor para ser aceptables.

Usualmente hay dos formas de reducir la inconsistencia del decisor: (i) comprobando la consistencia durante el procedimiento; y (ii) minimizando la carga cognoscitiva del decisor.

Finalmente, recordemos que el análisis de decisiones que se ha desarrollado esencialmente en USA se ha basado en los modelos de la utilidad esperada subjetiva, y se ha denominado: "El modelo de escuela Americana para la ayuda a la decisión".

Las principales críticas de esta teoría y de su práctica son:

(i) La utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern no es validada por la evidencia, ni similar a los actuales procesos de decisión (ver entre otros, Allais, 1979; McCord y de Neufville, 1985);

(ii) la construcción de la función de utilidad multiatributo requiere un proceso complicado de preguntas;

(iii) al final de este proceso, no se puede estar seguro de si la estructura de preferencia obtenida es totalmente correcta cuando inicialmente se ha establecido alguna preferencia básica no cierta;

(iv) todas las implicaciones prescritas por el modelo de utilidad esperada están fundamentadas en la hipótesis de que, incluso cuando el decisor no ha sido forzado durante el proceso de entrevista, él es racional en el sentido de que se supone que cumple un conjunto de axiomas de creencias intuitivamente convincentes.

La racionalidad de estos axiomas ha sido criticada por Allais (1953;1979), entre otros autores. En 1953, este premio Nobel fue un oponente a los axiomas que él llamó de la escuela Americana. Además, algunos autores europeos, especialmente en Francia y Bélgica, también han lanzado sus críticas. Un ejemplo de ello, es la escuela Francesa, iniciada por Roy. El primer método, denominado ELECTRE (Elimination et Choix Traduisant la Réalité) fue desarrollado en 1968 y presentó algunos aspectos originales: (i) Las nociones de concordancia y discordancia que fueron aplicadas a MCDM; (ii) No aceptación de la compensación absoluta entre criterios y valores, presente en la teoría de la utilidad; (iii) Se iniciaron extensiones del concepto de criterio; y (iv) se asumió la incomparabilidad, produciendo estructuras de preferencia parciales.

Con estas ideas, la ayuda a la decisión pasó a estar más próxima al decisor, quizás más respetuosa de su libertad y de su habilidad para estructurar las preferencias. Sin embargo, en el resto de esta comunidad científica la utilidad esperada es todavía y seguramente lo seguirá siendo, una línea dominante de investigación para el caso mono y multiatributo.

Esto justifica que diversas herramientas prácticas o software deben desarrollarse, eludiendo los principales inconvenientes de las escuelas Americana o Francesa y tomando las ventajas de una combinación de las buenas ideas de ambas escuelas.

Por otra parte, la escuela Americana aunque pueda ser más fácilmente criticada, ya que revela una teoría fuerte y exigente, la escuela Francesa paga por su creatividad una falta de fundamento teórico. Esta falta puede inducir de manera peligrosa al mal uso de sus modelos y métodos con prescripciones inadecuadas.

En esta memoria tratamos los problemas multiobjetivo con información parcial sobre la estructura de preferencias del decisor, que vendrá representada por una función vectorial de preferencia, definida del espacio de objetivos en un espacio vectorial, reflejando la imprecisión sobre la verdadera pero desconocida función escalar de preferencia. El aumento de información sobre la estructura de preferencias del decisor se llevará a cabo con la forma de interacción: "Comparación de pares de vectores".

Proponemos métodos interactivos, que serán de ayuda al decisor en su difícil tarea de tomar decisiones. Estos algoritmos interactivos pertenecen a los grupos de: "Métodos de reducción de la región factible" y "Métodos de ponderaciones para los criterios".

La presente memoria la estructuramos en tres partes.

La primera trata el problema de decisión multicriterio en ambiente de certidumbre, con información parcial sobre las preferencias del decisor representada por una función de valor vectorial. Consideramos una agregación aditiva de sus componentes e información parcial sobre las constantes de escala del decisor. La información sobre las constantes estará definida por restricciones en la forma de un cono poliédrico y definiremos una nueva función de valor vectorial basándonos en los generadores de dicho cono.

Desarrollaremos caracterizaciones del conjunto de valor eficiente que nos servirán como base para construirle aproximaciones inferior y superior. Posteriormente, introduciremos un conjunto de aproximación al conjunto de valor eficiente que se puede obtener computacionalmente de una forma más sencilla. Se demuestran propiedades de encaje y convergencia, y proponemos métodos interactivos basados en dicho conjunto.

La segunda parte trata el problema de decisión multicriterio en ambiente de incertidumbre, con información parcial sobre las preferencias del decisor representada por una función de utilidad vectorial. Consideramos, igual que en la parte anterior, una agregación aditiva de sus componentes è información parcial sobre las constantes de escala del decisor.

Se desarrolla el concepto de utilidad eficiente para identificar estrategias de utilidad eficiente cuando la información sobre las constantes de escala está en la forma de un cono poliédrico. Una caracterización del conjunto de utilidad eficiente en términos de una nueva función de utilidad vectorial definida basándonos en los generadores del cono poliédrico nos proporciona una forma práctica de obtener tales estrategias de utilidad eficiente. Proponemos un método interactivo basado en la asignación de las constantes de escala a través de comparaciones de pares de elementos por parte del decisor. El método se complementa, si fuese necesario, con un procedimiento que reduce el conjunto de utilidad eficiente para ayudar en el proceso de búsqueda de una estrategia final. Todos los conceptos y resultados que aparecen en certidumbre, tienen su equivalente en el ambiente de incertidumbre.

La tercera parte, inicia la extensión de las anteriores al caso de ambiente difuso. Tratamos los problemas lineales biobjetivo difusos.

Finalmente, terminamos las memoria con un apartado de conclusiones, problemas abiertos y líneas de investigación futuras.

Capítulo 2

Ambiente de certidumbre

2.1 Aproximación inferior y superior del conjunto de valor eficiente

2.1.1 Introducción

Nuestro punto de partida es un problema de decisión multicriterio en ambiente de certidumbre, en que tenemos un conjunto de alternativas de decisión $x \in \mathcal{X}$, un conjunto finito de n criterios u objetivos definidos mediante una aplicación $z : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que hay que maximizar, con $z = (z_1, ..., z_n)$ y, además, existe información parcial sobre las preferencias del decisor en el espacio de objetivos $\mathcal{Z} = z(\mathcal{X})$. Esta información parcial está representada a través de una función de valor vectorial $\nu \equiv (\nu_1, ..., \nu_p) : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}^p$ (Roberts, 1972; Rietveld, 1980 y Rios-Insua, 1980), que representa un orden parcial estricto $\succ$ (irreflexivo y transitivo), tal que

$$z \succ z' \iff \nu(z) \geq \nu(z').$$

donde $\nu(z) \geq \nu(z')$ si y sólo si $\nu_i(z) \geqq \nu_i(z')$ para todo $i = 1, ..., p$ y existe j tal que $\nu_j(z) > \nu_j(z')$. Esta función vectorial ν puede considerarse como una forma de reflejar la falta de precisión sobre la verdadera (pero desconocida) función de valor escalar del decisor y resulta muy apropiada en las estructuras de tipo jerárquico que, con frecuencia, presentan los problemas bien definidos de decisión multicriterio (Keeney y Raiffa, 1976). Además, desde un punto de vista práctico puede resultar, en general, mucho más fácil asignar las funciones componentes de ν, que una función escalar global, debido tanto a la agrupación natural de las ν_i en ν atendiendo a la homogeneidad de los criterios, como al número más reducido de criterios que posiblemente se tendrán en cada componente.

El planteamiento anterior conduce al problema de optimización vectorial

$$\begin{array}{ll} \max & \nu(z) \\ \text{sa:} & z \in \mathcal{Z} \end{array} \tag{2.1}$$

a partir del cual resulta natural considerar, como conjunto donde el decisor debe buscar su solución, el que denominamos conjunto de valor eficiente

$$\mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu) = \{z \in \mathcal{Z} \; : \; \nexists \, z' \in \mathcal{Z} \; : \; \nu(z') \geq \nu(z)\}$$

que verifica

$$\mathcal{E}(\mathcal{X}, z) \supseteq z^{-1}(\mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu)) = \{x \in \mathcal{X} \; : \; z(x) \in \mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu)\}$$

suponiendo que la función z sea creciente en $\mathbb{R}^n_+$ (Yu, 1985). Es, precisamente, en el conjunto $\mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu)$ donde el decisor debe hacer su elección de la solución más preferida.

Si el problema de optimización vectorial (2.1) tuviera una única solución z', entonces $\mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu) = \{z'\}$, y puede considerarse como la solución del problema de decisión. Sin embargo, este no es el caso en la mayoría de las situaciones prácticas, donde el conjunto de valor eficiente, generalmente, es un conjunto con un número muy grande de elementos. Además, la generación del conjunto de valor eficiente no puede considerarse como la resolución de un problema de decisión, porque no proporciona al decisor, en general, un número razonablemente pequeño de alternativas de decisión entre las que poder elegir. Por tanto, el proceso de solución del problema debería reformularse como sigue:

"seleccionar un único elemento del conjunto $\mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu)$".

El problema de decisión enunciado en esta forma puede considerarse insuficientemente estructurado y, usualmente, no puede resolverse sin añadir algunos supuestos estructurales. Estas suposiciones pueden añadirse de diferentes formas. Una de ellas, es imponer nuevas condiciones matemáticas, que conduzcan finalmente a un preorden lineal del conjunto $\mathcal{Z}$. Otra forma, favorecida por el aumento de información sobre la estructura de preferencia del decisor, es restringir sucesivamente el conjunto $\mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu)$ al ir obteniendo nueva información en un proceso interactivo entre el decisor y el analista de decisiones. Este segundo camino, que se adapta a la filosofía subyacente a los métodos interactivos, es el que seguimos en esta memoria.

2.1.2 Caracterizaciones del conjunto de valor eficiente

Vamos a ver en este apartado algunas caracterizaciones del conjunto de valor eficiente basadas en la función de valor vectorial ν que, posteriormente, se utilizarán para obtener soluciones de valor eficiente y desarrollar algoritmos interactivos basados en ellas. Nos han servido como punto de partida el artículo de Soland (1979) y el libro de Yu (1985), pero considerando aquí los conceptos de función de valor vectorial y de conjunto de valor eficiente.

Comenzamos introduciendo la nomenclatura y definiciones que utilizamos a lo largo de este capítulo. Denotaremos como:

$int(\mathbb{R}^n_+)$ - el interior del ortante no negativo de $\mathbb{R}^n$.

$\bar{\mathbb{R}}^n_+$ - el ortante no negativo de $\mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}^n_+$ - el ortante no negativo de $\mathbb{R}^n$ sin el origen.

Definición 2.1 Conjunto convexo. *Un conjunto $K \in \mathbb{R}^n$ se dice convexo si*

$$\lambda z^1 + (1-\lambda) z^2 \in K$$

para todo par $z^1, z^2 \in K$ y $\lambda \in [0,1]$.

Es inmediato probar que, si K es convexo toda combinación lineal

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i z^i \text{ pertenece a } K$$

con $z^i \in K$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geqq 0$, y recíprocamente.

La intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a un conjunto K se llama envoltura convexa de K, y se denota $Co(K)$.

Se demuestra fácilmente:

a) El mínimo conjunto convexo que contiene a K es $Co(K)$.

b) $Co(K)$ está formado por todas las combinaciones lineales finitas convexas de elementos de K.

Definición 2.2 Cono. *Un conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ se llama cono si $\lambda z \in K$, cuando $z \in K$ y $\lambda > 0$.*

Definición 2.3 Cono convexo. *Un cono convexo es un cono que a su vez es un conjunto convexo.*

Definición 2.4 Conjunto K-convexo. *Dado un conjunto $\mathcal{Z}$ y un cono convexo K en $\mathbb{R}^n$, se dice que $\mathcal{Z}$ es K-convexo, si $\mathcal{Z}+K$ es un conjunto convexo.*

Teorema 2.1 *Dada $\nu : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}^p$ función de valor vectorial, si $z^0 \in \mathcal{Z}$ maximiza $(\lambda\nu)(\cdot)$ en $\mathcal{Z}$, para algún $\lambda \in int(\mathbb{R}^p_+)$, entonces $z^0 \in \mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu)$.*

Demostración. Supongamos que $z^0 \in \mathcal{Z}$ maximiza $(\lambda\nu)(\cdot)$ en $\mathcal{Z}$, para algún $\lambda \in int(\mathbb{R}^p_+)$, pero $z^0 \notin \mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu)$. En tal caso existe $z^* \in \mathcal{Z}$ tal que $\nu(z^*) \geq \nu(z^0)$ y, para el λ anterior (y cualquier $\lambda \in int(\mathbb{R}^p_+)$), se verificará $(\lambda\nu)(z^*) > (\lambda\nu)(z^0)$, que contradice la hipótesis. □

Este teorema permite, por variación paramétrica de los vectores de pesos λ, determinar puntos del conjunto $\mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu)$. Lo que no asegura es que todas las soluciones de valor eficiente las podamos generar con el apoyo del anterior resultado.

A continuación enunciamos una generalización del teorema anterior.

Teorema 2.2 *Dada $\nu : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}^p$ función de valor vectorial, si $z^0 \in \mathcal{Z}$ maximiza de forma única $(\lambda\nu)(\cdot)$ en $\mathcal{Z}$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}^p_+$, entonces $z^0 \in \mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu)$.*

Demostración. Sea $z^0 \in \mathcal{Z}$ el punto que maximiza de forma única $(\lambda\nu)(\cdot)$ en $\mathcal{Z}$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}^p_+$. Suponiendo que $z^0 \notin \mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu)$ tenemos que existe $z^* \in \mathcal{Z}$ tal que $\nu(z^*) \geq \nu(z^0)$ y, para el λ anterior, $(\lambda\nu)(z^*) \geqq (\lambda\nu)(z^0)$, que contradice la hipótesis de unicidad. □

En el siguiente resultado, obtenemos una condición necesaria que deben cumplir las soluciones de valor eficiente, cuando el conjunto de objetivos y la función de valor verifican ciertas propiedades matemáticas.

Teorema 2.3 *Si $\mathcal{Z}$ es un conjunto convexo y cada $\nu_i(\cdot)$, $i = 1, ..., p$ es cóncava o $\nu(\mathcal{Z})$ es $\bar{\mathbb{R}}^p_-$-convexo, entonces para que $z^0 \in \mathcal{Z}$ pertenezca a $\mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu)$ es necesario que z^0 maximice $(\lambda\nu)(\cdot)$ en $\mathcal{Z}$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}^p_+$.*

La demostración se tiene de los dos teoremas siguientes.

Teorema 2.4 *Si cada $\nu_i(\cdot)$, $i = 1, ..., p$ es concava sobre un conjunto convexo $\mathcal{Z}$, entonces $V = \{\nu(z) : z \in \mathcal{Z}\}$, donde $\nu(z) \equiv (\nu_1(z), ..., \nu_p(z))$, es $\bar{\mathbb{R}}^p_-$-convexo.*

Demostración. Sea $y^k = \nu(z^k) + h^k$ para $k = 1, 2$; $z^k \in \mathcal{Z}$ y $h^k \in \bar{\mathbb{R}}^p_-$. Para algún $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda y^1 + (1-\lambda)y^2 = \lambda\nu(z^1) + (1-\lambda)\nu(z^2) + \lambda h^1 + (1-\lambda)h^2 \leqq \nu(\lambda z^1 + (1-\lambda)z^2) + \lambda h^1 + (1-\lambda)h^2 \in V + \bar{\mathbb{R}}^p_-$. Así, $V + \bar{\mathbb{R}}^p_-$ es un conjunto convexo, es decir, V es $\bar{\mathbb{R}}^p_-$-convexo. □

Teorema 2.5 *Si V es $\bar{\mathbb{R}}^p_-$-convexo, entonces una condición necesaria para que $v^0 \in V$ sea un elemento eficiente es que v^0 maximice λv sobre V para algún $\lambda \in \mathbb{R}^p_+$.*

Demostración. Si v^0 es un elemento eficiente de V, también lo es de $V + \bar{\mathbb{R}}^p_-$. Esto implica que $0 = v^0 - v^0$ es un elemento eficiente de $(V - v^0) + \bar{\mathbb{R}}^p_-$. Así, $(V - v^0) + \bar{\mathbb{R}}^p_- \cap \mathbb{R}^p_+ = \emptyset$. Ya que $(V - v^0) + \bar{\mathbb{R}}^p_-$ y $\mathbb{R}^p_+$ son conjuntos convexos, por el teorema de separación de conjuntos convexos existe $\lambda \neq 0$ tal que

$$\lambda v \geqq 0 \quad \text{para todo} \quad v \in \mathbb{R}_+^p \;\; y \tag{2.2}$$

$$\lambda v \leqq 0 \quad \text{para todo} \quad v \in (V - v^0) + \bar{\mathbb{R}}_-^p \tag{2.3}$$

Por tanto, (2.2) implica que $\lambda \in \mathbb{R}_+^p$, y (2.3) implica que $\lambda(v - v^0) \leqq 0$ para todo $v \in V$, o v^0 maximiza λv sobre V, que es lo que se pretendía probar. □

Es interesante notar que dada una función de valor vectorial, los puntos que maximizan de forma única cada función componente individualmente son eficientes. En este sentido tenemos

Teorema 2.6 *Dada $\nu : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^p$ función de valor vectorial. Si $z^0 \in \mathcal{Z}$ es tal que maximiza de forma única $\nu_i(\cdot)$ en $\mathcal{Z}$ para algún $i \in \{1, ..., p\}$, entonces $z^0 \in \mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu)$.*

Demostración. Sea z^0 el único punto que maximiza la componente $\nu_i(\cdot)$ de $\nu(\cdot)$ en $\mathcal{Z}$. Supongamos que $z^0 \notin \mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu)$. Entonces, existe $z' \in \mathcal{Z}$ con $\nu(z') \geq \nu(z)$. Luego $\nu_i(z') \geqq \nu_i(z)$, que contradice la hipótesis de unicidad. □

Teorema 2.7 *Dada $\nu : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^p$ función de valor vectorial y z^0 tal que existe $i \in \{1, ..., p\}$ con*

$$\nu_i(z^0) = \max_{z \in \mathcal{Z}} \nu_i(z)$$

entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^p$ *tal que*

$$(\lambda\nu)(z^0) = \max_{z \in \mathcal{Z}} (\lambda\nu)(z)$$

Demostración. Supongamos que para todo $\lambda \in \mathbb{R}_+^p$ existe $z \in \mathcal{Z}$ tal que $(\lambda\nu)(z^0) < (\lambda\nu)(z)$. Entonces, tomando el vector de $\mathbb{R}_+^p$ con todas sus componentes cero exceptuando la del lugar i que vale uno obtenemos que existe $z \in \mathcal{Z}$ tal que $\nu_i(z^0) < \nu_i(z)$. Contradicción con la definición de z^0. □

Hemos visto condiciones necesarias y condiciones suficientes para que una solución sea de valor eficiente. En el siguiente teorema vemos ambos tipos de condiciones simultáneamente.

Teorema 2.8 *Dada* $\nu : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^p$ *función de valor vectorial y* $\lambda \in int(\mathbb{R}_+^p)$ *arbitrario. Entonces* $z^0 \in \mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu)$ *si y sólo si* z^0 *maximiza* $(\lambda\nu)(\cdot)$ *en* $\mathcal{Z}$ *para algún* $a \in \mathbb{R}^p$ *con* $\nu(z^0) \geqq a$.

Demostración. Supongamos que z^0 maximiza $(\lambda\nu)(\cdot)$ en $\mathcal{Z}$ para algún $a \in \mathbb{R}^p$ con $\nu(z^0) \geqq a$ pero $z^0 \notin \mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu)$. En tal caso, existe $z' \in \mathcal{Z}$ con $\nu(z') \geq \nu(z^0)$. Así, $(\lambda\nu)(z') > (\lambda\nu)(z^0)$ con $\nu(z') \geqq a$, lo que contradice que z^0 sea máximo.

Para demostrar la otra implicación, sea $z^0 \in \mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu)$, pero z^0 no maximiza $(\lambda\nu)(\cdot)$ en $\mathcal{Z}$ con $\nu(z^0) = a$. En tal caso debe existir $z' \in \mathcal{Z}$ con $\nu(z') \geqq a = \nu(z^0)$ y $(\lambda\nu)(z') > (\lambda\nu)(z^0)$. De estas dos desigualdades se obtiene que $\nu(z') \geq \nu(z^0)$. Contradicción con que $z^0 \in \mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu)$. □

Para saber si una solución particular z^0 es de valor eficiente, podemos aplicar los teoremas anteriores. Para generar todo el conjunto de valor eficiente, debemos usar técnicas de programación matemática adecuadas, y variar el parámetro a del teorema 2.8 o el λ del teorema 2.3 en rangos apropiados. Esto es, a debe variar de la cota inferior a la cota superior de $\nu(\cdot)$ en $\mathcal{Z}$, mientras que λ debe variar sobre $\mathbb{R}^p_+$.

Definición 2.5 *Sean $\lambda \in \bar{\mathbb{R}}^p_+$ y $K \subseteq \bar{\mathbb{R}}^p_+$ conjunto convexo, definimos los conjuntos*

$$\begin{aligned} Z(\lambda) &= \{z^0 \in \mathcal{Z} : z^0 \text{ maximiza } (\lambda\nu)(\cdot) \text{ en } \mathcal{Z}\} \\ Z(K) &= \bigcup_{\lambda \in K} \{Z(\lambda)\} \end{aligned}$$

Teorema 2.9 *Sea $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\nu : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^p$ función de valor vectorial, entonces*

$$Z(K) \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu)$$

para $K \equiv int(\mathbb{R}^p_+)$.

Demostración. Se sigue del teorema 2.1. □

Teorema 2.10 *Sea $\mathcal{Z}$ un conjunto convexo y cada $\nu_i(\cdot)$, $i = 1, ..., p$, es cóncava o $\nu(\mathcal{Z})$ es $\bar{\mathbb{R}}^p_-$-convexo, entonces*

$$Z(K) \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu) \subseteq Z(K')$$

donde $K \equiv int(\bar{\mathbb{R}}^p_+)$ y $K' \equiv \bar{\mathbb{R}}^p_+$.

Demostración. Se sigue de los teoremas 2.1 y 2.3. □

A $Z(K)$, con $K \equiv int(\mathbb{R}_+^p)$, se llamará *aproximación inferior del conjunto de valor eficiente* $\mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu)$ y a $Z(K')$, con $K' \equiv \mathbb{R}_+^p$, *aproximación superior del conjunto de valor eficiente.*

Estos conjuntos, permiten por variación paramétrica aproximar el conjunto eficiente, $\mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu)$, y determinar puntos de él resolviendo problemas de programación matemática.

2.1.3 Generalización de la aproximación inferior y superior del conjunto de valor eficiente

Una forma de reducir el conjunto de valor eficiente consiste en considerar una nueva función de valor vectorial (o eventualmente escalar), que puede llevar a una reducción de la dimensión del espacio de criterios u objetivos y, por tanto, del conjunto eficiente (Rios et al., 1989). Otra posibilidad en la que también el analista trata de obtener más información sobre la estructura de preferencias del decisor, que puede conducir a una nueva reducción del conjunto de valor eficiente y así sucesivamente, hasta llegar a una reducción tal que al decisor le sea posible tomar la decisión final con el mínimo esfuerzo y con el menor riesgo a equivocación, consiste en considerar sobre el espacio de criterios de primer orden (o de otro orden cualquiera) otra función de valor vectorial más precisa con la consiguiente reducción.

La obtención de mayor información sobre la estructura de preferencia del decisor se va a traducir, como veremos, en conos más amplios en el espacio imagen que nos van a permitir, mediante un algoritmo, alcanzar la reducción aludida.

Recordemos que en el apartado anterior considerábamos, en el planteamiento de información parcial sobre las preferencias, una función de valor vectorial $\nu : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}^p$ que, nos lleva a considerar el conjunto de valor eficiente, $\mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu)$ que, intuitivamente, se corresponde con la consideración de $K_*^0 = K^0 \cap S_p$ ($K^0 \equiv \bar{\mathbb{R}}_+^p$ y S_p el simplex de $\mathbb{R}^p$) contenido en el ortante fundamental $\bar{\mathbb{R}}_+^p$ y que va a representar la mínima información sobre las preferencias del decisor (cuanto más de cada componente mejor) para esa función de valor vectorial, ν, obtenida.

Es intuitivo que es posible aumentar la información considerando conos de información más amplios que el K^0, lo que se va a traducir, como veremos, en una reducción del conjunto eficiente y, eventualmente, en una situación límite si tal cono se convierte en un hiperplano. En este caso tendremos una función de valor escalar, llegando así a lo que denominamos situación de decisión con información completa.

Este desarrollo teórico nos va a permitir proponer un método de decisión multicriterio interactivo, que se complementa, en todo caso, con el de Ríos (1980) y Ríos et al. (1989), ya que su aplicación podría ser en cualquiera de las etapas del método secuencial de funciones de valor vectorial.

También aplicaremos este esquema al conjunto de aproximación al conjunto de valor eficiente, $\mathcal{A}(\mathcal{Z}, \nu)$, que estudiamos en un epígrafe posterior.

A continuación introducimos algunas definiciones sobre conos. En lo que sigue asumiremos que estos son convexos, constantes, cerrados y agudos.

Definición 2.6 Cono apuntado. *Un cono K se dice apuntado si $-z \notin K$ cuando $z \neq 0$ y $z \in K$. Equivale a decir que K no contiene subespacios no triviales.*

Definición 2.7 Cono agudo. *Se dice que un cono K es agudo si existe un* *semiespacio abierto H tal que $H \cup \{0\}$ contiene a la $cl(K)$.*

Se demuestra:

c) Si K es un cono convexo, es agudo si y sólo si $cl(K)$ es apuntado. Si K es un cono cerrado y convexo, es agudo si y sólo si es apuntado.

Definición 2.8 Polar. *Dado $\mathcal{Z} \subseteq I\!R^n$, diremos que $\mathcal{Z}^p$ es su polar si*

$$\mathcal{Z}^p = \{z^* \in I\!R^n : \; z^*z \geqq 0 \; para \; todo \; z \in \mathcal{Z}\}$$

Definición 2.9 Polar estricto. *Dado $\mathcal{Z} \subseteq I\!R^n$, diremos que $\mathcal{Z}^{pe}$ es su polar estricto si es*

$$\mathcal{Z}^{pe} = \{z^* \in I\!R^n : \; z^*z > 0 \; para \; todo \; z \in \mathcal{Z}\}$$

Se demuestra:

d) $\mathcal{Z}^p$ y $\mathcal{Z}^{pe}$ son conos convexos y, además, $\mathcal{Z}^p$ es cerrado.

e) Si K es un cono convexo y cerrado, es $K^{pe} = int(K^p)$, y estos conjuntos son no vacíos si y sólo si K es apuntado.

Definición 2.10 Cono de información nula. *Llamaremos cono de información nula K^0 al ortante no negativo de $I\!R^p$, es decir, $K^0 \equiv \bar{I\!R}^p_+$.*

Definición 2.11 Cono de información. *Llamaremos cono de información a cualquier cono que contenga al cono de información nula.*

Introducimos ahora la definición de conjunto de información que contendrá los pesos con los que se agregan las componentes de la función de valor en una función aditiva.

Definición 2.12 Conjunto de información. *Llamaremos conjunto de información asociado a un cono de información K a*

$$K_* = K^p \cap S_p$$

donde S_p es el simplex de $\mathbb{R}^p$.

Se demuestra que si K^p es un cono poliédrico, es posible determinar su conjunto de generadores (Tamura, 1976), que normalizados se denotarán por $\{k^1, ..., k^q\}$.

Dada la función de valor vectorial $\nu : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^p$, ya hemos visto que se corresponde con el cono de información nula, K^0. Si tenemos un cono de información K, su conjunto de información K_*, estará generado por un conjunto finito de elementos, $\{k^1, ..., k^q\}$, es decir, $K_* = \{k : k = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i k^i, \ \alpha_i \geqq 0, \ \sum_{i=1}^{q} \alpha_i = 1\}$ y lo denotaremos como $K_* = G\{k^1, ..., k^q\}$.

Ahora, extendemos la noción de función de valor vectorial considerando una función de valor vectorial más precisa cuyas componentes son composiciones aditivas ponderadas con constantes definidas en términos de restricciones dadas por conos que representan información revelada por el decisor. De esta forma podemos expresar que la nueva función de valor vectorial, dado el cono de información K, viene dada por

$$\nu^K(z) = ((k^1\nu)(z), ..., (k^q\nu)(z))$$

y será posible considerar de nuevo el conjunto de valor eficiente asociado a dicha función de valor vectorial, $\varepsilon(\mathcal{Z}, \nu^K)$, siendo

$$\mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu^K) = \{z \in \mathcal{Z} \ : \nexists z' \in \mathcal{Z}, \text{ con } \nu^K(z') \geq \nu^K(z)\}$$

En particular, notemos que si $K = K^0$, se verifica $\nu^{K^0} = \nu$ pues $K_*^0 = G\{(1,0,...,0),(0,1,0,...,0),...,(0,...,0,1)\}$. Por tanto, $\mathcal{E}(\mathcal{Z},\nu^{K^0}) \equiv \mathcal{E}(\mathcal{Z},\nu)$.

Probaremos que dada ν, si es posible obtener más información, en términos de un nuevo cono de información K, entonces el conjunto de valor eficiente respecto de ν^K es más reducido que el original asociado a ν. Así, un aumento en la información sobre las preferencias del decisor puede llevar consigo una disminución en el conjunto de puntos de interés para el decisor, es decir, en el conjunto de valor eficiente.

Teorema 2.11 *Sea $\nu : \mathcal{Z} \to I\!R^p$ una función de valor vectorial y K un cono de información tal que $K_* \subseteq int(K_*^0)$, entonces*

$$\mathcal{E}(\mathcal{Z},\nu^K) \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{Z},\nu)$$

Demostración. Sean $K_* = G\{k^1,...,k^q\}$ y $z^0 \in \mathcal{E}(\mathcal{Z},\nu^K)$. Supongamos que $z^0 \notin \mathcal{E}(\mathcal{Z},\nu)$ entonces existe $z \in \mathcal{Z}$ tal que $\nu(z) \geq \nu(z^0)$. Por tanto, $\nu^K(z) > \nu^K(z^0)$ ya que todas las componenetes de los generadores de K_* son positivos. Contradicción con la hipótesis de que $z^0 \in \mathcal{E}(\mathcal{Z},\nu^K)$. □

El contenido recíproco no es cierto, como se puede ver en el siguiente ejemplo:

Sea

$$\mathcal{Z} = \{(8,2),(1,10),(6,3),(5,9),(1,1)\}$$

y

$$\nu(z) = (\nu_1(z),\nu_2(z)) = (z_1,z_2).$$

Entonces el conjunto de valor eficiente para ν es

$$\mathcal{E}(\mathcal{Z},\nu) = \{(8,2),(1,10),(6,3),(5,9)\}.$$

Si el conjunto de información es $K_* = G\{k^1, k^2\}$, donde $k^1 = (3/4, 1/4)$ y $k^2 = (1/4, 3/4)$, entonces

$$\nu^K(z) = ((k^1\nu)(z),(k^2\nu)(z)) = (3/4z_1 + 1/4z_2, 1/4z_1 + 3/4z_2).$$

Por tanto,

$$\mathcal{E}(\mathcal{Z},\nu^K) = \{(8,2),(5,9)\}.$$

Claramente se puede observar que $\mathcal{E}(\mathcal{Z},\nu^K) \not\supseteq \mathcal{E}(\mathcal{Z},\nu)$. □

Veamos ahora que obtenida ν^K, si el decisor proporciona nuevamente más información en términos de un nuevo cono de información K', tal que $K'_* \subseteq int(K_*)$, entonces el nuevo conjunto de valor eficiente $\mathcal{E}(\mathcal{Z},\nu^{K'})$ está contenido en el precedente, de manera que el resultado que sigue establece el principio de aproximación del método que posteriormente desarrollamos.

Teorema 2.12 *Sea $\nu : \mathcal{Z} \to I\!R^p$ una función de valor vectorial y K, K' conos de información tales que $K'_* \subseteq int(K_*)$, entonces*

$$\mathcal{E}(\mathcal{Z},\nu^{K'}) \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{Z},\nu^K)$$

Demostración. Sean $K_* = G\{k^1,...,k^r\}$ y $K'_* = G\{k'^1,...,k'^s\}$. Como $K'_* \subseteq int(K_*)$ existen constantes $\alpha_i^j > 0$, con $i \in \{1,...,r\}$ y $j \in \{1,...,s\}$, tal que $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i^j = 1$ para todo $j \in \{1,...,s\}$, verificándose $k'^j = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^j k^i$ para todo $j \in \{1,...,s\}$.

Sea $z^0 \in \mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu^{K'})$. Supongamos que $z^0 \notin \mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu^K)$ entonces existe $z \in \mathcal{Z}$ tal que $\nu^K(z) \geq \nu^K(z^0)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\nu^{K'}(z) &= ((k'^1\nu)(z), ..., (k'^s\nu)(z)) = \\
&= \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i^1 (k^i\nu)(z), ..., \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^s (k^i\nu)(z)\right) > \\
&> \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i^1 (k^i\nu)(z^0), ..., \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^s (k^i\nu)(z^0)\right) = \\
&= ((k'^1\nu)(z^0), ..., (k'^s\nu)(z^0)) = \nu^{K'}(z^0).
\end{aligned}$$

Contradicción con la hipótesis de que $z^0 \in \mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu^{K'})$. □

Vamos a establecer un resultado sobre convergencia, que viene a expresar que si se tiene una sucesión creciente de conos de información que converge a un hiperplano H, entonces la sucesión correspondiente de conjuntos de valor eficiente converge al conjunto de valor óptimo, dado por la función de valor escalar $(p\nu)(\cdot)$ con p vector normal al hiperplano H, es decir, al conjunto

$$Opt(\mathcal{Z}, p\nu) = \{z \in \mathcal{Z} : \ z \text{ maximiza } (p\nu)(\cdot) \text{ en } \mathcal{Z}\} \ .$$

Esta idea lleva al principio de convergencia del proceso que queda establecido en el siguiente

Teorema 2.13 *Sea $\nu : \mathcal{Z} \to I\!R^p$ una función de valor vectorial y $\{K^n\}_{n \in I\!N}$ una sucesión creciente de conos de información tal que K_*^n, converge a un vector p. Si $z^0 \in \mathcal{Z}$ es tal que $z^0 \in \mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu^{K^n})$ para todo $n = 1, 2, ...,$ entonces $z^0 \in Opt(\mathcal{Z}, p\nu)$.*

Demostración. Como $K_*^n \searrow p$, para cada $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que para todo $n \geqq n_0$ los generadores de K_*^n distan de p menos de ε.

Sea $z^0 \in \mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu^{K^n})$ para todo $n = 1, 2, ...,$ entonces no existe $z \in \mathcal{Z}$ tal que $\nu^{K^n}(z) \geq \nu^{K^n}(z^0)$ para todo $n = 1, 2, ...,$ es decir,

$$\begin{array}{rcl}(k_1^n\nu)(z) & \geqq & (k_1^n\nu)(z^0) \\ & \vdots & \\ (k_r^n\nu)(z) & \geqq & (k_r^n\nu)(z^0)\end{array}$$

para todo $n = 1, 2, ...,$ con alguna desigualdad estricta, siendo $K_*^n = \mathrm{G}\{k_1^n, ..., k_r^n\}$. Supongamos que la desigualdad i-ésima es la estricta, entonces $(k_i^n\nu)(z) > (k_i^n\nu)(z^0)$. Considerando n suficientemente grande, la anterior desigualdad nos dice que no existe $z \in \mathcal{Z}$ tal que $(p\nu)(z) > (p\nu)(z^0)$, es decir, $z^0 \in Opt(\mathcal{Z}, p\nu)$. □

Si consideramos el caso más general en el cual para cada componente de la función de valor vectorial ν tenemos un cono de información, en lugar de un cono general para toda la función, podemos hablar de familias de conos.

Definición 2.13 Familia de conos de información nula. *Llamamos familia de conos de información nula a* $\underline{K}^0 = (K_1^0, ..., K_p^0)$ *si* $K_1^0 = ... = K_p^0 = K^0$.

Definición 2.14 Familia de conos de información. *Llamamos familia de conos de información a cualquier familia de conos* $\underline{K} = (K_1, ..., K_p)$*, tal que* $\underline{K}^0 \subseteq \underline{K}$*. (es decir,* $K^0 \subseteq K_1$*,...,* $K^0 \subseteq K_p$*).*

Definición 2.15 *Dada dos familias de conos de información* $\underline{K} = (K_1, ..., K_p)$ *y* $\underline{K}' = (K_1', ..., K_p')$*, decimos que* $\underline{K} \subseteq \underline{K}'$ *si* $K_i \subseteq K_i'$ *para todo* $i = 1, ..., p$.

Definición 2.16 Cono común. *Sea $\underline{K} = (K_1, ..., K_p)$ una familia de conos de información. Definimos para $\underline{K}$ el cono común como*

$$K = \bigcap_{i=1}^{p} K_i$$

Definición 2.17 Conjunto de información asociado a una familia de conos de información. *Dada una familia de conos de información $\underline{K} = (K_1, ..., K_p)$, donde K es el cono común, entonces el conjunto de información asociado al cono K, denotado K_*, se llama conjunto de información asociado a la familia de conos de información $\underline{K}$.*

Vamos a presentar los resultados anteriores, en términos de la monotonía de la función de valor vectorial en familias de conos de información que se contienen.

Teorema 2.14 *Sean $\underline{K}$ y $\underline{K}'$ familias de conos de información con $K'_* \subseteq int(K_*)$ y sea $\nu : \mathcal{Z} \to I\!R^p$ una función de valor vectorial. Entonces*

$$\mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu^{\underline{K}'}) \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu^{\underline{K}})$$

Demostración. Es análoga a la del teorema 2.12. □

Extendemos ahora la definición de $Z(K)$ al caso de familias de conos de información

Teorema 2.15 *Sean $\nu : \mathcal{Z} \to I\!R^p$ una función de valor vectorial y $\underline{K}$ una familia de conos de información tal que K_* es su conjunto de información. Si $z^0 \in Z(int(K_*))$ para algún $k' \in int(K_*)$, entonces $z^0 \in \mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu^{\underline{K}})$.*

Demostración. Sea $z^0 \in Z(int(K_*))$ para algún $k' \in int(K_*)$ pero $z^0 \notin \mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu^{\underline{K}})$. Si $z^0 \notin \mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu^{\underline{K}})$ entonces existe $z' \in \mathcal{Z}$ tal que

$$\begin{aligned}(k^1\nu)(z') &\geqq (k^1\nu)(z^0)\\ &\vdots\\ (k^r\nu)(z') &\geqq (k^r\nu)(z^0)\end{aligned}$$

con alguna desigualdad estricta, donde $K_* = G\{k^1, ..., k^r\}$.

Como $k' \in int(K_*)$ se tiene que existen $\alpha_i > 0$, con $i = \{1, ..., r\}$ tal que $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1$ verificando $k' = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i k^i$. Luego $(k'\nu)(z') > (k'\nu)(z^0)$. Contradicción con $z^0 \in Z(int(K_*))$ para algún $k' \in int(K_*)$. $\square$

Notemos que el teorema 2.9 es un caso particular de este en el cual $\underline{K} = (\mathbb{R}^p_+, ..., \mathbb{R}^p_+)$.

A $Z(int(K_*))$ lo denominamos *aproximación inferior del conjunto de valor eficiente para la función* $\nu^{\underline{K}}$.

Como consecuencia, vamos a ver que los puntos de $Z(\underline{K})$ para una función de valor en una familia $\underline{K}$ de conos de información son puntos del conjunto $\mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu)$.

Corolario 2.1 *Sea* $\nu : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^p$ *una función de valor vectorial y* $\underline{K} = (K_1, ..., K_p)$ *una familia de conos de información, entonces*

$$Z(\underline{K}) \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu)$$

Demostración. Por el teorema anterior

$$Z(\underline{K}) \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu^{\underline{K}}). \tag{2.4}$$

Por el teorema 2.14

$$\mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu^{\underline{K}}) \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu). \tag{2.5}$$

De (2.4) y (2.5) se obtiene el resultado. □

Para construir una aproximación superior del conjunto de valor eficiente para la función $\nu^{\underline{K}}$ es necesario que, tanto la función $\nu^{\underline{K}}$ como el espacio de objetivos verifiquen ciertos requisitos matemáticos, como vemos a continuación

Teorema 2.16 *Sean $\nu : \mathcal{Z} \to I\!R^p$ función de valor vectorial y $\underline{K}$ familia de conos de información tal que su conjunto de información es $K_* = G\{k^1, ..., k^q\}$. Si $\mathcal{Z}$ es un conjunto convexo y cada $\nu_i(\cdot)$, $i = 1, ..., p$ es cóncava o $\nu^{\underline{K}}(\mathcal{Z})$ es $\bar{I\!R}^q_-$-convexo, entonces para que $z^0 \in \mathcal{Z}$ sea de $\mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu^{\underline{K}})$ es necesario que $z^0 \in Z(I\!R^q_+)$.*

La demostración se sigue de los tres teoremas siguientes.

Teorema 2.17 *Sea $K_* = G\{k^1, ..., k^q\}$ el conjunto de información asociado a la familia de conos de información $\underline{K}$. Si todas las funciones $\nu_i(\cdot)$, con $i = 1, ..., p$, son cóncavas sobre el conjunto convexo $\mathcal{Z}$, entonces también lo son $(k^j\nu)(\cdot)$, con $j = 1, ..., q$, sobre $\mathcal{Z}$.*

Demostración. Sean $z^1, z^2 \in \mathcal{Z}$ y $\alpha \in [0, 1]$ entonces se verifica

$$(k^j\nu)(\alpha z^1 + (1-\alpha)z^2) = k^j\nu(\alpha z^1 + (1-\alpha)z^2) \geqq$$
$$\geqq k^j(\alpha\nu(z^1) + (1-\alpha)\nu(z^2)) = \alpha(k^j\nu)(z^1) + (1-\alpha)(k^j\nu)(z^2).$$

Es decir, $(k^j\nu)(\cdot)$, con $j = 1, ..., q$, es cóncava sobre $\mathcal{Z}$. □

Teorema 2.18 *Si cada* $(k^j \nu)(\cdot)$, *con* $j = 1, ..., q$, *es cóncava sobre un conjunto convexo* $\mathcal{Z}$, *entonces* $V = \{\nu^{\underline{K}}(z) : z \in \mathcal{Z}\}$, *donde* $\nu^{\underline{K}}(z) = ((k^1\nu)(z), ..., (k^q\nu)(z))$, *es* $\bar{\mathbb{R}}^q_-$*-convexo.*

Demostración. Análoga a la del teorema 2.4. □

Teorema 2.19 *Si* V *es* $\bar{\mathbb{R}}^q_-$*-convexo, entonces una condición necesaria para que* $v^0 \in V$ *sea un elemento eficiente es que* v^0 *maximice* λv *en* V *para algún* $\lambda \in \mathbb{R}^q_+$.

Demostración. Análoga a la del teorema 2.5. □

A $Z(\mathbb{R}^q_+)$ lo denominamos *aproximación superior del conjunto de valor eficiente para la función* $\nu^{\underline{K}}$.

A continuación proponemos un algoritmo basado en los resultados anteriores, que determina una aproximación al conjunto de valor eficiente a partir de un conjunto de información. En este procedimiento, las afirmaciones del decisor sobre las soluciones del conjunto de aproximación, sirven para eligir una solución o bien para una reducción del conjunto de información obteniendo una nueva aproximación al conjunto de valor eficiente y reiterándose el proceso hasta alcanzar una solución.

Inicialmente, el conjunto de información que se considera es el que se obtiene del cono poliédrico generado por los vectores $\{\lambda^1 = (1, \varepsilon, ..., \varepsilon), \lambda^2 = (\varepsilon, 1, \varepsilon, ..., \varepsilon), ..., \lambda^p = (\varepsilon, ..., \varepsilon, 1)\}$ con ε un número positivo próximo a cero (notar que, aproximadamente, se corresponden con los vectores extremos del ortante fundamental en $\mathbb{R}^p$), la media de los p vectores anteriores $\bar{\lambda} = (1/p, ..., 1/p)$ y la media de cada par λ^i, λ^j con $i \neq j$, $\lambda^{ij} = (\varepsilon, ..., \varepsilon, (1 +$

$\varepsilon)/2, \varepsilon, ..., \varepsilon, (1+\varepsilon)/2, \varepsilon, ..., \varepsilon)$, teniendo así un conjunto de $2p+1$ pesos, que se utilizan en el algoritmo para obtener los primeros $2p+1$ puntos de valor eficiente que se presentan al decisor para su evaluación. Denotemos a este conjunto de $2p+1$ pesos como σ^0.

2.1.4 Algoritmo

El algoritmo que muestra el método indicado es como sigue:

Paso 1. Identificar $\mathcal{Z}$ y ν.

Paso 2. Hacer $t = 0$, y considerar inicialmente el conjunto de pesos σ^0.

Paso 3. Resolver los problemas de programación matemática para cada $\lambda \in \sigma^t$,

$$\begin{array}{ll} \max & (\lambda\nu)(z) \\ \text{sa:} & z \in \mathcal{Z} \end{array}$$

y sea Z^t el subconjunto de $\varepsilon(\mathcal{Z}, \nu^{\sigma^t})$ que resulta de resolver tales problemas.

Paso 4. Se le presentan al decisor los puntos del conjunto Z^t para que determine el subconjunto Z_q^t (con al menos un elemento), de mayor interés. Si Z_q^t es unitario, fin. En caso contrario ir a 5.

Paso 5. Hacer $t = t+1$. Considerar el cono poliédrico σ_e^t determinado por los pesos extremos de σ^{t-1} asociados a puntos de valor eficiente de Z_q^{t-1}.

Paso 6. Calcular la media de los vectores extremos de σ_e^t y la media para cada par. Considerar el conjunto de pesos σ^t formado por los extremos de σ_e^t y los que se han calculado anteriormente en este paso. Ir a 3.

El algoritmo comienza identificando el espacio de objetivos, y construyendo la función de valor vectorial asociada a las preferencias del decisor. En el paso 2 se considera un conjunto de pesos que cubre las distintas posibilidades extremas para que, inicialmente en el paso 3 y suponiendo las preferencias crecientes para cada objetivo, tener un conjunto representativo de puntos de valor eficiente de $\mathcal{Z}$, respecto de la función ν. En el paso 4, se le presentan al decisor tales puntos para que él decida sobre aquellos que considera más adecuados respecto a sus preferencias. Entonces, se utilizan las respuestas para reducir el conjunto de información y, en el paso 6, generar pesos en ese cono reducido para volver al paso 3, determinar un nuevo conjunto de puntos de valor eficiente más pequeño y reiterar el proceso.

Notemos que, en la práctica, el algoritmo converge en un número finito de etapas.

Ejemplo

Consideremos el problema multiobjetivo con función de valor vectorial $\nu(z) = (z_1, z_2)$ y cuyo espacio de objetivos $\mathcal{Z}$ queda definido por las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} -2z_1 + 7z_2 &\leqq 105 \\ 3z_1 + 8z_2 &\leqq 157 \\ z_1 + z_2 &\leqq 29 \\ 5z_1 + 3z_2 &\leqq 127 \\ 4z_1 - 3z_2 &\leqq 80 \\ z_1, z_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

Supongamos que, en principio, la información proporcionada por el decisor es nula, es decir, tan sólo sabemos que "cuanto mayor sea el valor de cada componente de la función de valor vectorial mejor". Por tanto, se trata de ver si el punto ideal pertenece al espacio de objetivos ya que, entonces, habríamos terminado al ser esa la decisión óptima de nuestro problema. Pero el punto ideal $z^* = (z_1^*, z_2^*) = (23, 17)$ no pertenece a $\mathcal{Z}$. Luego, podemos aplicar el algoritmo anterior para ayudarle al decisor a encontrar la solución más satisfactoria.

En el paso 2, consideramos $t = 0$ y obtenemos que

$$\begin{aligned}\sigma^0 = \ & \{\lambda^1 = (1, 0.01),\ \lambda^2 = (0.01, 1),\ \lambda^m = (0.5, 0.5), \\ & \lambda^{1m} = (0.75, 0.255),\ \lambda^{2m} = (0.255, 0.75)\}.\end{aligned}$$

En el paso 3, resolvemos los problemas de programación matemática para cada λ^i con $i \in \{1, 2, m, 1m, 2m\}$, obteniendo el conjunto

$$\mathcal{Z}^0 = \{z^1 = (23, 4),\ z^2 = (7, 17),\ z^3 = (20, 9),\ z^4 = (23, 4),\ z^5 = (7, 17)\}$$

Como se puede observar, este conjunto posee tan sólo tres elementos diferentes, entre los cuales el decisor deberá elegir en el paso siguiente los que crea mejores.

Si en el paso 4 el decisor elige un único elemento, hemos terminado. Sin embargo, supongamos que prefiere z^1 y z^3 a z^2. Entonces,

$$\mathcal{Z}_q^0 = \{z^1 = (23, 4),\ z^3 = (20, 9)\}$$

En el paso 5 obtenemos

$$\sigma_e^1 = \{\lambda^1 = (1, 0.01),\ \lambda^m = (0.5, 0.5),\ \lambda^{1m} = (0.75, 0.255)\}.$$

En el paso 6 es

$$\sigma^1 = \{\lambda^1 = (1, 0.01),\ \lambda^2 = (0.5, 0.5),\ \lambda^m = (0.75, 0.255),$$
$$\lambda^{1m} = (0.875, 0.1325),\ \lambda^{2m} = (0.625, 0.3775)\}.$$

Reiteramos el proceso y volvemos al paso 3, donde obtenemos

$$\mathcal{Z}^1 = \{z^1 = (23,4),\ z^2 = (20,9),\ z^3 = (23,4),\ z^4 = (23,4),\ z^5 = (20,9)\}$$

Este conjunto posee sólo dos elementos diferentes. Por tanto, suponemos que el decisor en el paso 4 elige una de las dos posibles, terminando el proceso. □

2.2 Conjunto de aproximación al conjunto de valor eficiente

2.2.1 Introducción

En esta sección definimos un conjunto de aproximación al conjunto de valor eficiente y proponemos un método de ayuda a la decisión basado en dicho conjunto de aproximación. Tal conjunto de aproximación se puede reducir a través de un proceso interactivo basado en la extracción de preferencias del decisor y su traducción en términos de conos (familia de conos) poliédricos. Además, se demuestra la convergencia del método a una solución de valor eficiente cuando el cono (cono común) tiende a un hiperplano.

Debido a la dificultad que tiene la generación del conjunto de valor eficiente, especialmente en problemas continuos y/o no lineales, este método puede suponer una ayuda notable para el decisor, al ser necesario resolver inicialmente sólo un número reducido de problemas de optimización escalar para obtener el conjunto aproximado y, posteriormente, mediante un proceso de discretización y la interacción con el decisor en términos de preferencias, alcanzar una solución final.

2.2.2 Aproximación del conjunto eficiente para una función de valor vectorial con dos componentes

El caso que comenzamos tratando es el de los problemas de decisión con una función de valor vectorial de dos componentes. Tales problemas nos permiten tener una idea gráfica de lo que se pretende hacer, lo que va a ayudar a un mejor conocimiento del procedimiento. Posteriormente, consideramos la extensión a un número cualquiera de componentes, siendo tal extensión no trivial. Por tanto, suponemos que la función de valor vectorial está definida de $\mathcal{Z} = z(\mathcal{X})$ en $\mathbb{R}^2$, es decir, que tenemos $\nu : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\nu \equiv (\nu_1, \nu_2)$. Además, sean

$$z_1^* \text{ tal que } \max_{z \in \mathcal{Z}} \nu_1(z) = \nu_1(z_1^*) = v_1^*$$

$$z_2^* \text{ tal que } \max_{z \in \mathcal{Z}} \nu_2(z) = \nu_2(z_2^*) = v_2^*$$

y denotamos $\nu_1(z_2^*) = v_{1*}$ y $\nu_2(z_1^*) = v_{2*}$, que constituyen las componentes de lo que se conoce como *punto nadir* . Con estas hipótesis introducimos la siguiente

Definición 2.18 Conjunto de aproximación al conjunto de valor eficiente. *Dada ν función de valor vectorial tal que $\nu \equiv (\nu_1, \nu_2)$, se define el conjunto de aproximación al conjunto de valor eficiente como:*

$$\mathcal{A}(\mathcal{Z}, \nu) = \{z \in \mathcal{Z} : \ \nu_1(z) \geqq v_{1*} \ y \ \nu_2(z) \geqq v_{2*}\}$$

Este conjunto, $\mathcal{A}(\mathcal{Z}, \nu)$, contiene al conjunto de valor eficiente, $\mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu)$, como se prueba en el siguiente

Teorema 2.20 *Dada $\nu : \mathcal{Z} \to I\!R^2$ función de valor vectorial con $\mathcal{Z} \subset I\!R^n$. entonces*

$$\mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{Z}, \nu).$$

Demostración. Supongamos que $z^0 \in \mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu)$ pero $z^0 \notin \mathcal{A}(\mathcal{Z}, \nu)$. Si $z^0 \notin \mathcal{A}(\mathcal{Z}, \nu)$ entonces $\nu_1(z^0) < \nu_1(z_2^*)$ o $\nu_2(z^0) < \nu_2(z_1^*)$ o ambos.

Si $\nu_1(z^0) < \nu_1(z_2^*)$, por la definición de z_2^* tenemos $\nu_2(z^0) \leqq \nu_2(z_2^*)$. De ambas desigualdades obtenemos $z^0 \notin \varepsilon(\mathcal{Z}, \nu)$, pero esto es un contradicción con la hipótesis.

Si $\nu_2(z^0) < \nu_2(z_1^*)$, por definición de z_1^* tenemos que $\nu_1(z^0) \leqq \nu_1(z_1^*)$. De nuevo, de ambas desigualdades, obtenemos la misma contradicción.

Finalmente, si ambas desiguadades son ciertas, la demostración es análoga. $\square$

Así, aunque el conjunto de aproximación siempre contiene al de valor eficiente puede ser, sin embargo, demasiado grande como para que el decisor elija en él. Por ello, parece razonable pensar en un procedimiento interactivo que permita su reducción progresiva.

Como vemos en los resultados que siguen podemos afirmar que el conjunto de aproximación, $\mathcal{A}(\mathcal{Z}, \nu^K)$, al conjunto de valor eficiente será más reducido al aumentar el cono de información.

Teorema 2.21 *Dada $\nu : \mathcal{Z} \to I\!R^2$ función de valor vectorial y el cono de información K tal que $K_* \subseteq int(K^0)$, entonces*

$$\mathcal{A}(\mathcal{Z}, \nu^K) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{Z}, \nu^{K^0})$$

Demostración. Denotemos por z_1^*, z_2^* los puntos donde las funciones $\nu_1(\cdot), \nu_2(\cdot)$ alcanzan su valor máximo, respectivamente. Sea $z^0 \in \mathcal{A}(\mathcal{Z}, \nu^K)$ y $K_* = G\{k^1, k^2\}$, tal que $k^1 = (k_1^1, k_2^1)$ y $k^2 = (k_1^2, k_2^2)$, entonces

$$k_1^1\nu_1(z^0) + k_2^1\nu_2(z^0) \geqq k_1^1\nu_1(z_{k^2}^*) + k_2^1\nu_2(z_{k^2}^*)$$
$$k_1^2\nu_1(z^0) + k_2^2\nu_2(z^0) \geqq k_1^2\nu_1(z_{k^1}^*) + k_2^2\nu_2(z_{k^1}^*)$$

donde $z_{k^1}^*$ es tal que $(k^1\nu)(z_{k^1}^*) = max\{(k^1\nu)(z) : z \in \mathcal{Z}\}$, y $z_{k^2}^*$ es tal que $(k^2\nu)(z_{k^2}^*) = max\{(k^2\nu)(z) : z \in \mathcal{Z}\}$.

Lo anterior puede escribirse

$$k_1^1[\nu_1(z^0) - \nu_1(z_{k^2}^*)] \geqq k_2^1[\nu_2(z_{k^2}^*) - \nu_2(z^0)]$$
$$k_1^2[\nu_1(z^0) - \nu_1(z_{k^1}^*)] \geqq k_2^2[\nu_2(z_{k^1}^*) - \nu_2(z^0)]$$

Asumiendo que $z^0 \notin \mathcal{A}(\mathcal{Z}, \nu^{K^0})$, se obtiene que $\nu_1(z^0) < \nu_1(z_2^*)$ o $\nu_2(z^0) < \nu_2(z_1^*)$ o ambas.

Si

$$\nu_1(z^0) < \nu_1(z_2^*), \tag{2.6}$$

y sabiendo que

$$\nu_1(z_2^*) \leqq \nu_1(z_{k^2}^*) \tag{2.7}$$

(notar que si $\nu_1(z_{k^2}^*) < \nu_1(z_2^*)$, porque $\nu_2(z_{k^2}^*) \leqq \nu_2(z_2^*)$, tendremos $(k^2\nu)(z_{k^2}^*) < (k^2\nu)(z_2^*)$ lo cual es una contradicción con la definición de $z_{k^2}^*$).

Obtenemos de (2.6) y (2.7) que $\nu_1(z^0) < \nu_1(z_{k^2}^*)$.

Podemos asumir que $0 < k_1^2 \leqq k_1^1 < 1$ y $0 < k_2^1 \leqq k_2^2 < 1$ teniendo en cuenta que al menos una de las dos desigualdades de menor o igual es estricta. Así

$$k_1^2[\nu_1(z^0) - \nu_1(z_{k^2}^*)] \geqq k_1^1[\nu_1(z^0) - \nu_1(z_{k^2}^*)] \geqq k_2^1[\nu_2(z_{k^2}^*) - \nu_2(z^0)] \geqq$$

$$\geqq k_2^2[\nu_2(z_{k^2}^*) - \nu_2(z^0)]$$

con la primera o última desigualdad estricta. Entonces

$$k_1^2[\nu_1(z^0) - \nu_1(z_{k^2}^*)] > k_2^2[\nu_2(z_{k^2}^*) - \nu_2(z^0)]$$

lo cual es una contradicción con la definición de $z_{k^2}^*$. Por tanto, $z^0 \in \mathcal{A}(\mathcal{Z}, \nu^{K^0})$.

Si $\nu_2(z^0) < \nu_2(z_1^*)$ o ambas desigualdades son ciertas, la demostración se realiza de forma análoga. □

Podemos enunciar los siguientes principios de aproximación y convergencia, respectivamente

Teorema 2.22 *Sean K^1 y K^2 conos de información tales que $int(K_*^1) \supseteq K_*^2$, entonces*

$$\mathcal{A}(\mathcal{Z}, \nu^{K^2}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{Z}, \nu^{K^1})$$

Demostración. Denotemos como k_1^1 y k_2^1 los generadores de K_*^1 y, k_1^2 y k_2^2 aquellos de K_*^2. Además, sean $z_{k_1^1}^*$, $z_{k_2^1}^*$, $z_{k_1^2}^*$, $z_{k_2^2}^*$ los puntos donde las funciones $(k_1^1\nu)(\cdot)$, $(k_2^1\nu)(\cdot)$, $(k_1^2\nu)(\cdot)$, $(k_2^2\nu)(\cdot)$ alcanzan sus máximos, respectivamente.

Ya que $K_*^2 \subset Int(K_*^1)$, tenemos

$$k_1^2 = \alpha_1 k_1^1 + \alpha_2 k_2^1 \;\; con \;\; 1 = \alpha_1 + \alpha_2 \;\; y \;\; \alpha_1, \alpha_2 > 0$$
$$k_2^2 = \beta_1 k_1^1 + \beta_2 k_2^1 \;\; con \;\; 1 = \beta_1 + \beta_2 \;\; y \;\; \beta_1, \beta_2 > 0$$

Si $z^0 \in \mathcal{A}(\mathcal{Z}, \nu^{K^2})$, entonces

$$(k_1^2\nu)(z^0) \geqq (k_1^2\nu)(z_{k_2^2}^*)$$
$$(k_2^2\nu)(z^0) \geqq (k_2^2\nu)(z_{k_1^2}^*)$$

Supuesto que $z^0 \notin \mathcal{A}(\mathcal{Z}, \nu^{K^1})$, tenemos $(k_1^1\nu)(z^0) < (k_1^1\nu)(z^*_{k_2^1})$ o $(k_2^1\nu)(z^0) < (k_2^1\nu)(z^*_{k_1^1})$ o ambos.

Si $(k_1^1\nu)(z^0) < (k_1^1\nu)(z^*_{k_2^1})$, y con la hipótesis anterior obtenemos

$$(k_1^2\nu)(z^*_{k_2^1}) > (k_1^2\nu)(z^*_{k_2^2})$$
$$(k_2^2\nu)(z^*_{k_2^1}) > (k_2^2\nu)(z^*_{k_1^2})$$

es decir,

$$\alpha_1[(k_1^1\nu)(z^*_{k_2^1}) - (k_1^1\nu)(z^*_{k_2^2})] > \alpha_2[(k_2^1\nu)(z^*_{k_2^2}) - (k_2^1\nu)(z^*_{k_2^1})]$$
$$\beta_1[(k_1^1\nu)(z^*_{k_2^1}) - (k_1^1\nu)(z^*_{k_1^2})] > \beta_2[(k_2^1\nu)(z^*_{k_1^2}) - (k_2^1\nu)(z^*_{k_2^1})]$$

Ahora, tenemos

1. Si $\alpha_1 \leqq \beta_1$ entonces $\beta_2 \leqq \alpha_2$

2. Si $\alpha_1 \geqq \beta_1$ entonces $\beta_2 \geqq \alpha_2$

Si se verifica 1., son ciertas las siguientes desigualdades

$$\alpha_1[(k_1^1\nu)(z^*_{k_2^1}) - (k_1^1\nu)(z^*_{k_1^2})] \geqq \beta_1[(k_1^1\nu)(z^*_{k_2^1}) - (k_1^1\nu)(z^*_{k_1^2})] >$$

$$> \beta_2[(k_2^1\nu)(z^*_{k_1^2}) - (k_2^1\nu)(z^*_{k_2^1})] \geqq \alpha_2[(k_2^1\nu)(z^*_{k_1^2}) - (k_2^1\nu)(z^*_{k_2^1})]$$

así

$$\alpha_1(k_1^1\nu)(z^*_{k_2^1}) + \alpha_2(k_2^1\nu)(z^*_{k_2^1}) > \alpha_1(k_1^1\nu)(z^*_{k_1^2}) + \alpha_2(k_2^1\nu)(z^*_{k_1^2})$$
$$(k_1^2\nu)(z^*_{k_2^1}) > (k_1^2\nu)(z^*_{k_1^2})$$

lo que es una contradicción con la definición de $z^*_{k_1^2}$.

Si se verifica 2., son ciertas las siguientes desigualdades

$$\beta_1[(k_1^1\nu)(z^*_{k_2^1}) - (k_1^1\nu)(z^*_{k_2^2})] \geqq \alpha_1[(k_1^1\nu)(z^*_{k_2^1}) - (k_1^1\nu)(z^*_{k_2^2})] >$$

$$> \alpha_2[(k_2^1\nu)(z^*_{k_2^2}) - (k_2^1\nu)(z^*_{k_2^1})] \geqq \beta_2[(k_2^1\nu)(z^*_{k_2^2}) - (k_2^1\nu)(z^*_{k_2^1})]$$

es decir,

$$\beta_1(k_1^1\nu)(z^*_{k_2^1}) + \beta_2(k_2^1\nu)(z^*_{k_2^1}) > \beta_1(k_1^1\nu)(z^*_{k_2^2}) + \beta_2(k_2^1\nu)(z^*_{k_2^2})$$

$$(k_2^2\nu)(z^*_{k_2^1}) > (k_2^2\nu)(z^*_{k_2^2})$$

lo que es imposible por definición de $z^*_{k_2^2}$.

Si $(k_2^1\nu)(z^0) < (k_2^1\nu)(z^*_{k_1^1})$ o tenemos ambas desigualdades, las demostraciones son similares. □

Teorema 2.23 *Sea $\{K^n\}_{n\in I\!N}$ una sucesión creciente de conos de información tal que $K_*^1 \subseteq int(K_*^0$ y $\{K_*^n\}_{n\in I\!N}$ converge a un vector p y sea $z^0 \in \mathcal{Z}$ tal que $z^0 \in \mathcal{A}(\mathcal{Z}, \nu^{K^n})$ para todo $n = 1, 2, ...,$ entonces $z^0 \in \mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu)$.*

Demostración. Si $z^0 \in \mathcal{A}(\mathcal{Z}, \nu^{K^n})$ para todo n, entonces

$$(k_1^n\nu)(z^0) \geqq (k_1^n\nu)(z^*_{k_2^n})$$

$$(k_2^n\nu)(z^0) \geqq (k_2^n\nu)(z^*_{k_1^n})$$

para todo n, donde $z^*_{k_1^n}$ y $z^*_{k_2^n}$ son los puntos donde las funciones $(k_1^n\nu)(\cdot)$ y $(k_2^n\nu)(\cdot)$ alcanzan sus máximos, respectivamente, y $K_*^n = G\{k_1^n, k_2^n\}$ para todo n.

Si suponemos que $z^0 \notin \mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu)$, entonces existe $z' \in \mathcal{Z}$ tal que $\nu(z') \geq \nu(z^0)$ y, así

$$(k_1^n\nu)(z') > (k_1^n\nu)(z^0) \geqq (k_1^n\nu)(z^*_{k_2^n}) \tag{2.8}$$

para todo n.

De las hipótesis sabemos que $K_*^n \rightarrow p$ cuando $n \rightarrow \infty$, es decir, $k_1^n \rightarrow p$ y $k_2^n \rightarrow p$ cuando $n \rightarrow \infty$. Así, dado δ existe n^0 tal que para todo $n \geqq n^0$, $\| k_1^n - k_2^n \| \leqq \delta$. Como consecuencia, si tomamos un $n \geqq n^0$, la desigualdad (2.8) se cumple para k_2^n, es decir, $(k_2^n \nu)(z') > (k_2^n \nu)(z_{k_2^n}^*)$. Esto es una contradicción con la definición de $z_{k_2^n}^*$ y de aquí que $z^0 \in \mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu)$. □

Con este resultado se garantiza la convergencia a una solución de valor eficiente.

Tests computacionales

Con el objeto de validar la aproximación propuesta vamos a presentar los resultados obtenidos de generar aleatoriamente 30 problemas deiscretos para comparar la relación existente entre los conjuntos de aproximación y eficiente. A continuación resumimos los resultados obtenidos de los 30 problemas. Se han considerado tres grupos de diez, el primero de ellos con 100 puntos para cada problema, el segundo con 200 puntos y el tercero con 300 puntos. Investigamos el efecto de aumentar el cono de información como consecuencia de un aumento simulado de la información disponible sobre la estructura de preferencias del decisor. Los generadores obtenidos $\{k^1, k^2\}$ para cuatro conjuntos de información se presentan en la tabla 2.1. Observamos que cada uno de ellos nos lleva a considerar diferentes funciones de valor vectoriales denotadas ν^i, $i = 1, 2, 3, 4$.

Tabla 2.1

	ν^1	ν^2	ν^3	ν^4
k^1	(1, 0)	(.95, .05)	(.90, .10)	(.87, 1.3)
k^2	(0, 1)	(.05, .95)	(.10, .90)	(1.3, .87)

Tabla 2.2

	n=100				*n=200*				*n=300*			
Probl.	ν^1	ν^2	ν^3	ν^4	ν^1	ν^2	ν^3	ν^4	ν^1	ν^2	ν^3	ν^4
1	.44	.44	1	1	.43	.50	1	1	.02	.50	.50	.57
2	.08	.75	1	1	.05	.15	.37	1	.09	.27	.28	.50
3	.70	1	1	1	.33	.75	.75	1	1	1	1	1
4	.54	.46	.46	1	.08	1	1	1	.33	.30	.80	.80
5	.26	.18	.16	.80	.24	.39	.54	.71	.05	.75	1	1
6	.10	1	1	1	1	1	1	1	.55	1	1	1
7	.44	1	1	1	.45	.45	.50	.75	.04	.16	.33	1
8	.16	1	1	1	.07	.24	1	1	.12	.14	1	1
9	.44	.60	.60	.75	.38	1	1	1	.08	1	1	1
10	1	1	1	1	.03	1	1	1	.12	.40	1	1

La tabla 2.2 presenta para cada problema, su tamaño n, la función de valor vectorial ν^i y la proporción de puntos en el conjunto de aproximación que pertenecen al conjunto de valor eficiente. Por ejemplo para el problema 1 (línea 1), con tamaño muestral $n = 100$ y la función ν^1 (columna 1), la proporción es 0.44.

El experimento indica que en la mayor parte de los casos en los que la información es nula (ν^1) y existe una proporción pequeña, con un pequeño decrecimiento en el conjunto de información la proporción aumenta considerablemente aproximándose a uno. Notemos que, para unos pocos casos la proporción está lejos de la unidad. Un ejemplo es el problema 1, con $n = 300$ y ν^4, con proporción .57. Sin embargo, hemos observado para estos casos que la reducción en el conjunto de aproximación es muy grande. Por ejemplo, para el caso primero comentado obtuvimos que el número de puntos eficientes era 6 (con ν^1) y 4 (con ν^4), sin embargo, tales números en el conjunto de aproximación eran 235 y 7, respectivamente, teniendo similares situaciones para los restantes casos. $\square$

A continuación extendemos las definiciones y resultados propuestos antes al caso, más general, de que la información dada por el decisor sobre su estructura de preferencias venga expresada en forma de familias de conos de información.

Definición 2.19 . *Dada $\nu : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$ función de valor vectorial y la familia de conos de información $\underline{K} = (K_1, K_2)$, llamaremos función de valor vectorial asociada a la familia de conos de información $\underline{K}$,*

$$\nu^{\underline{K}} = (k^1\nu, k^2\nu)$$

donde $\{k^1,\ k^2\}$ es el conjunto de generadores para K_*, y K el cono común para $\underline{K}$.

Observamos que

$$\nu^{\underline{K}^0} = \nu$$

Como vemos en los próximos resultados, podemos demostrar que el conjunto de aproximación $\mathcal{A}(\mathcal{Z}, \nu^{\underline{K}})$ será más pequeño cuando más aumente $\underline{K}$.

Teorema 2.24 *Dada $\nu : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$ función de valor vectorial y una familia de conos de información $\underline{K}$ tal que $K_* \subseteq Int(K_*^0)$, entonces*

$$\mathcal{A}(\mathcal{Z}, \nu^{\underline{K}}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{Z}, \nu^{\underline{K}^0})$$

Demostración. Análoga a la del teorema 2.21. □

También se verifican los siguientes principios de encaje y convergencia.

Teorema 2.25 *Sean $\underline{K}^1$ y $\underline{K}^2$ familias de conos de información tal que $K_*^2 \subseteq Int(K_*^1)$, entonces*

$$A(\mathcal{Z}, \nu^{\underline{K}^2}) \subseteq A(\mathcal{Z}, \nu^{\underline{K}^1})$$

Demostración. Análoga a la del teorema 2.22. □

Teorema 2.26 *Sea $\{\underline{K}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión creciente de familias de conos de información donde $K_*^1 \subseteq int(K_*^0)$ y K_*^n converge a un vector p. Si $z^0 \in \mathcal{Z}$ es tal que $z^0 \in \mathcal{A}(\mathcal{Z}, \nu^{\underline{K}^n})$ para todo $n = 1, 2, \ldots$, entonces $z^0 \in \mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu)$.*

Demostración. Análoga a la del teorema 2.23. □

Este último resultado asegura la convergencia a una solución de valor eficiente.

2.2.3 Procedimientos interactivos

Proponemos dos método interactivos de ayuda a la decisión basados en el conjunto de aproximación. Estos métodos pueden aplicarse a problemas discretos o bien a continuos, considerando una discretización a través de simulación.

Tenemos el primer procedimiento dado por:

AGORITMO I

Paso 0. Identificar $\mathcal{Z}$, ν.

Paso 1. Sea h=0.

Paso 2. Identificar $\nu^h = \nu^{K^h}$ $(\nu^h = \nu^{\underline{K}^h})$ y obtener v_1^{h*}, v_2^{h*}, v_{1*}^h y v_{2*}^h.

Paso 3. Sean $\mathcal{A}^h = \mathcal{A}(\mathcal{Z}, \nu^h)$, $v^{h**} = v^{h*} + \delta$ (donde $v^{h*} = (v_1^{h*}, v_2^{h*})$ y δ es un vector con valores positivos pequeños) y $\lambda^h > 0$ un vector de pesos arbitrarios. (ej. $\lambda_j^h = \alpha_j/(\alpha_1 + \alpha_2)$ donde $\alpha_j = \frac{v_j^{h*} - v_{j*}^h}{max\{|v_j^{h*}|, |v_{j*}^h|\}}, j = 1, 2.$)

Paso 4. Determinar las soluciones de compromiso z^h resolviendo

$$min\{s(\nu^h(z), v^{h**}, \lambda^h) : z \in \mathcal{A}^h\}.$$

donde

$$s(\nu^h(z), v^{h**}, \lambda^h) = \max_{i=1,2}\{\lambda_i^h(v_i^{h**} - \nu_i^h(z))\} - \sum_1^2 p_i \nu_i^h(z).$$

es una función con $p_i(i = 1, 2)$, valores positivos pequeños.

Paso 5. Presentar z^h al decisor

1. Si está satisfecho con z^h, parar.

2. En otro caso requerirle más información sobre sus preferencias en términos de conos (familia de conos) poliédricos K^{h+1} ($\underline{K}^{h+1}$) tal que $K^h \subset K^{h+1}$ ($\underline{K}^h \subset \underline{K}^{h+1}$).

Paso 6. Sea $h = h + 1$ e ir a 2.

Notemos que este algoritmo I consta de una primera fase (pasos 0-2) que identifica las componentes de los elementos necesarios para resolver el problema (paso 4) que nos va a proporcionar una solución que puede ser satisfactoria para el decisor. La segunda fase (paso 3) obtiene los elementos necesarios para resolver el problema del paso 4. La tercera fase (pasos 4-5) se ocupa de la obtención de la solución potencialmente más preferida y de su presentación al decisor. Esta última fase es interactiva, requiriendo del decisor la expecificación de las constantes λ^h y p_i, aunque no es estrictamente necesario ya que se pueden calcular como indica el algoritmo, y expresar su acuerdo o desacuerdo con la solución que se le presenta. En cada iteración del algoritmo se tienen que resolver tres problemas de optimización escalares; Dos para la obtención de los dos puntos ideales y el tercero para calcular la solución potencialmente preferida por el decisor. En un principio, este último problema es no lineal, aún cuando todas sus componentes sean lineales, pero puede considerarse uno equivalente a él que es lineal si todas las funciones que lo constituyen son lineales.

$$\begin{array}{ll} \min & t - \sum_1^2 p_i \nu_i^h(z) \\ \text{Sa:} & z \in A^h \\ & \lambda_i^h(v_i^{h**} - \nu_i^h(z)) \leq t, \;\; i = 1, 2. \end{array}$$

Es claro que todas las soluciones obtenidas en el algoritmo en el paso

5 pertenecen al conjunto de valor eficiente, $\varepsilon(Z, \nu^h)$, porque las soluciones óptimas en el paso 4 son de valor eficiente. Un procedimiento para el decisor para generar los conos de información puede ser mediante preguntas sobre comparación de pares de elementos (Zionts and Wallenius, 1983; Malakooti, 1989; Taner and Köksalan, 1991). Una extensión de este algoritmo puede considerarse si en el paso 5 el decisor puede proveer información sobre sus preferencias en una de las tres formas siguientes, eligiendo la que le resulte más fácil o cómoda (Vanderpooten, 1989; Vanderpooten y Vincke, 1989). Estas formas son

1. En términos de conos (familias de conos) poliédricos.

2. Indicando que criterio quiere aumentar y la concesión sobre el otro.

3. Especificando niveles de aspiración.

ALGORITMO II

El segundo procedimiento viene dado por el anterior algoritmo modificado como sigue

Paso 0. Identificar $\mathcal{Z}$ y ν.

Paso 1. Sea $h = 0$.

Paso 2. Identificar $\nu^h = \nu^{K^h}$ $(\nu^h = \nu^{\underline{K}^h})$ y determinar $v_1^{h*}, v_2^{h*}, v_{1*}^h$ y v_{2*}^h.

Paso 3. Sean $\mathcal{A}^h = \mathcal{A}(\mathcal{Z}, \nu^h)$, $v^{h**} = v^{h*} + \delta$ (donde $v^{h*} = (v_1^{h*}, v_2^{h*})$ y δ un vector de valores positivos pequeños) y $\lambda^h > 0$ es un vector de pesos arbitrarios. (ej. $\lambda_j^h = \alpha_j/(\alpha_1 + \alpha_2)$ con $\alpha_j = \frac{v_j^{h*} - v_{j*}^h}{max\{|v_j^{h*}|, |v_{j*}^h|\}}, j = 1, 2.$)

Paso 4. Determinar la solución de compromiso z^h resolviendo

$$min\{s(\nu^h(z), v^{h**}, \lambda^h) : z \in \mathcal{A}^h\}.$$

donde

$$s(\nu^h(z), v^{h**}, \lambda^h) = \max_{i=1,2}\{\lambda_i^h(v_i^{h**} - \nu_i^h(z))\} - \sum_1^2 p_i\nu_i^h(z).$$

con $p_i(i = 1, 2)$ valores positivos pequeños.

Paso 5. Presentar z^h al decisor.

1. Si está satisfecho con z^h, parar.

2. En otro caso, preguntarle la forma en que desea proporcionar más información

   (a) En términos de conos (familia de conos) poliédricos, entonces ir a 6.

   (b) Indicando que componente quiere que aumente y lo que está dispuesto a que disminuya la otra, entonces ir a 7.

   (c) Especificando niveles de aspiración, entonces ir a 7'.

Paso 6. Identificar el cono (familia de conos) poliédricos K^{h+1} ($\underline{K}^{h+1}$) tal que contenga al último (la última) generado (generada). Sea $h = h + 1$ e ir a 2.

Paso 7. Se presenta z^h al decisor y se le pregunta que componente de $\nu^h(z^h)$ debe aumentar y cuál es la máxima cantidad que él acepta ceder para la otra. Sea i el índice de la componente que debe aumentar y ω la cantidad que cede para el otro índice j.

Determinar el nuevo conjunto de potenciales soluciones

$$\mathcal{A}^{h+1} = \{z \in \mathcal{A}^h : \nu_i^h(z) \geqq \nu_i^h(z^h), \nu_j^h(z) \geqq \nu_j^h(z^h) - \omega\}.$$

Sea $\hat{v}^{h+1} = v^{(h+1)*} + \delta$, donde $v^{(h+1)*}$ es el punto ideal con respecto a $\mathcal{A}^{h+1}$. Ir a 8.

Paso 7'. Se presenta z^h al decisor y se le pide que proponga niveles de aspiración para los valores $\hat{v}^{h+1}$. Sea $\mathcal{A}^{h+1} = \mathcal{A}^h$ e ir a 8'.

Paso 8. Calcular una nueva solución de compromiso z^{h+1} resolviendo

$$min\{s(\nu^h(z), \hat{v}^{h+1}, \lambda^h) : z \in \mathcal{A}^{h+1}\}$$

y tomar

$$\lambda_j^{h+1} = 1/(\hat{v}_j^{h+1} - \nu_j^h(z^{h+1})),\ j = 1, 2.$$

Ir a 10.

Paso 8'. Calcular una nueva solución de compromiso z^{h+1} resolviendo

$$min\{s(\nu^h(z), \hat{v}^{h+1}, \lambda^h) :\ z \in \mathcal{A}^{h+1}\}$$

Paso 9. Preguntar al decisor si prefiere z^h o z^{h+1}.

1. Si es z^{h+1}, calcular el nuevo vector de pesos (dirección más preferida) λ^{h+1} donde

$$\lambda_j^{h+1} = 1/(v_j^{h**} - \nu_j^h(z^{h+1})),\ j = 1, 2.$$

2. Si es z^h, preguntarle por el índice del valor (decrecido) más responsable para este juicio. Sea i el correspondiente índice. Una aproximación del próximo conjunto de potenciales soluciones es determinado por

$$\mathcal{A}^{h+1} = \{z \in \mathcal{A}^h : \nu_i^h(z) \geqq \nu_i^h(z^{h+1})\}$$

Sea $z^{h+1} = z^h$ y $\lambda^{h+1} = \lambda^h$.

Paso 10. Sea $\nu^{h+1} = \nu^h$.

Paso 11. Sea $h = h + 1$. Ir a 5.

El algoritmo II es una extensión del algoritmo I, siendo los seis primeros pasos el algoritmo I, con la diferencia del paso 5 donde se proponen más formas de obtener información del decisor. Los pasos (7,7',9) calculan conjuntos más reducidos de puntos de interés para el decisor. Los pasos (8,8') ofrecen problemas de optimización a resolver cuya solución nos proporciona elementos que pueden ser satisfactorios para nuestro decisor.

Es claro que el algoritmo converge (teorema 2.23 y 2.26), aunque desde un punto de vista teórico puede no hacerlo en un número finito de pasadas. En la práctica, una mayor exigencia en la precisión sobre preferencias del decisor se traducirá en una tasa de convergencia más rápida para alcanzar la solución final.

Los algoritmos (I, II) pueden generalizarse para el caso de tener funciones de valor con más de dos componentes. Esta generalización puede realizarse de dos formas: (1) considerando el conjunto de aproximación generalizado que consideramos en la sección siguiente y (2) sustituyendo $\mathcal{A}^h$ por $\mathcal{Z}$. Las ventajas que puede presentar la generalización de (1) sobre la (2) es que, generalmente, al considerar el conjunto de aproximación en lugar del espacio de objetivos total, eliminamos de consideración puntos que sabemos de un principio que no son interesantes para el decisor y de ahí que el gasto computacional para el primer caso sea menor que para el segundo.

Ejemplo

Consideremos el ejemplo de la sección 2.1 y apliquemos el algoritmo I. En el paso 2 se obtiene que

$$\nu^0(z) = (z_1, z_2),$$

siendo $v_1^{0*} = 23$, $v_2^{0*} = 17$, $v_{1*}^0 = 7$ y $v_{2*}^0 = 4$.

En el paso 3 el conjunto de aproximación al conjunto de valor eficiente para ν^0 está formado por

$$\mathcal{A}^0 = \{z \in \mathcal{Z} :\ z_1 \geqq 7 \ y \ z_2 \geqq 4\}$$

siendo $v^{0**} = (23.001, 17.001)$, $\lambda_1^0 = .476$ y $\lambda_2^0 = .524$.

En el paso 4 se trata de resolver el problema

$$\begin{array}{ll} min & -z_1 - z_2 + s_1 \\ sa: & z \in \mathcal{Z} \\ & z_1 \geqq 7 \\ & z_2 \geqq 4 \\ & .476z_1 + s_1 \geqq 10.948 \\ & .524z_2 + s_1 \geqq 8.908 \\ & z_1, z_2, s_1 \geqq 0 \end{array}$$

siendo su solución óptima la solución de compromiso $z^0 = (17.236, 11.764)$. Esta solución de compromiso se presenta al decisor en el paso 5. Supongamos que el decisor no estuviera satisfecha con ella. Entonces le preguntamos por el valor de ε para el que $(17.236, 11.764)$ y $(17.236+4, 11.764-\varepsilon)$ le son indiferentes. Sea la respuesta $\varepsilon = 1$. Repetimos la pregunta para $(17.236, 11.764)$ y

$(17.236-4, 11.764+\varepsilon)$. Sea, en este caso, la respuesta $\varepsilon = 6$. La información revelada por el decisor en estas respuestas queda recogida en el conjunto de información $K_*^1 = G\{(.2, .8), (.6, .4)\}$. Con esta nueva información reiteramos el algoritmo volviendo al paso 2. En este paso se obtiene que

$$\nu^1(z) = (.2z_1 + .8z_2,\ .6z_1 + .4z_2)$$

siendo $v_1^{1*} = 15$, $v_2^{1*} = 15.6$, $v_{1*}^1 = 11.2$ y $v_{2*}^1 = 11$.

En el paso 3 el conjunto de aproximación al conjunto de valor eficiente para ν^1 está formado por

$$\mathcal{A}^1 = \{z \in \mathcal{Z} :\ .2z_1 + .8z_2 \geqq 11.2,\ .6z_1 + .4z_2 \geqq 11\}$$

siendo $v^{1**} = (15.001, 15.601)$, $\lambda_1^1 = .462$ y $\lambda_2^1 = .538$.

En el paso 4 se trata de resolver el problema

$$\begin{array}{ll} min & -.8z_1 - 1.2z_2 + s_1 \\ sa: & z \in \mathcal{Z} \\ & .2z_1 + .8z_2 \geqq 11.2 \\ & .6z_1 + .4z_2 \geqq 11 \\ & .092z_1 + .37z_2 + s_1 \geqq 6.930 \\ & .323z_2 + .215z_2 + s_1 \geqq 8.393 \\ & z_1, z_2, s_1 \geqq 0 \end{array}$$

siendo su solución óptima la solución de compromiso $z^1 = (15, 14)$. Esta solución de compromiso se presenta al decisor en el paso 5. Supongamos que el decisor no está satisfecha con ella. Entonces le preguntamos por el valor de ε para el que $(15, 14)$ y $(15+6, 14-\varepsilon)$ le son indiferentes. Sea la respuesta $\varepsilon = 7$. Repetimos la pregunta para $(15, 14)$ y $(15-4, 14+\varepsilon)$. Sea, en este caso, la respuesta $\varepsilon = 5.5$. La información revelada por el decisor en estas respuestas queda recogida en el conjunto de información $K_*^2 = G\{(.538, .462), (.478, .522)\}$. Con esta nueva información reiteramos el algoritmo volviendo al paso 2. En este paso se obtiene que

$$\nu^2(z) = (.538z_1 + .462z_2,\ .478z_1 + .522z_2)$$

siendo $v_1^{2*} = 14.918$, $v_2^{2*} = 14.478$, $v_{1*}^2 = 14.538$ y $v_{2*}^2 = 14.258$.

En el paso 3 se obtiene que el conjunto de aproximación al conjunto de valor eficiente para ν^2 está formado por

$$\mathcal{A}^2 = \{z \in \mathcal{Z} :\ .538z_1 + .462z_2 \geqq 14.538,\ .478z_1 + .522z_2 \geqq 14.258\}$$

siendo $v^{2**} = (14.919, 14.479)$, $\lambda_1^2 = .625$ y $\lambda_2^2 = .375$.

En el paso 4 se trata de resolver el problema

$$\begin{array}{ll} min & -1.016z_1 - .984z_2 + s_1 \\ sa: & z \in \mathcal{Z} \\ & .538z_1 + ..462z_2 \geqq 14.538 \\ & .478z_1 + .522z_2 \geqq 14.258 \\ & .336z_1 + .289z_2 + s_1 \geqq 9.324 \\ & .179z_2 + .196z_2 + s_1 \geqq 5.43 \\ & z_1, z_2, s_1 \geqq 0 \end{array}$$

siendo su solución óptima la solución de compromiso $z^2 = (20, 9)$. Esta solución de compromiso se presenta al decisor en el paso 5. Supongamos que el decisor está satisfecha con ella. Entonces el algoritmo termina y la solución más preferida para nuestro decisor es $z^2 = (20, 9)$. □

Notar que este algoritmo presenta al decisor soluciones de valor eficiente las cuales no tienen por que ser puntos extremos del conjunto factible como se puede observar en la solución que se obtiene en la primera iteración.

Los dos algoritmos anteriores se pueden aplicar a cualquier tipo de problemas en los cuales se alcancen los máximos exigidos. El número de preguntas al decisor es reducido y la dificultad mínima. Además, la carga computacional no es muy grande. Sin embargo, para problemas particulares pueden obtenerse métodos que resultan más fáciles de aplicar. Por ejemplo, si consideramos los problemas multiobjetivos lineales para los que se construye funciones de valor también lineales podemos aplicar el siguiente algoritmo que es una adaptación del introducido en Prasad y Karwan (1992):

AGORITMO III

Paso 0. Determinar $\mathcal{Z}$, ν. Hacer $h = 0$.

Paso 1. Encontrar z_2^* tal que

$$\begin{array}{rcll} \nu_2(z_2^*) & = & \max & \nu_2(z) \\ & & \text{sa:} & z \in \mathcal{Z} \end{array}$$

y z^1 tal que

$$\begin{array}{rcll} \nu_1(z^1) & = & \max & \nu_1(z) \\ & & \text{sa:} & z \in \mathcal{Z} \\ & & & \nu_2(z) = \nu_2(z_2^*) \end{array}$$

Fijar z^1 y sea $r = 1$. Encontrar

$$\begin{aligned} v_1^* \;=\; & \max \quad \nu_1(z) \\ & \text{sa:} \quad z \in \mathcal{Z} \end{aligned}$$

Si $\nu_1(z^1) = v_1^*$, parar y $M = \{z^1\}$. En otro caso, sea $r = r+1$ y $M = \{z^1\}$ e ir a 2.

Paso 2. Resolver el problema P^{r-1}

$$\begin{aligned} & \max \quad \tfrac{\nu_2(z)-\nu_2(z^{r-1})}{\nu_1(z)-\nu_1(z^{r-1})} \\ & \text{sa:} \quad z \in \mathcal{Z} \end{aligned}$$

Sea z^r la solución obtenida (si hay soluciones óptimas, elegir aquella que tome menor valor en la segunda componente de la función de valor). Si $\nu_1(z^r) = v_1^*$ entonces $M = M \cup \{\alpha z^{r-1} + (1-\alpha)z^r, \alpha \in (0,1)\}$ e ir al paso 3. En otro caso, $M = M \cup \{\alpha z^{r-1} + (1-\alpha)z^r, \alpha \in [0,1]\}$, sea $r = r+1$ y repetir el paso 2.

Paso 3. Sea $M^0 = M$.

Paso 4. Presentar M^h al decisor. Si elige una solución, parar. En otro caso, obtener más información mediante el cono (familia de conos) de información $K^{h+1} \supset K^h$ ($\underline{K}^{h+1} \supset \underline{K}^h$), hacer $h = h+1$ e ir a 5.

Paso 5. Determinar $\nu^h = \nu^{K^h}$ ($\nu^h = \nu^{\underline{K}^h}$) y $\mathcal{A}(\mathcal{Z}, \nu^h)$.

Paso 6. Calcular $M^h = \mathcal{A}(\mathcal{Z}, \nu^h) \cap M^{h-1}$. Ir a 4.

Comentarios:

a) El problema P^r se puede transformar en un problema de programación lineal añadiendo una restricción y una variable. Es decir, si $\mathcal{Z}$ se puede escribir como $\{Az \leqq b,\ z \geqq 0\}$ entonces tomando $t = 1/(\nu_1(z) - \nu_1(z^k))$ e

$y = tz$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \max \quad & \nu_2(y) - \nu_2(z^k)t \\ \text{sa:} \quad & Ay - bt \leqq 0 \\ & \nu_1(y) - \nu_1(z^k)t = 1 \\ & y, t \geqq 0 \end{aligned}$$

Notemos que después de la primera iteración, en las siguientes iteraciones sólo el coeficiente de t necesita cambiarse en el paso 2, por lo que se puede utilizar análisis de sensibilidad para resolverlo.

b) Es claro que la convergencia del algoritmo está garantizada.

c) Además, este algoritmo con sus dos primeros pasos lo que hace es obtener el conjunto de valor eficiente completo. Después, gracias a la información que el algoritmo va recibiendo del decisor puede ir reduciéndolo, basándose en la reducción progresiva que va experimentado el conjunto de aproximación del conjunto de valor eficiente, hasta llegar el momento en que tal conjunto de valor eficiente sea lo suficientemente pequeño para que el decisor sea capaz de elegir la solución más preferida para él.

d) Para los problemas de decisión con espacio de objetivos definido mediante inecuaciones lineales y con función de valor con tres componentes lineales, podemos adaptar y aplicar el método de Bryson (1993) para identificar las soluciones de valor eficiente extremas. Si la función de valor posee más de tres componentes lineales una de las posibles formas de obtener el conjunto de valor eficiente es trabajando de forma análoga a Armand y Malivert (1991).

Ejemplo

Consideremos el ejemplo de la sección 2.1. Este problema es lineal y, por tanto, podemos aplicar el algoritmo III.

En la primera iteración, en el paso 1, se obtiene que $z_2^* = (7, 17)$, $z^1 = (7, 17)$ y $v_1^* = 23$. Como $23 = \nu_1^* \neq \nu_1(z^1) = 7$ hacemos $r = 2$ y $M = \{(7, 17)\}$ y vamos al paso 2.

En el paso 2 resolvemos el siguiente problema lineal

$$\begin{aligned}
max \quad & y_2 - 17t \\
sa: \quad & -2y_1 + 7y_2 - 105t \leqq 0 \\
& 3y_1 + 8y_2 - 157t \leqq 0 \\
& y_1 + y_2 - 29t \leqq 0 \\
& 5y_1 + 3y_2 - 127t \leqq 0 \\
& 4y_1 - 3y_2 - 80t \leqq 0 \\
& y_1 - 7t = 1 \\
& y_1, y_2, t \geqq 0
\end{aligned}$$

La solución óptima para este problema es $(1.875, 1.75, .125)$. Haciendo el correspondiente cambio de variable se obtiene $z^2 = (15, 14)$. Como $23 = v_1^* \neq \nu_1(z^2) = 15$ hacemos $r = 3$ y $M = \{(7, 17)\} \cup \{\alpha(7, 17) + (1 - \alpha)(15, 14) : \alpha \in [0, 1]\}$ y vamos al paso 2.

En la segunda iteración, en el paso 2 resolvemos el siguiente problema lineal

$$\begin{aligned}
max \quad & y_2 - 14t \\
sa: \quad & -2y_1 + 7y_2 - 105t \leqq 0
\end{aligned}$$

$$3y_1 + 8y_2 - 157t \leqq 0$$
$$y_1 + y_2 - 29t \leqq 0$$
$$5y_1 + 3y_2 - 127t \leqq 0$$
$$4y_1 - 3y_2 - 80t \leqq 0$$
$$y_1 - 15t = 1$$
$$y_1, y_2, t \geqq 0$$

La solución óptima para este problema es $(4, 1.8, .2)$. Haciendo el correspondiente cambio de variable se obtiene $z^3 = (20, 9)$. Como $23 = v_1^* \neq \nu_1(z^3) = 20$ hacemos $r = 4$ y $M = \{(7,17)\} \cup \{\alpha(7,17) + (1-\alpha)(15,14) : \alpha \in [0,1]\} \cup \{\alpha(15,14) + (1-\alpha)(20,9) : \alpha \in [0,1]\}$ y vamos al paso 2.

En la tercera iteración, en el paso 2, resolvemos el siguiente problema lineal

$$\begin{array}{rr} max & y_2 - 9t \\ sa: & -2y_1 + 7y_2 - 105t \leqq 0 \\ & 3y_1 + 8y_2 - 157t \leqq 0 \\ & y_1 + y_2 - 29t \leqq 0 \\ & 5y_1 + 3y_2 - 127t \leqq 0 \\ & 4y_1 - 3y_2 - 80t \leqq 0 \\ & y_1 - 20t = 1 \\ & y_1, y_2, t \geqq 0 \end{array}$$

La solución óptima para este problema es $(7.667, 1.333, .333)$. Haciendo el correspondiente cambio de variable se obtiene $z^4 = (23, 4)$. Como $23 = \nu_1^* = \nu_1(z^3) = 23$ hacemos $M = \{(7,17)\} \cup \{\alpha(7,17) + (1-\alpha)(15,14) : \alpha \in [0,1]\} \cup$

$\{\alpha(15,14)+(1-\alpha)(20,9) : \alpha \in [0,1]\} \cup \{\alpha(20,9)+(1-\alpha)(23,4) : \alpha \in [0,1]\}$ y vamos al paso 3.

En el paso 3 identificamos

$$M^0 = \{(7,17)\} \cup \{\alpha(7,17) + (1-\alpha)(15,14) : \alpha \in [0,1]\} \cup \{\alpha(15,14)+ \\ +(1-\alpha)(20,9) : \alpha \in [0,1]\} \cup \{\alpha(20,9) + (1-\alpha)(23,4) : \alpha \in [0,1]\}$$

que es el conjunto de valor eficiente para la función de valor $\nu(z) = (z^1, z^2)$.

En el paso 4 le presentamos al decisor M^0. Supongamos que existen demasiados elementos en M^0 para que el decisor sea capaz de elegir una solución. Sin embargo, como anteriormente, suponemos que podemos obtener información sobre su estructura de preferencias representada por el conjunto de información $K_*^1 = G\{(.2, .8), (.6, .4)\}$.

En el paso 5 determinamos

$$\nu^1(z) = (.2z_1 + .8z_2,\ .6z_1 + .4z_2)$$

y

$$\mathcal{A}(\mathcal{Z}, \nu^1) = \{z \in \mathcal{Z} :\ .2z_1 + .8z_2 \geqq 11.2,\ .6z_1 + .4z_2 \geqq 11\}.$$

En el paso 6 calculamos $M^1 = \{(7,17)\} \cup \{\alpha(7,17) + (1-\alpha)(15,14) : \alpha \in [0,1]\} \cup \{\alpha(15,14) + (1-\alpha)(20,9) : \alpha \in [0,1]\}$.

En la cuarta iteración, en el paso 4, le presentamos al decisor M^1. Supongamos que siguen existiendo demasiados elementos en M^1 para que el decisor sea capaz de tomar una única solución como la más preferida. Sin embargo, como anteriormente, suponemos que podemos obtener información sobre su estructura de preferencias representada por el conjunto de información $K_*^2 = G\{(.54, .46), (.48, .52)\}$.

En el paso 5 determinamos

$$\nu^2(z) = (.54z_1 + .46z_2,\ .48z_1 + .52z_2)$$

y

$$\mathcal{A}(\mathcal{Z}, \nu^2) = \{z \in \mathcal{Z} :\ .54z_1 + .46z_2 \geqq 14.54,\ .48z_1 + .52z_2 \geqq 14.26\}$$

En el paso 6 calculamos $M^2 = \{\alpha(15,14) + (1-\alpha)(20,9) :\ \alpha \in [0,.1]\}$.

En la cuarta iteración, en el paso 4, le presentamos al decisor M^2. Supongamos que ya en M^2 el decisor puede tomar un elemento de este conjunto, al no resultarle demasiado extenso. Entonces, el algoritmo finaliza. □

El algoritmo que desarrollamos a continuación está diseñado para resolver problemas de tipo discreto y se basa en un método de Ríos, D. (1990). La idea básica, es la siguiente: supongamos que tenemos dos alternativas de valor eficiente z^i y z^j con valores $\nu(z^i)$ y $\nu(z^j)$, respectivamente, tal que $\nu_2(z^j) > \nu_2(z^i)$, pero el decisor prefiere z^i a z^j. Nos interesa mejorar el valor de $\nu_1(z^j)$. Dado que z^j tiene el mejor valor en $\nu_2(\cdot)$ y que estamos maximizando, sólo consideramos $\alpha = (1,0)$, entre las direcciones de mejora. De esta manera, y teniendo en cuenta la hipótesis de continuidad de la función de valor podemos mejorar $\nu(z^j)$ con $\nu(z^{j*}) = \nu(z^j) + \beta\alpha$, $\beta > 0$, tal que $\nu(z^{j*}) \sim \nu(z^i)$. Después, valiéndonos de la monotonía de la función de valor, eliminamos las alternativas dominadas por $\nu(z^{j*})$, operación que denominamos "eliminación por $\nu(z^{j*})$". Gráficamente, tal poda se traduce en la eliminación de todas las alternativas con valores que se hallen en el cuadrante formado por la abscisa y la ordenada de $\nu(z^{j*})$. Análogamente, si z^j hubiera tenido su mejor valor en la primera componente de la función de valor, habríamos tomado $\alpha = (0,1)$ como dirección de mejora.

Veamos ahora cómo obtener las dos alternativas de valor eficiente de las que partimos. Sea $\mathcal{Z}^h$ el conjunto de alternativas que nos queda en la iteración h. El proceso "encontrar z^1" se realiza:

Primero, resolver

$$\begin{aligned} v_1^* = \quad & \max \quad \nu_1(z) \\ & \text{sa:} \quad z \in \mathcal{Z}^h \end{aligned}$$

Segundo, resolver

$$\begin{aligned} \nu_2(z^1) = \quad & \max \quad \nu_2(z) \\ & \text{sa:} \quad z \in \mathcal{Z}^h \\ & \text{sa:} \quad \nu_1(z) = v_1^* \end{aligned}$$

Análogamente, "encontrar z^2" efectúa:

Primero, resolver

$$\begin{aligned} v_2^* = \quad & \max \quad \nu_2(z) \\ & \text{sa:} \quad z \in \mathcal{Z}^h \end{aligned}$$

Segundo, resolver

$$\begin{aligned} \nu_1(z^1) = \quad & \max \quad \nu_1(z) \\ & \text{sa:} \quad z \in \mathcal{Z}^h \\ & \text{sa:} \quad \nu_2(z) = v_2^* \end{aligned}$$

En cada iteración se calculan z^1 y z^2, se comparan sus valores y, según esa comparación, se elimina por $\nu(z^{1*})$ o $\nu(z^{2*})$. En el algoritmo denominamos $z^j(z^k)$ a la mejor (peor) solución actual entre z^1 y z^2. Introducimos las soluciones que vamos encontrando en el conjunto M (serán todas soluciones similares a z^j). "Encontrar $\nu(z^{k*})$" significa calcular $\nu(z^{k*}) = \nu(z^k) + \beta\alpha$, $\beta > 0$, de tal forma que $\nu(z^{k*}) \sim \nu(z^j)$.

ALGORITMO IV

Paso 0. Determinar $\mathcal{A}(\mathcal{Z}, \nu^0)$.

Paso 1. Hacer $h = 0$, $j = 1$, $M = \emptyset$ y $\mathcal{Z}^0 = \mathcal{A}(\mathcal{Z}, \nu^0)$.

Paso 2. Considerar $\mathcal{Z}^h$ y calcular $\nu(z^1)$ y $\nu(z^2)$.

Paso 3. Si $\nu(z^1) = \nu(z^2)$, fin, tenemos un punto ideal y la solución es $\{z^1\} \cup M$. En otro caso, $prevj = j$.

Paso 4. Si $\nu(z^1) \sim \nu(z^2)$, $\{z^2\} \cup M$, eliminar por $\nu(z^2)$, $h = h + 1$, encontrar $\nu(z^2)$ y volver a 2. En otro caso, ir a 5.

Paso 5. Si el decisor prefiere $\nu(z^1)$ a $\nu(z^2)$, $j = 1$, $k = 2$. En otro caso, $j = 2$, $k = 1$.

Paso 6. Si $j \neq prevj$, $M = \emptyset$.

Paso 7. Encontrar $\nu(z^{k*})$, eliminar por $\nu(z^{k*})$, $h = h + 1$.

Paso 8. Encontrar $\nu(z^k)$, volver a 3.

En la variable $prevj$ tenemos almacenado el índice de la mejor solución en la iteración anterior, para saber cuándo hay un cambio de mejor solución. Cabe destacar que el procedimiento "encontrar $\nu(z^{k*})$", se puede realizar mediante un proceso de interrogación al decisor sobre dos alternativas diseñadas para converger a un punto de indiferencia. Gráficamente, lo que se haría es ir desplazando el punto $\nu(z^k)$ en la dirección de mejora hasta que se cruce en un punto $\nu(z^{k*})$ con la curva de puntos tan preferidos como $\nu(z^j)$.

Al irse podando el conjunto de alternativas según las respuestas del decisor, las decisiones de éste son irrevocables, como corresponde a un algoritmo orientado hacia búsqueda. Se puede considerar que es un algoritmo cómodo para el decisor ya que sólo tiene que responder a cuestiones cualitativas, si prefiere una, otra, o le es indiferente.

En cuanto a la carga computacional, también es muy pequeña. Si no tenemos en cuenta los procedimientos "encontrar" y "eliminar por", tan sólo tenemos tantas optimizaciones (maximizaciones o minimizaciones) como objetivos, por cada iteración.

El tomar el conjunto de aproximación al conjunto de valor eficiente en vez de $\mathcal{Z}$ puede reducir considerablemente el número de puntos a estudiar.

Ejemplo

Supongamos un decisor que quiere comprar un coche de segunda mano que espera utilizar durante los próximos cuatro años. Cada uno de los posibles coches está caracterizado en un espacio de objetivos tridimensional con elementos $z = (z_1, z_2, z_3)$, donde

z_1 = precio esperado de venta en pesetas cuatro años después de haberlo comprado ($*10^4$)

z_2 = coste estimado en pesetas de reparaciones futuras en los próximos cuatro años ($*10^4$)

z_3 = número de kilómetros antes del cambio del motor ($*4 * 10^4$)

Estos valores pueden corresponder al nivel inferior de una jerarquía de objetivos en los que, por un lado, tenemos agrupado z_1 y z_2 (costes) y, por otro lado, tenemos z_3 (fiabilidad).

Supongamos una función de valor vectorial $\nu : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$ donde

$$\nu(z) = (\nu_{12}(z_1, z_2), \nu_3(z_3))$$

y hemos asignado ambas componentes ν_{12} y ν_3, usando Logical Decision (1991) en una sesión interactiva. Para (z_1, z_2) tenemos una función aditiva dada por

$$\nu_{12}(z) = \nu_{12}(z_1, z_2) = .7\nu_1(z_1) + .3\nu_2(z_2) =$$
$$= .7[1.042 - 4.609exp(-.0782z_1)] + .3[-.024 + 1.82exp(-.2875z_2)]$$

que es creciente en z_1 y decreciente en z_2. Para z_3, tenemos

$$\nu_3(z) = \nu_3(z_3) = 1.824 - 3.04exp(-.0567z_3)$$

La tabla 2.3 describe treinta coches diferentes, uno de ellos debe ser seleccionado por el decisor. Además, aparece el valor de la función de valor vectorial en cada una de las alternativas.

Tabla 2.3

Coche	C1	C2	C3	C4	C5
(z_1, z_2, z_3) (ν_{12}, ν_3)	(30,8,13) (.468,.370)	(35,5,15) (.643,.526)	(37,4,19) (.717,.790)	(29,10,16) (.419,.598)	(33,9,18) (.519,.729)
Coche	C6	C7	C8	C9	C10
(z_1, z_2, z_3) (ν_{12}, ν_3)	(35,7,19) (.587,.790)	(40,11,11) (.604,.195)	(44,9,14) (.660,.450)	(46,8,20) (.689,.847)	(26,7,15) (.373,.526)
Coche	C11	C12	C13	C14	C15
(z_1, z_2, z_3) (ν_{12}, ν_3)	(28,4,18) (.534,.729)	(29,25,20) (.655,.847)	(29,9,10) (.429,.1)	(50,6,16) (.755,.598)	(52,6,19) (.764,.790)
Coche	C16	C17	C18	C19	C20
(z_1, z_2, z_3) (ν_{12}, ν_3)	(24,6,14) (.326,.45)	(29,5,17) (.518,.665)	(32,4,23) (.631,1.00)	(19,5,9) (.122,.0)	(26,3,16) (.531,.598)
Coche	C21	C22	C23	C24	C25
(z_1, z_2, z_3) (ν_{12}, ν_3)	(34,2,19) (.804,.790)	(23,9.5,13) (.224,.370)	(27,6,15) (.429,.526)	(38,3.8,19) (.740,.790)	(38,12,10) (.575,.100)
Coche	C26	C27	C28	C29	C30
(z_1, z_2, z_3) (ν_{12}, ν_3)	(43.5,8,15) (.670,.526)	(49,6.5,19) (.737,.790)	(40,15,14) (.588,.450)	(44.14,16) (.629,.598)	(60,13,17) (.706,.665)

Si aplicamos el algoritmo anterior a este ejemplo, en el paso 0 obtenemos que

$$\mathcal{A}(\mathcal{Z}, \nu^0) = \{C3, C9, C12, C15, C18, C21, C24, C27\}$$

En el paso 2 se denota $\mathcal{Z}^0 = \{C3, C9, C12, C15, C18, C21, C24, C27\}$ y $\nu(z^1) = (.804, .790)$ y $\nu(z^2) = (.631, 1)$, los cuales ya han sido calculados en el paso 0.

En el paso 3, como $\nu(z^1) \neq \nu(z^2)$, se verifica que $prevj = 1$.

Simulemos que el decisor prefiere $\nu(z^1)$ a $\nu(z^2)$ entonces $j = 1$ y $k = 2$. En el paso 7 calculamos $\nu(z^{2*}) = (.731, 1)$, y eliminamos por $\nu(z^{2*})$ obteniendo $\mathcal{Z}^1 = \{C15, C21, C24, C27\}$.

Volviendo a calcular z^1 y z^2 para obtener $\nu(z^1)$ y $\nu(z^2)$, respectivamente. Se verifica que $\nu(z^1) = (.804, .790)$ y $\nu(z^2) = (.804, .790)$. Como $\nu(z^1) = \nu(z^2)$, el paso 3 del algoritmo nos asegura que la solución más preferida para el decisor es el coche $C21$. □

2.2.4 Conjunto de aproximación al conjunto de valor eficiente para problemas de decisión que poseen función de valor con n componentes

En el caso de tener una función de valor con dos componentes $\nu(z) = (\nu_1(z), \nu_2(z))$ hemos construido el siguiente conjunto de aproximación al conjunto de valor eficiente, $\mathcal{A}(\mathcal{Z}, \nu)$,

$$\mathcal{A}(\mathcal{Z}, \nu) = \{z \in \mathcal{Z} : \nu_1(z) \geqq \nu_1(z_2^*), \nu_2(z) \geqq \nu_2(z_1^*)\} \tag{2.9}$$

donde z_1^* y z_2^* son los puntos donde los problemas

$$\begin{array}{lll} \max & \nu_1(z) & \text{y} \quad \max \quad \nu_2(z) \\ \text{sa:} & z \in \mathcal{Z} & \quad\;\; \text{sa:} \quad\;\; z \in \mathcal{Z} \end{array}$$

alcanzan sus valores óptimos, respectivamente.

En la definición del conjunto de aproximación al conjunto de valor eficiente, como se ha podido apreciar, aparecen los valores $\nu_1(z_2^*)$ y $\nu_2(z_1^*)$ que son las componentes del punto nadir. Entonces, podía pensarse que la extensión lógica de la definición para el caso en que la función de valor tuviese más de dos componentes, $\nu(z) = (\nu_1(z), ..., \nu_p(z))$, fuese

$$\mathcal{A}(\mathcal{Z}, \nu) = \{z \in \mathcal{Z} : \nu_1(z) \geqq n_1, ..., \nu_p(z) \geqq n_p\}$$

donde $n_1, ..., n_p$ son las componentes del punto nadir. Pero ocurre, desafortunadamente, que este conjunto así definido no tiene por que contener al conjunto de valor eficiente, como se puede observar en el siguiente ejemplo:

Sean $\mathcal{Z} = \{z^1, z^2, z^3, z^4\}$ y $\nu(z^1) = (1, 2, 3)$, $\nu(z^2) = (3, 2, 1)$, $\nu(z^3) = (1, 3, 1)$ y $\nu(z^4) = (2, 1, 2)$. De aquí se obtiene que el punto nadir es $(n_1, n_2, n_3) = (1, 2, 1)$.

Por tanto, el conjunto de aproximación al conjunto de valor eficiente y el conjunto de valor eficiente quedarán definidos, respectivamente, de la siguiente forma:

$$\mathcal{A}(\mathcal{Z}, \nu) = \{z \in \mathcal{Z} : \nu_1(z) \geqq 1, \nu_2(z) \geqq 2, \nu_3(z) \geqq 1\} = \{z^1, z^2, z^3\}$$
$$\mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu) = \{z \in \mathcal{Z} : \nexists z' \in \mathcal{Z}/\nu(z') \geq \nu(z)\} = \{z^1, z^2, z^3, z^4\}$$

respectivamente.

Tenemos que $z^4 \in \mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu)$ pero $z^4 \notin \mathcal{A}(\mathcal{Z}, \nu)$. □

Así, este ejemplo prueba que la extensión del conjunto de aproximación al conjunto de valor eficiente no se puede hacer de esta manera.

Relajando un poco las condiciones, tal como

$$\mathcal{A}'(\mathcal{Z}, \nu) = \{z \in \mathcal{Z} : [\nu_1(z) \geqq n_1, \nu_2(z) \geqq n_2] \vee \nu_3(z) \geqq n_3 \vee ... \vee \nu_p(z) \geqq n_p\} \cap$$

$$\cap \{z \in \mathcal{Z} : [\nu_1(z) \geqq n_1, \nu_3(z) \geqq n_3] \vee \nu_2(z) \geqq n_2 \vee \nu_4(z) \geqq n_4 \vee ... \vee \nu_p(z) \geqq n_p\} \cap$$

$\cap ... \cap \{z \in \mathcal{Z} : [\nu_{p-1}(z) \geqq n_{p-1}, \nu_p(z) \geqq n_p] \vee \nu_1(z) \geqq n_1 \vee ... \vee \nu_{p-2}(z) \geqq n_{p-2}\}$

obtenemos una aproximación que siempre contiene al conjunto de valor eficiente como se demuestra en el siguiente

Teorema 2.27 *Dada ν función de valor vectorial. Entonces*

$$\mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu) \subseteq \mathcal{A}'(\mathcal{Z}, \nu)$$

Demostración. Sea $z^0 \in \mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu)$ y $z^0 \notin \mathcal{A}'(\mathcal{Z}, \nu)$.

Si $z^0 \notin \mathcal{A}'(\mathcal{Z}, \nu)$ entonces existen al menos un i y j tal que $z^0 \notin \{z \in \mathcal{Z} : [\nu_i(z) \geqq n_i, \nu_j(z) \geqq n_j] \vee \nu_1(z) \geqq n_1 \vee ... \vee \nu_p(z) \geqq n_p\}$ y entonces $\nu_1(z^0) < n_1, ..., \nu_p(z^0) < n_p$, pudiendo no estar la componente j o la i, pero sólo una. Sea j la componente que no está . De esto y de la definición del punto nadir obtenemos las siguientes desigualdades: $\nu_1(z^0) < n_1 \leqq \nu_1(z_j^*), ..., \nu_j(z^0) \leqq \nu_j(z_j^*), ..., \nu_p(z^0) < n_p \leqq \nu_p(z_j^*)$; de las cuales se obtiene que $z^0 \notin \mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu)$. Contradicción con las hipótesis iniciales. □

Si suponemos que podemos obtener más información sobre las preferencias del decisor, la cual viene representada por el cono de información K tal que $K_* = G\{k^1, ..., k^q\}$, entonces $\nu^k \equiv (k^1\nu, ..., k^q\nu)$. Se verifica

Teorema 2.28 *Dada $\nu : \mathcal{Z} \rightarrow I\!R^p$ función de valor vectorial y K cono de información. Entonces*

$$\mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu^K) \subseteq \mathcal{A}'(\mathcal{Z}, \nu^K)$$

Demostración. Sea $z^0 \in \mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu^K)$ y $z^0 \notin \mathcal{A}'(\mathcal{Z}, \nu^K)$.

Si $z^0 \notin \mathcal{A}'(\mathcal{Z}, \nu^k)$ entonces existe al menos un i y j tal que $z^0 \notin \{z \in \mathcal{Z} : [(k^i\nu)(z) \geqq n_i, (k^j\nu)(z) \geqq n_j] \vee (k^1\nu)(z) \geqq n_1 \vee ... \vee (k^p\nu)(z) \geqq n_p\}$

entonces $(k^1\nu)(z^0) < n_1, ..., (k^p\nu)(z^0) < n_p$, pudiendo no estar la componente j o la i, pero sólo una. Sea j la componente que no está . De esto y de la definición del punto nadir obtenemos las siguientes desigualdades: $(k^1\nu)(z^0) < n_1 \leqq (k^1\nu)(z_j^*), ..., (k^j\nu)(z^0) \leqq (k^j\nu)(z_j^*), ..., (k^p\nu)(z^0) < n_p \leqq (k^p\nu)(z_j^*)$; de las cuales se obtiene que $z^0 \notin \mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu^K)$. Contradicción con las hipótesis iniciales. □

Sin embargo, esta aproximación se puede mejorar como veremos a continuación. En realidad, el conjunto de aproximación que construimos para el caso de una función de valor vectorial con dos componentes se podía entender como el conjunto de puntos que no domina z_1^*, $ND(z_1^*)$, intersecado con el conjunto de puntos que no domina z_2^*, $ND(z_2^*)$. Es decir, que la expresión (2.9) se puede reescribir como

$$\mathcal{A}''(\mathcal{Z}, \nu) = ND(z_1^*) \cap ND(z_2^*)$$

donde $ND(z_i^*) = \{z \in \mathcal{Z} : \ \nu_j(z) > \nu_j(z_i^*) \text{ para algún } j \neq i, i = 1, 2, \ j = 1, 2\}$

De forma análoga podemos extender este resultado al caso de que la función de valor vectorial posea un número de componentes $p > 2$ en la siguiente forma:

Sea $\nu \equiv (\nu_1, ..., \nu_p)$ función de valor vectorial con p componentes. Definimos el conjunto de aproximación al conjunto de valor eficiente como

$$\mathcal{A}''(\mathcal{Z}, \nu) = \bigcap_{i=1}^{p} ND(z_i^*)$$

donde $ND(z_i^*) = \{z \in \mathcal{Z} : \ \nu_j(z) > \nu_j(z_i^*) \text{ para algún } j \neq i, i = 1, ..., p, \ j = 1, ..., p\}$.

A continuación vamos a probar que el conjunto de aproximación construido efectivamente contiene el conjunto de valor eficiente.

Teorema 2.29 *Dada* $\nu : \mathcal{Z} \to I\!R^p$ *función de valor vectorial. Entonces*

$$\mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu) \subseteq A''(\mathcal{Z}, \nu)$$

Demostración. Sea $z^0 \in \mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu)$ y $z^0 \notin \mathcal{A}''(Z, \nu)$.
Si $z^0 \notin \mathcal{A}''(\mathcal{Z}, \nu)$ entonces existe z_i^* para algún i que domina a z^0. Es decir, $\nu(z^0) \leq \nu(z_i^*)$. O lo que es lo mismo, $z^0 \notin \varepsilon(\mathcal{Z}, \nu)$. Contradicción con la hipótesis inicial. □

Además, este último conjunto de aproximación al conjunto de valor eficiente es mejor que el construido inicialmente como se prueba en el siguiente

Teorema 2.30 *Dada* $\nu : \mathcal{Z} \to I\!R^p$ *función de valor vectorial. Entonces*

$$\mathcal{A}''(\mathcal{Z}, \nu) \subset \mathcal{A}'(\mathcal{Z}, \nu)$$

Demostración. Sea $z^0 \in \mathcal{A}''(\mathcal{Z}, \nu)$ y $z^0 \notin \mathcal{A}'(\mathcal{Z}, \nu)$.

Si $z^0 \notin \mathcal{A}'(\mathcal{Z}, \nu)$ entonces existe al menos i y j tal que $z^0 \notin \{z \in \mathcal{Z} : [\nu_i(z) \geqq n_i, \nu_j(z) \geqq n_j] \vee \nu_1(z) \geqq n_1 \vee ... \vee \nu_p(z) \geqq n_p\}$, entonces $\nu_1(z^0) < n_1, ..., \nu_p(z^0) < n_p$, pudiendo no estar la componente j o i pero sólo una. Sea j la componente que no está . De esto y de la definición del punto nadir obtenemos las siguientes desigualdades: $\nu_1(z^0) < n_1 \leqq \nu_1(z_j^*), ..., \nu_j(z^0) \leqq \nu_j(z_j^*), ..., \nu_p(z^0) < n_p \leqq \nu_p(z_j^*)$; de las cuales se obtiene que z^0 está dominada por z_j^*. Con lo cual $z^0 \notin \mathcal{A}''(\mathcal{Z}, \nu)$. Contradicción con la hipótesis. □

Además $\mathcal{A}'(\mathcal{Z},\nu) \not\subset \mathcal{A}''(\mathcal{Z},\nu)$. Para probar esto basta considerar el siguiente contraejemplo:

Sean $\mathcal{Z} = \{z^1, z^2, z^3, z^4\}$ y $\nu(z^1) = (9,2,1)$, $\nu(z^2) = (0,8,2)$, $\nu(z^3) = (2,4,7)$ y $\nu(z^4) = (1,3,2)$. De aquí se obtiene que el punto nadir es $(n_1, n_2, n_3) = (0,2,1)$. Obteniéndose:

$$\nu_1(z^{3*}) = 2 > \nu_1(z^4) = 1 > n_1 = 0$$

$$\nu_2(z^{3*}) = 4 > \nu_2(z^4) = 3 > n_2 = 2$$

$$\nu_3(z^{3*}) = 7 > \nu_3(z^4) = 2 > n_3 = 1$$

Esto significa que $z^4 \in A'(\mathcal{Z},\nu)$ pero $z^4 \notin A''(\mathcal{Z},\nu)$. □

Ahora, supongamos que hemos obtenido más información sobre las preferencias del decisor, las cuales quedan representadas por el conjunto de información $K_* = G\{k^1, ..., k^q\}$. Entonces

Teorema 2.31 *Dada $\nu : \mathcal{Z} \to I\!R^p$ función de valor vectorial y K cono de información se verifica*

$$\mathcal{E}(\mathcal{Z},\nu^K) \subseteq \mathcal{A}''(\mathcal{Z},\nu^K)$$

Demostración. Sea $K_* = G\{k^1, ..., k^q\}$. Denotemos por $z^*_{k^i}$ las soluciones donde las funciones $(k^i\nu)(\cdot)$, para todo $i = 1, ..., q$, alcanzan sus máximos respectivamente. Supongamos que $z^0 \in \mathcal{E}(\mathcal{Z},\nu^K)$ y $z^0 \notin \mathcal{A}''(Z,\nu^K)$.

Si $z^0 \notin \mathcal{A}''(\mathcal{Z},\nu^K)$ entonces existe $z^*_{k^i}$ para algún i que domina a z^0. Es decir, $\nu^K_j(z^0) \leqq \nu^K_j(z^*_{k^i})$ para todo j con alguna desigualdad estricta. O lo que es lo mismo, $z^0 \notin \mathcal{E}(\mathcal{Z}, \nu^K)$. Contradicción con la hipótesis inicial. $\square$

Además, se verifica la propiedad de monotonía para los conjuntos $\mathcal{A}''$, basada en

Teorema 2.32 *Dada $\nu : \mathcal{Z} \rightarrow I\!R^p$ función de valor vectorial y K cono de información tal que se verifica $K_* \subseteq int(K^0)$ entonces*

$$\mathcal{A}''(\mathcal{Z}, \nu^K) \subseteq \mathcal{A}''(\mathcal{Z}, \nu)$$

Demostración. Sea $K_* = G\{k^1, ..., k^q\}$. Denotemos por z_i^* y $z_{k^j}^*$ las soluciones donde las funciones $\nu^i(\cdot)$ y $(k^j\nu)(\cdot)$, para todo $i = 1, ..., p$ y $j = 1, ..., q$, alcanzan sus máximos, respectivamente.

Lo demostramos por inducción sobre q.

Si q=1.

$\mathcal{A}''(\mathcal{Z}, \nu^K) = ND(z_{k^1}^*)$ y $\mathcal{A}''(\mathcal{Z}, \nu) = \bigcap_{i=1}^{p} ND(z_i^*)$.

Supongamos que $z^0 \in \mathcal{A}''(\mathcal{Z}, \nu^K)$ y $z^0 \notin \mathcal{A}''(\mathcal{Z}, \nu)$. Si $z^0 \in \mathcal{A}''(\mathcal{Z}, \nu^K)$ entonces

$$(k^1\nu)(z^0) = (k^1\nu)(z_{k^1}^*) \tag{2.10}$$

y si $z^0 \notin \mathcal{A}''(\mathcal{Z}, \nu)$ entonces existe i tal que $\nu(z^0) \leq \nu(z_i^*)$. Por tanto,

$$(k^1\nu)(z^0) < (k^1\nu)(z_i^*). \tag{2.11}$$

De (2.10) y (2.11) se obtiene que $k^1\nu(z_{k^1}^*) < k^1\nu(z_i^*)$. Contradicción con la definición de $z_{k^1}^*$.

Supuesto cierto para $q-1$ veamos que también lo es para q.

Llamemos $K_*' = G\{k^1, ..., k^{q-1}\}$. Por hipótesis se verifica

$$\mathcal{A}''(\mathcal{Z}, \nu^{K'}) \subseteq \mathcal{A}''(\mathcal{Z}, \nu). \tag{2.12}$$

Además,

$$\mathcal{A}''(\mathcal{Z},\nu^K)=\bigcap_1^q ND(z_{kj}^*)\subseteq\mathcal{A}''(\mathcal{Z},\nu^{K'})=\bigcap_1^{q-1} ND(z_{kj}^*). \qquad (2.13)$$

De (2.12) y (2.13) se obtiene $\mathcal{A}''(\mathcal{Z},\nu^K)\subseteq\mathcal{A}''(\mathcal{Z},\nu)$. c.q.d. □

Si hay un nuevo aumento de información se cumple

Teorema 2.33 *Dada $\nu:\mathcal{Z}\to\mathbb{R}^p$ función de valor vectorial y, K^1 y K^2 conos de información tal que $K_*^2\subseteq Int(K_*^1)$ entonces*

$$\mathcal{A}''(\mathcal{Z},\nu^{K^2})\subseteq\mathcal{A}''(\mathcal{Z},\nu^{K^1})$$

Demostración. Sea $K_*^1=G\{k_1^1,...,k_r^1\}$ y $K_*^2=G\{k_1^2,...,k_s^2\}$. Denotemos por $z_{k_i^1}^*$ y $z_{k_j^2}^*$ las soluciones donde las funciones $(k_i^1\nu^i)(\cdot)$ y $(k_j^2\nu)(\cdot)$, para todo $i=1,...,r$ y $j=1,...,s$, alcanzan sus máximos, respectivamente.

Lo demostramos por inducción sobre s.

Si s=1.

$\mathcal{A}''(\mathcal{Z},\nu^{K^2})=ND(z_{k_1^1}^*)$ y $\mathcal{A}''(\mathcal{Z},\nu^{K^1})=\bigcap_{i=1}^{r} ND(z_{k_i^2}^*)$.

Supongamos que $z^0\in\mathcal{A}''(\mathcal{Z},\nu^{K^2})$ y $z^0\notin\mathcal{A}''(\mathcal{Z},\nu^{K^1})$. Si $z^0\in\mathcal{A}''(\mathcal{Z},\nu^{K^2})$ entonces

$$(k_1^2\nu)(z^0)=(k_1^2\nu)(z_{k_1^2}^*) \qquad (2.14)$$

y si $z^0\notin\mathcal{A}''(\mathcal{Z},\nu^{K^1})$ entonces existe i tal que $\nu^{K^1}(z^0)\leq\nu^{K^1}(z_{k_i^1}^*)$. Por tanto,

$$(k_1^2\nu)(z^0)<(k_1^2\nu)(z_{k_i^1}^*). \qquad (2.15)$$

De (2.14) y (2.15) se obtiene que $(k_1^2\nu)(z_{k_1^2}^*)<(k_1^2\nu)(z_{k_i^1}^*)$. Contradicción con la definición de $z_{k_1^2}^*$.

Supuesto cierto para $s-1$ veamos que también lo es para s.

Llamemos $K_*'^2 = G\{k_1^2, ..., k_{s-1}^2\}$. Por hipótesis se verifica

$$\mathcal{A}''(\mathcal{Z}, \nu^{K'^2}) \subseteq \mathcal{A}''(\mathcal{Z}, \nu^{K^1}). \tag{2.16}$$

Además,

$$\mathcal{A}''(\mathcal{Z}, \nu^{K^2}) = \bigcap_{j=1}^{s} ND(z^*_{k_j^2}) \subseteq \mathcal{A}''(\mathcal{Z}, \nu^{K'^2}) = \bigcap_{j=1}^{s-1} ND(z^*_{k_j^2}). \tag{2.17}$$

De (2.16) y (2.17) se verifica $\mathcal{A}''(\mathcal{Z}, \nu^{K^2}) \subseteq \mathcal{A}''(\mathcal{Z}, \nu^{K^1})$ c.q.d. $\square$

El conjunto de aproximación al conjunto de valor eficiente, $\mathcal{A}''(\mathcal{Z}, \nu)$, puede reescribirse en función de las componentes de la función de valor vectorial de la siguiente forma:

$$\begin{gathered}
z \in \mathcal{Z} \\
\nu_2(z) > \nu_2(z_1^*) - \alpha_2^1 M \\
\vdots \\
\nu_p(z) > \nu_p(z_1^*) - \alpha_p^1 M \\
\vdots \\
\nu_1(z) > \nu_1(z_p^*) - \alpha_1^p M \\
\vdots \\
\nu_{p-1}(z) > \nu_{p-1}(z_p^*) - \alpha_{p-1}^p M \\
\vdots \\
\sum_{i \neq j} \alpha_i^j \leqq p-1 \quad j = 1, ..., p \\
\alpha_i^j \in \{0, 1\}
\end{gathered}$$

siendo M un valor suficientemente grande.

Para tener una idea de quien puede ser la constante M, calculamos los puntos ideales y antiideales respecto a cada una de las componentes de la función de valor. Sean estos z_1^*, z_2^*, ... , z_p^* y z_{1*}, z_{2*}, ... , z_{p*}, respectivamente. Entonces M puede ser cualquier valor que verifique la siguiente desigualdad:

$$M \geqq max\{\nu_1(z_1^*) - \nu_1(z_{1*}), ..., \nu_p(z_p^*) - \nu_p(z_{p*})\}.$$

Los algoritmos vistos anteriormente para el caso de una función de valor vectorial con dos componentes son válidos para el caso de funciones de valor vectoriales con más de dos componentes considerando como conjunto de aproximación este nuevo conjunto que hemos definido, $\mathcal{A}''(\mathcal{Z}, \nu)$.

Capítulo 3

Ambiente de incertidumbre

3.1 Aproximaciones al conjunto de utilidad eficiente

3.1.1 Introducción

En los procesos de análisis de utilidad multiatributo para problemas de decisión bajo riesgo o incertidumbre, la exactitud y precisión de las funciones de utilidad asignadas es un rasgo importante del proceso de solución ya que tales funciones son las herramientas que proporcionan un orden de preferencia sobre un conjunto de alternativas cuyas consecuencias dependen del azar. La teoría de la utilidad esperada y la teoría de la utilidad esperada subjetiva (Von Neumman y Morgentern, 1944; Savage, 1954;1972; Fishburn, 1982; French, 1986) consideradas como el principal paradigma de la teoría prescriptiva, tienen posiblemente su mayor deficiencia en la dificultad práctica de la asignación de las funciones de utilidad, que crece con el número de atributos en los problemas multidimensionales. Hasta la fecha, la forma más eficaz de aliviar esta dificultad ha sido la reducción, tanto como fuera posible, de la dimensión de la función de utilidad. Esto lleva a la agrupación de los atributos en subgrupos más pequeños, cada uno de los cuales puede considerarse independientemente de los otros. Esto es justamente lo que conduce a agrupar en forma apropiada atributos que están asociados a cada objetivo del nivel más bajo de las estructuras jerárquicas (Keeney y Raiffa, 1976).

Como en el caso de certidumbre la asignación de una función de utilidad global se substituye por la asignación de una vectorial cuyas componentes corresponden a funciones de utilidad para cada grupo de atributos. El análisis debe estar basado sobre la información parcial disponible y conducirnos a modelos que no requieran del decisor afirmaciones exactas sobre ciertos juicios de preferencia (Weber, 1987).

En este capítulo supondremos una situación de decisión bajo riesgo o incertidumbre con una función de utilidad vectorial que proporciona un modelo de decisión sin utilizar una noción explícita de riesgo. Asumiremos que una representación aditiva (Keeney and Raiffa, 1976; Dyer and Sarin, 1979) es una aproximación válida (Raiffa, 1982), y existe información parcial sobre las constantes de escala definidas por un cono poliédrico. Desarrollamos el concepto de eficiencia en utilidad vectorial para caracterizar la eficiencia de loterías en términos de una nueva función de utilidad vectorial definida a partir del cono poliédrico. Además, supondremos que es posible que el decisor pueda ir mejorando la asignación de las constantes de escala en un proceso interactivo en el que el objetivo fundamental es una reducción del conjunto de estrategias para hacer más fácil la selección de la más preferida. Se han desarrollados varios conceptos para el caso de información parcial sobre las constantes de escala (Sarin, 1977; Hannan, 1981; White et al., 1984; Kirkwood y Sarin, 1985; Hazen, 1986), y comparaciones y evaluación de diferentes métodos de asignación (Hobbs, 1980; Gershon, 1982; Schoemaker y Waid, 1982; Barron, 1992).

Nosotros sugerimos una aproximación interactiva basada en comparaciones de pares de estrategias para obtener información parcial sobre las constantes de escala dentro de un procedimiento de solución.

3.1.2 Relaciones entre funciones de valor y utilidad

En este apartado examinaremos las relaciones entre las funciones de utilidad bajo riesgo e certidumbre (Barron et al., 1984). Como ejemplo, consideremos las descripciones de trabajos hipotéticos de la forma (x, y, z), donde x indica la ciudad donde se ofrece el empleo, y el salario, y z el tipo de trabajo. Una decisión se considera sin riesgo si el decisor está seguro de la consecuencia multiatributo asociada con cada trabajo. En este caso, el problema consiste en seleccionar el trabajo más preferido o comparar los valores relativos de las diferentes alternativas de trabajo. Por otra parte, una decisión se considera con riesgo si el decisor posee inseguridad sobre la consecuencia asociada a cada trabajo pero puede expresarla como una distribución de probabilidad sobre las posibles consecuencias de cada trabajo. En este segundo caso, una solución al problema consiste en seleccionar el trabajo que tenga la mayor utilidad esperada.

La teoría de la utilidad proporciona los fundamentos para la construcción de una función de utilidad u que preserva las preferencias de las alternativas mientras su esperanza preserva las preferencias entre las loterías. En el caso multiatributo se han desarrollado varias formas de descomposición de u (Keeney y Raiffa, 1976) de las que la aditiva y multiplicativa son las de más frecuente uso. Estas descomposiciones son válidas siempre y cuando se cumplan dos clases de propiedades cualitativas sobre preferencias, la independencia preferencial de pares de atributos, y la independencia en utilidad. *La independencia preferencial* requiere que las ordenaciones de preferencias sobre pares de atributos no quede afectada por el nivel fijado en los restantes atributos. *La independencia en utilidad* requiere que las preferencias para las loterías que se cambian en el nivel de un sólo atributo no quedan afectadas por los niveles fijados para los restantes atributos. Además, el modelo aditivo requiere que el decisor sea indiferente entre todos las loterías con idénticas distribuciones marginales de probabilidad. Esta última condición se denomina *independencia aditiva.*

Dyer y Sarin (1979) desarrollaron un modelo de medida para el caso de certidumbre que estaba basado en la medida tradicional de intensidad de preferencia (Suppes y Winet, 1955). Mientras las funciones de utilidad y las utilidades esperadas reflejan el atractivo de las loterías, las funciones de valor reflejan las diferencias en los valores relativos de las alternativas. Para distinguir ambas funciones, denotamos las funciones de utilidad con u y las de valor con ν.

La descomposición de la función de valor es similar a la descomposición de la función de utilidad. Asumiendo que se verifica la independecia preferencial de pares de atributos, Dyer y Sarin (1979) probaron que la función de valor es multiplicativa si, análogamente a independencia en utilidad, los juicios de valor entre alternativas que varían sólo en un subconjunto de atributos, no dependen sobre los valores fijados en los restantes atributos. Además, ν es aditiva si la diferencia entre los valores de las dos alternativas que varían en un atributo, es invariante frente a cambios en los otros atributos.

Las descomposiciones de ν son muy similares a aquellas en la teoría de la utilidad esperada. A pesar de la similitud estructural entre u y ν no existen razones a priori para suponer que están relacionadas por una forma funcional simple. La interpretación de los modelos, y los juicios para obtener las funciones y los diferentes parámetros difieren sustancialmente.

Estas diferencias son importantes para el análisis de decisiones. Por ejemplo, si encontramos apropiada una función de valor aditiva, esta puede construirse usando técnicas relativamente simples. Las relaciones teóricas de la tabla 3.1 permiten al analista para transformar ν en u. Psicológicamente, un procedimiento de transformación de valor a utilidad simplifica el proceso siendo necesario un mínimo número de preguntas sobre las loterías hipotéticas, y distingue diferentes procesos cognitivos: actitud de riesgo frente a valor marginal (para atributos individuales) y substituye/complementa frente a adversión/afición al riesgo multiatributo.

Relaciones teóricas

Claramente, u y ν están relacionadas por una transformación estrictamente creciente $u = h(\nu)$, ya que ambas son funciones que preservan el orden (ver, por ejemplo, Raiffa, 1969; Keeney y Raiffa, 1976; Krantz et al., 1971). Pero ni la teoría de la utilidad esperada ni la medida de intensidad de preferencia proporcionan por ellas mismas una forma específica de relación entre u y ν. En principio, la forma y agregación de u y ν puede ser bastante diferente. Por ejemplo, ν puede ser aditiva, mientra u puede ser multiplicativa o no descomponible completamente. Todas las ν pueden ser lineales, mientras que todas las u podrían ser no lineales, y viceversa.

A lo largo de la literatura teórica existen resultados que relacionan las funciones de utilidad y las funciones de valor para algunas clases de transformaciones específicas. Por ejemplo, exponencial o logarítmica (Pollack, 1967; Krantz et al., 1971; Keeney y Raiffa, 1976; Dyer y Sarin 1979). Una forma común de relacionar u y ν, se tiene a partir de los teoremas de unicidad de sus respectivas representaciones teóricas. Por ejemplo, si u y ν son ambas aditivas y preservan el orden, entonces existen constantes reales $a > 0$ y b, tal que

$$u = a\nu + b. \tag{3.1}$$

Dyer y Sarin (1979) usaron la ecuación (3.1) para obtener una relación funcional entre u y ν para el caso donde u y ν eran aditivas o multiplicativas. Keeney y Raiffa (1976) probaron que una función de valor aditiva en combinación con una función de utilidad multiplicativa implica que la función de utilidad tiene aversión constante al riesgo o aficionada al riesgo en valor. Por tanto, las funciones de valor y utilidad deben estar relacionadas mediante una transformación exponencial. Ahora es, en general, bien conocido de la literatura que las funciones de valor y utilidad deben estar relacionadas por una transformación lineal, logarítmica, o exponencial, si ambas son a la vez aditivas o multiplicativas. Estos resultados se resumen en la tabla 3.1 (von Winterfeldt et al., 1980).

Debería notarse que las relaciones de la tabla 3.1 son muy restrictivas en un sentido matemático y de comportamiento. Matemáticamente, sería suficiente encontrar un punto que relacione u y ν, y de esto determinar la ecuación completa. Del comportamiento, las ecuaciones implican neutralidad al riesgo ($u = \nu$), o aversión (o afición) constante al riesgo en valor.

Tabla 3.1

ν/u	aditiva	multiplicativa
aditiva	$u = \nu$	$u = \frac{ln(1+w\nu)}{ln(1+w)}$
multiplicativa	$1 + ku = (1+k)^{\nu}$	$1 + ku = (1 + w\nu)^{\frac{ln(1+k)}{ln(1+w)}}$

Finalmente, indicar que las funciones de utilidad y de valor pueden descomponerse en otras formas, además, de las aditivas y multiplicativas examinadas en esta sección.

3.1.3 Formulación del problema

Consideramos un problema de decisión bajo riesgo donde $\mathcal{Z}$ es el conjunto de soluciones con elementos z caracterizados por un número de atributos $z_1, ..., z_n$ y sea $\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}$ el conjunto de distribuciones de probabilidad simples sobre $\mathcal{Z}$, con elementos $p, q, p', ...$ también llamados loterías o estrategias. Asumimos una función de utilidad vectorial $u : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}^m$, donde $u = (u_1, ..., u_m)$ representa un orden de preferencia sobre $\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}$ que conduce al principio de dominancia definido como

$$p >_u q \iff E(u,p) \geq E(u,q)$$

donde $E(u,p) = (E(u_1,p), ..., E(u_m,p))$, es el vector de utilidades esperadas y

$$E(u,p) \geq E(u,q) \iff E(u_i,p) \geqq E(u_i,q) \text{ para todo } i = 1, ..., m \text{ y existe}$$

$$j \in \{1, ..., m\} \text{ tal que } E(u_j, p) > E(u_j, q)$$

con

$$E(u_i, p) = \sum_{t=1}^{n} p_t u_i(z^t)$$

para todo $i = 1, ..., m$ y $p = (p_1, z^1; p_2, z^2; ....; p_n, z^n)$ $(p_t \geqq 0, \forall t, \ \sum p_t = 1)$.

La relación $>_u$ es un orden parcial estricto sobre $\mathcal{P}_\mathcal{Z}$ (irreflexivo, transitivo y asimétrico). Formulamos el problema de optimización vectorial bajo riesgo (p.o.v.r.) como

$$\begin{aligned} max \quad & E(u, p) \\ sa. \quad & p \in \mathcal{P}_\mathcal{Z} \end{aligned}$$

que conduce de forma natural al concepto de punto eficiente.

Definición 3.1 *$p \in \mathcal{P}_\mathcal{Z}$ es una lotería de utilidad eficiente si no existe $q \in \mathcal{P}_\mathcal{Z}$ tal que $E(u, q) \geq E(u, p)$.*

Denominemos a tal conjunto de loterías *conjunto de utilidad eficiente* y se denotará $\mathcal{E}(\mathcal{P}_\mathcal{Z}, u)$. La anterior definición extiende la de solución eficiente (no dominada u óptimal de Pareto) para problemas de decisión multicriterio bajo certidumbre. Notemos que, si consideramos las loterías degeneradas $p_z = (1, z) \in \mathcal{P}_\mathcal{Z}$ tiene sentido, además, considerar el conjunto de utilidad eficiente para $\mathcal{Z}$ dado u, que denotamos

$$\mathcal{E}(\mathcal{Z}, u) = \{z \in \mathcal{Z} : \nexists z' \in \mathcal{Z} \text{ tal que } u(z') \geq u(z)\}$$

De los anteriores conceptos podemos redefinir el p.o.v.r. como:

"Dados $\mathcal{P}_\mathcal{Z}, u$ y $>_u$ encontrar $\mathcal{E}(\mathcal{P}_\mathcal{Z}, u)$".

Si el p.o.v.r. tiene un único elemento p, entonces tal elemento debe ser la estrategia más preferida para el problema de decisión. Sin embargo, este no es el caso de la mayoría de los problemas reales, ya que $\mathcal{E}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u)$ puede tener muchos puntos. La generación de este conjunto puede ser difícil y, aunque esta fuera posible, como puede ser el caso de problemas discretos, generalmente esto no será la resolución del problema porque no proporciona al decisor con un número suficientemente pequeño de estrategias de decisión que facilite su elección. Así, nuestro problema debería enunciarse:

"seleccionar un único elemento del conjunto $\mathcal{E}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u)$".

Una forma posible de resolver este problema de decisión se tendrá si el decisor revela información sobre sus preferencias para proporcionar algunas suposiciones estructurales adicionales.

Aprovechando esta idea propondremos un método de ayuda a la decisión, que permite alcanzar una única estrategia en el conjunto de utilidad eficiente para problemas de decisión multicriterio bajo riesgo. En la siguiente sección introducimos, basado en la extensión del principio de Bernoulli para la maximización de la utilidad esperada, un método interactivo que puede usarse cuando existe conocimiento parcial de la estructura de preferencia del decisor. Este enfoque excluye la posibilidad de definir las preferencias del decisor en la forma de una función de utilidad escalar concreta pero sí de una función de utilidad vectorial, que representa información parcial o conocimiento incompleto.

3.1.4 Eficiencia en utilidad vectorial

Volviendo a nuestro problema de información parcial, notamos que llegábamos a determinar el conjunto de utilidad eficiente y, considerando que este conjunto podía ser demasiado grande para que el decisor eligiera una lotería, introducíamos una agregación de las componentes de u para facilitar tal elección. Así, consideramos la composición aditiva con pesos

$$u^k = (ku)(z) = \sum_{i=1}^{m} k_i u_i(z)^1$$

y existe información parcial sobre las constantes de escala del decisor en la forma de restricciones. Tales constantes de escala sobre la estructura de utilidad se denotarán por $k = (k_1, ..., k_m)$.

Dada una función de utilidad vectorial u y un conjunto de información asociado K_* para una situación de decisión específica, la clase de funciones de utilidad consistente con tal información se denota por

$$U(K_*) = \{u^k : \ u^k = ku, \ k \in K_*\}$$

donde si la lotería $p = (p_1, z^1; ...; p_n, z^n)$, entonces su utilidad esperada toma la forma

$$E(u^k, p) = \sum_{i=1}^{n} p_t (ku)(z^t)$$

Ahora, el principio de dominancia será : Dado $p, q \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}}$

$$p >_d q \iff E(u^k, p) \geqq E(u^k, q) \text{ para todo } k \in K_* \text{ y existe}$$
$$k' \in K_* \text{ tal que } E(u^{k'}, p) > E(u^{k'}, q)$$

[1]Aunque para simplificar escribimos el argumento z para todas las funciones componentes u_i, entenderemos que cada una de ellas dependerá solamente de algunos z_j.

Es claro que $>_d$ es un orden parcial estricto a partir del cual podemos definir el conjunto eficiente

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, >_d) = \{p \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}} : \nexists q \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}} \text{ tal que } q >_d p\}$$

que se denotará en lo que sigue como $\mathcal{E}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u^k)$ y llamaremos *conjunto de utilidad eficiente para la clase* $U(K_*)$. En términos de las funciones u^k el anterior concepto puede redefinirse: "$p \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u^k)$ si y sólo si no existe $q \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}}$ tal que $E(u^k, q) \geqq E(u^k, p)$ para todo $k \in K_*$ y existe $k' \in K_*$ tal que $E(u^{k'}, q) > E(u^{k'}, p)$".

A continuación, relacionaremos los dos principios de dominancia, $>_u$ y $>_d$, a través de sus respectivos conjuntos eficientes, daremos una caracterización que proporciona una forma práctica de determinar $\mathcal{E}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u^k)$ y, por tanto, algunos resultados que sirven de apoyo para procedimientos de reducción interactiva. Comencemos primero generalizando el concepto de función de utilidad vectorial.

Definición 3.2 *Dada una función de utilidad vectorial* u *y un conjunto de información* $K_* = G\{k^1, ..., k^r\}$, *la función* $u^K : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^r$ *definida como*

$$u^K = (k^1 u, ..., k^r u)$$

se llamará función de utilidad vectorial asociada al cono de información K.

En particular, podemos escribir $u = u^{K^0}$ que se corresponde con la situación de información nula sobre las constantes escalares para la clase de funciones de utilidad $U(K_*^0)$.

Proposición 3.1 *Dada una función de utilidad vectorial* u *y un conjunto de información* $K_* = G\{k^1, ..., k^r\}$, *entonces para todo* $p \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}}$

$$E(u^K, p) = (k^1 E(u, p), ..., k^r E(u, p)) \tag{3.2}$$

Demostración. Es inmediata de la siguiente cadena de igualdades válidas para $p \in \mathcal{P_Z}$ y $z \in \mathcal{Z}$,

$$E(u^K,p) = (E(k^1u,p),...,E(k^ru,p)) =$$
$$= \left(\sum_{t=1}^{n} p_t(k^1u)(z^t),...,\sum_{t=1}^{n} p_t(k^ru)(z^t)\right) =$$
$$= \left(\sum_{t=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_t(k_i^1u_i)(z^t),...,\sum_{t=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_t(k_i^ru_i)(z^t)\right) =$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{m} k_i^1\sum_{t=1}^{n} p_tu_i(z^t),...,\sum_{i=1}^{m} k_i^r\sum_{t=1}^{n} p_tu_i(z^t)\right) =$$
$$= \left(k^1E(u,p),...,k^rE(u,p)\right)$$

donde $k^i = (k_1^i,...,k_m^i)$ para todo $i = 1,...,.r$. □

Veamos ahora que el conjunto de utilidad eficiente coincide con el conjunto de utilidad eficiente para la clase $U(K_*)$

Teorema 3.1 *Dada una función de utilidad vectorial u y un conjunto de información $K_* = G\{k^1,...,k^r\}$, entonces*

$$\mathcal{E}(\mathcal{P_Z},u^K) \equiv \mathcal{E}(\mathcal{P_Z},u^k)$$

Demostración. Primero demostraremos que $\mathcal{E}(\mathcal{P_Z},u^K) \supseteq \mathcal{E}(\mathcal{P_Z},u^k)$. Sea $p \in \mathcal{E}(\mathcal{P_Z},u^k)$ pero $p \notin \mathcal{E}(\mathcal{P_Z},u^K)$. Lo último significa que existe $q \in \mathcal{P_Z}$ tal que $E(u^K,q) \geq E(u^K,p)$, es decir, de (3.2) se obtiene $k^iE(u,q) \geqq k^iE(u,p)$ para todo $i = 1,...,r$ y existe $j \in \{1,...,r\}$ tal que $k^jE(u,q) > k^jE(u,p)$.

Para cada conjunto de números $(\alpha_1,...,\alpha_r) \in S_r$ se verifica

$$\alpha_1k^1E(u,q) + ... + \alpha_rk^rE(u,q) \geqq \alpha_1k^1E(u,p) + ... + \alpha_rk^rE(u,p)$$

o

$$\left(\sum_{t=1}^{r} \alpha_t k^t\right) E(u,q) \geqq \left(\sum_{t=1}^{r} \alpha_t k^t\right) E(u,p)$$

donde $\sum_{t=1}^{r} \alpha_t k^t = k \in K_*$. Así

$$kE(u,q) \geqq kE(u,p) \text{ para todo } k \in K_*$$

o

$$E(ku,q) \geqq E(ku,p) \text{ para todo } k \in K_*$$

Por tanto, para todo $k \in K_*$

$$E(u^k,q) \geqq E(u^k,p) \tag{3.3}$$

Por otra parte, es posible encontrar en S_r un conjunto de números $(\alpha_1^{'},...,\alpha_r^{'})$ tal que

$$\alpha_1^{'} k^1 E(u,q) + ... + \alpha_r^{'} k^r E(u,q) > \alpha_1^{'} k^1 E(u,p) + ... + \alpha_r^{'} k^r E(u,p)$$

o

$$\left(\sum_{t=1}^{r} \alpha_t^{'} k^t\right) E(u,q) > \left(\sum_{t=1}^{r} \alpha_t^{'} k^t\right) E(u,p)$$

Pero $k' = \sum_{t=1}^{r} \alpha_t^{'} k^t \in K_*$ y así

$$k'E(u,q) > k'E(u,p)$$

y, entonces, para tal $k' \in K_*$ tenemos

$$E(u^{k'},q) > E(u^{k'},p) \tag{3.4}$$

Por tanto, de (3.3) y (3.4), $p \notin \mathcal{E}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u^k)$ que contradice la hipótesis.

Ahora probaremos que $\mathcal{E}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u^K) \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u^k)$. Sea $p \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u^K)$ pero $p \notin \mathcal{E}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u^k)$. Lo último significa que existe $q \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}}$ con $E(u^k, q) \geqq E(u^k, p)$ para todo $k \in K_*$ y, para al menos un $k' \in K_*$, es $E(u^{k'}, q) > E(u^{k'}, p)$. Esto puede escribirse $kE(u, q) \geqq kE(u, p)$ para todo $k \in K_*$ y, para al menos un $k' \in K_*$, es $k'E(u, q) > k'E(u, p)$. Ya que $k' \in K_*$ es $k' = \sum_{t=1}^{r} \alpha_t k^t$, con $(\alpha_1, ..., \alpha_r) \in S_r$ y tenemos

$$\left(\sum_{t=1}^{r} \alpha_t k^t\right) E(u, q) > \left(\sum_{t=1}^{r} \alpha_t k^t\right) E(u, p)$$

o

$$\alpha_1 k^1 E(u, q) + ... + \alpha_r k^r E(u, q) > \alpha_1 k^1 E(u, p) + ... + \alpha_r k^r E(u, p)$$

y así

$$\begin{aligned} k^1 E(u, q) &\geqq k^1 E(u, p) \\ &\vdots \\ k^r E(u, q) &\geqq k^r E(u, p) \end{aligned}$$

con al menos una desigualdad estricta. Es decir,

$$(k^1 E(u, q), ..., k^r E(u, q)) \geq (k^1 E(u, p), ..., k^r E(u, p))$$

o

$$E(u^K, q) \geq E(u^K, p)$$

y entonces $p \notin \mathcal{E}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u^K)$, que contradice la hipótesis. $\square$

La importancia práctica de esta propiedad viene del hecho de que para probar la eficiencia en utilidad de una estrategia será suficiente usar la función vectorial u^K constituida por un número finito de funciones en vez de una clase infinita $U(K_*)$.

Ahora consideramos las loterías que maximizan la utilidad esperada $E(u^{k'}, \cdot)$ para algún vector $k' \in K_*$, tenemos

Definición 3.3 *Para un $k' \in K_*$ fijado, el conjunto*

$$O(\mathcal{P}_\mathcal{Z}, u^{k'}) = \{p' \in \mathcal{P}_\mathcal{Z} : \ E(u^{k'}, p') = max\{E(u^{k'}, p),\ p \in \mathcal{P}_\mathcal{Z}\}\}$$

se llamará conjunto de optimización en utilidad.

Este conjunto está bien definido si por ejemplo asumimos que $\mathcal{P}_\mathcal{Z}$ es compacto y las funciones u_i son continuas.

El próximo resultado expresa que las loterías que maximizan la esperanza de utilidad de una función u^k son de utilidad eficiente.

Proposición 3.2 *Sean u una función de utilidad vectorial y $K_* = G\{k^1, ..., k^r\}$, con $K_* \subseteq int(K_*^0)$, un conjunto de información, entonces*

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}_\mathcal{Z}, u^K) \supseteq \bigcup_{k \in K_*} O(\mathcal{P}_\mathcal{Z}, u^k)$$

Demostración. Sea $p \in \bigcup_{k \in K_*} O(\mathcal{P}_\mathcal{Z}, u^k)$, esto significa que existe $k' \in K_*$ tal que $p \in O(\mathcal{P}_\mathcal{Z}, u^{k'})$ y donde $k' = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j k^j$. Ahora, suponemos que $p \notin \mathcal{E}(\mathcal{P}_\mathcal{Z}, u^K)$. Esto último significa que existe $q \in \mathcal{P}_\mathcal{Z}$, $q \neq p$, tal que $E(u^K, q) \geq E(u^K, p)$, es decir,

$$\begin{aligned} k^1 E(u,q) &\geqq k^1 E(u,p) \\ &\vdots \\ k^r E(u,q) &\geqq k^r E(u,p) \end{aligned}$$

con al menos una desigualdad estricta. Entonces $k'E(u,q) > k'E(u,p)$, es decir, $E(u^{k'},q) > E(u^{k'},p)$, que contradice la hipótesis de optimalidad de p.

□

3.1.5 Reducción interactiva del conjunto de utilidad eficiente

Estudiamos ahora la reducción progresiva del conjunto de utilidad eficiente como consecuencia de nueva información revelada por el decisor en términos de conjuntos de información más reducidos sobre las constantes de escala. Precisaremos la forma de proporcionar tal información más adelante.

Proposición 3.3 *Sea u una función de utilidad vectorial y K_*, K'_* dos conjuntos de información tal que $K'_* \subseteq int(K_*)$, entonces*

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}_Z, u^{K'}) \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{P}_Z, u^K)$$

Demostración. Sean $K_* = G\{k^1, ..., k^r\}$ y $K'_* = G\{m^1, ..., m^s\}$ los conjuntos de información. Sabemos que $K'_* \subseteq int(K_*)$ y por tanto $m^j = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^j k^i$ donde $(\alpha_1^j, ..., \alpha_r^j) \in S_r$ para todo $j = 1, ..., s$, con cada $\alpha_i^j > 0$.

Sea $p \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_Z, u^{K'})$ pero $p \notin \mathcal{E}(\mathcal{P}_Z, u^K)$. En este caso existe $q \in \mathcal{P}_Z$ tal que $E(u^K, q) \geq E(u^K, p)$ y de (3.2) tenemos

$$(k^1E(u,p), ..., k^rE(u,p)) \leq (k^1E(u,q), ..., k^rE(u,q))$$

Así

$$m^1E(u,p) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^1(k^iE(u,p)) \quad < \quad \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^1(k^iE(u,q)) = m^1E(u,q)$$

$$\vdots$$

$$m^s E(u,p) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^s (k^i E(u,p)) \quad < \quad \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^s (k^i E(u,q)) = m^s E(u,q)$$

En este caso $p \notin \mathcal{E}(\mathcal{P_Z}, u^{K'})$ que contradice la hipótesis. □

Corolario 3.1 *Sea u una función de utilidad vectorial y K_* un conjunto de información tal que $K_* \subseteq int(K_*^0)$, entonces*

$$\mathcal{E}(\mathcal{P_Z}, u^K) \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{P_Z}, u)$$

Demostración. Es inmediata del teorema anterior si notamos que $u = u^{K^0}$ y que $K_* \subseteq int(K_*^0)$. □

En el caso del espacio de objetivos $\mathcal{Z}$ tenemos resultados análogos.

Corolario 3.2 *Sea u una función de utilidad vectorial y K_*,K_*' dos conjuntos de información tal que $K_*' \subseteq int(K_*)$, entonces*

$$\mathcal{E}(\mathcal{Z}, u^{K'}) \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{Z}, u^K)$$

Además, para cada conjunto de información K_* tal que $K_* \subseteq int(K_*^0)$, entonces

$$\mathcal{E}(\mathcal{Z}, u^K) \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{Z}, u)$$

Demostración. Observar que estas afirmaciones son casos particulares de anteriores si consideramos las loterías degeneradas $(1, z)$. □

Estos resultados sugieren un método interactivo para alcanzar una solución final. Comenzaríamos con el conjunto de utilidad eficiente y, mediante una interación con el decisor que proporcione conjuntos de información más reducidos, llevar a una reducción en el anterior conjunto. En el límite tendríamos la estrategia(s) que optimizará(n) la verdadera función de utilidad escalar.

El siguiente teorema dice que, cuando existe información completa sobre las preferencias del decisor, es decir, el conjunto de información se reduce a un vector que constituye la verdaderas constantes escalares, la lotería más preferida es la que maximiza la utilidad esperada del decisor.

Teorema 3.2 *Sea u una función de utilidad vectorial y $\{K_*^n\}$ una secuencia decreciente de conjuntos de información tal que $\{K_*^n\} \searrow t$. Si $p \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_Z, u^{K^n})$ para todo n, entonces $p \in O(\mathcal{P}_Z, tu)$.*

Demostración. Sean $p \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_Z, u^{K^n})$ para todo n y $K_*^n = G\{k_1^n, ..., k_q^n\}$. Así, no existe $q \in \mathcal{P}_Z$ tal que

$$\begin{array}{rcl} k_1^n E(u,q) & \geqq & k_1^n E(u,p) \\ & \vdots & \\ k_r^n E(u,q) & \geqq & k_r^n E(u,p) \end{array}$$

con al menos una desigualdad estricta para cada n. Ahora, ya que $\{K_*^n\} \searrow t$ cuando $n \to \infty$, entonces $k_i^n \to t$ para todo i, y por tanto para ningún $q \in \mathcal{P}_Z$ es $tE(u,p) < tE(u,q)$. Así, $p \in O(\mathcal{P}_Z, tu)$. c.q.d. □

Es fácil desarrollar un algoritmo para generar el conjunto de utilidad eficiente en problemas discretos. Una forma de obtener información adicional para reducir el conjunto de información será comparando pares de distribuciones, de donde obtendremos nuevas restricciones. Esto se ha hecho en el caso de certidumbre en algunos métodos (Zionts y Wallenius, 1983; Malakooti, 1989; Taner y Koksalan, 1991). El procedimiento aquí será comparar dos loterías $p, q \in \mathcal{P}_Z$, y si el decisor establece una preferencia estricta entre ellas, tendremos una restricción que nos lleva a un nuevo conjunto de información, es decir,

$$p >_d q \Rightarrow E(u^k, p) > E(u^k, q)$$

No escribimos restricciones para las indiferencias o respuestas no conocidas. El siguiente resultado asegura la aproximación del procedimiento.

Proposición 3.4 *Sea $p, q \in \mathcal{P}_Z$, u una función de utilidad vectorial y $K_* = G\{k^1, ..., k^r\}$ un conjunto de información. Si p es preferido a q, generamos el conjunto de información $K'_* = \{k = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i k^i : \; E(u^k, p) > E(u^k, q)$ con $\alpha_i > 0$ para todo i y $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1\}$, entonces*

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}_Z, u^{K'}) \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{P}_Z, u^K)$$

Demostración. Se sigue de la proposición 3.3 teniendo en cuenta que $K'_* \subseteq int(K_*)$. □

Si el proceso de comparación de dos loterías nos conduce a un conjunto de información vacío, el decisor sería inconsistente. Debería reconsiderar sus respuestas sobre sus preferencias y cambiarlas. Malakooti (1985) estudia y discute la resolución de inconsistencias en comparaciones interactivas de pares de alternativas.

Antes de dar el algoritmo vamos a sugerir una regla de parada. De acuerdo con esto debería venir cuando en una cierta interacción el decisor no pueda revelar una preferencia estricta entre pares de loterías, pero ya que en este caso de incertidumbre tales comparaciones entre pares pueden no ser fáciles, por requerir un esfuerzo importante del decisor, introducimos una regla que puede ser una ayuda para la finalización del procedimiento.

Denotemos $\mathcal{E}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u^K)$ por $\mathcal{E}_K$, y consideremos las siguientes definiciones.

Definición 3.4 *Para cada $p \in \mathcal{E}_K$, los números*

$$u^*(p) = \begin{array}{ll} max & E(u^k, p) \\ sa: & k \in K_* \end{array} \quad y \quad u_*(p) = \begin{array}{ll} min & E(u^k, p) \\ sa: & k \in K_* \end{array}$$

se llaman índices de utilidad superior e inferior para la lotería p bajo el conjunto de información K_*.

Dado un nivel de utilidad δ, supongamos que tal cantidad de utilidad puede serle indiferente al decisor. De esta forma, dados $p, q \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}}$ tales que

$$\begin{array}{ll} max & |E(u^k, p) - E(u^k, q)| \leq \delta \\ sa: & k \in K_* \end{array}$$

entonces, el decisor considerará igualmente preferidas ambas loterías a pesar de la posible diferencia entre sus utilidades esperadas.

Definición 3.5 *Las loterías $p^u, p^l \in \mathcal{E}_K$ tal que*

$$u^*(p^u) \geqq u^*(p) \;\; y \;\; u_*(p^l) \leqq u_*(p)$$

para todo $p \in \mathcal{E}_K$, se llaman, respectivamente, loterías de mayor y menor utilidad bajo el conjunto de información K_*. La diferencia no negativa

$$\delta_K = u^*(p^u) - u_*(p^l)$$

se llama nivel de diferencia de utilidad para $\mathcal{E}_K$ bajo el conjunto de información K_*.

Observemos que el nivel de diferencia de utilidad δ_K es la diferencia de utilidad más grande posible entre dos loterías bajo un conjunto de información dado. Ahora probaremos que, dado un conjunto de loterías, si la cantidad de utilidad para la que el decisor se siente indiferente es el nivel de diferencia de utilidad del conjunto, entonces el decisor considera igualmente preferidos todos los elementos de ese conjunto.

Proposición 3.5 *Dados $p^u, p^l \in \mathcal{E}_K$ y $\delta_K = u^*(p^u) - u_*(p^l)$. Si el decisor es indiferente a δ_K, entonces todas las loterías en $\mathcal{E}_K$ son igualmente preferidas.*

Demostración. Es inmediato si observamos que para cada $p, q \in \mathcal{E}_K$, tenemos

$$max|E(u^k,p) - E(u^k,q)| \leqq max(|u^*(p) - u_*(q)|, |u^*(q) - u_*(p)|) \leqq$$
$$sa : k \in K_*$$

$$\leqq u^*(p^u) - u_*(p^l) = \delta_K.$$

$\square$

Observemos que la proposición 3.5 no asume para el decisor la indiferencia entre las loterías p^u y p^l, sino que este es indiferente a ganar o perder la cantidad de utilidad δ_K. Tal nivel de utilidad se usará como regla de parada del método: Obtenemos nueva información a partir de comparación de pares de loterías durante la sesión interactiva en la que δ_K posiblemente decrece porque el conjunto de información se va reduciendo. Presentamos al decisor tal cantidad de utilidad quien decide parar el procedimiento y, entonces, seleccionará una estrategia, o proporcionará más información para reducir el conjunto de información para obtener, posiblemente, un conjunto más pequeño de estrategias para su elección y repetir el proceso.

A continuación, presentamos el algoritmo para problemas discretos, que proporciona la reducción interactiva del conjunto de utilidad eficiente $\mathcal{E}_K$ basado en comparaciones de pares de loterías para generar los conjuntos de información. Para facilitar tales comparaciones, siempre usará en cada comparación el elemento p^u del conjunto $\mathcal{E}_K$.

ALGORITMO I

Paso 1. Sea $i = 0$. Generar $\mathcal{E}_{K^i} = \mathcal{E}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u^{K^i})$.

Paso 2. Identificar p^u y p^l. Calcular el nivel de diferencia de utilidad $\delta_{K^i} = u^*(p^u) - u_*(p^l)$.

Paso 3. Si el decisor es indiferente a δ_{K^i}, ir a 12. En otro caso, ir a 4.

Paso 4. Sea $\mathcal{E}_{K^i} = \mathcal{E}$.

Paso 5. Seleccionar arbitrariamente $p \in \mathcal{E}$.

Paso 6. Si $\mathcal{E}\backslash\{p\}$ es vacío, ir a 12. En otro caso, ir a 7.

Paso 7. Preguntar al decisor por la comparación entre p^u y p.

Si p^u es preferida a p, determinar $K_*^{i'}$ e ir a 9.

Si p es preferida a p^u, determinar $K_*^{i'}$ e ir a 9.

Si p es indiferente a p^u o el decisor no puede compararlas, ir a 8.

Paso 8. Sea $\mathcal{E} = \mathcal{E}\backslash\{p\}$ e ir a 5.

Paso 9. Sea $i = i + 1$.

Paso 10. Tomar $K_*^i = K_*^{(i-1)'}$.

Paso 11. Calcular $\mathcal{E}_{K^i}$ e ir a 2.

Paso 12. Se ha determinado el conjunto $\mathcal{E}_{K^i}$, con nivel de diferencia de utilidad δ_{K^i} y parar.

El procedimiento se divide en tres fases. La primera incluye los pasos 1-2, que se corresponden a la inicialización, generación del conjunto de utilidad eficiente (no detallada) y el cálculo del nivel de diferencia de utilidad. La segunda fase, pasos 4 y 12, es la comprobación de la optimalidad. Finalmente, la tercera fase, que comprende los pasos 5-11, es la generación de información y reducción del conjunto de loterías.

Notemos que en cada iteración tenemos que identificar p^u, p^l y calcular $\delta_{K^i} = u^*(p^u) - u_*(p^l)$ para el actual conjunto de utilidad eficiente $\mathcal{E}_{K^i}$. Esto puede hacerse resolviendo los correspondiente problemas de optimización. Además, en el caso de conjuntos de información poliédricos, como es nuestro caso, esto puede simplificarse observando que el máximo y mínimo se obtendrá, para uno de los generadores del conjunto de información, lo que nos garantiza un menor esfuerzo computacional que si fuera necesario resolver los problemas de optimización.

3.1.6 Ordenación basada en intensidad de preferencia

El objetivo del método anterior es reducir suficientemente el conjunto de utilidad eficiente para presentar un conjunto de estrategias al decisor donde le resulte sencillo seleccionar una de ellas. Pero si este no fuera el caso y/o no es posible ninguna eliminación basada en la reducción del conjunto de información porque el decisor no pueda revelar ninguna preferencia en el conjunto actual de loterías, vamos a introducir otro criterio de ayuda al decisor que permite hacer una elección final usando una medida de intensidad de preferencia con respecto a una meta de utilidad esperada.

Sea $\bar{u}$ una meta de utilidad que suponemos que es un valor grande[2] y $\mathcal{E}_K$ el conjunto restante de loterías para una cierta pasada del anterior algoritmo, en el que no es posible obtener una nueva reducción del actual conjunto de información K_*. Introducimos la función

$$\begin{aligned} u_K(p,\bar{u}) = \quad & max \quad (\bar{u} - E(u^k,p)) \\ & sa: \quad k \in K_* \end{aligned}$$

que representa, para cada estrategia $p \in \mathcal{E}_K$, la máxima diferencia de utilidad esperada con respecto a la meta bajo el conjunto de información dado. Es claro que, resolver el problema anterior, es equivalente a resolver

$$\begin{aligned} & min \quad E(u^k,p) \\ & sa: \quad k \in K_* \end{aligned}$$

Definición 3.6 *$p' \in \mathcal{E}_K$ es una lotería de mínima diferencia de utilidad bajo el conjunto de información K_*, si*

$$\begin{aligned} u_K(p',\bar{u}) = \quad & min \quad u_K(p,\bar{u}) \\ & sa: \quad p \in \mathcal{E}_K \end{aligned}$$

Aunque esta definición es verdad para el conjunto de todas las loterías, consideramos sólo el conjunto $\mathcal{E}_K$ para probar la optimalidad. Notar que

[2]Para no tener que considerar valor absoluto asumimos que $\bar{u} \geqq E(u^k,p)$ para todo $p \in \mathcal{P}_Z$ y $k \in K_*$.

esta función proporciona una ordenación completa en $\mathcal{E}_K$, denotada $>_g$, para todas las loterías, es decir, dadas $p, q \in \mathcal{E}_K$

$$p >_g q \Longleftrightarrow u_K(p, \bar{u}) < u_K(q, \bar{u}).$$

Podemos relajar la anterior definición tomando aquellos elementos con un nivel de diferencia de utilidad esperada más pequeño o igual a un valor dado $\alpha > 0$.

Definición 3.7 *$p \in \mathcal{E}_K$ es una lotería de diferencia de utilidad de nivel α bajo el conjunto de información K_*, si*

$$u_K(p, \bar{u}) \leqq \alpha.$$

El conjunto de tales distribuciones, denotado

$$U_K(\alpha, \bar{u}) = \{p \in \mathcal{E}_K : \ u_K(p, \bar{u}) \leqq \alpha\}$$

se llamará conjunto de diferencia de utilidad de nivel α.

Proposición 3.6 *Tenemos que*

1. Si $U_K(\alpha, \bar{u}) \neq \emptyset$, entonces la lotería de mínima diferencia de utilidad corresponde a $U_K(\alpha, \bar{u})$.

2. Si $\alpha_1 < \alpha_2$ entonces $U_K(\alpha_1, \bar{u}) \subseteq U_K(\alpha_2, \bar{u})$.

3. Sea $\bar{\alpha}$ el nivel de diferencia de utilidad para una lotería p. Si $\{\alpha_n\}$ es tal que $\{\alpha_n\} \searrow \bar{\alpha}$, entonces $U_K(\alpha_n, \bar{u}) \searrow U_K(\bar{\alpha}, \bar{u})$.

Demostración. Inmediata. □

A continuación presentamos el algoritmo II para problemas discretos, que proporciona un método interactivo para eliminar loterías del conjunto de diferencia de utilidad esperada basado en la reducción del nivel de diferencia de utilidad. Sea $U_K^0 = \mathcal{E}_K = \{p_j : j = 1, ..., m\}$ el conjunto de loterías donde el decisor tiene que hacer una elección. Para tener una idea sobre el nivel inicial de diferencia de utilidad podemos resolver el problema

$$\max_{p_j} \quad u_K(p_j, \bar{u})$$

y asumimos que su valor óptimo es α_0.

ALGORITMO II

Paso 0. Identificar α_0 y hacer $i = 0$.
Paso 1. Identificar $U_K^i = U_K(\alpha_i, \bar{u})$
Paso 2. Si el decisor está satisfecho con U_K^i, ir a 5. En otro caso, ir a 3
Paso 3. Hacer $i = i + 1$
Paso 4. Especificar un nuevo $\alpha_i < \alpha_{i-1}$ e ir a 1
Paso 5. Seleccionar un único $p_j \in U_K^i$ y parar

El procedimiento tiene 5 pasos. El paso 0 es inicialización, los pasos 1-3 corresponden a la generación del conjunto de loterías y comprobación de la optimalidad, el paso 4 es la reducción del nivel de diferencia de utilidad y, el paso 5, corresponde a la elección por parte del decisor.

Notemos que en el paso 4, la forma en que puede considerarse un nivel de diferencia de utilidad más pequeño depende del decisor, pudiendo introducirse una parametrización para una reducción iterativa de su valor.

3.1.7 Un método global

Finalmente, proponemos un método que integra los anteriores algoritmos para ofrecer un procedimiento con dos fases para la toma de decisiones multiatributo bajo riesgo. Primero, el método lleva a cabo una reducción interactiva del conjunto de utilidad eficiente (algoritmo I) tratando de alcanzar un conjunto de loterías donde el decisor pueda hacer su elección, pero si esto no es posible, se entra en la segunda fase en la que se considera una reducción del conjunto de diferencia de utilidad (algoritmo II).

Ejemplo.

Supongamos un decisor que quiere comprar un coche de segunda mano que espera utilizar durante los próximos cuatro años. Cada uno de los posibles coches está caracterizado en un espacio de objetivos tridimensional con elementos $z = (z_1, z_2, z_3)$, donde

z_1 = precio de venta esperado en pesetas cuatro años después de haberlo comprado $(*10^4)$

z_2 = coste estimado en pesetas de reparaciones futuras en los próximos cuatro años $(*10^4)$

z_3 = número de kilómetros antes del cambio del motor $(*4 * 10^4)$

Estos valores podrían corresponder al nivel inferior de una jerarquía de objetivos en los que, por un lado, tenemos agrupados z_1 y z_2 (costes) y, por otro, tenemos z_3 (fiabilidad).

Existe incertidumbre sobre los valores y consideramos tres estados de la naturaleza {bueno, regular, malo }, que influyen en las condiciones presente y futuras de cada coche. La tabla 3.2 presenta diez alternativas bajo riesgo o loterías p_j , $j = 1, ..., 10$, asociada a los posibles coches, uno de los cuales debe ser seleccionado por el decisor.

Tabla 3.2

COCHES		Malo s_1	Regular s_2	Bueno s_2
Renault 21	$Pr(s_i)$	.3	.5	.2
p_1	(z_1, z_2, z_3)	(30,8,13)	(35,5,15)	(37,4,19)
	(u_{12}, u_3)	(.468,.370)	(.643,.526)	(.717,.790)
Rover Vit.	$Pr(s_i)$	.4	.5	.1
p_2	(z_1, z_2, z_3)	(29,10,16)	(33,9,18)	(35,7,19)
	(u_{12}, u_3)	(.419,.598)	(.519,.729)	(.587,.790)
Mercedes 190	$Pr(s_i)$	.2	.6	.2
p_3	(z_1, z_2, z_3)	(40,11,11)	(44,9,14)	(46,8,20)
	(u_{12}, u_3)	(.604,.195)	(.660,.450)	(.689,.847)
Peugeot 405	$Pr(s_i)$	.3	.6	.1
p_4	(z_1, z_2, z_3)	(26,7,15)	(28,4,18)	(29,25,20)
	(u_{12}, u_3)	(.373,.526)	(.534,.729)	(.655,.847)
Ford Sier.	$Pr(s_i)$	.4	.4	.2
p_5	(z_1, z_2, z_3)	(29,9,10)	(50,6,16)	(52,6,19)
	(u_{12}, u_3)	(.429,.1)	(.755,.598)	(.764,.790)
Nisan Mic.	$Pr(s_i)$	.2	.7	.1
p_6	(z_1, z_2, z_3)	(24,6,14)	(29,5,17)	(32,4,23)
	(u_{12}, u_3)	(.326,.45)	(.518,.665)	(.631,1.00)
Peugeot 306	$Pr(s_i)$	.2	.4	.4
p_7	(z_1, z_2, z_3)	(19,5,9)	(26,3,16)	(34,2,19)
	(u_{12}, u_3)	(.122,0.0)	(.531,.598)	(.804,.790)
Renault Lag.	$Pr(s_i)$	.1	.6	.3
p_8	(z_1, z_2, z_3)	(23,9.5,13)	(27,6,15)	(38,3.8,19)
	(u_{12}, u_3)	(.224,.370)	(.429,.526)	(.740,.790)
Volvo 850	$Pr(s_i)$	.2	.6	.2
p_9	(z_1, z_2, z_3)	(38,12,10)	(43.5,8,15)	(49,6.5,19)
	(u_{12}, u_3)	(.575,.100)	(.670,.526)	(.737,.790)
Volkswagen P.	$Pr(s_i)$	.5	.4	.1
p_{10}	(z_1, z_2, z_3)	(40,15,14)	(44.14,16)	(60,13,17)
	(u_{12}, u_3)	(.588,.450)	(.629,.598)	(.706,.665)

El conjunto de loterías será $\mathcal{P}_{\mathcal{Z}} = \{p_j : j = 1, ..., 10\}$, en donde, por ejemplo, p_1 puede escribirse de acuerdo a nuestra notación

$$p_1 = \begin{pmatrix} .3 & .5 & .2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ (30,8,13) & (35,5,15) & (37,4,19) & (29,10,16) & (33,9,19) & \ldots & (60,13,17) \end{pmatrix}$$

Supongamos una función de utilidad $u : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$ donde

$$u(z) = (u_{12}(z_1, z_2), u_3(z_3))$$

y tenemos asignadas ambas componentes u_{12} y u_3, usando Logical Decision (1991) en una sesión interactiva. Para (z_1, z_2) se ha asignado una función aditiva dada por

$$u_{12}(z) = u_{12}(z_1, z_2) = .7[1.042 - 4.609exp(-.0782z_1)] +$$
$$+.3[-.024 + 1.82exp(-.2875z_2)]$$

que es creciente en z_1 y decreciente en z_2. Para z_3, hemos asignado

$$u_3(z) = u_3(z_3) = 1.824 - 3.04exp(-.0567z_3)$$

El vector de utilidades (u_{12}, u_3) para cada lotería, también se muestra en la tabla 3.2. Nuestro problema de optimización multiobjetivo bajo riesgo será

$$\begin{array}{ll} max & E(u, p_j) \\ sa. & p_j \in \mathcal{P}_Z \end{array}$$

Calculamos la utilidad esperada para cada p_j. Por ejemplo, para p_1 tenemos

$$E(u, p_1) = E(u^{K^0}, p_1) = (E(u_{12}, p_1), E(u_3, p_1)) =$$
$$= (.3(1 * .468 + 0 * .370) + .5(1 * .643 + 0 * .526) + .2(1 * .717 + 0 * .790),$$
$$= .3(0 * .468 + 1 * .370) + .5(0 * .643 + 1 * .526) + .2(0 * .717 + 1 * .790)) \simeq$$
$$\simeq (.605, .532)$$

La tabla 3.3 muestra los cálculos de las utilidades esperadas para todas las loterías.

Tabla 3.3

Lotería	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}
$E(u_{12}, p_j)$	.605	.486	.655	.498	.626	.491	.558	.502	.664	.616
$E(u_3, p_j)$	.532	.683	.478	.680	.437	.655	.555	.590	.494	.531

En este punto, nuestro conjunto de información es el conjunto de información nula $K_*^0 = G\{(1,0),(0,1)\}$. Vemos que

$$p_9 >_u p_3, \quad p_4 >_u p_6, \quad p_9 >_u p_5$$

y así, p_3, p_6, p_5 son loterías ineficientes en utilidad. El conjunto de utilidad eficiente será $\mathcal{E}_{K^0} = \{p_1, p_2, p_4, p_7, p_8, p_9, p_{10}\}$. Determinamos el nivel de diferencia de utilidad para $\mathcal{E}_{K^0}$, dado por

$$\delta_{K^0} = u^*(p^u) - u_*(p^l) = u^*(p_2) - u_*(p_2) = .683 - .486 = .197$$

Asumimos que el decisor considera tal nivel grande e intenta una disminución del conjunto de utilidad eficiente reduciendo interactivamente el conjunto de información K_*^0. Compara $p^u(= p_2)$ con una lotería elegida arbitrariamente en $\mathcal{E}_{K^0}$, por ejemplo, p_{10}. Revela la preferencia de p_2 sobre p_{10}, que nos lleva a añadir la restricción

$$.486k_1 + .683k_2 > .616k_1 + .531k_2$$

o

$$.13k_1 - .152k_2 < 0$$

Así, el nuevo conjunto de información será $K_*^1 = G\{(.54, .46), (0, 1)\}$. El vector de utilidades esperadas bajo K_*^1, $E(u^{K^1}, p_j)$, se presentan en la tabla 3.4. Ahora, el conjunto de utilidad eficiente es $\mathcal{E}_{K^1} = \{p_2, p_4, p_9\} \subseteq \mathcal{E}_{K^0}$ y la diferencia de utilidad para $\mathcal{E}_{K^1}$, es

$$\delta_{K^1} = u^*(p_2) - u_*(p_9) = .683 - .494 = .189$$

que el decisor considerará que todavía es grande.

Tabla 3.4

Lotería	p_1	p_2	p_4	p_7	p_8	p_9	p_{10}
$E(u_1^{K^1}, p_j)$	.571	.576	.581	.557	.542	.586	.577
$E(u_2^{K^1}, p_j)$	.532	.683	.680	.555	.590	.494	.531

Tabla 3.5

Lotería	p_2	p_4	p_9
$E(u_1^{K^2}, p_j)$	.576	.581	.586
$E(u_2^{K^2}, p_j)$	.610	.612	.557

De nuevo, el decisor revela la preferencia de p_4 sobre p_2, que nos lleva a añadir una nueva restricción obteniendo el nuevo conjunto de información $K_*^2 = G\{(.54, .46), (.37, .63)\}$. El vector de utilidades esperadas bajo K_*^2, $E(u^{K^2}, p_j)$, se presentan en la tabla 3.5. Ahora, el conjunto de utilidad eficiente es $\mathcal{E}_{K^2} = \{p_4, p_9\}$, con un nivel de diferencia de utilidad $\delta_{K^2} = .612 - .557 = .055$.

Si el decisor es indiferente a $\delta_{K^2} = .055$, debería elegir en $\mathcal{E}_{K^2}$. Asumamos que no puede elegir y, entonces, aplicamos el algoritmo II. Para ello, determinamos la diferencia de utilidad bajo K_*^2, para cada lotería en $\mathcal{E}_{K^2}$, dando una meta de utilidad $\bar{u} = .72$. Por ejemplo, para p_4, resolvemos el problema

$$\begin{aligned} \min \quad & z = .58k_1 + .612k_2 \\ \text{sa.} \quad & k_1 + k_2 = 1 \\ & .37 \leqq k_1 \leqq .54 \\ & .46 \leqq k_2 \leqq .63 \end{aligned}$$

oteniendo $z^* = .595$, y así $u_{K^2}(p_4, \bar{u}) = .72 - .595 = .125$.

La tabla 3.6 presenta las diferencias de utilidad, y se puede ver que p_4 es la estrategia más preferida.

Tabla 3.6

Lotería	p_4	p_9
$u_{K^2}(p_j, \bar{u})$	.125	.152

Observemos que el nivel inicial para el algoritmo II es $\alpha_{K^0} = .152$, y el conjunto de diferencia de utilidad esperada asociado

$$U_{K^2}(\alpha_{K^0}, \bar{u}) = U_{K^2}(.175, .72) = \{p_4, p_9\}$$

Para una reducción del nivel α, por ejemplo $\alpha = .125$, tenemos

$$U_{K^2}(.125, .72) = \{p_4\}$$

$\square$

3.1.8 Conjunto de aproximación al conjunto de utilidad eficiente

La determinación del conjunto de utilidad eficiente puede resultar difícil, esta es la causa, de que en muchas ocasiones pueda ser más fácil y conveniente su aproximación.

Una primera aproximación viene dada por el siguiente (Ríos y Ríos-Insua, 1986)

Teorema 3.3 *Sea* $u : \mathcal{Z} \rightarrow I\!R^m$ *una función de utilidad vectorial. Si* $p \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u)$*, entonces los premios de* p *son puntos de* $\mathcal{E}(\mathcal{Z}, u)$*.*

Demostración. Sea $p = \begin{pmatrix} p_1 ... p_s \\ z^1 ... z^s \end{pmatrix}$ de utilidad eficiente y supongamos que $z^i \notin \mathcal{E}(\mathcal{Z}, u)$ para un i fijado. Entonces, existe $z' \in \mathcal{Z}$ tal que $u(z^i) \leq u(z')$.

Considerar $p' = \begin{pmatrix} p_1 ... p_i ... p_s \\ z^1 ... z' ... z^s \end{pmatrix}$. Así, $E(u, p) \leq E(u, p')$ lo cual es una contradicción. □

Es fácil ver que la inversa de este teorema no es verdad. En efecto, considerar el siguiente ejemplo:

Sea $\mathcal{Z}$ el espacio de objetivos formado por los siguientes tres elementos

$$\mathcal{Z} = \{z^1 = (0, 1),\ \ z^2 = (1, 0),\ \ z^3 = (2/3, 2/3)\}$$

y supongamos que tenemos la función de valor vectorial

$$u(z) = (u_1(z), u_2(z)) = (z_1, z_2)$$

Consideremos

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ (0,1) & (1,0) & (2/3,2/3) \end{pmatrix} y \; p' = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ (0,1) & (1,0) & (2/3,2/3) \end{pmatrix}$$

es claro que $p, p' \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}}$. Además, se verifica que

$$E(u,p) = (2/3, 2/3) > (1/2, 1/2) = E(u,p').$$

Luego $p' \notin \mathcal{E}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u)$; Sin embargo, como se puede ver fácilmente, se tiene que $z^1, z^2, z^3 \in \mathcal{E}(\mathcal{Z}, u)$. □

Por tanto, podemos escribir

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u) \subset \mathcal{P}_{\mathcal{E}(\mathcal{Z},u)} \subset \mathcal{P}_{\mathcal{Z}} \tag{3.5}$$

que nos da una aproximación para el conjunto en el que el decisor ha de tomar su solución más preferida.

Si consideramos que la información del decisor está representada por un cono de información K se verifica

Corolario 3.3 *Sea $u : \mathcal{Z} \rightarrow I\!R^m$ una función de utilidad vectorial. Si $p \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}}$ es eficiente para u^K, entonces los premios de p son puntos de $\mathcal{E}(\mathcal{Z}, u^K)$, es decir,*

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u^K) \subset \mathcal{P}_{\mathcal{E}(\mathcal{Z},u^K)} \tag{3.6}$$

Demostración. Sea $p = \begin{pmatrix} p_1 \ldots p_s \\ z^1 \ldots z^s \end{pmatrix}$ de utilidad eficiente y supongamos que $z^i \notin \mathcal{E}(\mathcal{Z}, u^K)$ para un i fijado. Entonces, existe $z' \in \mathcal{Z}$ tal que $u^K(z^i) \leq u^K(z')$.

Considerar $p' = \begin{pmatrix} p_1 \dots p_i \dots p_s \\ z^1 \dots z' \dots z^s \end{pmatrix}$. Así $E(u^K, p) \leq E(u^K, p')$ que es una contradicción. $\square$

Ahora, siguiendo un paralelismo con el caso de certidumbre, trataremos de aproximarlo mediante un conjunto que también denominaremos de aproximación. Para ello, supondremos en lo que sigue que existe una función de utilidad con dos componentes, $u = (u_1, u_2)$, y

$$\begin{aligned} p^{1*} &: E(u_1, p^{1*}) = \max_{p \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}}} E(u_1, p) \\ p^{2*} &: E(u_2, p^{2*}) = \max_{p \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}}} E(u_2, p) \end{aligned}$$

Definición 3.8 *Sea $u : \mathcal{Z} \to I\!R^2$ una función de utilidad vectorial. Se define el conjunto de aproximación al conjunto de utilidad eficiente, $\mathcal{E}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u)$, como*

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u) = \{p \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}} : \ E(u_1, p) \geqq E(u_1, p^{2*}), E(u_2, p) \geqq E(u_2, p^{1*})\}.$$

Se obtiene como caso particular de la definición 3.8 el conjunto

$$\mathcal{A}(\mathcal{Z}, u) = \{z \in \mathcal{Z} : \ u_1(z) \geqq u_1(z_2^*), u_2(z) \geqq u_2(z_1^*)\}.$$

donde

$$\begin{aligned} z_1^* &: u_1(z_1^*) = \max_{z \in \mathcal{Z}} u_1(z) \\ z_2^* &: u_2(z_2^*) = \max_{z \in \mathcal{Z}} u_2(z) \end{aligned}$$

Demostremos que este conjunto de aproximación no excluye los puntos preferidos para el decisor

Proposición 3.7 *Sea $u : \mathcal{Z} \to I\!R^2$ una función de utilidad vectorial, entonces*

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u) \tag{3.7}$$

Demostración. Sea $p^0 \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u)$ y $p^0 \notin \mathcal{A}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u)$.

Si $p^0 \notin \mathcal{A}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u)$ entonces $E(u_1, p^0) < E(u_1, p^{2*})$ o $E(u_2, p^0) < E(u_2, p^{1*})$ o se dan ambas desigualdades.

Sea $E(u_1, p^0) < E(u_1, p^{2*})$, como $E(u_2, p^0) \leqq E(u_2, p^{2*})$, tenemos $E(u, p^0) \leq E(u, p^{2*})$. Contradice que $p^0 \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u)$.

De forma análoga se demuestran los otros dos casos. □

Como caso particular se puede obtener el siguiente resultado

Corolario 3.4 *Sea $u : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función de utilidad vectorial. Entonces*

$$\mathcal{E}(\mathcal{Z}, u) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{Z}, u) \tag{3.8}$$

Supongamos que recibimos más información del decisor. Sea K el nuevo cono de información tal que $K^0 \subset K$. Entonces

Proposición 3.8 *Sea $u : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función de utilidad vectorial y K cono de información tal que $K^0 \subset K$. Entonces*

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u^K) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u^K) \tag{3.9}$$

Demostración. Sea $K_* = G\{k^1, k^2\}$ y $p^*_{k^1}$, $p^*_{k^2}$ los puntos donde las funciones $k^1E(u, \cdot)$ y $k^2E(u, \cdot)$ alcanzan sus máximos, respectivamente.

Supongamos $p^0 \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u^K)$ y $p^0 \notin \mathcal{A}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u^K)$.

Si $p^0 \notin \mathcal{A}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u^K)$ entonces $k^1E(u, p^0) < k^1E(u, p^*_{k^2})$ o $k^2E(u, p^0) < k^2E(u, p^*_{k^1})$ o se dan ambas desigualdades.

Sea $k^1E(u, p^0) < k^1E(u, p^*_{k^2})$, como $k^2E(u, p^0) \leqq k^2E(u, p^*_{k^2})$, tenemos $E(u^K, p^0) \leq E(u^K, p^*_{k^2})$. Contradice que $p^0 \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u^K)$.

De forma análoga se demuestran los otros dos casos. □

Como caso particular de la anterior proposición se puede obtener el siguiente

Corolario 3.5 *Sea $u : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función de utilidad vectorial y K cono de información tal que $K^0 \subset K$. Entonces*

$$\mathcal{E}(\mathcal{Z}, u^K) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{Z}, u^K) \tag{3.10}$$

Proposición 3.9 *Sea $u : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función de utilidad vectorial y K cono de información tal que $K_* \subseteq int(K_*^0)$. Entonces*

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u^K) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u) \tag{3.11}$$

Demostración. Sea $K_* = G\{k^1, k^2\}$ con $k^1 = (k_1^1, k_2^1)$ y $k^2 = (k_1^2, k_2^2)$. Se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que $0 < k_1^2 \leqq k_1^1 < 1$ y $0 < k_2^1 \leqq k_2^2 < 1$ siendo al menos una de las dos desigualdades de menor o igual una desigualdad estricta.

Denotaremos por p_1^*, p_2^*, $p_{k^1}^*$ y $p_{k^2}^*$ los puntos donde se alcanzan los máximos

$$\max_{p \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}}} E(u_1, p), \quad \max_{p \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}}} E(u_2, p), \quad \max_{p \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}}} k^1 E(u, p), \quad \max_{p \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}}} k^2 E(u, p),$$

respectivamente.

Sea $p^0 \in \mathcal{A}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u^K)$, entonces

$$k^1 E(u, p^0) \geqq k^1 E(u, p_{k^2}^*)$$
$$k^2 E(u, p^0) \geqq k^2 E(u, p_{k^1}^*)$$

Si $p^0 \notin \mathcal{A}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u)$, entonces $E(u_1, p^0) < E(u_1, p_2^*)$ o $E(u_2, p^0) < E(u_2, p_1^*)$ o se dan ambas desigualdades.

Sea

$$E(u_1, p^0) < E(u_1, p_2^*). \tag{3.12}$$

Sabemos que

$$E(u_1, p_2^*) \leqq E(u_1, p_{k^2}^*) \tag{3.13}$$

(si $E(u_1, p_2^*) > E(u_1, p_{k^2}^*)$, como $E(u_2, p_2^*) \geqq E(u_2, p_{k^2}^*)$, se obtiene que $k^2 E(u, p_2^*) > k^2 E(u, p_{k^2}^*)$ contradiciendo la definición de $p_{k^2}^*$).

De (3.12) y (3.13) se obtiene $E(u_1, p^0) < E(u_1, p_{k^2}^*)$.

De lo anterior se verifica que

$$k_1^2[E(u_1, p^0) - E(u_1, p_{k^2}^*)] \geqq k_1^1[E(u_1, p^0) - E(u_1, p_{k^2}^*)] \geqq$$

$$\geqq k_2^1[E(u_2, p_{k^2}^*) - E(u_2, p^0)] \geqq k_2^2[E(u_2, p_{k^2}^*) - E(u_2, p^0)]$$

con al menos la primera o tercera desigualdad estricta. Es decir, $k^2 E(u, p^0) > k^2 E(u, p_{k^2}^*)$, contradiciendo la definición de $p_{k^2}^*$. □

Como caso particular obtenemos el siguiente

Corolario 3.6 *Sea $u : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función de utilidad vectorial y K cono de información tal que $K_* \subseteq int(K_*^0)$. Entonces*

$$\mathcal{A}(\mathcal{Z}, u^K) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{Z}, u) \tag{3.14}$$

Se verifica este decrecimiento siempre que tengamos la estructura de preferencias del decisor más precisa.

Proposición 3.10 *Sea $u : \mathcal{Z} \to I\!R^2$ una función de utilidad vectorial, K y K' conos de información tal que $K'_* \subseteq int(K_*)$. Entonces*

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u^{K'}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u^{K}) \tag{3.15}$$

Demostración. Sean K_* y K'_* los conjuntos de información, respectivamente, de K y K', tal que $K_* = G\{k^1, k^2\}$ y $K'_* = G\{k'^1, k'^2\}$.

Llamemos $p^*_{k^1}$, $p^*_{k^2}$, $p^*_{k'^1}$ y $p^*_{k'^2}$ los puntos donde las funciones $k^1E(u,\cdot)$, $k^2E(u,\cdot)$, $k'^1E(u,\cdot)$ y $k'^2E(u,\cdot)$ alcanzan sus máximos, respectivamente. Como $K'_* \subseteq int(K_*)$ tenemos

$$k'^1 = \alpha_1 k^1 + \alpha_2 k^2$$
$$k'^2 = \beta_1 k^1 + \beta_2 k^2$$

con

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in (0,1)$$
$$\beta_1 + \beta_2 = 1, \quad \beta_1, \beta_2 \in (0,1)$$

Si $p^0 \in \mathcal{A}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u^{K'})$, entonces

$$k'^1E(u,p^0) \geqq k'^1E(u,p^*_{k'^2})$$
$$k'^2E(u,p^0) \geqq k'^2E(u,p^*_{k'^1})$$

Supongamos que $p^0 \notin \mathcal{A}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u^{K})$, luego $k^1E(u,p^0) < k^1E(u,p^*_{k^2})$ o $k^2E(u,p^0) < k^2E(u,p^*_{k^1})$ o ambas.

Si $k^1E(u,p^0) < k^1E(u,p^*_{k^2})$, de la anterior hipótesis obtenemos

$$k'^1E(u,p^*_{k^2}) > k'^1E(u,p^*_{k'^2})$$
$$k'^2E(u,p^*_{k^2}) > k'^2E(u,p^*_{k'^1})$$

es decir,

$$\alpha_1[k^1E(u,p^*_{k^2}) - k^1E(u,p^*_{k'^2})] > \alpha_2[k^2E(u,p^*_{k'^2}) - k^2E(u,p^*_{k^2})]$$

$$\beta_1[k^1E(u,p^*_{k^2}) - k^1E(u,p^*_{k'^1})] > \beta_2[k^2E(u,p^*_{k'^1}) - k^2E(u,p^*_{k^2})]$$

Ahora, se puede verificar

1.- Si $\alpha_1 \lesseqqgtr \beta_1$ entonces $\beta_2 \lesseqqgtr \alpha_2$.

2.- Si $\alpha_1 \gtreqqless \beta_1$ entonces $\beta_2 \gtreqqless \alpha_2$.

Si es verdad 1., son verdaderas las siguientes desigualdades

$$\alpha_1[k^1E(u,p^*_{k^2}) - k^1E(u,p^*_{k'^1})] \gtreqqless \beta_1[k^1E(u,p^*_{k^2}) - k^1E(u,p^*_{k'^1})] >$$
$$> \beta_2[k^2E(u,p^*_{k'^1}) - k^2E(u,p^*_{k^2})] \gtreqqless \alpha_2[k^2E(u,p^*_{k'^1}) - k^2E(u,p^*_{k^2})]$$

Así

$$\alpha_1k^1E(u,p^*_{k^2}) + \alpha_2k^2E(u,p^*_{k^2}) > \alpha_1k^1E(u,p^*_{k'^1}) + \alpha_2k^2E(u,p^*_{k'^1})$$

$$k'^1E(u,p^*_{k^2}) > k'^1E(u,p^*_{k'^1})$$

lo cual es una contradicción con la definición de $p^*_{k'^1}$.

Si es verdad 2., se verifican las siguientes desigualdades

$$\beta_1[k^1E(u,p^*_{k^2}) - k^1E(u,p^*_{k'^2})] \gtreqqless \alpha_1[k^1E(u,p^*_{k^2}) - k^1E(u,p^*_{k'^2})] >$$
$$> \alpha_2[k^2E(u,p^*_{k'^2}) - k^2E(u,p^*_{k^2})] \gtreqqless \beta_2[k^2E(u,p^*_{k'^2}) - k^2E(u,p^*_{k^2})]$$

Así

$$\beta_1k^1E(u,p^*_{k^2}) + \beta_2k^2E(u,p^*_{k^2}) > \beta_1k^1E(u,p^*_{k'^2}) + \beta_2k^2E(u,p^*_{k'^2})$$

$$k'^2E(u,p^*_{k^2}) > k'^2E(u,p^*_{k'^2})$$

lo cual es una contradicción con la definición de $p^*_{k'^2}$

Si $k^2E(u,p^0) < k^2E(u,p^*_{k^1})$ o ambas, la demostración es similar. □

Como caso particular

Corolario 3.7 *Sea* $u : \mathcal{Z} \to I\!R^2$ *una función de utilidad vectorial,* K *y* K' *conos de información tal que* $K'_* \subseteq int(K_*)$*. Entonces*

$$\mathcal{A}(\mathcal{Z}, u^{K'}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{Z}, u^K) \tag{3.16}$$

Teorema 3.4 *Sea* $u : \mathcal{Z} \to I\!R^2$ *una función de utilidad vectorial y* $\{K^n\}_{n \in I\!N}$ *una sucesión creciente de conos de información tal que* $K^1_* \subseteq int(K^0_*)$ *y* $\{K^n_*\} \searrow t$*, con* t *vector, cuando* $n \to \infty$*.*

$$Si\ p^0 \in \mathcal{A}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u^{K^n})\ \forall n\ entonces\ p^0 \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u)$$

Demostración. Si $p^0 \in \mathcal{A}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u^{K^n})\ \forall n$, entonces

$$k^n_1E(u,p^0) \geqq k^n_1E(u,p^*_{k^n_2})\ \forall n$$
$$k^n_2E(u,p^0) \geqq k^n_2E(u,p^*_{k^n_1})\ \forall n$$

donde $p^*_{k^n_1}$ y $p^*_{k^n_2}$ son los puntos donde las funciones $k^n_1E(u,\cdot)$ y $k^n_2E(u,\cdot)$ alcanzan su máximo, respectivamente, siendo $K^n_* = G\{k^n_1, k^n_2\}$, $n = 1, 2, ...$

Supongamos que $p^0 \notin \mathcal{E}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u)$ entonces existe $p' \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}}$ tal que $E(u,p') \geq E(u,p^0)$.

Luego

$$k^n_1E(u,p') > k^n_1E(u,p^0) \geqq k^n_1E(u,p^*_{k^n_2})\ \forall n \tag{3.17}$$

Por hipótesis se sabe que $(K^n_*) \to t$ cuando $n \to \infty$, es decir, $(k^n_1) \to t$ y $(k^n_2) \to t$ cuando $n \to \infty$. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe n^0 tal que para todo $n \geqq n^0$ $\| k^n_1 - k^n_2 \| \leqq \varepsilon$. Con lo cual, tomando un $n \geqq n^0$ la desigualdad

(3.17) se sigue cumpliendo para k_2^n, es decir, $k_2^n E(u,p') > k_2^n E(u,p^*_{k_2^n})$. Contradicción con la definición de $p^*_{k_2^n}$. Luego $p^0 \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}},u)$. c.q.d. □

Con este resultado se garantiza la convergencia a una solución de utilidad eficiente.

Corolario 3.8 *Sea $u : \mathcal{Z} \rightarrow I\!R^2$ una función de utilidad vectorial y $(K^n)_{n\in I\!N}$ una sucesión creciente de conos de información tal que $K^1_* \subseteq int(K^0_*)$ y $\{K^n_*\} \searrow t$, con t vector, cuando $n \rightarrow \infty$.*

$$Si\ z^0 \in \mathcal{A}(\mathcal{Z},u^{K^n})\ \forall n\ entonces\ z^0 \in \mathcal{E}(\mathcal{Z},u).$$

Veamos las relaciones existentes entre $\mathcal{A}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}},u)$ y $\mathcal{A}(\mathcal{Z},u)$ mediante el siguiente

Teorema 3.5 *Sea $u : \mathcal{Z} \rightarrow I\!R^2$ una función de utilidad vectorial entonces,*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{A}(\mathcal{Z},u)} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}},u)$$

Demostración. Sean

$$\begin{aligned} z_1^* \in \mathcal{Z} &: u_1(z_1^*) = \max_{z\in\mathcal{Z}} u_1(z) \\ z_2^* \in \mathcal{Z} &: u_2(z_2^*) = \max_{z\in\mathcal{Z}} u_2(z) \\ p_1^* \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}} &: E(u_1,p_1^*) = \max_{p\in\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}} E(u_1,p) \\ p_2^* \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}} &: E(u_2,p_2^*) = \max_{p\in\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}} E(u_2,p) \end{aligned}$$

De lo anterior se obtiene que p_1^* y p_2^* son los elementos de $\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}$ que tienen probabilidad 1 para z_1^* y z_2^*, respectivamente, y cero para los demás elementos de $\mathcal{Z}$ (Notar que la utilidad esperada, para el caso que tratamos, se define como un sumatorio). Es decir,

$$E(u_1, p_1^*) = u_1(z_1^*), \quad E(u_2, p_2^*) = u_2(z_2^*),$$
$$E(u_1, p_2^*) = u_1(z_2^*), \quad E(u_2, p_1^*) = u_2(z_1^*)$$

Supongamos que $p \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}(\mathcal{Z},u)}$, donde $p = \begin{pmatrix} p_1 ... p_s \\ z^1 ... z^s \end{pmatrix}$, entonces

$$z^i \in \mathcal{A}(\mathcal{Z}, u) \ \forall i = 1, ..., s \tag{3.18}$$

De (3.18) se obtiene que

$$u_1(z^i) \geqq u_1(z_2^*) \ \forall i$$
$$u_2(z^i) \geqq u_2(z_1^*) \ \forall i$$

Por tanto se verifica

$$\sum_{i=1}^{s} p_i u_1(z^i) \geqq u_1(z_2^*)$$
$$\sum_{i=1}^{s} p_i u_2(z^i) \geqq u_2(z_1^*)$$

Y de aquí que

$$E(u_1, p) \geqq u_1(z_2^*) = E(u_1, p_2^*)$$
$$E(u_2, p) \geqq u_2(z_2^*) = E(u_2, p_1^*)$$

entonces $p \in \mathcal{A}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u)$. c.q.d. □

Notemos que la inclusión que se verifica en este teorema nos dice que el conjunto $\mathcal{P}_{A(\mathcal{Z},u)}$ es una mejor aproximación al conjunto de utilidad eficiente que el que habíamos definido, siempre que consideremos el conjunto de todas las distribuciones de probabilidad simples sobre $\mathcal{Z}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}$.

Además, teniendo en cuenta los teoremas 3.4 y 3.5 se puede obtener el siguiente

Corolario 3.9 *Sea $u : \mathcal{Z} \rightarrow I\!R^2$ una función de utilidad vectorial y $(K^n)_{n \in I\!N}$ una sucesión creciente de conos de información tal que $K_*^1 \subseteq int(K_*^0)$ y $\{K_*^n\} \searrow t$, con t vector, cuando $n \rightarrow \infty$. Si $p^0 \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}(\mathcal{Z}, u^{K^n})}$ para todo n, entonces $p^0 \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u)$.*

Por tanto, si consideramos los conjuntos $\mathcal{P}_{\mathcal{A}(\mathcal{Z}, u^{K^n})}$ garantizamos la convergencia a una solución de utilidad eficiente. Desde un punto de vista teórico parece interesante, ya que el conjunto donde nuestro decisor debe tomar la solución más preferida se ha aproximado por un conjunto cuya dificultad de obtención es equivalente al caso en ambiente de certidumbre.

Si tenemos una función de utilidad vectorial con más de dos componentes, $u : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}^p$ con $p > 2$, podemos construir el conjunto de aproximación de forma análoga a como se hacía en ambiente de certidumbre. Así, el conjunto de aproximación al conjunto de utilidad eficiente $\mathcal{E}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, \mathcal{Z})$ se define

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u) = \bigcap_{i=1}^{p} ND(p_i^*)$$

donde p_i^* es el elemento de $\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}$ donde la función $E(u_i, \cdot)$ alcanza el máximo para $i \in \{1, ..., p\}$.

El conjunto anteriormente construido contiene todos los posibles puntos de interés para el decisor como se observa en la siguiente

Proposición 3.11 *Sea $u : \mathcal{Z} \rightarrow I\!R^m$ una función de utilidad vectorial, en-*

tonces

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}_Z, u) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{P}_Z, u)$$

Demostración. Sea $p^0 \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_Z, u)$ y $p^0 \notin \mathcal{A}(\mathcal{P}_Z, u)$. Entonces existe $i \in \{1, ..., p\}$ tal que $E(u, p^0) \leq E(u, p_i^*)$. Contradicción con ser p^0 de utilidad eficiente. □

Proposición 3.12 *Sea $u : \mathcal{Z} \to I\!R^m$ una función de utilidad vectorial, K y K' conos de información tal que $K'_* \subseteq int(K_*)$. Entonces*

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}_Z, u^{K'}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{P}_Z, u^K)$$

Demostración. Sean $K_* = G\{k^1, ..., k^r\}$, $K'_* = G\{m^1, ..., m^s\}$ y $p^*_{k^i}$, $p^*_{m^j}$ los puntos de $\mathcal{P}_Z$ donde las funciones $E(k^i u, \cdot)$, $E(m^j u, \cdot)$ alcanzan sus valores máximos.

Debido a que $K'_* \subseteq int(K_*)$ existen $(\alpha_1^j, ..., \alpha_r^j) \in S_r$ para cada $j = 1, ..., s$ y con todos los $\alpha_i^j > 0$, tal que $m^j = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^j k^i$ con $j = 1, ..., s$.

Lo demostraremos por inducción sobre s.

Si $s = 1$

Sea $p^0 \in \mathcal{A}(\mathcal{P}_Z, u^{K'}) = ND(p^*_{m^1})$ entonces

$$E(m^1 u, p^0) = E(m^1 u, p^*_{m^1}). \tag{3.19}$$

Supongamos que $p^0 \notin \mathcal{A}(\mathcal{P}_Z, u^K) = \bigcap_{i=1}^{r} ND(p^*_{k^i})$ entonces existe i tal que $E(u^K, p^0) \leq E(u^K, p^*_{k^i})$. Por tanto, como $m^1 = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^1 k^i$, se verifica que

$$E(m^1 u, p^0) < E(m^1 u, p^*_{k^i}) \tag{3.20}$$

De (3.19) y (3.20) se obtiene que $E(m^1u, p^*_{m^1}) < E(m^1u, p^*_{k^i})$. Contradicción con la definición de $p^*_{m_1}$.

Supuesto cierto para $s-1$ probemos que también lo es para s.

Llamemos $K"_* = G\{m^1, ..., m^{s-1}\}$. Por hipótesis se verifica

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u^{K"}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u^K). \tag{3.21}$$

Además, por definición, se cumple

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u^{K'}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u^{K"}). \tag{3.22}$$

De (3.21) y (3.22) se obtiene que $\mathcal{A}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u^{K'}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u^K)$. c.q.d. □

Como casos particulares se obtienen

Corolario 3.10 *Sea $u : \mathcal{Z} \rightarrow I\!R^m$ una función de utilidad vectorial, K y K' conos de información tal que $K'_* \subseteq int(K_*)$. Entonces*

$$\mathcal{A}(\mathcal{Z}, u^{K'}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{Z}, u^K).$$

Corolario 3.11 *Sea $u : \mathcal{Z} \rightarrow I\!R^m$ una función de utilidad vectorial, y K un cono de información tal que $K_* \subseteq int(K^0_*)$. Entonces*

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u^K) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u) \quad y \quad \mathcal{A}(\mathcal{Z}, u^K) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{Z}, u).$$

Los desarrollos anteriores también son válidos si la clase $\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}$ es la formada por las distribuciones de probabilidad discretas.

Consideremos ahora, sobre $\mathcal{Z}$, conjunto continuo, las distribuciones de probabilidad continuas, es decir

$$\mathcal{P}_{\mathcal{Z}} = \{f : f \text{ es función de densidad sobre } \mathcal{Z}\}$$

Dados $f, f' \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}}$, se define la relación de preferencia en $\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}$

$$f \succ_u f' \iff E(u,f) \geq E(u,f')$$

con

$$E(u,f) \geq E(u,f') \text{ si y sólo si } \quad E(u_i,f) \geqq E(u_i,f') \text{ para todo } i$$
$$\text{y existe } j \text{ tal que } E(u_j,f) > E(u_j,f')$$

donde

$$E(u,f) = (E(u_1,f),...,E(u_m,f))$$

es la utilidad esperada vectorial con componentes

$$E(u_i,f) = \int_{\mathcal{Z}} u_i(z)f(z)dz \ \forall i = 1,...,m$$

En este contexto se sigue verificando la proposición anterior como indica la siguiente

Proposición 3.13 *Dada* $u : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}^m$ *función de utilidad vectorial y* $K_* = G\{k^1,...,k^r\}$, *conjunto de información, entonces*

$$E(u^K,f) = (k^1E(u,f),...,k^rE(u,f)) \tag{3.23}$$

Demostración. Se obtiene de las siguientes igualdades

$$E(u^K,f) = (E(k^1u,f),...,E(k^ru,f)) =$$
$$= \left(\int_{\mathcal{Z}}(k^1u)(z)f(z)dz,...,\int_{\mathcal{Z}}(k^ru)(z)f(z)dz\right) =$$
$$= \left(\int_{\mathcal{Z}}\sum_{i=1}^{m}(k_i^1u_i)(z)f(z)dz,...,\int_{\mathcal{Z}}\sum_{i=1}^{m}(k_i^ru_i)(z)f(z)dz\right) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m} k_i^1 \int_{\mathcal{Z}} u_i(z) f(z) dz, ..., \sum_{i=1}^{m} k_i^r \int_{\mathcal{Z}} u_i(z) f(z) dz \right) =$$

$$= (k^1 E(u, f), ..., k^r E(u, f)).$$

□

Todos los resultados correspondientes a la reducción del conjunto de utilidad eficiente para el caso de distribuciones de probabilidad simples se siguen verificando si consideramos el conjunto de distribuciones continuas. Análoga afirmación es válida con el conjunto de aproximación al conjunto de utilidad eficiente.

3.1.9 Algoritmos interactivos basados en el conjuto de aproximación al conjunto de utilidad eficiente

Vemos ahora un par de algoritmos, en el caso de considerar una función de utilidad vectorial con dos componentes, que pretenden facilitar al decisor la tarea de tomar la alternativa más preferida para él. En el caso general, se pueden considerar las indicaciones que aparecen en el capítulo de ambiente de certidumbre.

ALGORITMO I

Paso 0. Identificar $\mathcal{Z}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}$ y u.

Paso 1. Hacer $h = 0$.

Paso 2. Identificar $u^h = u^{K^h}$ $(u^h = u^{\underline{K}^h})$. Determinar $\mathcal{A}^h = \mathcal{A}(\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}, u^h)$ y hallar

$$p_1^{h*} \in \mathcal{P}_Z \; : \; E(u_1^h, p_1^{h*}) = \max_{p \in \mathcal{P}_Z} E(u_1^h, p)$$
$$p_2^{h*} \in \mathcal{P}_Z \; : \; E(u_2^h, p_2^{h*}) = \max_{p \in \mathcal{P}_Z} E(u_2^h, p)$$

Paso 3. Sea $u^{h**} = u^{h*} + \varepsilon$ (donde u^{h*} es el punto ideal, $u^{h*} = (E(u_1^h, p_1^{h*}), E(u_2^h, p_2^{h*}))$, y ε un vector de componentes positivas pequeñas) y $\lambda^h > 0$ un vector de pesos arbitrarios. (Ej. $\lambda_j^h = \frac{\alpha_j}{\alpha_1+\alpha_2}$ donde $\alpha_j = \frac{u_j^{h*} - u_{j*}^h}{max\{|u_j^{h*}|, |u_{j*}^h|\}} j = 1, 2.$ siendo $u_{1*}^h = E(u_1^h, p_2^{h*})$ y $u_{2*}^h = E(u_2^h, p_1^{h*})$).

Paso 4. Determinar la solución de compromiso p^h resolviendo

$$\min_{p \in \mathcal{A}^h} s(E(u^h p), u^{h**}, \lambda^h)$$

donde

$$s(E(u^h, p), u^{h**}, \lambda^h) = \max_{i=1,2} \{\lambda_i^h (u_i^{h**} - E(u_i^h, p))\} - \sum_{i=1}^{2} \phi_i E(u_i^h, p)$$

(con ϕ_i, i = 1,2 valores positivos pequeños).

Paso 5. Considerar p^h y preguntar al decisor si está satisfecho con dicha solución

A) En caso afirmativo, parar.

B) En otro caso, se le pide más información sobre sus preferencias en términos de un cono (familia de conos) poliédrico(s) K^{h+1} ($\underline{K}^{h+1}$) tal que $K^h \subset K^{h+1}$ ($\underline{K}^h \subset \underline{K}^{h+1}$).

Hacer h=h+1 e ir a 2.

A continuación, desarrollamos un algoritmo que presenta las modificaciones análogas a las yá introducidas en el mismo algoritmo para certidumbre.

ALGORITMO II

Paso 0. Identificar $\mathcal{Z}$, $\mathcal{P_Z}$ y u.

Paso 1. Hacer $h = 0$.

Paso 2. Identificar $u^h = u^{K^h}$ ($u^h = u^{\underline{K}^h}$). Determinar $\mathcal{A}^h = \mathcal{A}(\mathcal{P_Z}, u^h)$ y hallar

$$p_1^{h*} \in \mathcal{P_Z} \ : \ E(u_1^h, p_1^{h*}) = \max_{p \in \mathcal{P_Z}} E(u_1^h, p)$$
$$p_2^{h*} \in \mathcal{P_Z} \ : \ E(u_2^h, p_2^{h*}) = \max_{p \in \mathcal{P_Z}} E(u_2^h, p)$$

Paso 3. Sea $u^{h**} = u^{h*}+\varepsilon$ (donde u^{h*} es el punto ideal, $u^{h*} = (E(u_1^h, p_1^{h*}), E(u_2^h, p_2^{h*}))$, y ε un vector de componentes positivas pequeñas) y $\lambda^h > 0$ un vector de pesos arbitrarios. (Ej. $\lambda_j^h = \frac{\alpha_j}{\alpha_1+\alpha_2}$ donde $\alpha_j = \frac{u_j^{h*}-u_{j*}^h}{max\{|u_j^{h*}|,|u_{j*}^h|\}} j = 1, 2.$ siendo $u_{1*}^h = E(u_1^h, p_2^{h*})$ y $u_{2*}^h = E(u_2^h, p_1^{h*})$.

Paso 4. Determinar la solución de compromiso p^h resolviendo

$$\min_{p \in \mathcal{A}^h} s(E(u^h, p), u^{h**}, \lambda^h)$$

donde

$$s(E(u^h, p), u^{h**}, \lambda^h) = \max_{i=1,2}\{\lambda_i^h(u_i^{h**} - E(u_i^h, p))\} - \sum_{i=1}^{2} \phi_i E(u_i^h, p)$$

(donde ϕ_i i = 1,2 son valores positivos pequeños).

Paso 5. Considerar p^h y preguntar al decisor si está satisfecho con dicha solución

A) En caso afirmativo, parar.

B) En otro caso, preguntarle la forma en que desea proporcionar más información.

1.- En términos de conos (familia de conos) poliédricos. Ir a 6.

2.- Indicando qué componente quiere que aumente y la concesión de la otra. Ir a 7.

3.- Especificando niveles de aspiración. Ir a 7'.

Paso 6. Identificar el cono (familia de conos) poliédrico(s) K^{h+1} ($\underline{K}^{h+1}$) tal que contenga al último(a) generado(a). Sea $h = h+1$ e ir a 2.

Paso 7. p^h es presentado al decisor y se le pregunta qué componente de $E(u^h, p^h)$ desea que aumente y cual es la cantidad máxima que puede disminuir la otra. Sea i el índice que puede ser aumentado y w la cantidad que puede disminuir el otro índice j.

Determinar el nuevo conjunto de soluciones potenciales

$$\mathcal{A}^{h+1} = \{p \in \mathcal{A}^h : \ E(u_i^h, p) \geqq E(u_i^h, p^h), E(u_j^h, p) \geqq E(u_j^h, p^h) - w\}$$

Sea $\hat{u}^{h+1} = u^{(h+1)*} + \delta$, donde $u^{(h+1)*}$ es el punto ideal con respecto a $\mathcal{A}^{h+1}$. Ir a 8.

Paso 7'. Se presenta p^h al decisor y se le pide que indique los niveles de aspiración para los valores de $\hat{u}^{h+1}$. Sea $\mathcal{A}^{h+1} = \mathcal{A}^h$ e ir a 8'.

Paso 8. Calcular una solución de compromiso p^{h+1} resolviendo

$$\min_{p \in \mathcal{A}^{h+1}} s(E(u^h, p), \hat{u}^{h+1}, \lambda^h)$$

y tomar $\lambda_j^{h+1} = \frac{1}{\hat{u}_j^{h+1} - E(u_j^h, p^{h+1})} j = 1, 2$. Ir a 10.

Paso 8'. Calcular una nueva solución de compromiso p^{h+1} resolviendo

$$\min_{p \in \mathcal{A}^{h+1}} s(E(u^h, p), \hat{u}^{h+1}, \lambda^h)$$

Paso 9. Preguntar al decisor cual es más preferida entre p^h y p^{h+1}

a) Si es p^{h+1}, calcular el nuevo vector de pesos (dirección más preferida) λ^{h+1} donde $\lambda_j^{h+1} = \frac{1}{u_j^{h**} - E(u_j^h, p^{h+1})}$, $j = 1, 2$.

b) Si es p^h, preguntarle que utilidad esperada (la que ha decrecido) es la responsable de este juicio. Sea i el correspondiente índice. Una aproximación del conjunto próximo de soluciones potenciales está determinado por

$$\mathcal{A}^{h+1} = \{p \in \mathcal{A}^h : E(u_i^h, p) \gneqq E(u_i^h, p^{h+1})\}$$

Sea $p^{h+1} = p^h$ y $\lambda^{h+1} = \lambda^h$.

Paso 10. Sea $u^{h+1} = u^h$.

Paso 11. Sea h=h+1. Ir a 5.

Vamos a probar que la función escalarizante empleada en el algoritmo proporciona soluciones de utilidad eficiente.

Recordemos que el problema a resolver era:

$$\min_{p \in \mathcal{A}^h} s(E(u^h, p), u^{h**}, \lambda^h)$$

donde

$$s(E(u^h, p), u^{h**}, \lambda^h) = \max_{i=1,2}\{\lambda_i^h(u_i^{h**} - E(u_i^h, p))\} - \sum_{i=1}^{2} \phi_i E(u_i^h, p)$$

Dado que u_i^{h**} es un punto fijo, podríamos considerar $s(E(u^h, p), u^{h**}, \lambda^h) = s(p)$ para valores fijos de u^{h**}, p y λ^h. Además, para abreviar, usaremos la siguiente notación

$$s(p) = s_1(p) + s_2(p)$$

donde

$$s_1(p) = \max_{i=1,2}\{\lambda_i^h(u_i^{h**} - E(u_i^h, p))\}$$

$$s_2(p) = -\sum_{i=1}^{2} \phi_i E(u_i^h, p)$$

Para probar que la función escalarizante enunciada siempre nos proporciona elementos de utilidad eficiente demostraremos que si tenemos dos puntos p^1 y p^2 tal que $p^1 \neq p^2$ y p^1 domina a p^2 entonces $s(p^1) < s(p^2)$.

Si p^1 domina a p^2 entonces

$$E(u_i, p^1) \geqq E(u_i, p^2) \ \forall i = 1, 2$$

con al menos una desigualdad estricta.

Entonces

$$s_1(p^1) \leqq s_1(p^2)$$
$$s_2(p^1) < s_2(p^2)$$

Luego

$$s_1(p^1) + s_2(p^1) < s_1(p^2) + s_2(p^2)$$

O lo que es lo mismo

$$s(p^1) < s(p^2)$$

De esta forma s nos proporcionará el punto de utilidad eficiente más "próximo" al ideal.

Ejemplo

Consideremos la aplicación del algoritmo I al ejemplo de la sección 3.1.7.

En la primera iteración, en el paso 2, obtenemos que nuestro conjunto de información es el conjunto de información nula $K_*^0 = G\{(1,0),(0,1)\}$. El conjunto de aproximación al conjunto de utilidad eficiente será

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}_Z, u^0) = \{p^1, p^2, p^4, p^6, p^7, p^8, p^9, p^{10}\}$$

y los óptimos de $E(u_1^0, \cdot)$ y $E(u_2^0, \cdot)$ son p^9 y p^2, respectivamente. En el paso 3 se obtiene $u^{0**} = (.6641, .6831)$, $\lambda_1^0 = .492$ y $\lambda_2^0 = .508$. En el paso 4 construimos la tabla 3.7 donde aparece el valor que toma la función s en cada una de las alternativas pertenecientes al conjunto de aproximación considerado

Tabla 3.7

	p_1	p_2	p_4	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}
s	-1.06	-1.081	-1.096	-1.061	-1.048	-1.012	-1.062	-1.07

En la tabla 3.7 se observa que la solución de compromiso es p_4, al ser la alternativa donde s alcanza el valor mínimo. En el paso 5, p_4 se presenta al decisor. Supongamos que no se encuentra satisfecho con ella, entonces le preguntamos por el valor de ε para el que $(.498 - .13, .680 + \varepsilon)$ y $(.498, .680)$ le sean indiferentes. Supongamos que su respuesta es $\varepsilon = .152$. Repetimos la pregunta para $(.498 + .13, .680 - \varepsilon)$ y $(.498, .680)$. Sea ahora la respuesta, $\varepsilon = .0001$. De esta información proporcionada por el decisor se obtiene el conjunto de información $K_*^1 = G\{(.54, .46), (0, 1)\}$. El vector de utilidades esperadas bajo K_*^1, $E(u^{K^1}, p_j)$, se presentan en la tabla 3.8. Ahora, el conjunto de aproximación al conjunto de utilidad eficiente, en el paso 2 de la segunda iteración, es

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}_Z, u^1) = \{p^2, p^4, p^9, p^{10}\}$$

Tabla 3.8

Lotería	p_1	p_2	p_4	p_4	p_7	p_8	p_9	p_{10}
$E(u_1^{K^1}, p_j)$	.571	.576	.581	.566	.557	.542	.586	.577
$E(u_2^{K^1}, p_j)$	.532	.683	.680	.655	.555	.590	.494	.531

Los óptimos de $E(u_1^1, \cdot)$ y $E(u_2^1, \cdot)$ son p^9 y p^2, respectivamente. En el paso 3 se obtiene $u^{1**} = (.5861, .6831)$, $\lambda_1^1 = .058$ y $\lambda_2^1 = .942$. En el paso 4 construimos la tabla 3.9 donde aparece el valor que toma la función s en cada una de las alternativas pertenecientes al conjunto de aproximación considerado

Tabla 3.9

	p_2	p_4	p_9	p_{10}
s	-1.2584	-1.258	-0.902	-0.96

En la tabla 3.9 se observa que la solución de compromiso es p_2, al ser la alternativa donde s alcanza el valor mínimo. En el paso 5, p_2 se presenta al decisor. Supongamos que no se encuentra satisfecho con ella. Entonces le preguntamos por el valor de ε para el que $(.576 - .13, .683 + \varepsilon)$ y $(.498, .680)$ le sean indiferentes. Supongamos que su respuesta es $\varepsilon = .152$. Repetimos la pregunta para $(.576 + .13, .683 - \varepsilon)$ y $(.498, .680)$. Sea ahora la respuesta, $\varepsilon = .0078$. De esta información proporcionada por el decisor se obtiene el conjunto de información $K_*^2 = G\{(.54, .46), (.37, .63)\}$. El vector de utilidades esperadas bajo K_*^2, $E(u^{K^2}, p_j)$, se presentan en la tabla 3.10. Ahora, el conjunto de aproximación al conjunto de utilidad eficiente, en el paso 2 de

Notemos que el conjunto de aproximación al conjunto de utilidad eficiente obtenido en este ejemplo en cada una de las iteraciones del algoritmo difiere muy poco de su conjunto de utilidad eficiente. Esto se puede ver comparando los resultados obtenidos en los ejemplos de esta sección.

Capítulo 4

Ambiente difuso

4.1 Conjuntos difusos en la toma de decisiones multicriterio

4.1.1 Introducción

La experiencia diaria nos sugiere que usamos a menudo conceptos imprecisos y construimos procedimientos de decisión complejos para los que no es fácil desarrollar algoritmos. En efecto, buena parte de la investigación en Inteligencia Artificial trata de introducir mayor flexibilidad y algoritmos menos mecánicos para afrontar problemas del mundo real. En la vida cotidiana, utilizamos con frecuencia conjuntos mal definidos tales como *"el conjunto de hombres altos"*, o *"la clase de mujeres bellas"*. Hablamos de un *"número x siendo ' mucho más grande que' otro número y"*; podemos responder a preguntas sobre tales conjuntos, proponer problemas y juzgar la suficiencia de las soluciones a estos problemas; Y deberíamos al menos describir un proceso de búsqueda no ambiguo o un algoritmo para determinar para un elemento particular su pertenencia o no a un conjunto. Se puede argumentar que nuestra falta de habilidad para construir tal algoritmo, es simplemente un reflejo de nuestra limitación en las habilidades para llevar a cabo mediciones. En este sentido, la relativa difusidad de una clase de objetos proviene de medidas inexactas. Esto conduce a cálculos de medidas inexactas como es el caso de la teoría de Suppes sobre la medida de creencias. Por ejemplo, en las ciencias sociales se encuentran otras fuentes de difusidad en imprecisión conceptual. En trabajos de Zadeh "la fuente de imprecisión es la ausencia de criterios definidos nítidamente de clases de pertenencia más que la presencia de variables aleatorias". Un número de lógicos tales como Lukasiewiecz y Tarski han reconocido que, al tratar con proposiciones que no son ni verdaderas ni falsas, se necesita construir lógicas muy valuadas; por lo que se han desarrollado sistemas axiomáticos para el cálculo proposicional n-valuado. El artículo de Zadeh de 1965 sobre conjuntos difusos abrió el camino a un desarrollo sistemático de una teoría de conjuntos difusos. La idea fundamental es la falta de un conjunto bien definido de criterios para determinar si un objeto pertenece o no a un conjunto. La multiplicidad de criterios de pertenencia es el foco del concepto de conjunto difuso. Usando uno de los ejemplos de Zadeh, podemos hablar, por ejemplo, del *"conjunto de mujeres bellas"*. La pertenencia a este conjunto esta basada en muchos criterios que asociamos normalmente con objetos agradables estéticamente. Además, debe notarse que estos criterios pueden ser ellos mismos difusos y así, deben desdoblarse en subcriterios. El nivel de agregación de hechos elementales en un concepto difuso varía según los conceptos; para un concepto dado, distintas circunstancias pueden conllevar mayor o menor desagregación. De una manera informal, se tiene la impresión de que conjuntos difusos y MCDM estuvieran íntimamente relacionados.

Antes de entrar en las definiciones básicas de teoría de conjuntos difusos, es importante distinguir este tipo de imprecisión de la expresada por variables aleatorias. Consideremos, por ejemplo, la afirmación: *"sea x un número más grande que 10"*. La ordenación *"más grande que"* no está definida en la teoría estándar de relaciones. Además, ninguna aleatoriedad está asociada con la eleccción de x. Aquí de nuevo lo que rodea a la afirmación anterior es una falta de acotaciones definidas de forma exacta relativas a clases de pertenencias para x.

4.1.2 Las herramientas de la teoría de conjunto difuso

Reflejar y expresar la imprecisión en clases de pertenencia proviene de la pérdida de un criterio de pertenencia único no ambiguo, que lleva a extender la notación estándar de función característica para un conjunto ordinario. Dado algún conjunto universal, $\mathcal{U}$, un conjunto específico S se define por su función característica, μ_S, definida de $\mathcal{U}$ a $\{0,1\}$ donde $\mu(x) = 1$ si y sólo si $x \in S$. La familia de todas las funciones μ de $\mathcal{U}$ a $\{0,1\}$ define la clase de todos los conjuntos ordinarios en $\mathcal{U}$. El hecho de que las acotaciones de un conjunto difuso no estén delimitadas de manera exacta se formaliza extendiendo la notación estándar de una función característica al intervalo cerrado unitario $I = [0,1]$ en vez del conjunto $\{0,1\}$. Llamamos a tal función característica generalizada *"función de pertenencia"*, denotada por μ. Un conjunto difuso se define así, como un conjunto de elementos en $\mathcal{U}$ tal que cada elemento $x \in \mathcal{U}$ teniendo un grado de pertenencia $\mu(x) \in [0,1]$. De estas definiciones se sigue que la clase de todos los conjuntos difusos definidos sobre $\mathcal{U}$ es simplemente la clase $I^{\mathcal{U}}$ de todas las funciones defenidas de $\mathcal{U}$ a I.

Para que este enfoque sea fructífero y se preste a uso práctico, deben definirse ciertas operaciones que permitan combinar conjuntos difusos con otros conjuntos difusos. La necesidad de tales operaciones se percibe mejor si consideramos afirmaciones como: *"sea x un número más grande que 10 y por debajo de 100"*; o *"los conjuntos de todas las fianzas que son completamente líquidas y/o producen un substancial interés"*. Para hacer tales afirmaciones manejables con nuestros métodos de análisis tradicionales, deberíamos convertirlas en afirmaciones "nítidas" eligiendo una medida de liquidez y promedio de interés, y un valor medio de ambos criterios. Sin embargo con este enfoque podemos retener la difusidad de las afirmaciones del problema y definir los conjuntos difusos resultantes de estos criterios.

Sean A, B, C, D conjuntos difusos en $\mathcal{U}$, con funciones de pertenencia $\mu_A, \mu_B, \mu_C, \mu_D$. Definimos las reglas de combinación de funciones de pertenencia como sigue:

La unión C de A y B es el conjunto difuso más pequeño conteniendo ambos A y B:

$$\mu_C(x) = Max[\mu_A(x), \mu_B(x)], \quad x \in \mathcal{U}$$

La intersección D de A y B es el conjunto difuso más grande contenido en ambos A y B:

$$\mu_C(x) = Min[\mu_A(x), \mu_B(x)], \quad x \in \mathcal{U}$$

Un conjunto difuso A es contenido en B si y sólo si

$$\mu_A \leqq \mu_B$$

El complemento de A' de un conjunto difuso A está definido por

$$\mu'_A = 1 - \mu_A$$

Dos conjuntos difusos A y B son iguales si y sólo si $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ para todo $x \in \mathcal{U}$; y A es vacío si y sólo si $\mu_A(x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{U}$. Las operaciones algebráicas pueden definirse para conjuntos difusos tales como el producto algebraico ($\mu_A * \mu_B$), la suma algebraica ($\mu_A + \mu_B$, siempre que $\mu_A + \mu_B \leqq 1$) y la diferencia algebraica ($\mu_A - \mu_B$). Muchas de las propiedades de las operaciones de conjuntos ordinarias se cumplen para conjuntos difusos como, por ejemplo, la asociativa, distributiva y las leyes De Morgan para operaciones de unión e intersección. En efecto, los conjuntos difusos en $\mathcal{U}$ forman un retículo con 0 y 1. Notemos, además, que el concepto de variable aleatoria es inaplicable al tipo de imprecisión modelizada por la teoría de conjuntos difusos, ya que las operaciones formales sobre el conjunto de funciones de pertenencia las aparta de las funciones de densidad probabilística. Finalmente, puede notarse que muchos conceptos y teoremas importantes pueden extenderse a conjuntos difusos. Por ejemplo un conjunto difuso A es convexo si y sólo si los conjuntos

$$\{x : \ \mu_A(x) \geqq \alpha\}$$

son convexos para todo $\alpha \in [0, 1]$ o equivalentemente

$$\mu_A[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geqq Min[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)] \ \forall x_1, x_2 \in \mathcal{U}, \forall \ \lambda \in [0, 1]$$

Teoremas importantes tales como el teorema de separación de hiperplanos, o el teorema de Tychonoff, se verifican para conjuntos difusos.

A pesar del atractivo inicial de este enfoque queremos expresar que no está exento de algunas fuertes críticas (por ejemplo, French, 1985) que posiblemente están aún lejos de superarse y llegar a tener el mismo cuerpo de doctrina que la teoría de la probabilidad.

Desde el artículo original de Zadeh han aparecido muchas contribuciones a la literatura de conjuntos difusos. El interés de esta extensión se basa en el hecho de que puede proporcionar una base teórica para utilidades ordenadas no linealmente, en evaluación de objetos. Algunos métodos MCDM son criticados a veces por que exigen al decisor de la comparación de ciertas alternativas que son intrínsicamente incomparables. Dada la multiplicidad y ambiguedad de los criterios de pertenencia, que son el centro del concepto de conjunto difuso, podrían aplicarse similares críticas contra ellos. El uso de una escala numérica tal como $I = [0, 1]$ para los grados de pertenencia presupone que puede encontrarse un orden lineal no arbitrario sobre los objetos. Extendiendo la función de pertenencia a un retículo nos capacita para tratar con los casos donde no puede encontrarse ningún orden. Un conjunto L-difuso es un conjunto difuso cuya función de pertenencia μ toma valores en un retículo, es decir, un conjunto parcialmente ordenado donde existen los elementos supremo e ínfimo para cada par; claramente, $\mu(\cdot) \in [0, 1]$ es un caso especial donde $I = [0, 1]$ es un conjunto de números reales completamente ordenado. J.G. Brown ha estudiado una clase de conjuntos L-difusos eligiendo una álgebra Booleana con grado de pertenencia reticulada. Finalmente, debería notarse que la noción de difusidad es aplicable a muchas áreas tradicionales de matemáticas, tales como teoría de la probabilidad, teoría de grafos, topología. El proceso de dotar un concepto, un teorema o una teoría con una estructura difusa es conocida como fusificación. Por ejemplo, pueden fusificarse gráficas, relaciones y funciones.

4.1.3 Objetivos difusos y maximizacion vectorial

En esta sección consideramos la notación de eficiencia para problemas de maximización vectorial y los efectos de introducir difusidad en los objetivos multiples y restricciones.

Volvemos a nuestro problema de maximización vectorial que consiste en un conjunto de restricciones definiendo una región de decisiones factibles; un conjunto de varios objetivos para evaluar las decisiones; denotamos estas n funciones $z_1, ..., z_j, ..., z_n$; donde cada z_j es real y continua, y debe ser maximizada.

En la práctica, la noción de eficiencia se critica especialmente por dos motivos. Primero, porque sólo produce una ordenación parcial de las decisiones. Así, en general es necesario otro concepto de solución para elegir entre las decisiones eficientes. Y en segundo lugar, es miope en el sentido que algunas soluciones no eficientes se excluyen de futuras consideraciones no importando cuan cerca pueda estar a la frontera eficiente. Esto es mas un problema relacionado con la medida que uno puramente teórico, pero su importancia práctica no debería olvidarse. Veremos ahora como la teoría de conjuntos difusos permite superar este problema. Construiremos un conjunto eficiente difuso que incluirá puntos cercanos según varios grados.

Consideremos el siguiente ejemplo: (i) Sea $x \in \mathbb{R}^2_+$ y tal que x_i esté en el intervalo [[0,12]] para $i = 1, 2$, donde [[ ]] denota los puntos difusos finales de la región factible; (ii) Tomemos x tal que $x_1 + x_2 >> 4$, donde $>>$ denota la relación *"mucho más grande que"*. En términos de la optimización tradicional restringida, este problema (i)-(ii) está mal formulado ya que no se asigna ningún sentido a la relación *"mucho más grande que"*, ni al intervalo difuso [[0,12]]. Para solucionar el problema necesitamos convertir en no difusas estas afirmaciones eligiendo sus análogos nítidos. Por ejemplo, (1) $x_i \in [0, 12]$ y (2) $Max(x_1 + x_2)$ tal que $4 < (x_1 + x_2) \leqq 24$. El conjunto eficiente simplemente sería un segmento de la linea $x_1+x_2 = 24$. De hecho, este tipo de afirmaciones siempre constituyen la mayor dificultad en la implementación de muchos modelos. Típicamente se han adoptado soluciones heurísticas implícita o explícitamente, en la interpretación de las afirmaciones imprecisas del decisor. Parece más realista ensayar y construir una lógica difusa, y los modelos acomodarlos a tales lógicas, más que forzar el problema a un sistema demasiado restringido. Ignorando todo el adorno lingüístico tal como *"mucho más grande que"*, *"sustancialmente mejor que"*, *"mucho más pequeño que"*, etc. estaríamos quitando a los problemas parte de su significado práctico.

En nuestro ejemplo, esto significa que debemos definir un conjunto eficiente difuso $\mathcal{E}$ que incluirá otros puntos además de los del segmento aludido de la línea $x_1 + x_2 = 24$, con diferentes grados de pertenencia. De acuerdo con Bellman y Zadeh (1973) podemos definir la función de pertenencia del conjunto eficiente difuso como sigue: Primero notemos que la confluencia de (1) nuestro objetivo (*"...mucho más grande que..."*) y (2) nuestra restricción (pertenencia al conjunto difuso [[0,12]]) sugiere que usemos la intersección para definir la función de pertenencia $\mu_{\mathcal{E}}$ del conjunto resultante. Formalmente

$$\mu_{\mathcal{E}}(x) = Min(\mu_1(x), \mu_2(x))$$

donde $\mu_1(x)$ es la función de pertenencia para la función objetivo y $\mu_2(x)$ es la función de pertenencia para la restricción. Por ejemplo, una tabla hipotética abreviada para estas funciones de pertenencia (considerando solamente un subconjunto de los puntos enteros por simplicidad) podría ser

x	(0,1)	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(...)	(12,1)	(...)	(14, 2)
μ_1	0	0.2	1	1	(...)	1	(...)	0.1
μ_2	0	0	0.1	0.25	(...)	0.8	(...)	0.9
$\mu_\mathcal{E}$	0	0	0.1	0.25	(...)	0.8	(...)	0.1

De esta manera concluimos que una decisión eficiente es realmente un conjunto difuso en el espacio de alternativas. La similitud intrínsica entre objetivos y restricciones es clara. Además, vemos que tomar la decisión eficiente "mejor" en el conjunto no es un problema con una única respuesta. Una posibilidad es tomar el punto (x_1, x_2) que tenga un grado máximo de pertenencia en el espacio factible. En nuestro ejemplo, restrigiéndonos a los puntos listados en la anterior tabla debemos tomar $x = (12, 1)$. Sin embargo, podemos también ver que son posibles otras soluciones si estimáramos las funciones de pertenencia μ_1, μ_2 y $\mu_\mathcal{E}$ sobre sus respectivos dominios. Otro hecho notable es que la frontera eficiente no está definida como un conjunto específico (un subconjunto de los puntos de la región factible). Al contrario, es un conjunto difuso con acotaciones imprecisas. Y así, no están excluidas las soluciones interiores. Sus valores relativos pueden asignarse a partir de sus grados de pertenencia.

Es claro que, en general, cuando existe un número arbitrario de restricciones y objetivos, la función de pertenencia para el conjunto eficiente también se define como:

$$\mu_E(x) = \bigwedge_i \mu_i(x)$$

donde $i = 1, ..., n$ y $\bigwedge \equiv Min$.

También debería notarse que si queremos asignar diferentes pesos λ_j a los distintos objetivos (y/o restricciones), puede hacerse premultiplicando cada $\mu_i(x)$ por funciones de pertenencia $\lambda_i(x)$ tal que $\sum_i \lambda_i(x) = 1$. En efecto, este último punto muestra que muchos métodos bien conocidos de selección de soluciones eficientes como, por ejemplo, la minimización de alguna medida de distancia o el algoritmo STEM, simplemente son diferentes especificaciones de las funciones de pertenencia λ_j. Sobre la base de estas notas la línea siguiente de investigación parece clara: tomar ciertos conceptos de solución bien conocidos y hacerlos difusos hasta el punto donde el decisor encuentre confortable su uso y pueda asignar las correspondientes funciones de pertenencia.

4.1.4 Programación lineal difusa con múltiples objetivos

En la práctica resulta más apropiado considerar que los posibles valores de los parámetros en la descripción de las funciones objetivos y las restricciones comprendan, en general, la ambigüedad del conocimiento de los expertos del sistema real. Por esta razón, consideramos el siguiente problema de programación lineal multiobjetivo con parámetros difusos:

$$\begin{array}{ll} \max & \bar{\nu}(z) = (\hat{c}_1 z, ..., \hat{c}_l z) \\ \min & \bar{\nu}'(z) = (\hat{c}'_1 z, ..., \hat{c}'_r z) \\ \text{sa:} & z \in \mathcal{Z} = \{z \in \mathbb{R}^n : \bar{A}z * \hat{b}, z \geq 0\} \end{array} \tag{4.1}$$

donde $\hat{c}_k$ $(k = 1, ..., l)$ y $\hat{c}'_s$ $(s = 1, ..., r)$ son vectores n-dimensionales, $\hat{b}$ es un vector m-dimensional, $\bar{A}$ es una matriz de orden $m * n$, y los componentes de $\hat{c}_k$, $\hat{c}'_s$, $\hat{b}$ y $\bar{A}$ son números difusos.

El problema representado por (4.1) tiene dos tipos de variables difusas. El primer tipo son las metas difusas del problema de programación de compromiso multiobjetivo. El segundo tipo son los coeficientes difusos que ahora tienen distribuciones de posibilidad en vez de valores determinísticos.

Sea $(z)^{\alpha}_{\beta}$ una solución de (4.1) donde $\alpha \in [0, 1]$ denota el nivel de posibilidad para el cual todos los coeficientes difusos son factibles, y $\beta \in [0, 1]$ denota el grado de compromiso en el cual la solución satisface todos los objetivos difusos mientras los coeficientes son factibles a nivel α. Mediante la regla de unión de Bellman-Zadeh, los parámetros difusos α pueden expresarse como

$$\alpha = min\{\mu_{\hat{c}_{kj}}, \mu_{\hat{c}'_{sj}}, \mu_{\hat{a}_{ij}}, \mu_{\hat{b}_i} \,:\, k = 1, ..., l, s = 1, ..., r, i = 1, ..., m, j = 1, ..., n\} \tag{4.2}$$

que significa que la factibilidad del sistema es igual a la posibilidad de la componente más imposible en el sistema. La ecuación (4.2) significa que la mayor de las posibilidades de los coeficientes es, la más fuerte de las limitaciones hechas sobre los coeficientes. Obviamente, se busca la solución óptima para un dado valor α cuando

$$\mu_{\hat{c}_{kj}} = \mu_{\hat{c}'_{sj}} = \mu_{\hat{a}_{ij}} = \mu_{\hat{b}_i} = \alpha$$

para todos los subíndices.

Sea $(\hat{p})_\alpha$ el α-corte de un número difuso $\hat{p}$, definido como

$$(\hat{p})_\alpha = \{p \in S(\hat{p}) \,:\, \mu_{\hat{p}}(p) \geqq \alpha\}$$

donde $S(\hat{p})$ es el soporte de $\hat{p}$. Sean $(\hat{p})^L_\alpha$ y $(\hat{p})^U_\alpha$ el límite inferior y superior del α-corte de $\hat{p}$, respectivamente,

$$(\hat{p})^L_\alpha \leqq (\hat{p})_\alpha \leqq (\hat{p})^U_\alpha$$

Entonces, para un dado valor de α, los objetivos $\bar{\nu}(z)$ a ser maximizados y $\bar{\nu}'(z)$ a ser minimizados pueden ser reemplazados por el límite superior e inferior de sus respectivos α-cortes, esto es

$$(\bar{\nu}_k)^U_\alpha = \sum_{j=1}^{n} (\hat{c}_{kj})^U_\alpha z_j, \; k = 1, ..., l,$$
$$(\bar{\nu}'_s)^L_\alpha = \sum_{j=1}^{n} (\hat{c}'_{sj})^L_\alpha z_j, \; s = 1, ..., r,$$

Además, cuando $*$ denota el operador $\leqq$ para las restricciones $i = 1, ..., m_1$ y $\geqq$ para las restricciones $i = m_1 + 1, ..., m_2$, estas restricciones pueden ser reemplazadas en forma similar por las siguientes restricciones:

$$\sum_{j=1}^{n} (\hat{a}_{ij})^L_\alpha z_j \leqq (\hat{b}_i)^U_\alpha,$$

para $i = 1, ..., m_1$, y

$$\sum_{j=1}^{n} (\hat{a}_{ij})^U_\alpha z_j \geqq (\hat{b}_i)^L_\alpha,$$

para $i = m_1 + 1, ..., m_2$.

Sin embargo, cuando $*$ denota el operador $=$ para las restricciones $i = m_2 + 1, ..., m$, estas restricciones pueden reemplazarse por

$$\sum_{j=1}^{n} (\hat{a}_{ij})^L_\alpha z_j \leqq (\hat{b}_i)^U_\alpha$$
$$\sum_{j=1}^{n} (\hat{a}_{ij})^U_\alpha z_j \geqq (\hat{b}_i)^L_\alpha$$

para $i = m_2 + 1, ..., m$.

Así, para un valor dado de α, el problema representado por (4.1) puede transformarse en el siguiente problema

$$
\begin{array}{ll}
\max & (\bar{\nu}_k)^U_\alpha = \sum_{j=1}^{n} (\hat{c}_{kj})^U_\alpha z_j, \; k = 1, ..., l, \\
\min & (\bar{\nu}'_s)^L_\alpha = \sum_{j=1}^{n} (\hat{c}'_{sj})^L_\alpha z_j, \; s = 1, ..., r, \\
\text{sa:} & \sum_{j=1}^{n} (\hat{a}_{ij})^L_\alpha z_j \leqq (\hat{b}_i)^U_\alpha, i = 1, ..., m_1, m_2 + 1, ..., m, \\
& \sum_{j=1}^{n} (\hat{a}_{ij})^U_\alpha z_j \geqq (\hat{b}_i)^L_\alpha, i = m_1 + 1, ..., m_2, m_2 + 1, ..., m, \\
& z_j \geqq 0, j = 1, ..., n.
\end{array}
\tag{4.3}
$$

Para simplificar la presentación, usaremos $\mathcal{Z}_\alpha$ para denotar las restriciones.

Se puede observar que para un valor α dado el problema se convierte en un problema lineal determinístico.

Si el decisor fuera capaz de dar el valor de α habríamos concluido ya que tendríamos un problema con el cual sabemos trabajar. Pero ocurre que esto no es lo usual, de ahí que tengamos que utilizar algún método para hallar dicho valor.

Consideremos el problema

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \beta \\
\text{sa:} \quad & \beta \leqq \frac{\sum_{j=1}^{n} (\hat{c}_{kj})_{\alpha}^{U} z_j - (\bar{\nu}_k)_{\alpha}^{-} (\bar{\nu}_k)_{\alpha}^{*} - (\bar{\nu}_k)_{\alpha}^{-}}{,} \quad k = 1, ..., l, \\
& \beta \leqq \frac{(\bar{\nu}_k^{'})_{\alpha}^{-} - \sum_{j=1}^{n} (\hat{c}_{sj}^{'})_{\alpha}^{L} z_j / (\bar{\nu}_s^{'})_{\alpha}^{-} - (\bar{\nu}_s^{'})_{\alpha}^{*}}{,} \quad s = 1, ..., r, \\
& \beta \in [0, 1], \\
& z \in \mathcal{Z}_{\alpha}, \\
& z_j \geqq 0
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

donde $(\bar{\nu}_k)_{\alpha}^{*}$, $(\bar{\nu}_s^{'})_{\alpha}^{*}$ y $(\bar{\nu}_k)_{\alpha}^{-}$, $(\bar{\nu}_s^{'})_{\alpha}^{-}$ son las soluciones ideal y anti-ideal, respectivamente, que pueden obtenerse resolviendo cada uno de los siguientes problemas independientemente:

$$
\begin{array}{llll}
\max & (\bar{\nu}_k)_{\alpha}^{*} = \sum_{j=1}^{n} (\hat{c}_{kj})_{\alpha}^{U} z_j, & \min & (\bar{\nu}_s^{'})_{\alpha}^{*} = \sum_{j=1}^{n} (\hat{c}_{sj}^{'})_{\alpha}^{L} z_j, \\
\text{sa:} & z \in \mathcal{Z}_{\alpha} & \text{sa:} & z \in \mathcal{Z}_{\alpha}
\end{array}
$$

y

$$
\begin{array}{llll}
\max & (\bar{\nu}_s^{'})_{\alpha}^{-} = \sum_{j=1}^{n} (\hat{c}_{sj}^{'})_{\alpha}^{U} z_j, & \min & (\bar{\nu}_k)_{\alpha}^{-} = \sum_{j=1}^{n} (\hat{c}_{kj})_{\alpha}^{L} z_j, \\
\text{sa:} & z \in \mathcal{Z}_{\alpha} & \text{sa:} & z \in \mathcal{Z}_{\alpha}
\end{array}
$$

Asumiendo que todos los coeficientes difusos son números difusos trapezoidales que pueden especificarse por la cuaterna $(p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}, p^{(4)})$ con función de pertenencia

$$
\mu_{\hat{p}}(p) = \begin{cases}
0, & p \leqq p^{(1)}, \\
\frac{p - p^{(1)}}{p^{(2)} - p^{(1)}}, & p^{(1)} \leqq p \leqq p^{(2)}, \\
1, & p^{(2)} \leqq p \leqq p^{(3)}, \\
\frac{p^{(4)} - p}{p^{(4)} - p^{(3)}}, & p^{(3)} \leqq p \leqq p^{(4)}, \\
0, & p \geqq p^{(4)}.
\end{cases}
\tag{4.5}
$$

entonces el α-corte de $\hat{p}$ puede expresarse por el siguiente intervalo

$$(\hat{p})_\alpha = [(\hat{p})^L_\alpha, (\hat{p})^U_\alpha] = [p^{(1)} + (p^{(2)} - p^{(1)})\alpha, p^{(4)} - (p^{(4)} - p^{(3)})\alpha]$$

Notemos que si $p^{(2)} = p^{(3)}$, entonces $\hat{p}$ se reduce a un número difuso triangular, especificado por $(p^{(1)}, p^{(2),(3)}, p^{(4)})$; si $p^{(1)} = p^{(2)} = p^{(3)} = p^{(4)}$, y entonces $\hat{p}$ se reduce a un número real.

Usando la expresión intervalo, el problema representado en (4.4) puede reescribirse como

$$\begin{array}{ll}
\max & \beta \\
\text{sa:} & \beta \leqq \dfrac{\sum_{j=1}^{n}[c_{kj}^{(4)} - (c_{kj}^{(4)} - c_{kj}^{(3)})\alpha]z_j - (\bar{\nu}_k)^-_\alpha}{(\bar{\nu}_k)^*_\alpha - (\bar{\nu}_k)^-_\alpha}, \ k = 1, ..., l, \\
& \beta \leqq \dfrac{(\bar{\nu}'_s)^-_\alpha - \sum_{j=1}^{n}[c_{sj}^{(1)} - (c_{sj}^{(2)} - c_{sj}^{(1)})\alpha]z_j}{(\bar{\nu}'_s)^-_\alpha - (\bar{\nu}'_s)^*_\alpha}, \ s = 1, ..., r, \\
& \beta \in [0,1], \\
& [a_{ij}^{(1)} + (a_{ij}^{(2)} - a_{ij}^{(1)})\alpha]z_j \leqq b_i^{(4)} + (b_i^{(4)} - b_i^{(3)})\alpha, \ i = 1, ..., m_1, m_2+1, ..., m, \\
& [a_{ij}^{(4)} - (a_{ij}^{(4)} - a_{ij}^{(3)})\alpha]z_j \geqq b_i^{(1)} + (b_i^{(2)} - b_i^{(1)})\alpha, \ i = m_1+1, ..., m_2, m_2+1, ..., m, \\
& z_j \geqq 0, j = 1, ..., n
\end{array} \tag{4.6}$$

Por simplicidad, las tres últimas restricciones las denotaremos por $\mathcal{Z}'_\alpha$.

Ahora, sea λ el grado de satisfacción global para la solución bajo consideración $(z)^\alpha_\beta$ de las metas difusas y coeficientes difusos. De nuevo, mediante la regla de unión de Bellman-Zadeh, λ se considera como

$$\lambda = min\{\alpha, \beta\}.$$

Además de la variable z, el problema (4.6) tiene dos tipos diferentes de parámetros no conocidos: el parámetro α que denota el nivel de posibilidad de los coeficientes difusos y el parámetro β el cual denota el compromiso entre los diferentes objetivos. Se pueden utilizar varios métodos para resolver este problema. Nosotros consideramos el siguiente (Stanley y Li, 1993):

Paso 1. Defino ε = longitud del paso, $\mathcal{T}$ = precisión de tolerancia, k = contador de la iteración = 0.

Paso 2. Sea $\alpha_k = 1 - k\varepsilon$, entonces resolver el problema (4.4) para obtener β_k y z_k.

Paso 3. Si $\mid \beta_k - \alpha_k \mid \leq \mathcal{T}$, entonces sea $\lambda = min\{\alpha_k, \beta_k\}$ y $z = z_k$, e ir a 4. Si $\alpha_k - \beta_k > \varepsilon$, entonces sea $k = k + 1$ e ir a 2. Si el tamaño de la etapa es demasiado grande, sea $\varepsilon = 1/2\varepsilon$, $k = k$ e ir a 2.

Paso 4. Obtenemos λ, α y β.

Para un α dado, este es un problema lineal que puede resolverse fácilmente. Después de obtener los valores de α y β por el anterior procedimiento, podemos ir a la fase II para resolver el siguiente problema para obtener una solución eficiente en caso de que la solución obtenida en la fase I no sea única.

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \bar{\beta} = \tfrac{1}{l+r}\left(\sum_{k=1}^{l} \beta_k + \sum_{s=1}^{r} \beta_s\right) \\
\text{sa:} \quad & \beta \leqq \beta_k = \frac{\sum_{j=1}^{n}[c_{kj}^{(4)} - (c_{kj}^{(4)} - c_{kj}^{(3)})\alpha]z_j - (\bar{\nu}_k)_{\alpha}^{-}}{(\bar{\nu}_k)_{\alpha}^{*} - (\bar{\nu}_k)_{\alpha}^{-}}, \; k = 1, ..., l, \\
& \beta \leqq \beta_s = \frac{(\bar{\nu}_s')_{\alpha}^{-} - \sum_{j=1}^{n}[c_{sj}^{(1)} - (c_{sj}^{(2)} - c_{sj}^{(1)})\alpha]z_j}{(\bar{\nu}_s')_{\alpha}^{-} - (\bar{\nu}_s')_{\alpha}^{*}}, \; s = 1, ..., r, \\
& \bar{\beta} \in [0, 1], \\
& z \in \mathcal{Z}_{\alpha}',
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

donde α y β son constantes y fueron obtenidas en la fase I por el procedimiento anterior.

Sea z la solución óptima del problema (4.7). Esta solución z se presenta al decisor, que puede aceptarla en cuyo caso habríamos terminado. En caso contrario, debe estar dispuesto a dar más información sobre su estructura de preferencias, que la representaremos con un conjunto de información que nos servirá para construir una nueva función de valor vectorial asociada al nuevo conjunto de información. Es decir, si $K_* = G\{k^1, ..., k^q\}$ es el nuevo conjunto de información entonces el problema que debemos considerar es:

$$\begin{array}{ll} \max & (\bar{\nu}_t)^U_\alpha = k^t((\bar{\nu}_1)^U_\alpha, ..., (\bar{\nu}_l)^U_\alpha, -(\bar{\nu}'_1)^L_\alpha, ..., -(\bar{\nu}'_r)^L_\alpha) \ t = 1, ..., q \\ \text{sa:} & \sum_{j=1}^{n} (\hat{a}_{ij})^L_\alpha z_j \leqq (\hat{b}_i)^U_\alpha, i = 1, ..., m_1, m_2 + 1, ..., m, \\ & \sum_{j=1}^{n} (\hat{a}_{ij})^U_\alpha z_j \geqq (\hat{b}_i)^L_\alpha, i = m_1 + 1, ..., m_2, m_2 + 1, ..., m, \\ & z_j \geqq 0, j = 1, ..., n. \end{array} \tag{4.8}$$

siendo α el valor obtenido en la fase I.

La tercera fase consiste en la aplicación, al problema (4.8), del siguiente algoritmo para el caso de tener una función de valor con dos componentes (Prassad y Karwan, 1992):

Paso 0. Hacer $h = 0$.

Paso 1. Encontrar z^{2*} tal que

$$\begin{array}{rcl} \nu_2^h(z^{2*}) & = & \max \quad \nu_2^h(z) \\ & & \text{sa:} \quad z \in \mathcal{Z} \end{array}$$

y z^1 tal que

$$\begin{array}{rcl} \nu_1^h(z^1) & = & \max \quad \nu_1^h(z) \\ & & \text{sa:} \quad z \in \mathcal{Z} \\ & & \qquad \nu_2^h(z) = \nu_2^h(z^{2*}) \end{array}$$

Fijar z^1 y sea $r = 1$. Encontrar

$$\begin{array}{rcl} v_1^{h*} & = & \max \quad \nu_1^h(z) \\ & & \text{sa:} \quad z \in \mathcal{Z} \end{array}$$

Si $\nu_1^h(z^1) = v_1^{h*}$, parar y $M = \{z^1\}$. En otro caso, sea $r = r + 1$ y $M = \{z^1\}$ e ir a 2.

Paso 2. Resolver el problema P^{r-1}

$$\begin{array}{ll} \max & \frac{\nu_2^h(z)-\nu_2^h(z^{r-1})}{\nu_1^h(z)-\nu_1^h(z^{r-1})} \\ \text{sa:} & z \in \mathcal{Z} \end{array}$$

Sea z^r la solución obtenida (si hay soluciones óptimas, elegir aquella que tome menor valor en la segunda componente de la función de valor). Si $\nu_1^h(z^r) = \nu_1^{h*}$ entonces $M = M \cup \{\alpha z^{r-1} + (1-\alpha)z^r, \alpha \in (0,1)\}$ e ir a 3. En otro caso, $M = M \cup \{\alpha z^{r-1} + (1-\alpha)z^r, \alpha \in [0,1]\}$, sea $r = r + 1$ y repetir el paso 2.

Paso 3. Sea $M^0 = M$.

Paso 4. Presentar M^h al decisor. Si elige una solución, parar. En otro caso, obtener más información mediante el cono (familia de conos) de información $K^{h+1} \supset K^h$ ($\underline{K}^{h+1} \supset \underline{K}^h$), hacer $h = h + 1$ e ir a 5.

Paso 5. Determinar $\nu^h = \nu^{K^h}$ ($\nu^h = \nu^{\underline{K}^h}$). Ir a 4.

Para las funciones de valor vectoriales con más de dos componentes, en la fase III el algoritmo que debemos utilizar es:

Paso 1. Sea h=0.

Paso 2. Identificar $\nu^h = \nu^{K^h} = (\nu_1^h, ..., \nu_q^h)$ ($\nu^h = \nu^{\underline{K}^h} = (\nu_1^h, ..., \nu_q^h)$) y obtener v_1^{h*},...,v_q^{h*}; n_1,...,n_q, donde $n = (n_1, ..., n_q)$ es el vector nadir.

Paso 3. Sean $v^{h**} = v^{h*} + \delta$ (donde $v^{h*} = (v_1^{h*}, ..., v_q^{h*})$ y δ es un vector con valores positivos pequeños)y $\lambda^h > 0$ un vector de pesos arbitrarios. (ej. $\lambda_j^h = \alpha_j/(\alpha_1 + ... + \alpha_q)$ donde $\alpha_j = \frac{v_j^{h*} - n_j}{max\{|v_j^{h*}|, |n_j|\}}, j = 1, ..., q.$)

Paso 4. Determinar las soluciones de compromiso z^h resolviendo

$$min\{s(\nu^h(z), v^{h**}, \lambda^h) : z \in \mathcal{Z}\}.$$

donde

$$s(\nu^h(z), v^{h**}, \lambda^h) = \max_{i=1,...,q}\{\lambda_i^h(v_i^{h**} - \nu_i^h(z))\} - \sum_{i=1}^{q} p_i \nu_i^h(z).$$

es una función con $p_i(i = 1, ..., q)$, valores positivos pequeños.

Paso 5. z^h es presentado al decisor

1. Si está satisfecho con z^h, parar.

2. En otro caso pedirle más información sobre sus preferencias en términos de conos (familia de conos) poliédrios K^{h+1} ($\underline{K}^{h+1}$) tal que $K^h \subset K^{h+1}$ ($\underline{K}^h \subset \underline{K}^{h+1}$).

Paso 6. Sea $h = h + 1$ e ir a 2.

Ejemplo

Consideremos el siguiente problema lineal posibilístico con múltiples funciones objetivos:

$$\begin{array}{ll} \max & \nu_1(z) = 10z_1 + \bar{6}z_2 \\ \min & \nu_2(z) = \bar{1}z_1 + 1.5z_2 \\ \text{sa:} & \bar{2}z_1 + 2z_2 \leqq 1\bar{4}0 \\ & z_2 \geqq \bar{8} \\ & z_1 \geqq 0 \end{array} \tag{4.9}$$

donde todos los números difusos son números difusos triangulares y están definidos como sigue:

$$\bar{6} = (4, 6, 8),\ \bar{1} = (0, 1, 2),\ \bar{2} = (1, 2, 3),\ 1\bar{4}0 = (100, 140, 180),\ \bar{8} = (3, 8, 10)$$

y donde la máxima posibilidad de cada uno de ellos se encuentra en el número del medio.

Reemplazando los coeficientes difusos por sus α-cortes, el problema anterior se transforma en el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \max & (\nu_1)_\alpha = 10z_1 + (8 - 2\alpha)z_2 \\ \min & (\nu_2)_\alpha = \alpha z_1 + 1.5z_2 \\ \text{sa:} & (1+\alpha)z_1 + 2z_2 \leqq 180 - 40\alpha \\ & z_2 \geqq 3 + 5\alpha \\ & z_1, z_2 \geqq 0 \\ & \alpha \in [0, 1] \end{array} \tag{4.10}$$

El problema (4.10) se resuelve paramétricamente. La tabla 4.1 contiene algunos de los resultados. Para este problema particular, cuando el valor de α decrece gradualmente, el valor de β aumenta de forma regular. La mejor solución se obtiene para $\alpha^* = \beta^* = 0.67$, $z^* = (55.7, 6.35)$ con los siguientes valores para las componentes de la función de valor $\nu_1(z^*) = 599.8$, $\nu_2(z^*) = 46.7$.

Tabla 4.1

α	ν_1^*	ν_{1*}	ν_2^*	ν_{2*}	β	z_1	z_2	$\nu_1(z)$	$\nu_2(z)$
1.0	668	48	12	105	0.60	37.2	8.0	420	49.2
0.9	725.4	38.2	11.3	108	0.62	41.4	7.5	460.3	48.5
0.8	789.2	39.2	10.5	111	0.63	46.6	7.0	510.9	47.8
0.7	860.5	35.1	9.75	116	0.65	53.0	6.5	572.5	46.8
0.67	883.6	33.9	9.53	121	0.67	55.7	6.4	599.8	46.7
0.6	940.8	31.2	9.0	135	0.70	62.8	6.0	668.8	46.6
0.5	1032	27.5	8.25	157	0.75	74.3	5.5	781.4	45.4
0.4	1136	24	7.5	184	0.80	87.8	5.0	914.1	42.6
0.3	1256	20.7	6.75	215	0.85	104	4.5	1071	37.9
0.2	1397	17.6	6.0	252	0.90	123	4.0	1259	30.6.2
0.1	1564	14.4	5.25	297	0.95	146	3.5	1486	19.8
0.0	1764	12	4.5	352	1.00	174	3.0	1764	4.5

La solución $z^* = (55.7, 6.35)$ se la presentamos al decisor. Supongamos que no se encuentra satisfecho con ella. Y consideremos que con la información obtenida podemos construir el conjunto de información $K_* = G\{(.2, .8), (.6, .4)\}$. Entonces el problema (4.8), para este caso particular, es

$$\begin{aligned}
\max \quad & (\nu_1)_\alpha = 1.464 z_1 + 0.132 z_2 \\
\max \quad & (\nu_2)_\alpha = 5.732 z_1 + 3.396 z_2 \\
\text{sa:} \quad & (1+\alpha) z_1 + 2 z_2 \leqq 180 - 40\alpha \\
& z_2 \geqq 3 + 5\alpha \\
& z_1, z_2 \geqq 0 \\
& \alpha \in [0,1]
\end{aligned} \tag{4.11}$$

En la tercera fase, al aplicar el algoritmo para funciones de valor vectoriales con dos componentes obtenemos, con una sola iteración, que la solución más preferida para nuestro decisor es $z^* = (84.131, 6.35)$, al ser la solución donde las dos funciones objetivos del problema anterior alcanzan su valor máximo.

Capítulo 5

CONCLUSIONES

5.1 Conclusiones

El conjunto eficiente en la teoría de la decisión multicriterio juega un papel esencial en los procesos y métodos de solución al ser en ese conjunto donde el decisor debe hacer su elección más preferida.

La dificultad de generar tal conjunto, nos ha llevado a intentar desarrollar procedimientos que faciliten alcanzar soluciones eficientes.

Tomando como fundamento las teorías de valor y utilidad se han desarrollado en esta memoria algunos conceptos y procedimientos que ayudan a obtener tal tipo de soluciones o a su aproximación.

- La primera parte se ha dedicado a problemas en ambiente de certidumbre. Hemos comenzado caracterizando el conjunto de valor eficiente, para ello hemos demostrado propiedades necesarias y/o propiedades suficientes para que una determinada solución sea de valor eficiente. También, suponiendo que el espacio de objetivos y la función de valor vectorial verifican determinadas condiciones matemáticas, se ha obtenido una caracterización de tal conjunto. Basándonos en las propiedades anteriores, hemos definido una aproximación inferior y otra superior. Desde un punto de vista teórico se ha logrado determinar el conjunto de valor eficiente. Sin embargo, se hace observar que en situaciones reales tal conjunto puede ser demasido extenso para que el decisor sea capaz de elegir la solución más preferida, por lo que parece razonable pensar en una reducción de tal conjunto. Hemos propuesto varios procedimientos de reducción que se basan en la información sobre la estructura de preferencias revelada en un proceso interactivo por el decisor, que se ha representado, matemáticamente, mediante conos o familia de conos de información. Posteriormente se ha propuesto un sencillo método interactivo para la ayuda a la decisión, que ofrece al decisor en cada iteración soluciones de valor eficiente.

Una vez caracterizado el conjunto de valor eficiente, hemos observado que tal conjunto queda perfectamente determinado desde el punto de vista teórico. Sin embargo, en la práctica, la comprobación de si una determinada solución es de valor eficiente, puede resultar sumamente difícil. Por ello, se ha construido un conjunto que contiene a todas las soluciones de valor eficiente, que hemos llamado conjunto de aproximación. Este conjunto es de fácil obtención, ya que tan sólo son necesarios resolver tantos problemas de optimización como componentes tenga la función de valor vectorial. Dada una alternativa no resulta complicado ver si pertenece al citado conjunto. Además, se ha probado la convergencia a una solución de valor eficiente. En los casos prácticos estudiados, se ha obsevado que el conjunto de aproximación defiere poco del conjunto de valor eficiente, disminuyendo esta diferencia al aumentar la información proporcionada por el decisor. Basados en este conjunto hemos propuesto dos métodos interactivos que nos aseguran la convergencia a la solución más preferida por el decisor.

- En la segunda parte hemos comenzado desarrollando conceptos y resultados para resolver problemas de toma de decisiones multiatributo bajo riesgo discretos, que extienden las ideas y conceptos del caso de certidumbre en problemas con información parcial sobre preferencias. Proponemos un método basado en la teoría desarrollada, que utiliza una función de utilidad vectorial y la composición aditiva de sus componentes, para ayudar al decisor a identificar su estrategia más preferida. El método se ha implementado para problemas discretos y las posibles áreas de aplicación son numerosas en problemas típicos de decisión bajo riesgo con un número finito de alternativas. Posteriormente, de forma paralela a la parte anterior, se define un conjunto de aproximación al conjunto de utilidad eficiente y se demuestran propiedades para el citado conjunto, ofreciendo procedimientos interactivos, análogos a los del ambiente de certidumbre. Destaquemos que se consigue una metodología paralela para ambientes de certidumbre y riesgo lo que creemos que es un atractivo notable, teniendo en cuenta que la mayor parte de los procedimientos MCDM se han desarrollados solamente para uno de ambos ambientes.

- La tercera parte inicia la extensión de las anteriores al caso de ambiente difuso, proponiendo la utilización del conjunto de aproximación.

Tan sólo se ha desarrollado para programación lineal difusa bicreterio, sugiriendo que para el resto de los casos se puede operar de forma análoga ya que las herramientas difusas pueden permitir una mejor modelización de los problemas en los que existen objetivos y/o restricciones difusas. Se muestra la idea común, que es transformarlo en uno equivalente en ambiente de certidumbre donde ya hemos desarrollado un marco de trabajo.

5.2 Problemas abiertos y líneas de investigación futuras

Son varios los problemas que han surgido y quedan pendientes en esta memoria, algunos de los cuales citamos a continuación:

- Intentar generalizar los resultados considerando conos más generales (Ver González Pachón, 1990; González Pachón y Ríos-Insua, 1993).
- Estudiar la convergencia introduciendo medidas matemáticas adecuadas.
- En el ambiente de certidumbre definir una aproximación más robusta basada en funciones de valor asignadas parcialmente y, en el ambiente de incertidumbre considerar funciones de utilidad robustas, es decir, funciones de utilidad conocidas parcialmente y/o incluir explícitamente la noción de riesgo en el modelo.
- Los dos métodos interactivos que se consideran bajo los tres ambientes, con sus modificaciones pertinentes, pueden utilizarse con cualquier problema. Sin embargo, para problemas específicos sería recomendable de-

sarrollar algoritmos más fáciles de utilizar que aprovechen las características particulares de los problemas. En ese caso, podrían construirse mejores conjuntos de aproximación si tenemos en cuenta las propiedades particulares de cada problema.

- Creemos que la definición de conjunto de aproximación al conjunto eficiente es un buen camino para ver cuando una solución puede ser de interés para el decisor. Por tanto, pensamos que una línea futura de investigación puede ir encaminada hacia la construcción de conjuntos de aproximación que mejoren los construidos en esta memoria.

- Por último, y como aplicación práctica, sería interesante una implementación que facilite la automatización de los cálculos de los algoritmos propuestos.

Bibliografía

[1] Allais, M. (1953) Le Comportement de L'homme Rationnel Devant le Risque: Critique des Postulats et Axiomes de L'ecole Americaine, *Econométrica 21*, 4, 503-546.

[2] Allais, M. (1979) The Foundation of a Positive Theory of Choice Involving Risk and a Criticism of the Postulates and Axioms of the American School. *Expected Utility and the Allais Paradox (ed. por M. Allais y O. Hagen)*, 27-145. Reidel, Dordrecht.

[3] Armand, P. y C. Malivert (1991) Determination of the Efficient Set in Multiobjective Linear Programming, *Journal of Optimization Theory and Applications 70*, 3, 467-489.

[4] Bacopoulus, A. y I. Singer (1977) On convex Vectorial Optimization in Linear Spaces, *Journal of Optimization Theory and Applications 21*, 175-188.

[5] Barron, F. H., Dv. Winterfeldt y G. W. Fischer (1984) Empirical and Theorical Relations Ships Between Value and Utility Functions, *Acta Psychologica 56*, 233-244.

[6] Barron, F. H. (1992) Selecting a Best Multiattribute Alternative with Partial Information about Attribute Weights, *Acta Psychologica 80*, 91-103.

[7] Bellman, R. E. y Zadeh, L. A. (1973) Decision-Making in a Fuzzy Environment, *Management Science 17*, 4, 65-77.

[8] Blin, Jean-Marie (1977) Fuzzy Sets in Multiple Criteria Decision-Making, *TIMS Studies in the Management Sciences 6*, 129-146.

[9] Bowman, V. J. (1975) On the Relationship of Tchebycheff Norm and the Efficient Frontier of Multiple-Criteria Objectives, *Lecture Notes Econ. Math. Syst. 130*, 76-85.

[10] Brown, J. G. (1971) A Note on Fuzzy Sets, *Information and Control 18*, 32-39.

[11] Bryson, N. (1993) Identifying the Efficient Extreme-Point of the Trhee-Objective Linear Programming Problem, *Journal of Operational Research Society 44*, 1, 81-85.

[12] Chankong y Y. Y. Hains (1983) *Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology*, Noth-Holland, Amsterdam.

[13] Charnes, A., W. W. Cooper, J. K. DeVoe y D. B. Learner (1968) A Goal Programming Model for Media Planning, *Management Science, 14*, 8, B423-B430.

[14] Colson, G. y C. Bruyn (1989) Models and Methods in Multiple Objective Decision Making, *Mathl Comput. Modelling 10/11*, 1201-1211.

[15] Dyer, J. S. (1973) A Time-Sharing Computer Program for the Solution of the Multiple Criteria Problem, *Management Science 19*, 12, 1379-1383.

[16] Dyer, J. S. y R. K. Sarin (1979) Measurable Multi-attribute Value Functions, *Operations Research 27*, 810-822.

[17] Dyer, J. S., P. C. Fishburn, R. E. Steuer, J. Wallenius y S. Zionts (1992) Multiple Criteria Decision Making, Multiattribute Utility Theory: The Next Ten Years, *Management Science 38*, 5, 645-654.

[18] Evans, G. W. (1984) An Overview of Techniques Solving Multiobjective Mathematical Programs, *Management Science 30*, 11, 1268-1282.

[19] Fishburn, P.C. (1970) *Utility Theory for Decision Making*, Wiley.

[20] Fishburn, P.C. (1982) *The Foundations of Expected Utility*, Reidel, Dordrecht, Boston.

[21] French, S. (1986) *Decision Theory: An Introduction to Mathematics of Rationality*, Ellis Horwood, Chichester.

[22] Geoffrion, A. M. (1966) Strictly Concave Parametric Programming, Part I. Basic Theory, *Management Science 13*, 5, 244-253.

[23] Geoffrion, A. M. (1967) Strictly Concave Parametric Programming, Part II. Additional Theory and Computational Considerations, *Management Science 13*, 5, 359-370.

[24] Geoffrion, A. M. (1968) Proper Efficency and the Theory of Vector Maximization, *J. Math. Analysis Applic. 22*, 618-630.

[25] Gershon, M. (1982) The Role of Weights and Scales in the Application of Multiobjective Decision Making, *European Journal of Operational Resarch 15*, 244-250.

[26] Goicochea, A., D. R. Hansen y L. Duckstein (1982) *Multiobjective Decision Analysis with Engineering and Business Applications*, Wiley, New York.

[27] González Pachón, J. (1990) Aproximación de Estructuras de Preferencia en Problemas de Decisión Multiobjetivo, *Tesis Doctoral*, UPM, Madrid.

[28] González Pachón, J. y S. Ríos-Insua (1993) Applications of Linear Approximation Structures to the Description of Linear Preference Structures. En J. Wessels y A. P. Wierzbicki (eds), *User-Oriented Methodology and Techniques of Decision Analysis and Support*, Springeer, Berlín.

[29] Hannan, E. L. (1981) Obtaining Nondominated Priority Vectors for Multiple Objective Decisionmaking Problems with Different Combination of Cardinal and Ordinal Information, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 11*, 538-543.

[30] Hazen, G. B. (1986) Partial Information, Dominance, and Potential Optimality in Multiattribute Utility Theory, *Management Science 34*, 296-310.

[31] Hobbs, B. F. (1980) A Comparison of Wighting Methods in Power Plant Siting, *Decision Sciences 11*, 725-737.

[32] Hwang, C. L., A. S. M. Masud (1978) *Multiple Objective Decision Making: Methods and Applications*, Springer, New York.

[33] Hwang, C. L., S. R. Paidy, K. Yoon y A. S. M. Masud (1980) Mathematical Programming with Multiple Objectives: A Tutorial, *Computers Operations Research 7*, 5-31.

[34] Ignizio, J. P. (1976) *Goal Programming and its Extensions*, Heath, Lexington, Mass.

[35] Johnson, E. (1968) Studies in Multiobjective Decision Models, *Monograph No. 1, Economic Research Center, Lund, Sweden.*

[36] Keeney, R. L. y H. Raiffa (1976) *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs*, Wiley, New York.

[37] Kirkwood, C. W. y R. K. Sarin (1985) Ranking with Partial Information: A Method and an Application, *Operations Resarch 33*, 38-48.

[38] Klein, G., H. Moskowitz y A. Ravindran (1986) Comparative Evaluation of Prior Versus Progresive Articulation of Preference in Bicriterio Optimization, *Nav. Res. Logist. Q. 33*, 309-323.

[39] Korhonen, P., H. Mokowitz, J. Wallenius y S. Zionts (1986) An Interactive approach to Multiple Criteria Optimization with Multiple Decision-Makers, *Nov. Res. Logist. Q. 33*, 589-602.

[40] Krantz, D. H., R. D. Luce, P. Suppes y A. Tversky (1971) *Foundations of Measurement, Vol. I*, Academic Press, New York.

[41] Kuhn, H. W. y A. W. Tucker (1951) Nonlinear Programming, *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics*, 481-492. Univ. de california Press, Berkeley.

[42] Lazimy, R. (1986) Interactive Relaxation Method for a Broad Class of Integer and Continuous Nonlinear Multiple Criteria Problems, *J. Math. Analysis Applic. 116*, 553-573.

[43] Lee, S. M. (1974) *Goal Programming for Decision Analysis*, Auerbach, Philadelphia.

[44] Logical Decision (1991) *Multi-Measure Decision Analysis Software, V. 2.0*, 1014 Wood Lily Dr, Golden, CO.

[45] Malakooti, B. (1985) Assessment Through Strength of Preference, *Large Scale Systems 8*, 169-182.

[46] Malakooti, B. y A. Ravindran (1985) An Interactive Paired Comparison Simplex Method for MOLP Problems, *Ann. Ops. Res. 5*, 575-597.

[47] Malakooti, B. (1989) Ranking Multiple Criteria Alternatives with Half-Space, Convex, and Non-Convex Dominating Cones: Quasi-Concave and Quasi-Convex Multiple Attribute Utility Functions, *Compututers Operations Research 16*, 2, 117-127.

[48] Marcotte, O. y R. M. Soland (1985) An Interactive Branch-and-Bound Algorithm for Multiple Criteria Optimization, *Management Science 32*, 1, 61-75.

[49] Mareschal, B. (1988) Weight Satability Intervals in Multicriteria Decision Aid, *European Journal of Operational Research 33*, 54-64.

[50] McCord, M. R. y R. Neufville (1983) Fundamental Deficiency of Expected Utility Decision Analysis, *Multi-Objective Decision Making (ed. por S. French et al.)*, 279-306. Academic Press, London.

[51] Pollack, R. A. (1967) Additive von Neumann and Morgenstern Utility Functions, *Econometrica 35*, 485-494.

[52] Prasad, S. Y. y M. H. Karwan (1992) A Note on Solving Bicriteria Linear Programming Problems using Single Criteria Software, *Computers Operations Research 19*, 2, 169-173.

[53] Raiffa, H. (1969) *Preferences for Multiattributed Alternatives*, Santa Mónica, CA: The Rand Corporation (RM-5868).

[54] Raiffa, H. (1982) *The Art & Science of Negociation*, Harvard University Press, Cambridge, MA.

[55] Rietveld, P. (1980) *Multiple Objective Decision Methods and Regional Planning*, Noth-Holland, Amsterdam.

[56] Ríos-Insua, S. (1980) Decisiones Multicriterio con Ordenaciones Parciales, *Tesis Doctoral*, Editorial de la Universidad Complutense, Madrid.

[57] Ríos-Insua, S. (1981) Método Secuencial de Optimización de Decisiones con Criterios Múltiples, *Real Academia de Ciencias exactas, Físicas y Naturales, de Madrid, LXXV, 5.*

[58] Ríos, S. y S. Ríos-Insua (1986) Vector Value Function and Vector Distance Methods in Multicriteria Optimization, presentado en *Int. Conf. Vector Optimization*, Darmstadt.

[59] Ríos, S., S. Ríos-Insua y M. J. Ríos Insua (1989) *Procesos de Decision Multicriterio*, EUDEMA.

[60] Ríos-Insua, S. (1990) Decisión Basada en Funciones de Valor Vectorial, *Real Academia de Ciencias exactas, Físicas y Naturales, de Madrid, LXXXIV, 2.*

[61] Ríos, S. (1994) *Decision Theory and Decision Analysis: Trends and Challenges,* Kluwer A. P.

[62] Ríos, S., J. G. Pachón y A. Mateos (1994) A Method of Multiobjective Decision Making Using a Vector Value Function, *Qüestiio 18,* 2, 153-172.

[63] Ríos, S., A. Mateos y C. Bielza (1994) La Teoría de la Utilidad en Inteligencia Artificial, en Maravall, D. y Maravall Gómez-Allende, D. (eds) *Fronteras de la Informática*, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

[64] Ríos Insua, D. (1990) *Sensitivity Analysis in Multiobjective Decision Making*, Springer Verlag.

[65] Ríos Insua, D. (1994) Ambiguity, Imprecision and Sensitivity in Decision Theory, en J. P. Vilaplana y M. Puri (eds) *Recent Advances in Statistics and Probability, VSP*, 219-232.

[66] Roberts, F. S. (1972) What If Utility Function do not Exists?, *Theory and Decision 3,* 126-139.

[67] Rosenthal, R. E. (1985) Concepts, Theory and Techniques: Principles of Multiobjective Optimization, *Decision and Science 16,* 133-152.

[68] Roy, B. (1968) Classement et Choix en Presence de Points de Vue Multiples (la Méthode ELECTRE). *Revue Fr. Autom. Inf. Rech. Opér. 8,* 6, 57-75.

[69] Roy, B. (1971) Problems and Methods with Multiple Objective Functions, *Mathematical Programming. 1,* 239-266.

[70] Sarin, R. K. (1977) Interactive Evaluation and Bound Procedure for Selecting Multi-Attribute Alternatives, en M. Starr y M. Zeleny (eds), *Multiple Criteria Decision Making*, Noth-Holland, New York.

[71] Savage, L. J. (1954) *The Foundations of Statistics* Wiley, New York.

[72] Savage, L. J. (1972) *The Foundations of Statistics (segunda edición)*, Dover, New York.

[73] Schoemaker, P. J. H. y C. C. Waid (1982) An Experimental Comparison of Different Approaches to Determining Weights in Additive Utility Models, *Mangement Science 28*, 182-196.

[74] Shin, W. S. y A. Ravindran (1988) Interactive Multiple Objective Mathematical Programming (MOMP): A Survey, *IE School Working Paper No. 87-19*, School of Industrial Engineering, Univ. de Oklahoma, Norman.

[75] Shin, W. S. y A. Ravindran (1991) Interactive Multiple Objective Optimization: Survey I - Continuous Case, *Computers Operations Research 18*, 1, 97-114.

[76] Soland, R. M. (1979) Multicriteria Optimization: A Genearal Characterization of Efficient Solutions, *Decision Sciences 10*, 1, 26-38.

[77] Stanley, E. y R. J. Li (1993) Fuzzy Multiple Objective Programming and Compromise Programming with Pareto Optimum, *Fuzzy Sets and Systems 53*, 275-288.

[78] Steuer, R. E. (1986) *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Application*, Wiley, New York.

[79] Suppes, P. y M. Winet (1955) An Axiomatization of Utility Based on the Notion of Utility Differences, *Management Science*, 1, 259-270.

[80] Tamura, K. (1976) A Method for Constructing the Polar Cone of a Polyhedar Cone, *JOTA 19*, 4, 547-564.

[81] Taner, O. V. y M. M. Köksalan (1991) Experiments and an Improved Method for Solving the Discret Alternative Multiple-Criteria Problem, *Journal of the Operational Research Society 42*, 383-391.

[82] Vanderpooten, D. (1989) The Interactive Approach in MCDA: A Technical Framework and Some Basic Conceptions, *Math. Comput. Modelling 12*, 10/11, 1213-1220.

[83] Vanderpooten, D. y P. Vincke (1989) Description and Analysis of Some Representative Interactive Multicriteria Procedures, *Math. Comput. Modelling 12*, 10/11, 1221-1238.

[84] Von Neumann, J. y O. Morgenstern (1944) *Theory of Games and Economic Behavior*, Priceton University Press, New York.

[85] Von Neumann, J. y O. Morgenstern (1947) *Theory of Games and Economic Behavior*, Priceton, NJ:Priceton University Press, New York.

[86] Von Winterfeldt, D. (1980) Additivity and Expected Utility in Risky Multiattribute Preferences, *Journal of Mathematical Psychology 21*, 66-82.

[87] Weber, M. (1987) Decision Making with Incomplete Information, *European Journal of Operational Research 28*, 44-57.

[88] White III, C. C., A.P. Sage y S. Dozono (1984) A Model of Multiattribute Decision Making under Uncertainty, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 14*, 223-229.

[89] White, D. J. (1986) *Operational Research*, Wiley, New York.

[90] Yu, P. L. (1973) Introduction to Domination Structures in Multicriteria Decision Problems, *Multiple Criteria Decision Making*, 269-306. Univ. of South Carolina Press, Columbia.

[91] Yu, P. L. (1974) Cone Convexity, Cone Extreme Points and Nondominated Solutions in Decision Problems with Multiple Objectives, *Journal Optimization Theory and Applications 14*, 319-377.

[92] Yu, P. L. (1985) *Multiple Criteria Decision Making*, Plenum Press, New York.

[93] Zanakis, S. H., y S. K. Gupta (1985) A Categorized bibliographic Survey of Goal Programming, *Omega 13*, 211-222.

[94] Zeleny, M. (1982) *Multiple Criteria Decision Making*, McGraw-Hill, New York.

[95] Zimmerman, H.-J. (1983) Using Fuzzy Sets in Operational Research, *European Journal of Operational research 13*, 201-216.

[96] Zionts, S. y J. Wallenius (1976) An Interactive Programming Method for Solving the Multiple Criteria Problem, *Management Science 22*, 6, 652-663.

[97] Zionts, S. (1979) A Survey of Multiple Criteria Integer Programming Methods, *Ann. Discr. Math. 5*, 389-398.

[98] Zionts, S. y J. Wallenius (1983) An Interactive Multiple Objective Linear Programming Method for a Class of Underlying Nonlinear Utility Functions, *Management Science 29*, 519-529.