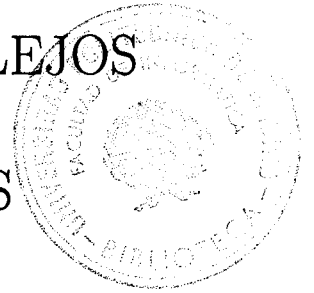


UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Facultad de Informática

Departamento de Inteligencia Artificial

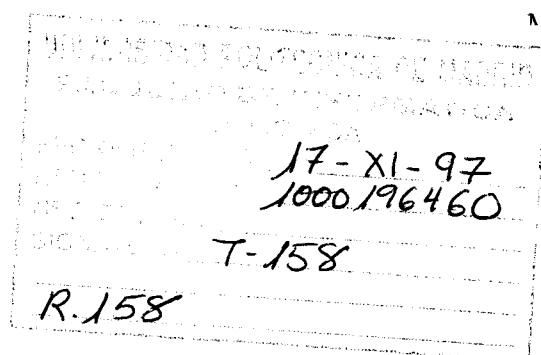
CONTRIBUCIONES AL ANÁLISIS  
DE PROBLEMAS SUPERCOMPLEJOS  
DE TOMA DE DECISIONES



M<sup>a</sup> Concepción Bielza Lozoya

Director: David Ríos Insua

Madrid, 1996



# Contribuciones al análisis de problemas supercomplejos de toma de decisiones

M<sup>a</sup> Concepción Bielza Lozoya  
Departamento de Inteligencia Artificial  
Facultad de Informática  
Universidad Politécnica de Madrid

## Resumen

Los fundamentos de la Teoría de la Decisión Bayesiana proporcionan un marco coherente en el que se pueden resolver los problemas de toma de decisiones. La creciente disponibilidad de ordenadores potentes está llevando a tratar problemas cada vez más complejos con numerosas fuentes de incertidumbre multidimensionales; varios objetivos conflictivos; preferencias, metas y creencias cambiantes en el tiempo y distintos grupos afectados por las decisiones. Estos factores, a su vez, exigen mejores herramientas de representación de problemas; imponen fuertes restricciones cognitivas sobre los decisores y conllevan difíciles problemas computacionales. Esta tesis tratará estos tres aspectos.

En el Capítulo 1, proporcionamos una revisión crítica de los principales métodos gráficos de representación y resolución de problemas, concluyendo con algunas recomendaciones fundamentales y generalizaciones.

Nuestro segundo comentario nos lleva a estudiar tales métodos cuando sólo disponemos de información parcial sobre las preferencias y creencias del decisor. En el Capítulo 2, estudiamos este problema cuando empleamos diagramas de influencia (DI). Damos un algoritmo para calcular las soluciones no dominadas en un DI y analizamos varios conceptos de solución *ad hoc*.

El último aspecto se estudia en los Capítulos 3 y 4. Motivado por una aplicación de gestión de embalses, introducimos un método heurístico para resolver problemas de decisión secuenciales. Como muestra resultados muy buenos, extendemos la idea a problemas secuenciales generales y cuantificamos su bondad.

Exploramos después en varias direcciones la aplicación de métodos de simulación al Análisis de Decisiones. Introducimos primero métodos de Monte Carlo para aproximar el conjunto no dominado en problemas continuos. Después, proporcionamos un método de Monte Carlo basado en cadenas de Markov para problemas con información completa con estructura general: las decisiones y las variables aleatorias pueden ser continuas, y la función de utilidad puede ser arbitraria. Nuestro esquema es aplicable a muchos problemas modelizados como DI.

Finalizamos con un capítulo de conclusiones y problemas abiertos.

# Contributions to the solution of supercomplex decision problems

M<sup>a</sup> Concepción Bielza Lozoya  
Departamento de Inteligencia Artificial  
Facultad de Informática  
Universidad Politécnica de Madrid

## Abstract

The foundations of Bayesian Decision Theory provide a coherent framework in which decision making problems may be solved. With the advent of powerful computers and given the many challenging problems we face, we are gradually attempting to solve more and more complex decision making problems with high and multidimensional uncertainty, multiple objectives, influence of time over decision tasks and influence over many groups. These complexity factors demand better representation tools for decision making problems; place strong cognitive demands on the decision maker judgements; and lead to involved computational problems. This thesis will deal with these three topics.

In recent years, many representation tools have been developed for decision making problems. In Chapter 1, we provide a critical review of most of them and conclude with recommendations and generalisations.

Given our second query, we could wonder how may we deal with those representation tools when there is only partial information. In Chapter 2, we find out how to deal with such a problem when it is structured as an influence diagram (ID). We give an algorithm to compute nondominated solutions in ID's and analyse several *ad hoc* solution concepts.

The last issue is studied in Chapters 3 and 4. In a reservoir management case study, we have introduced a heuristic method for solving sequential decision making problems. Since it shows very good performance, we extend the idea to general problems and quantify its goodness.

We explore then in several directions the application of simulation based methods to Decision Analysis. We first introduce Monte Carlo methods to approximate the nondominated set in continuous problems. Then, we provide a Monte Carlo Markov Chain method for problems under total information with general structure: decisions and random variables may be continuous, and the utility function may be arbitrary. Our scheme is applicable to many problems modeled as IDs.

We conclude with discussions and several open problems.

Dedicada a mi madre y a Javi.  
'*Mis preferencias sí son precisas...*'

# Agradecimientos

Finalizada la tesis, es el momento de dirigirme a muchas personas para darles las gracias. En primer lugar, a David Ríos Insua, director de esta tesis, quien con su gran capacidad de trabajo y su mente inquieta me ha estimulado enormemente durante estos años. Le agradezco su apoyo constante y su paciencia así como el haberme introducido en este campo de investigación, en el que aún me queda mucho camino por recorrer. Me alegraría saber que está satisfecho de los logros obtenidos.

Entre los compañeros de departamento, debo destacar al Grupo de Análisis de Decisiones. Muchos de los seminarios que organizamos me sirvieron para discutir algunas ideas. Especialmente, no puedo olvidar el apoyo de Sixto Ríos Insua. Supongo que fue aquella conferencia que dió en la Real Academia la que marcó el comienzo de esta tesis. También debo agradecer el apoyo que he recibido de Jacinto Martín: me ha prestado su colaboración e ideas siempre que lo he necesitado. Le agradezco también su ayuda en alguna revisión. Jacinto González, Alfonso Mateos y Maribel Rodríguez me dieron consejos útiles en muchos momentos.

Una persona con la que he aprendido mucho es con Prakash Shenoy, de la Universidad de Kansas. Creo que nuestras interminables discusiones han conseguido por un lado, consolidar su teoría sobre redes de evaluación, y por otra, ayudarme a profundizar de forma crítica en los distintos métodos gráficos del Análisis de Decisiones. Su estancia breve en la Facultad de Informática fue provechosa. Debo recordar también que Angel Alberite tomó parte en estos diálogos durante una temporada, a raíz de lo cual culminó su Proyecto de Fin de Carrera.

Agradezco a Peter Müller, de la Universidad de Duke, sus ideas sobre simulación en Análisis de Decisiones. Todos los obstáculos eran más llevaderos con su sentido del humor, el cual nunca le faltó en los meses que estuvo aquí entre nosotros. Otros investigadores contribuyeron directa o indirectamente: Zvi Covaliu, Jim Smith, Andrzej Salewicz. A otros les agradezco los trabajos que me han enviado. Agradezco además el apoyo a esta investigación de la CICYT, Fundación Iberdrola y NATO.

No puedo terminar sin nombrar a la parte que, aunque ajena a mi vida profesional, ha sabido enriquecer con su cariño esta tesis. Me refiero a mis

padres, mis hermanas, mi abuela, y sobre todo, a Javi. A él le debo los momentos más afectivos, una fuente inagotable de ánimos y muchas sugerencias matemáticas e informáticas. Otras muchas amistades mostraron gran interés por verme terminar esta tesis. Quizá fuera para poder por fin quedar conmigo.

A todos, muchas gracias.

# Índice

<b>0</b>	<b>Introducción</b>	<b>xi</b>
0.1	Motivación y objetivos . . . . .	xi
0.2	Estructura . . . . .	xiii
<b>1</b>	<b>Una revisión crítica de métodos gráficos en Análisis de Decisiones</b>	<b>1</b>
1.1	Introducción . . . . .	1
1.2	Elementos comunes a todos los métodos . . . . .	2
1.3	Operaciones comunes a todos los métodos . . . . .	4
1.4	Ejemplo: problema del reactor . . . . .	5
1.5	Asimetrías en problemas de decisión . . . . .	7
1.6	Árboles de decisión . . . . .	10
1.6.1	Representación y solución con árboles de decisión . . . . .	10
1.7	Diagramas de influencia . . . . .	12
1.7.1	Representación con DI asimétricos . . . . .	13
1.7.2	Solución con DI asimétricos . . . . .	17
1.8	Diagramas de decisión secuenciales . . . . .	23
1.8.1	Representación con DDS . . . . .	23
1.8.2	Solución con DDS . . . . .	27

1.9	Redes de evaluación . . . . .	30
1.9.1	Representación con RE . . . . .	30
1.9.2	Solución con RE . . . . .	34
1.10	Comparación de los métodos . . . . .	40
1.11	Conclusiones y recomendaciones . . . . .	48
<b>2</b>	<b>Diagramas de influencia bajo información parcial</b>	<b>51</b>
2.1	Introducción . . . . .	51
2.2	Diagramas de influencia bajo información parcial . . . . .	53
2.3	Alternativas no dominadas en DI . . . . .	56
2.3.1	Transformaciones en el diagrama . . . . .	56
2.3.2	Análisis de un problema . . . . .	62
2.3.3	Obtención de todas las estrategias no dominadas mediante el algoritmo de evaluación de DIIP . . . . .	64
2.3.4	Reglas para la eliminación eficiente de un nodo de decisión . . . . .	65
2.3.5	Pérdidas potenciales en utilidad esperada . . . . .	68
2.3.6	Recuperación de la estrategia asociada a una u.e. de la tabla final de $v$ . . . . .	69
2.3.7	Evaluación de los rangos de las utilidades esperadas . . . . .	71
2.4	Criterios adicionales . . . . .	73
2.4.1	Criterios adicionales y relación de dominancia . . . . .	76
2.4.2	Criterios adicionales y programación dinámica . . . . .	78
2.5	Conclusiones . . . . .	84
<b>3</b>	<b>Un heurístico miope para la resolución de problemas de decisión secuenciales</b>	<b>85</b>



3.1	Introducción a problemas de decisión secuenciales . . . . .	85
3.2	Una aplicación a gestión de embalses . . . . .	88
3.2.1	Situación actual en la gestión de embalses . . . . .	88
3.2.2	Una propuesta para la gestión de embalses con métodos Bayesianos . . . . .	89
3.2.3	Aplicación del heurístico a un caso real . . . . .	90
3.3	Formalización del heurístico . . . . .	115
3.3.1	Idea subyacente . . . . .	115
3.3.2	Descripción formal del heurístico . . . . .	116
3.4	Aplicación a diagramas de influencia . . . . .	118
3.5	Algunos casos de evaluación del heurístico . . . . .	126
3.6	Conclusiones . . . . .	133
<b>4</b>	<b>Métodos de simulación en Análisis de Decisiones Bayesiano</b>	<b>134</b>
4.1	Introducción . . . . .	134
4.2	Aproximación Monte Carlo de conjuntos no dominados . . . . .	137
4.2.1	Procedimiento general . . . . .	139
4.2.2	Programación multiobjetivo . . . . .	146
4.2.3	Análisis Bayesiano robusto . . . . .	154
4.3	Aproximación Monte Carlo de soluciones óptimas . . . . .	162
4.3.1	Procedimiento básico . . . . .	163
4.3.2	Muestrear de la distribución artificial . . . . .	169
4.3.3	Ejemplos . . . . .	180
4.4	Conclusiones . . . . .	184
<b>5</b>	<b>Conclusiones y problemas abiertos</b>	<b>187</b>

5.1 Conclusiones . . . . .	187
5.2 Problemas abiertos . . . . .	189

# Introducción

## 0.1 Motivación y objetivos

El análisis y la evaluación coherente de problemas de decisión a escala global conlleva necesariamente la consideración de varias fuentes de incertidumbre, objetivos múltiples y altamente conflictivos, información que afecta a decisiones futuras debido al carácter secuencial de estos problemas, presencia de variables continuas de alta dimensión, preferencias que evolucionan en el tiempo y la integración de las opiniones de grupos distintos que participan y/o se ven afectados por el problema. Nos referiremos a este tipo de problemas como problemas supercomplejos. El paradigma Bayesiano del Análisis de Decisiones proporciona el único marco que permite tratar tales problemas de forma unificada. Sin embargo, hasta hace poco esta aproximación se ha limitado a problemas relativamente sencillos, debido a barreras técnicas y computacionales. En años recientes, se ha experimentado una revolución técnica que abre la posibilidad de desarrollar modelos Bayesianos de gran escala. Esta tesis proporciona contribuciones metodológicas motivadas por problemas de

decisión supercomplejos.

La primera fase en la resolución de un problema de decisión es su estructuración y representación. Recientemente, se han introducido diversas herramientas de representación (diagramas de influencia (DI), diagramas de decisión,...) que facilitan la estructuración del mismo, al centrar la atención sobre los aspectos cualitativos del problema. Shenoy (1994a) proporciona una revisión de tres de esas técnicas en problemas simétricos. Sin embargo, los problemas complejos de decisión tienen como rasgo esencial su asimetría, cuestión sobre la que apenas se ha tratado en la literatura. Éste es el primer problema que estudiaremos:

Una vez estructurado el problema, debemos proceder a modelizar las preferencias y creencias del decisor. En problemas complejos, cabe esperar que, al menos en las fases iniciales de análisis, debamos modelizar imprecisión en los juicios del decisor, ver Ríos Insua (1990), que motiva los desarrollos recientes en análisis Bayesiano robusto, ver Berger (1994). Una cuestión natural es estudiar computacionalmente las herramientas anteriores en el caso de que haya imprecisión en sus entradas, modelizada mediante clases de distribuciones de probabilidad y clases de funciones de utilidad. Éste será nuestro segundo objetivo.

Un aspecto importante de los DI es que modelizan el carácter dinámico y secuencial de los problemas de decisión. En problemas con conjuntos de estados, consecuencias y alternativas continuos, es conocido que los métodos de programación dinámica estocástica, implícitamente utilizados en la evaluación de DI, son extremadamente ineficientes computacionalmente, ya que conducen a problemas (de optimización e integración) muy costosos, Lamond et al. (1995). Proponemos dos tipos de soluciones. La primera es utilizar algún método heurístico que disminuya la complejidad computacional y que siendo intuitivo, nos conduzca a soluciones aproximadamente óptimas. La segunda es utilizar simulación. Ambas opciones están presentando un

enorme interés en Análisis de Decisiones en los últimos años. Abordaremos este problema en último lugar.

## 0.2 Estructura

Estudiamos en distintas direcciones los tres problemas mencionados, de forma que la memoria queda estructurada como sigue.

En el Capítulo 1 realizamos una revisión crítica sobre la aplicabilidad de cuatro técnicas principales de representación y solución de problemas de decisión: árboles de decisión, diagramas de influencia (Shachter, 1986), redes de evaluación (Shenoy, 1995) y diagramas de decisión secuenciales (Covaliu y Oliver, 1994). La conclusión básica es que todos ellos, aún teniendo abundantes elementos en común, capturan las asimetrías de los problemas de distinta forma. Por ello, sólo algunos resultan más ventajosos en la mayoría de las situaciones que se presentan. Analizamos este aspecto, recomendando el uso de los DI extendidos aquí al caso de función de utilidad separable, como herramienta más capaz para estos propósitos.

En el Capítulo 2, consideramos el segundo problema de que se dé imprecisión en los juicios del decisor cuando la herramienta empleada sea un diagrama de influencia, aunque las ideas se extienden a los otros métodos de representación. Para ello, comenzamos proporcionando un método para calcular soluciones no dominadas en DI bajo información parcial. Después, estudiamos la reducción del tamaño de los conjuntos no dominados mediante la introducción de criterios adicionales tomados del Análisis de Decisiones bajo incertidumbre, como el criterio de Laplace, maximin... Este trabajo puede verse como un primer paso para proporcionar un marco para el análisis de sensibilidad en diagramas de influencia: al permitir datos de entradas en forma paramétrica, se exploran las consecuencias de perturbaciones sobre las proba-

bilidades y utilidades sobre los resultados del análisis. Más aún, se analizan aspectos relacionados con la tarea de encontrar dónde será necesaria información adicional.

Respecto al problema computacional planteado en tercer lugar, una posibilidad es apelar a heurísticos, un tema de reciente interés en Análisis de Decisiones. En el Capítulo 3, estudiamos un heurístico para la resolución de problemas de decisión secuenciales. Esencialmente, el heurístico resuelve el problema en dos fases. En la primera, encuentra una trayectoria de referencia a través de una versión determinística del problema. En la segunda, mediante un procedimiento hacia adelante, se resuelven problemas monoetápicos que incluyen principalmente un término que minimiza la desviación del estado final en esa etapa al estado de referencia. El uso de tal heurístico viene motivado por una aplicación a gestión de embalses que además sirve para ilustrar el tipo de problemas supercomplejos que nos interesan. En este problema real, se quiere encontrar las reglas que especifiquen qué cantidad de agua debe soltarse en cada instante de tiempo (mes) para diferentes propósitos: producción de energía, control del nivel del embalse..., sujeto a la dinámica del sistema y a las posibles restricciones sobre los controles. Definimos los controles de forma más flexible que como se viene haciendo actualmente, utilizamos modelos de predicción dinámica para las entradas al embalse y funciones de utilidad multiobjetivo para las preferencias del gestor. También utilizamos técnicas de simulación para la maximización de la utilidad esperada. Dada la bondad del heurístico en este problema, lo estudiamos formalmente para problemas de decisión secuenciales generales y después lo especificamos para diagramas de influencia. En este caso, se parte de problemas expresados en forma extensiva y con función de utilidad separable. Se aplican entonces las dos fases del heurístico, requiriendo a menudo en la segunda fase el cálculo de nuevas distribuciones que puede hacerse mediante propagación de nodos y/o simulación.

Otra posibilidad es utilizar métodos de simulación para resolver problemas de decisión. Los métodos de simulación han tenido un enorme impacto en Inferencia Bayesiana (ver Tierney, 1994). Sin embargo, su influencia ha sido relativamente limitada en Análisis de Decisiones, ver Shao (1989) y Jenzarli (1995). En el Capítulo 4 proponemos algunos métodos de simulación para la resolución de problemas de decisión, en el contexto de los Capítulos 2 y 3. En la primera parte, consideramos problemas continuos de decisión con imprecisión en las preferencias y creencias. Para ello, proporcionamos un método para aproximar el conjunto eficiente. Éste deduce la relación de dominancia entre pares de alternativas mediante la utilización de un método de Monte Carlo con muestreo por importancia para aproximar las integrales que resultan de tal relación. El método, de hecho, podría aplicarse al caso de precisión, pero equivaldría a un método de búsqueda aleatoria pura. Por ello, para tal caso proporcionamos un método de Monte Carlo basado en cadenas de Markov, válido para problemas generales de decisión, y que especificamos para problemas de decisión modelizados mediante diagramas de influencia en los que se admiten distribuciones de probabilidad continuas en los nodos de azar, variables de decisión continuas y funciones de utilidad arbitrarias. La búsqueda de la decisión óptima equivale a encontrar la moda de la marginal en el espacio de alternativas de una distribución artificial definida en el espacio producto de alternativas y de estados. Muestrear de esa distribución es sencillo simulando una cadena de Markov cuya distribución de equilibrio es la distribución artificial.

Concluimos con un capítulo con comentarios finales y problemas abiertos.

# Capítulo 1

## Una revisión crítica de métodos gráficos en Análisis de Decisiones

### 1.1 Introducción

El Análisis de Decisiones (AD) estudia el tratamiento de los problemas de decisión bajo incertidumbre. Resolver estos problemas implica encontrar la política óptima que indique qué decisiones tomar en cada momento, dependiendo de lo que se conozca. Desde una perspectiva bayesiana, el criterio de optimalidad a utilizar es el de máxima utilidad esperada respecto a la distribución conjunta de todas las variables aleatorias del problema. El análisis y la evaluación coherente de problemas de decisión a gran escala presenta numerosas complicaciones, citadas en la introducción de esta memoria, que han llevado a resolver tan sólo problemas relativamente sencillos. En los últimos años, la disponibilidad creciente de ordenadores potentes ha reanimado el interés por resolver problemas supercomplejos de toma de decisiones.

La primera fase en la resolución de un problema de decisión es la estructuración y resolución del problema. Dos son los objetivos esenciales: por una parte, mostrar



de forma clara los elementos del problema (alternativas, incertidumbres, objetivos, información disponible) y sus relaciones, facilitando la comunicación entre el decisor y el analista. Por otra parte, implementar de forma sencilla y eficiente el proceso de solución.

Todas las herramientas recientemente introducidas con tal fin (diagramas de influencia, redes de evaluación, diagramas de decisión,...) se han diseñado principalmente para el tratamiento de problemas simétricos. Además, no existen estudios comparativos críticos de los distintos métodos, especialmente en lo que se refiere a problemas de decisión asimétricos, que son más habituales en la práctica. Éste es precisamente el propósito de este capítulo, que hace además una serie de recomendaciones sobre estas técnicas para la investigación futura, necesarias para hacer avanzar el estado del arte en este campo. También se hace una generalización: se extiende uno de los métodos, los DI asimétricos, al caso de función de utilidad separable. Las ideas se ilustran con un ejemplo. Un resumen de este capítulo puede verse en Bielza y Shenoy (1996).

## **1.2 Elementos comunes a todos los métodos**

La fase de estructuración y representación de un problema puede considerarse una etapa del ciclo del AD en la que se expresa conocimiento cualitativo del problema. Damos primero los elementos comunes de los métodos que analizaremos:

- La representación gráfica suele realizarse mediante un diagrama en forma de árbol o de grafo. Este último resulta más compacto. (Un árbol es un tipo de grafo, pero distinguiremos el árbol del resto de grafos por conveniencia).

- Las variables del problema se representan mediante nodos con distinta forma geométrica:
  - Las variables de decisión, mediante nodos rectangulares.
  - Las variables aleatorias (v.a.) o de azar, mediante nodos circulares u ovales. Si son determinísticas, tendrán bordes dobles.
- Las restricciones de información sobre las variables del problema suelen representarse mediante arcos (en los grafos) o por su posición relativa (en los árboles).
- Estas restricciones revelan una relación de precedencia en el tiempo entre las variables, que suele ser un orden parcial. En consecuencia, existen varias secuencias posibles de eliminación de nodos o secuencias de borrado (hacia atrás) en la etapa de resolución del problema, para todos los métodos.
- El modelo para la función de utilidad conjunta difiere de unos métodos a otros, sobre todo en cuanto a cómo representar su naturaleza separable. Pero podemos afirmar que los grafos exponen la utilidad (esperada), mediante un nodo con forma de rombo, llamado nodo *de valor*, y los arcos conectados con él representan las variables que condicionan esa utilidad esperada. Los árboles representan la utilidad (esperada) en los nodos terminales.

Por simplicidad, no haremos normalmente distinción entre un nodo y su variable asociada.

Para proceder a la solución del problema de decisión, se ha de representar antes el conocimiento cuantitativo del problema. Aquí también encontramos elementos comunes:

- Los posibles valores que toma cada variable se incluyen explícitamente en cada rama que emerge de los nodos (en los árboles) o bien se incluyen en tablas separadas del diagrama (en los grafos).
- La eficiencia de todos los métodos depende básicamente de:
  - la estructura particular del problema:
    - \* cuántas variables hay en total
    - \* cuántas configuraciones tiene cada variable
    - \* cuántas variables hay en los dominios de las funciones (probabilidades y utilidades), es decir, si el modelo de utilidad y de probabilidad está muy descompuesto y cómo.
    - \* las restricciones de información
  - la secuencia de borrado elegida
  - el grado de asimetría

La forma de capturar las asimetrías y de mostrar la factorización del modelo de probabilidad conjunta, difiere de unas técnicas a otras.

### 1.3 Operaciones comunes a todos los métodos

En el proceso de solución, a pesar de que cada método tiene su propio algoritmo, destacamos las siguientes operaciones comunes:

- La eliminación de un nodo de azar se realiza mediante el cálculo de la utilidad esperada respecto a la distribución de probabilidad almacenada en ese nodo.
- La eliminación de un nodo de decisión se realiza mediante maximización, respecto a esa variable, de la utilidad esperada.

- La actualización de creencias se realiza mediante la aplicación del teorema de Bayes.
- Se aprovechan las propiedades especiales de los operadores esperanza y maximización cuando se aplican a funciones (de utilidad esperada) separables.
- El proceso de eliminación de nodos se basa esencialmente en métodos recursivos de programación dinámica (hacia atrás).
- La complejidad del algoritmo de solución es, en el peor de los casos, exponencial en el número de variables del problema. Esto no es sorprendente pues resolver un problema de decisión es un problema NP-completo (Cooper, 1990).

El realizar estas operaciones mediante computación local, con un número mínimo de variables implicadas, y ejecutar el algoritmo correspondiente con un número mínimo de cálculos y un mínimo espacio de ocupación de memoria, diferencia a unos métodos de otros.

## 1.4 Ejemplo: problema del reactor

En esta sección describimos un problema de decisión asimétrico que llamaremos *problema del reactor*, con el que ilustraremos nuestra discusión. Es una versión modificada del descrito en Covaliu y Oliver (1994). La modificación se refiere a cómo se especifica el modelo de probabilidad y de utilidad. En nuestra versión, se requiere una revisión de las probabilidades durante el proceso de solución y, además, la función de utilidad conjunta viene dada en forma factorizada.

Una compañía eléctrica debe decidir ( $D_2$ ) si construye un reactor de diseño convencional ( $c$ ) o de diseño avanzado ( $a$ ). El reactor avanzado conlleva más riesgo pero, en caso de éxito, proporciona más beneficios (ver Figura 1.1). A partir de

experiencia pasada, se estima que un reactor convencional ( $C$ ) tiene un 98% de probabilidad de no fallar ( $ce$ ) una vez construido y un 2% de fallar ( $cf$ ). Por otra parte, un reactor avanzado ( $A$ ) tiene una probabilidad a priori del 66% de no fallar ( $ae$ ), del 24.4% de tener un accidente de importancia leve ( $al$ ), y del 9.6% de tener un accidente de importancia mayor ( $am$ ).

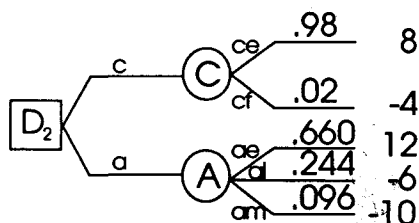


Figura 1.1: Probabilidades y utilidades (beneficios en millones de \$), para el problema del reactor.

Antes de tomar esta decisión, la compañía puede realizar un test ( $D_1 = t$ ), con coste un millón de dólares, sobre las componentes críticas del reactor de diseño avanzado, que reducirá la incertidumbre sobre este tipo de reactor. Puede no hacerse el test ( $D_1 = nt$ ). Los resultados del test ( $T$ ) se pueden clasificar en malos ( $m$ ), buenos ( $b$ ), o excelentes ( $e$ ) y están muy relacionados con el éxito o fracaso del reactor avanzado. La Figura 1.2 describe un modelo probabilístico causal para  $A$  y  $T$ . Si los resultados del test son malos, la opción avanzada no es viable y se construirá un reactor convencional. La opción  $D_1 = hn$  significará que la compañía no va a hacer nada.

Suponemos que las consecuencias de cada accidente posible son conocidas y se pueden expresar en términos monetarios. El objetivo es maximizar el valor monetario neto esperado.

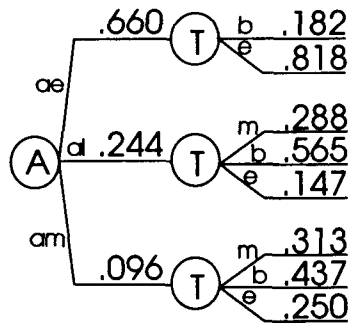


Figura 1.2: Un modelo causal probabilístico para  $A$  y  $T$  en el problema del reactor.

### 1.5 Asimetrías en problemas de decisión

Los problemas simétricos son aquéllos que contienen escenarios con las mismas variables y en la misma secuencia. Los problemas asimétricos son mucho más habituales en la práctica, y sin embargo, apenas se les ha prestado atención en la literatura. De hecho, la mayoría de las técnicas creadas se adaptan mejor a los problemas simétricos y manejan los asimétricos convirtiéndolos en simétricos.

Los siguientes ejemplos de escenarios muestran la asimetría en nuestro problema:

$$D_1 = hn$$

$$D_1 = nt, \quad D_2 = c, \quad C = ce$$

$$D_1 = t, \quad T = b, \quad D_2 = c, \quad C = ce$$

$$D_1 = t, \quad T = b, \quad D_2 = a, \quad A = ae$$

Resumimos a continuación las principales dificultades que surgen ante situaciones asimétricas y cómo pueden resolverse:

1. Los métodos que representan los datos en forma de tabla, deben simetrizar las funciones asimétricas, definiendo un conjunto común de valores para todos los escenarios condicionantes. En el problema del reactor, el resultado del test no se conocerá si no se realiza. Para reflejarlo, la distribución de  $T$  se condiciona

a  $D_1$  además de a  $A$ . Creamos un nuevo valor  $nr$  (*no resultados*) para  $T$  con

$$\begin{aligned} P(T = nr|A, D_1 = hn) &= 1 \\ P(T = nr|A, D_1 = nt) &= 1 \\ P(T = nr|A, D_1 = t) &= 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

para cualquier valor de  $A$ . En consecuencia, suelen presentarse combinaciones de estados y alternativas que son imposibles, a las que se les asigna probabilidad cero, y que el algoritmo arrastra durante el proceso de solución.

2. En cada nodo de decisión, no siempre se tienen disponibles todas sus alternativas, dependiendo del escenario condicionante. En el problema del reactor, si  $T = m$ , entonces  $D_2 = c$  forzosamente y no se puede tener  $D_2 = a$ . La solución a esto es penalizar las alternativas no disponibles asignándoles utilidades muy negativas. Una situación extrema sería no tener ninguna alternativa disponible, por no aparecer el nodo en el escenario, como  $D_2$  si  $D_1 = hn$ , en cuyo caso puede añadirse una alternativa artificial  $D_2 = n$  (*ningún reactor*), que siempre se observa.
3. La misma situación, con nodos de azar, nos lleva a penalizar los estados no disponibles asignándoles probabilidad cero.
4. Existen variables incompatibles, es decir, se materializa una u otra pero nunca ambas. En el problema del reactor, nunca se materializan juntas  $A$  y  $C$  pues, a lo sumo, se construye un reactor. Por ello, muchos métodos ignoran la realización de  $A$  ( $C$ ), cuando  $D_2 = c$  ( $D_2 = a$ ), mediante utilidades cero. También pueden utilizarse valores artificiales y distribuciones degeneradas.

Además de estas asimetrías, suelen presentarse típicamente situaciones de coalescencia, es decir, situaciones en las que algunos escenarios condicionantes comparten

fragmentos del problema. Incluimos aquí este aspecto porque aparece muy a menudo en problemas asimétricos. Distinguimos:

(a) Coalescencias locales al definir las variables y funciones del problema. Ejemplos de ello en el problema del reactor son:

- ▷ Se puede elegir uno de los dos reactores ( $D_2 = c$  o  $a$ ) si no hacemos el test o si el resultado de éste es bueno o excelente ( $T = nr, b$  o  $e$ ). Es decir, estos escenarios de  $T$  comparten las dos opciones de  $D_2$ .
- ▷ Se define  $T = nr$  con certeza, independientemente del valor que tome  $A$ , dado  $D_1 = hn$  o  $nt$ , ver (1.1). Es decir, todos los valores de  $A$  comparten esta definición (el nodo  $A$  es irrelevante).
- ▷ Los escenarios que corresponden a no realizar el test ( $D_1 = hn$  o  $nt$ ) comparten un coste nulo del test.

(b) Coalescencias globales, muy utilizadas en la literatura de árboles de decisión, con compartición de estructuras e información numérica dentro de la estructura global del problema. En el ejemplo del reactor, ver Figura 1.4 más adelante, puede verse cómo los cuatro nodos  $D_2$  comparten el subárbol con nodo raíz  $C$ .

Como consecuencia de estas medidas:

- aumenta el tamaño del problema, los requisitos de memoria, y por tanto, el esfuerzo computacional,
- se pierde la apreciación de la estructura asimétrica original,
- se interpretan con mayor dificultad las salidas del problema.

Analizamos ahora los cuatro métodos más importantes de representación y solución de problemas de decisión: árboles de decisión (ArD), diagramas de influencia



(DI), diagramas de decisión secuenciales (DDS) y redes de evaluación (RE). Shenoy (1994a) proporciona una revisión de los ArD, DI y RE en problemas simétricos. Aquí haremos hincapié en propiedades que influyen en el manejo de las asimetrías. Hay otros métodos gráficos que sólo citaremos pues sus características se deducen esencialmente de las de los métodos que estudiaremos. Destacamos: los *árboles de juego* (Shenoy, 1993b), más generales que los ArD; los *árboles de escenarios* (Shenoy, 1994c), con el *método de podado* como una variante para evaluar ArD y árboles de juego; formulaciones algebraicas como en Kirkwood (1992, 1993) ya superadas por los DDS; y métodos híbridos de los ArD y los DI convencionales tales como: DPL (*Decision Programming Language*) de Call y Miller (1990), *DI contingentes* de Fung y Shachter (1990) y *DI potenciales* de Ndilikiliksha (1994).

## 1.6 Árboles de decisión

Una representación tradicional de un problema de decisión es mediante un ArD, que representa explícitamente todos los escenarios posibles. Los orígenes se encuentran en los trabajos de von Neumann y Morgenstern sobre juegos en forma extensiva, ver por ejemplo Smith (1988).

### 1.6.1 Representación y solución con árboles de decisión

Las Figuras 1.3 y 1.4 muestran conjuntamente la representación y resolución del problema del reactor mediante un ArD. Notar que antes de que el ArD se especifique completamente, las probabilidades condicionadas requeridas por la representación del ArD tienen que calcularse a partir de las especificadas en el problema, como se hace en la Figura 1.3. El árbol de probabilidad de la izquierda se utiliza para calcular la distribución de probabilidad conjunta de  $A$  y  $T$ , y el árbol de la derecha para

calcular las distribuciones  $P(T)$  y  $P(A|T)$ , es decir, las distribuciones a pre-posteriori y a posteriori, respectivamente. Éste es un inconveniente llamado *problema de los dos árboles*. Este preproceso es innecesario para resolver (y representar) el problema, como demuestran otros métodos. Además no se tiene un método eficiente para obtener estas condicionadas, realizándose por *fuerza bruta* calculando la distribución conjunta.

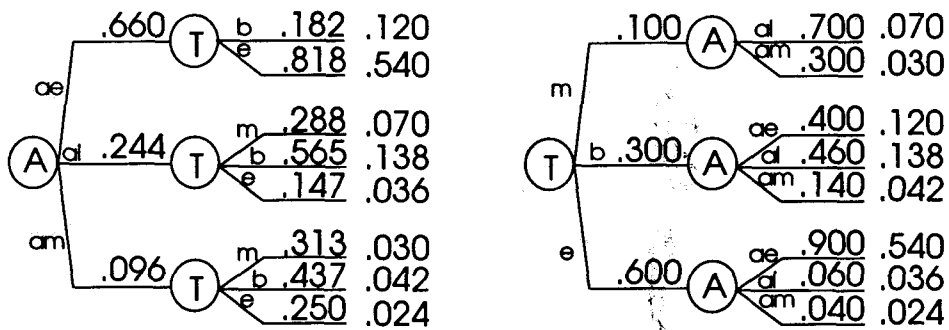


Figura 1.3: Preproceso de probabilidades en el problema del reactor.

La Figura 1.4 presenta la solución del problema del reactor usando coalescencia no separable (Call y Miller, 1990). El procedimiento a seguir es el tradicional (Clemen, 1991). Como puede verse, una estrategia óptima es realizar el test; construir un reactor convencional si los resultados del test son malos o buenos, y construir uno avanzado si los resultados son excelentes. La utilidad esperada asociada a esta estrategia es 8.128 millones de dólares.

Aunque hemos mostrado la representación usando coalescencia, debe recordarse que la detección de esta propiedad es un proceso *ad hoc* a cargo del analista, que conlleva construir el árbol completo (sin coalescencia) y después reconocer los subárboles repetidos.

El preproceso requiere 21 operaciones (8 multiplicaciones, 5 sumas y 8 divisio-

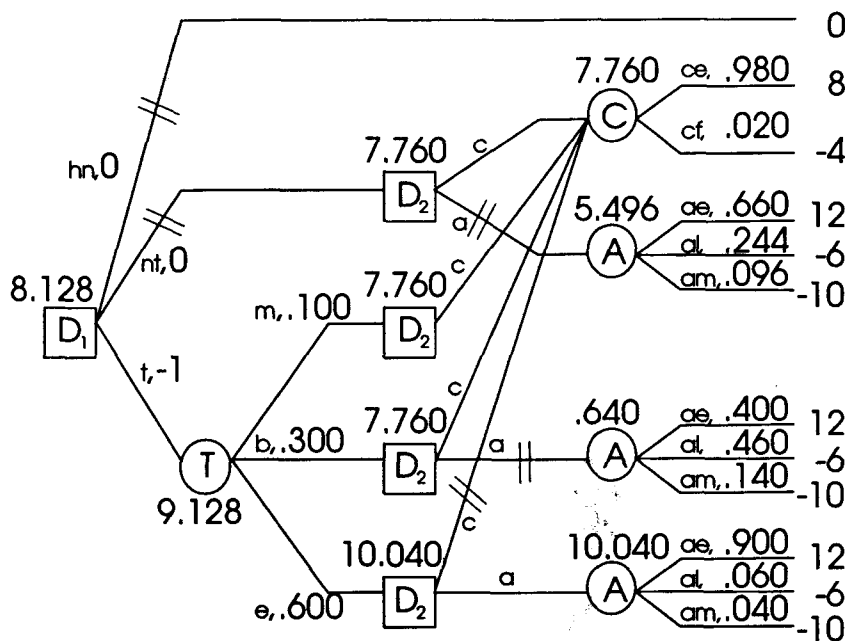


Figura 1.4: Representación y solución del problema del reactor mediante un ArD.

nes). La resolución (sin coalescencia) requiere 38 operaciones (8 multiplicaciones y 4 sumas para eliminar 4 copias de  $C$ , 9 multiplicaciones y 6 sumas para eliminar  $A$ , 3 comparaciones para eliminar  $D_2$ , 3 multiplicaciones y 2 sumas para eliminar  $T$  y 2 comparaciones y 1 suma para eliminar  $D_1$ ). Esto hace un total de 59 operaciones. La resolución con coalescencia requiere 29 operaciones, con lo que el total es 50 operaciones.

## 1.7 Diagramas de influencia

Los orígenes de los DI están sobre todo en los trabajos de Olmsted (1983) y de Howard y Matheson (1981), luego extendidos por Shachter (1986) y Smith (1988, 1989a, 1989b), entre otros. En esta sección representamos y resolvemos el problema del reactor usando la técnica de DI asimétricos de Smith, Holtzman y Matheson

(1993) (de aquí en adelante, SHM). SHM describen su técnica cuando la función de utilidad conjunta no se descompone en factores. Aquí la generalizamos para trabajar con funciones de utilidad separables. En el caso simétrico, hay una generalización debida a Tatman y Shachter (1990).

### 1.7.1 Representación con DI asimétricos

Los DI son grafos dirigidos acíclicos, con la información numérica dada aparte. La Figura 1.5 muestra un DI para el problema del reactor.

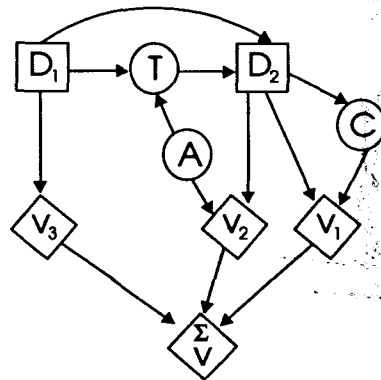


Figura 1.5: Un DI para el problema del reactor.

Las restricciones de información se representan mediante los arcos dirigidos a nodos de decisión. Las dependencias probabilísticas, mediante arcos incidentes en nodos de azar. La factorización particular de la distribución de probabilidad conjunta en condicionadas puede leerse en estos últimos arcos haciendo explícitas las independencias condicionales. Como consecuencia, los DI sí explotan de forma automática las coalescencias globales de las que hablábamos en la Sección 1.5.

Podríamos haber dibujado sólo un nodo de valor  $v$  como función de  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $A$  y  $C$ . En su lugar, hemos descompuesto el nodo  $v$  en un conjunto de tres nodos de

valor:  $v_1, v_2$  y  $v_3$ . La estructura del nodo de valor es de árbol, indicando la jerarquía de objetivos. El nodo  $v$  es un *supernodo de valor* suma, con únicamente otros nodos de valor como predecesores, y el resto,  $v_1, v_2$  y  $v_3$ , representan los sumandos de la descomposición aditiva de  $v$ . Aunque estamos incrementando el número de nodos, obtendremos ahorros computacionales.

Para la información numérica, se especifica una distribución condicionada para cada nodo del DI, excepto para los supernodos de valor. La principal contribución del método de SHM es una representación en forma de árbol para describir las distribuciones condicionadas. Éstos se llaman *árboles de distribución* cuyos caminos muestran los escenarios condicionantes que conducen a distribuciones atómicas que son las que describen la distribución de probabilidad, el conjunto de alternativas disponibles, o la utilidad (esperada), asignada a cada escenario condicionante (Smith, Holtzman y Matheson, 1993).

La Figura 1.6 muestra todos los árboles de distribución para el problema del reactor. Como el nodo  $A$  no tiene predecesores condicionales en el DI, su árbol de distribución se representa mediante una sola distribución atómica. Similarmente para  $D_1$ . En el árbol del nodo  $C$ , modelizamos una distribución atómica no especificada, dibujada con un signo de interrogación, indicando que cuando  $D_2 = n$  o  $D_2 = a$ , la distribución de probabilidad condicionada de  $C$  no está especificada. Como veremos, para la solución del problema no es necesario especificar la probabilidad de  $C$  en esos escenarios.

El árbol de distribución para  $D_2$  tiene tres distribuciones atómicas dos de las cuales son determinísticas (con bordes dobles). La compañía escogerá entre dos alternativas (reactor convencional o avanzado) sólo si decide no realizar el test ( $D_1 = nt$ ) o si lo realiza y los resultados son buenos o excelentes. La condicionada para

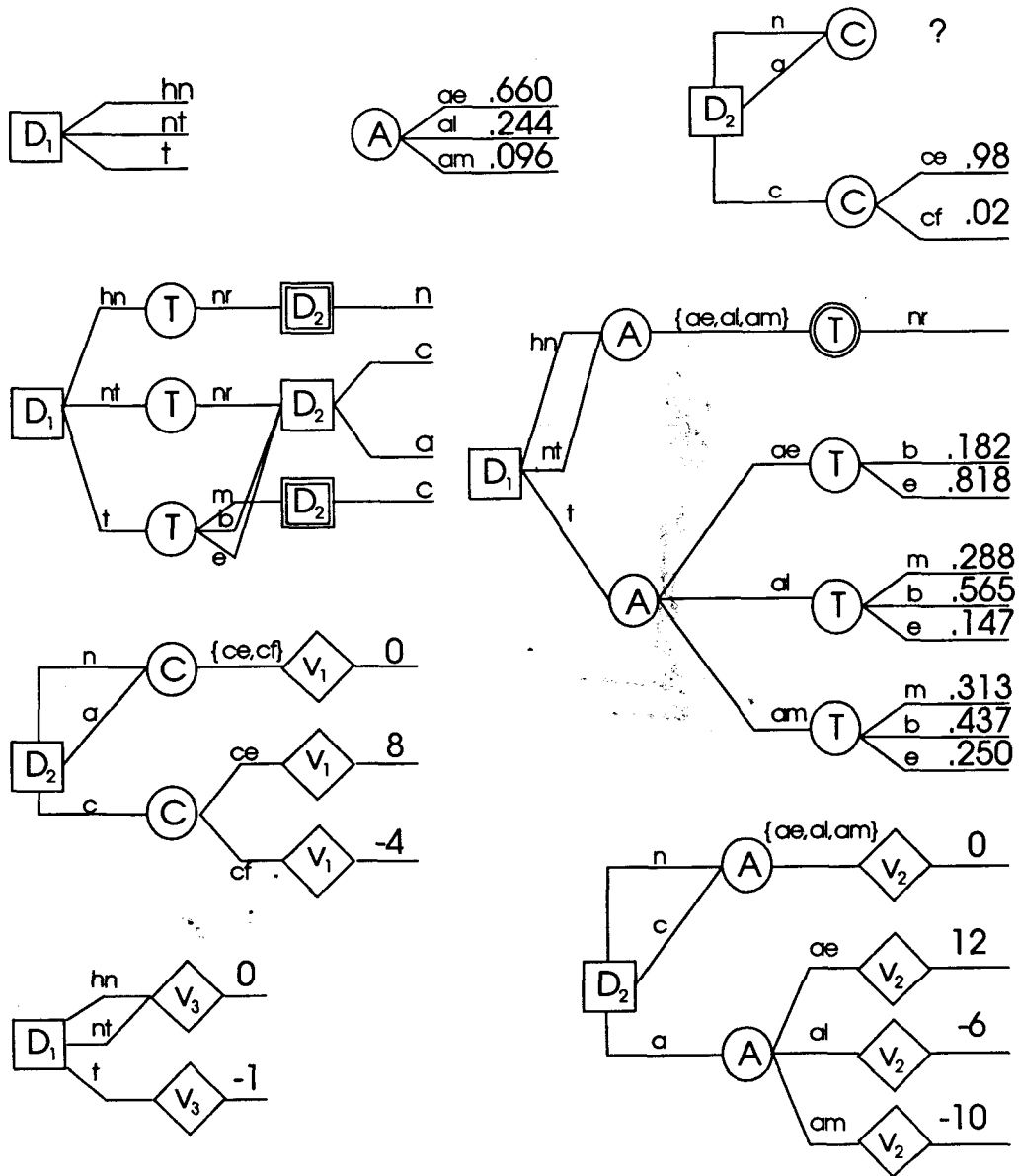


Figura 1.6: Árboles de distribución para las condicionadas en el DI del problema del reactor.

$D_2$  está *compartida* por tanto, es decir, la distribución atómica con dos alternativas  $c$  y  $a$  la comparten tres escenarios distintos. También, la distribución condicionada de  $D_2$  está *recortada*, es decir, se omiten las ramas correspondientes a los escenarios condicionantes que son imposibles. Por ejemplo, si la compañía escoge no hacer el test, es imposible observar el resultado del test.

La distribución para  $T$  muestra que si la compañía decide no construir un reactor o si decide no realizar el test ( $D_1 = hn$  o  $D_1 = nt$ ), entonces  $T = nr$  con probabilidad 1 independientemente del estado del reactor avanzado. Por tanto, la distribución condicionada de  $T$  puede *colapsarse* a través de  $A$ , dado  $D_1 = hn$  o  $D_1 = nt$ . Las distribuciones colapsadas se representan indicando el conjunto de posibles valores en una sola rama que emana del nodo. Proporciona una representación más compacta que la tabla usual de los DI y son un tipo de coalescencia. Más aún, los valores  $hn$  y  $nt$  *comparten un subárbol*.

Las distribuciones condicionadas de las tres funciones de utilidad proporcionan otros ejemplos de distribuciones colapsadas, recortadas y compartidas. Son nodos determinísticos porque asignamos una sola utilidad para cada escenario, pero no utilizaremos bordes dobles.

Los árboles de distribución ilustran de forma clara las distribuciones asignadas en cada escenario y sus posibles resultados, que pueden ser diferentes en cada escenario, algo característico en problemas asimétricos. Además permiten modelizar muchos tipos de asimetrías debidas a distribuciones irrelevantes (distribuciones colapsadas) o escenarios imposibles (distribuciones recortadas). Asimismo, permiten modelizar muchos patrones de coalescencia. El procedimiento de solución reconocerá todos ellos, reduciendo así la carga computacional.

### 1.7.2 Solución con DI asimétricos

El algoritmo para resolver DI asimétricos es el mismo que para DI convencionales, ver Olmsted (1983) y Shachter (1986). Para simplificar los cálculos, SHM proporcionan una tabla que describe estructuras especiales de las distribuciones afectadas en cada transformación del DI.

Para el problema del reactor, comenzamos eliminando el nodo  $C$ . Esencialmente, absorbemos la condicionada de  $C$  en la función de utilidad  $v_1$  usando el operador esperanza. La operación se lleva a cabo considerando cada escenario por separado. El caso a estudiar será diferente dependiendo de la estructura de las funciones de utilidad y de probabilidad. Como para  $D_2 = n$  o  $D_2 = a$  tenemos una distribución a priori atómica no especificada para  $C$ , y la función de utilidad  $v_1$  comparte en ese escenario una distribución determinística, se tiene que la utilidad esperada para  $v_1$  debe ser esa distribución determinística. Sólo queda un escenario ( $D_2 = c$ ) para el que se calcula la utilidad esperada en la forma habitual. La Figura 1.7 muestra el resultado de estas operaciones.

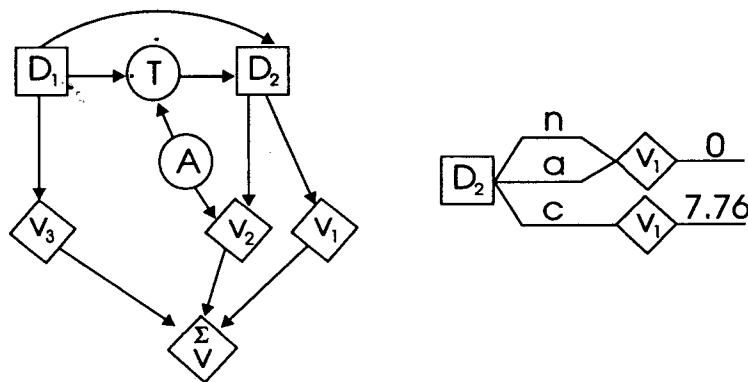


Figura 1.7: DI y árbol de distribución de  $v_1$  después de eliminar el nodo  $C$ .

A continuación se borra  $A$ . Primero se invierte el arco  $(A, T)$ , y luego se absorbe la



a posteriori para  $A$  en la función de utilidad  $v_2$ . Para invertir dicho arco añadimos antes el arco  $(D_1, A)$  para que  $A$  y  $T$  tengan el mismo conjunto de predecesores directos: cualquier estructura especial en la distribución original se preserva en la distribución resultante, y no hay cálculos nuevos. Después, la inversión del arco conlleva cálculos numéricos (por medio del teorema de Bayes) únicamente en aquellos escenarios que incluyen  $D_1 = t$ . El resto, al corresponder a distribuciones colapsadas, permanece igual. Por ejemplo,  $P(T|A, D_1 = hn)$  comparte una distribución atómica para todos los estados posibles de  $A$ . Por tanto, la distribución a pre-posteriori  $P(T|D_1 = hn)$  debe ser esa distribución atómica compartida y la a posteriori para  $A$  debe ser igual a la a priori. La Figura 1.8 contiene el DI y la distribución para  $T$  y para  $A$ , después de la inversión del arco  $(A, T)$ .

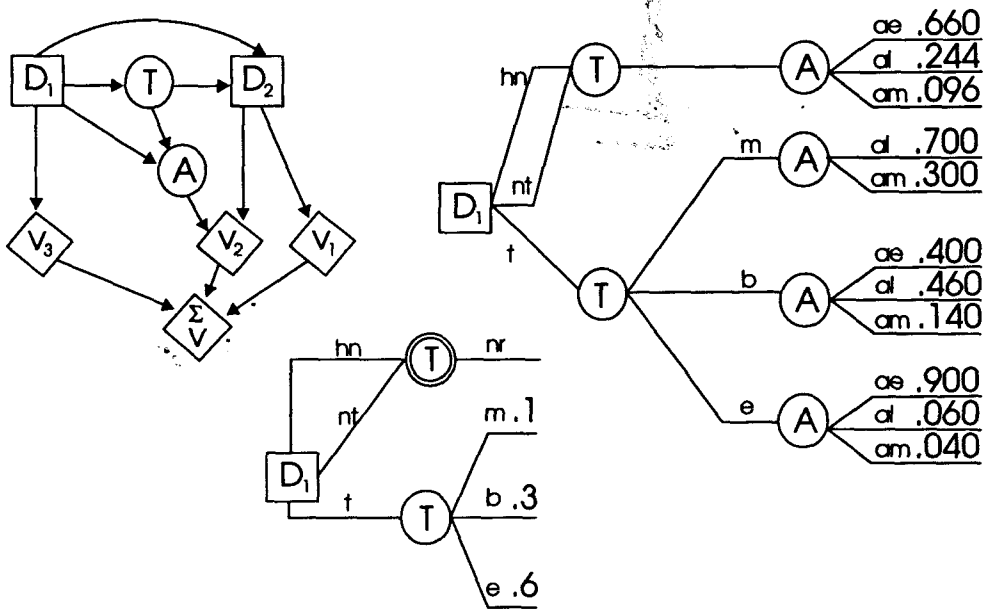


Figura 1.8: DI y distribuciones condicionadas para  $T$  y  $A$  después de invertir el arco  $(A, T)$ .

Añadiendo los arcos  $(D_2, A)$  y  $(T, v_2)$ , modificando los árboles de distribución de  $A$  y  $v_2$  de acuerdo con esto, y absorbiendo después la condicionada para  $A$  en la función de utilidad  $v_2$ , podemos ya eliminar  $A$ . La Figura 1.9 muestra los resultados finales. Los escenarios que tienen un valor  $v_2 = 0$ , corresponden a casos sin cálculos. Los restantes pertenecen al caso general.

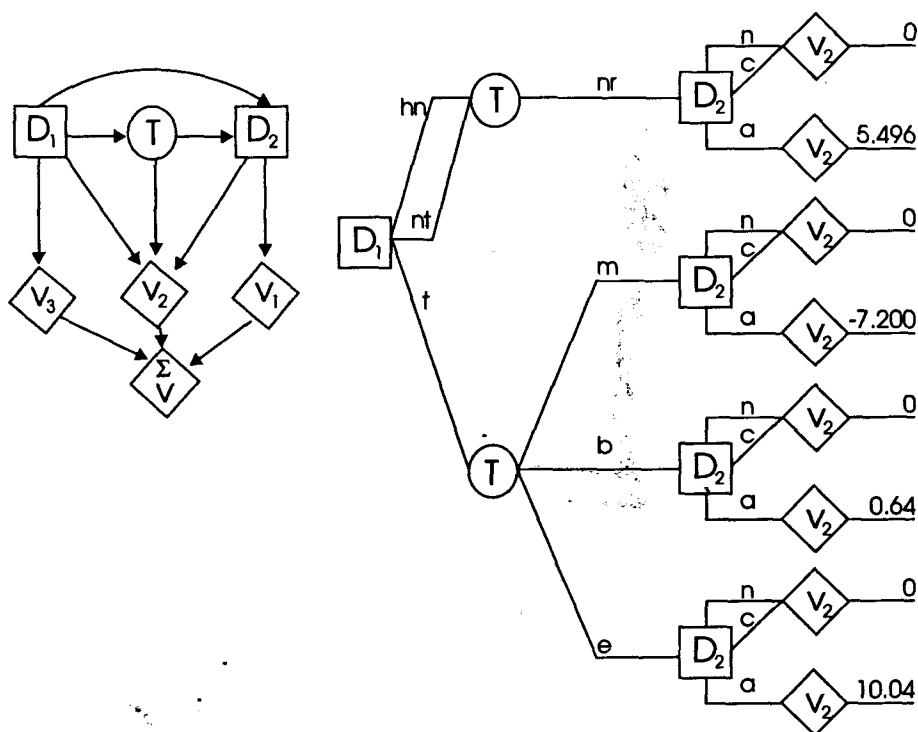


Figura 1.9: DI y árbol de distribución de  $v_2$  después de eliminar el nodo  $A$ .

El siguiente paso es borrar  $D_2$ . Como tiene dos nodos de valor sucesores, introducimos antes un nuevo supernodo de valor  $w$ . Después fusionamos  $v_1$  y  $v_2$  en  $w$  (según el teorema 5 de Tatman y Shachter, 1990). También puede aplicarse aquí la *regla del subconjunto* (Tatman y Shachter, 1990) al estar el conjunto de predecesores de  $v_1$  contenido en el de los de  $v_2$ . Según este heurístico, debemos eliminar ambos

nodos ya que no se incrementa el número de operaciones a realizar. La Figura 1.10 contiene estos pasos. Las estructuras especiales en las distribuciones condicionadas se tratan de nuevo como casos especiales.

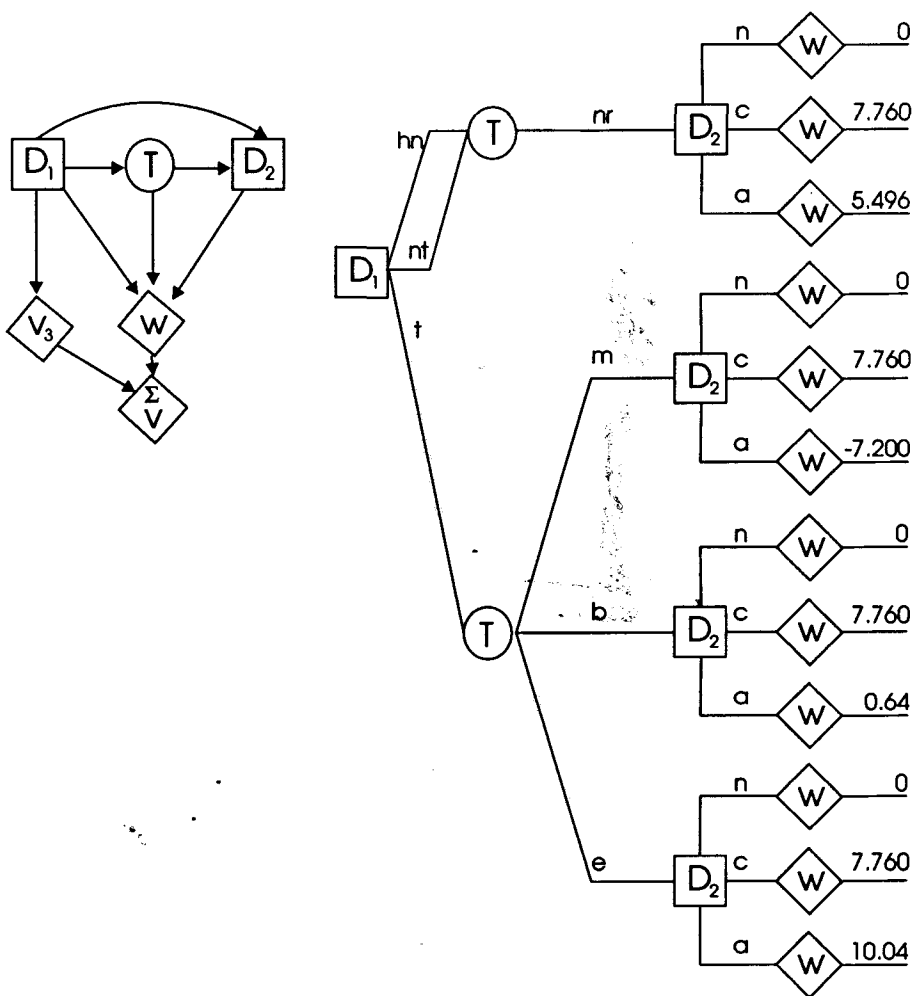


Figura 1.10: DT y árbol de distribución de  $w$  después de combinar  $v_1$  y  $v_2$ .

$D_2$  puede ya eliminarse. El árbol de distribución de  $D_2$  (en la Figura 1.6) indica las restricciones de las alternativas posibles de  $D_2$  en cada escenario condicionante, ya que no todos los valores de  $D_2$  son posibles en todos los escenarios. Eliminamos

$D_2$  maximizando  $w$  sobre los valores de  $D_2$  permitidos por su árbol de distribución. Examinamos cada escenario condicionante que corresponda a un conjunto atómico de alternativas y seleccionamos la alternativa de máxima utilidad esperada. Notar que el árbol de distribución de  $D_2$  tiene muchos recortes y sin embargo no se aprovechan ni durante el borrado de  $A$  ni durante el proceso anterior al borrado de  $D_2$ . Volveremos después sobre esto. La Figura 1.11 refleja los resultados.

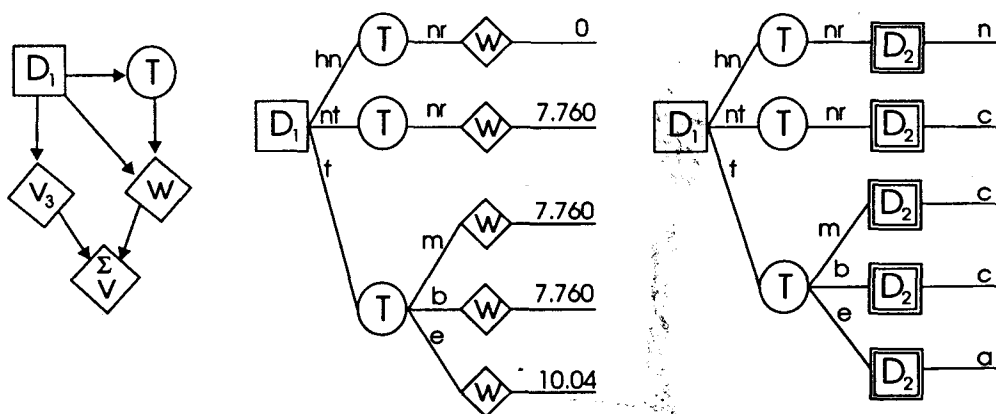


Figura 1.11:  $D_1$ , árbol de distribución de  $w$  y función de decisión óptima para  $D_2$ , después de eliminar  $D_2$ .

Eliminamos ahora  $T$  siendo  $w$  el único nodo de valor afectado (Figura 1.12). Para ello, hallamos la esperanza de la función  $w$  (Figura 1.11) usando la condicionada de  $T$  (Figura 1.8). Sólo el escenario  $D_1 = t$  requiere algún cálculo.

Finalmente, eliminamos  $D_1$ . Como  $D_1$  está en el dominio de  $v_3$  y  $w$ , combinamos antes  $v_3$  (de la Figura 1.6) y  $w$  (de la Figura 1.12) obteniendo  $v$ .

La Figura 1.13 muestra el  $D_1$  y el árbol de distribución de  $v$  después de combinar  $v_3$  y  $w$ . A continuación eliminamos  $D_1$  maximizando  $v$  sobre los valores posibles de  $D_1$  indicados en el árbol de distribución de  $D_1$  (en la Figura 1.6). La decisión óptima para  $D_1$  es  $D_1 = t$ , y la máxima utilidad esperada asociada es 8.128 Mill.\$.

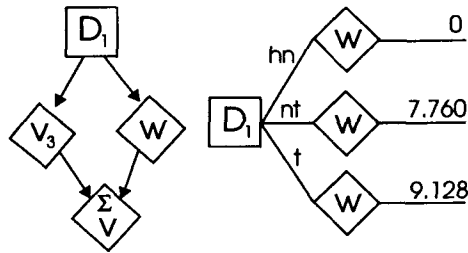


Figura 1.12: DI y árbol de distribución de  $w$ , después de eliminar el nodo  $T$ .

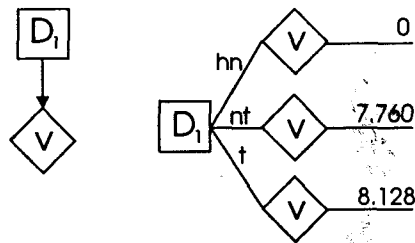


Figura 1.13: DI y árbol de distribución de  $v$  después de combinar  $v_3$  y  $w$ .

El número de operaciones realizadas se contabilizan en la Tabla 1.1. El número total se eleva a 53 operaciones. En todos los recuentos no se está teniendo en cuenta ninguna operación trivial.

Tabla 1.1: Número de operaciones para resolver el problema del reactor con DI.

Eliminar	multiplic.	sumas	divisiones	compar.
$C$	2	1		
$A$	19	12	8	
$D_2$				3
$T$	3	2		
$D_1$		1		2

## 1.8 Diagramas de decisión secuenciales

Estos diagramas se deben a Covaliu y Oliver (1994) y pueden considerarse una variante de los DI.

### 1.8.1 Representación con DDS

El problema de decisión se modeliza mediante un digrafo formado por:

- un DI convencional, para revelar las independencias condicionales, y
- un DDS, para revelar los aspectos asimétricos y secuenciales del problema.

Un DDS es un grafo dirigido acíclico con el mismo conjunto de nodos que el DI. Numeramos todos los nodos del DDS según las direcciones de los arcos, de forma que el primero es el único nodo fuente y el último es el nodo de valor.

El orden parcial entre pares de nodos implicado por el DI no puede contradecir el implicado por el DDS. Por ello, debemos invertir el arco  $(A, T)$  en el DI de la Figura 1.5 ya que contradice el orden implicado por el DDS. Notemos que este preproceso es innecesario y hace pensar que esta técnica va a ser similar a la de los ArD. El DI y el DDS son ahora compatibles. En la Figura 1.14 se muestra el digrafo para el problema del reactor.

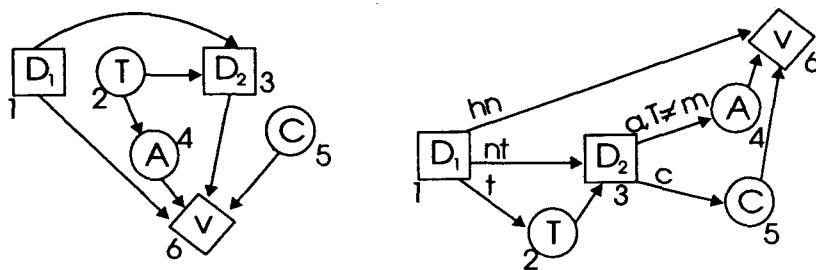


Figura 1.14: DI y DDS para el problema del reactor.

Notemos que el DI es algo distinto al de la Figura 1.5. En un DI asimétrico, los arcos que inciden en cualquier nodo indican qué variables son las que condicionan el árbol de distribución asociado. Para los DDS necesitamos sólo las relaciones usuales observadas en los DI convencionales. Por eso, no dibujamos los arcos  $(D_2, C)$  y  $(D_1, T)$ .

Los arcos del DDS indican que después del nodo origen del arco se podrá realizar la variable asociada al nodo destino. Las etiquetas sobre los arcos indican qué valores del nodo origen han de tomarse para que el nodo destino se realice. Por ejemplo, el arco  $(D_1, T)$  con la etiqueta  $t$  nos dice que si realizamos el test  $(D_1 = t)$ , observaremos su resultado  $T = m, b$  o  $e$ . Los arcos  $(D_1, v)$  y  $(D_1, D_2)$  con etiquetas  $hn$  y  $nt$  respectivamente, nos dicen que sin embargo no observaremos  $T$  en los casos en que  $D_1 = hn$  o  $nt$ . Los arcos  $(D_2, A)$  y  $(D_2, C)$  indican que sólo se materializa  $A$  o  $C$  pero no ambos. La etiqueta sobre el arco  $(D_2, A)$  también indica dependencia de los valores realizados en nodos predecesores, i.e. la alternativa  $D_2 = a$  sólo está disponible si  $T \neq m$ . La ausencia de etiquetas indica que la variable origen del arco puede tomar cualquier valor de los posibles. Los cinco caminos dirigidos del DDS desde el nodo 1 al nodo 6 muestran los 18 escenarios posibles, que podríamos deducir también a partir del ArD de la Figura 1.4, ahora mostrados de forma compacta, como si fuera un árbol comprimido.

Desde el punto de vista numérico, los datos se organizan en una *tabla de formulación*, similar a la usada por Kirkwood (1993), que se construye a partir de los dos diagramas, de tal forma que el algoritmo recursivo del proceso de solución toma de ella toda la información que necesita. La Tabla 1.2 es la tabla de formulación para el problema del reactor, que contiene una fila por cada nodo del DDS. Debemos notar que la tabla es parte de la representación del problema de decisión.

Tabla 1.2: Tabla de formulación para el problema del reactor.

nombre	<i>i</i>	tipo	historias mínimas	valores	distribución de probabilidad	nodo siguiente	
$D_1$	1	decisión	$\emptyset$	$hn\ nt\ t$		6 3 2	
$T$	2	azar	$\emptyset$	$m\ b\ e$	.1 .3 .6	3 3 3	
$D_2$	3	decisión	<u>2</u> - $b$ $e$ $m$	$c\ a$   $c$		5 4   5	
$A$	4	azar	<u>2</u> - $b$ $e$	$ae\ al\ am$	.66 .244 .096 .4 .46 .14 .9 .06 .04	6 6 6	
$C$	5	azar	$\emptyset$	$ce\ cf$	.98 .02	6 6	
$v$	6	valor	<u>1</u> <u>3</u> <u>4</u> <u>5</u> $hn$ - - - $nt$ $c$ - $ce$ $nt$ $c$ - $cf$ $nt$ $a$ $ae$ - $nt$ $a$ $al$ - $nt$ $a$ $am$ - $t$ $c$ - $ce$ $t$ $c$ - $cf$ $t$ $a$ $ae$ - $t$ $a$ $al$ - $t$ $a$ $am$ -	0 8 -4 12 -6 -10 7 -5 11 -7 -11			



En el caso de que la función de utilidad sea separable, se incluye también una columna con los factores de esta función. Aunque nuestro problema se ajuste a esta situación, preferimos utilizar una utilidad conjunta, como se observa en la fila de  $v$ , pues no hay todavía una demostración rigurosa de la validez del método de Covaliu y Oliver en el caso de una descomposición arbitraria de la función de utilidad. Su técnica se especifica para un problema en el que la función de utilidad no está factorizada, o bien sí lo está de forma aditiva pero cada factor tiene una sola variable en su dominio. Como nuestra versión del problema del reactor no corresponde a ninguna de estas dos situaciones, es por lo que usamos la versión no factorizada de la técnica de los DDS para representarlo y resolverlo.

El término *historia en el nodo  $i$*  hace referencia a cómo se llega a cada nodo  $i$  por los caminos dirigidos del DDS. Puede representarse mediante una matriz de dos filas: la primera lista una secuencia de nodos desde el 1 hasta el  $i$  (excluyendo el  $i$ ) y la segunda, lista los correspondientes valores que se realizan en esos nodos. El símbolo  $-$  denota la ausencia del nodo. Para cada valor del nodo  $i$  y para cada historia, la función *nodo siguiente* denota el índice del nodo que se realiza después del nodo  $i$ , que puede leerse en el DDS.

Se definen diferentes tipos de historias. Las historias mínimas contienen la información necesaria para la formulación del problema. Para un nodo de decisión, las historias mínimas contendrán a aquellas variables que afecten a su espacio de valores y a su función nodo siguiente. Por ejemplo, para  $D_2$ , la variable  $T$  es la única bajo estas condiciones. Para un nodo de azar, las historias mínimas incluirán los nodos que bastan para definir su función nodo siguiente y su distribución de probabilidad. En el caso del nodo  $C$ , por ejemplo, es el conjunto vacío. Para el nodo de valor, las historias mínimas las forman los predecesores directos de  $v$  en el DI, ya que son

suficientes para definir los valores de la función de utilidad correspondiente. Destaquemos que los valores de la fila de  $v$  en la Tabla 1.2 se han obtenido mediante sumas (cinco, en total) de valores dados en el enunciado del problema.

### 1.8.2 Solución con DDS

Denotamos por  $\omega_i(H_i) = E[u|H_i]$  la utilidad esperada en el nodo  $i$  dada la historia  $H_i$  si se toman decisiones óptimas en  $i$  ( $i$  es un nodo de decisión) y en el futuro. Sea  $N(H_i)$  el conjunto de nodos en  $H_i$  (su primera fila). El método de solución se basa en la misma relación recursiva hacia atrás de los ArD, pero utilizando las *historias relevantes*. No podemos usar sólo historias mínimas pues al calcular  $\omega_i(H_i)$ , referenciamos los nodos siguientes  $n_i$  y sus historias  $H_{n_i}$ , y  $\omega_i(H_i)$  puede no estar bien definido si existe al menos un  $n_i$  tal que  $N(H_{n_i}) \setminus \{i\} \not\subseteq N(H_i)$ .

Las historias relevantes  $H_i^r$  para un nodo- $i$ , se construyen entonces aumentando sus historias mínimas  $H_i^m$  con aquellos predecesores del DDS no necesariamente directos, que aparecen en historias relevantes de cualquiera de los sucesores directos. Es por tanto, una definición recursiva comenzando en el nodo de valor. Covaliu y Oliver (1994) explican cómo el algoritmo sigue un orden hacia atrás y hacia delante, obteniendo varios beneficios computacionales.

Para el problema del reactor,  $N(H_6^r) = \{1, 3, 4, 5\}$ , es decir, los predecesores del nodo  $v$  forman sus historias relevantes. De ahí:

$$N(H_5^r) = N(H_5^m) \cup \{\{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 4, 5\}\} = \emptyset \cup \{1, 3\} = \{1, 3\}$$

$$N(H_4^r) = N(H_4^m) \cup \{\{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 4, 5\}\} = \{2\} \cup \{1, 3\} = \{1, 2, 3\}$$

$$N(H_3^r) = N(H_3^m) \cup \{\{1, 2\} \cap \{1, 2, 3\}\} = \{2\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2\}$$

$$N(H_2^r) = \emptyset \cup \{\{1\} \cap \{1, 2\}\} = \{1\}$$

$$N(H_1^r) = \emptyset$$

La solución del problema del reactor es como sigue.  $\omega_6$  es la función de utilidad asociada al nodo  $v$  en la tabla de formulación. Por ejemplo,

$$\omega_6 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ hn & - & - & - \end{pmatrix} = 0.$$

Primero eliminamos el nodo  $C$ . Como las historias relevantes de  $C$  contienen a los nodos  $D_1$  y  $D_2$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \omega_5 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ nt & c \end{pmatrix} &= \omega_6 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ nt & c & ce \end{pmatrix} .98 + \omega_6 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ nt & c & cf \end{pmatrix} .02 = \\ &= \omega_6 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ nt & c & - & ce \end{pmatrix} .98 + \omega_6 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ nt & c & - & cf \end{pmatrix} .02 = \\ &= 8 \times .98 - 4 \times .02 = 7.76 \end{aligned}$$

Notar que la segunda igualdad se debe a que  $\omega_6 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ nt & c & - & ce \end{pmatrix}$  es simplemente

una versión estandarizada de  $\omega_6 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ nt & c & ce \end{pmatrix}$ .

Análogamente,

$$\omega_5 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ t & c \end{pmatrix} = 7 \times .98 - 5 \times .02 = 6.76.$$

A continuación borramos  $A$ .

$$\begin{aligned} \omega_4 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ nt & - & a \end{pmatrix} &= \omega_6 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ nt & - & a & ae \end{pmatrix} .66 + \omega_6 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ nt & - & a & al \end{pmatrix} .244 + \\ &+ \omega_6 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ nt & - & a & am \end{pmatrix} .096 = \\ &= 12 \times .66 - 6 \times .244 - 10 \times .096 = 5.496 \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\omega_4 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ t & b & a \end{pmatrix} = -0.36 \quad \text{y} \quad \omega_4 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ t & e & a \end{pmatrix} = 9.04$$

Ahora eliminamos el nodo  $D_2$  mediante

$$\begin{aligned} \omega_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ nt & - \end{pmatrix} &= \max \left\{ \omega_5 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ nt & - & c \end{pmatrix}, \omega_4 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ nt & - & a \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \max\{7.76, 5.496\} = 7.76 \quad [c] \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\omega_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ t & m \end{pmatrix} = \max \left\{ \omega_5 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ t & m & c \end{pmatrix} \right\} = \max\{6.76\} = 6.76 \quad [c]$$

$$\omega_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ t & b \end{pmatrix} = \max\{6.76, -0.36\} = 6.76 \quad [c]$$

$$\omega_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ t & e \end{pmatrix} = \max\{6.76, 9.04\} = 9.04 \quad [a]$$

La eliminación de  $T$  se lleva a cabo mediante

$$\omega_2 \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \omega_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ t & m \end{pmatrix} \cdot 1 + \omega_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ t & b \end{pmatrix} \cdot 3 + \omega_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ t & e \end{pmatrix} \cdot 6 = 8.128.$$

Finalmente, eliminamos  $D_1$ :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \max \left\{ \omega_6 \begin{pmatrix} 1 \\ hn \end{pmatrix}, \omega_3 \begin{pmatrix} 1 \\ nt \end{pmatrix}, \omega_2 \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \max\{0, 7.76, 8.128\} = 8.128 \quad [t] \end{aligned}$$

Esencialmente, el algoritmo sigue la pista de las historias completas, pero antes de hacer ningún cálculo comprueba si su parte relevante se ha calculado antes. Las

alternativas óptimas se indican entre corchetes y  $\omega_1$  contiene la máxima utilidad esperada. Las operaciones que primero se han de contar son las necesarias para rellenar la tabla de formulación: 5 sumas para hallar los valores de  $v$  y 21 para el preproceso. En la resolución contamos 31 operaciones: eliminar  $C$  supone realizar 4 multiplicaciones y 2 sumas, y eliminar  $D_1$  conlleva 2 comparaciones. Las restantes operaciones hasta 31 son las mismas que se hicieron con el ArD. El total se eleva a 57 operaciones.

La Figura 1.15 muestra los pasos seguidos al eliminar cada nodo. Lo hacemos manipulando concurrentemente el DI y el DDS (Covaliu, 1994), obteniendo en cada paso otros modelos compatibles que manifiestan aspectos complementarios de los correspondientes (sub)problemas de decisión. Así, el DDS de la Figura 1.15c) revela que sólo cuando  $D_1 = t$ , la utilidad esperada depende del resultado del test.

## 1.9 Redes de evaluación

Las RE se deben a Shenoy (1992, 1993a). Recientemente se han extendido a problemas asimétricos (Shenoy, 1995).

### 1.9.1 Representación con RE

Las RE conectan las variables (decisión y azar) del problema mediante arcos dirigidos que expresan restricciones de información. Se denomina *marco* al conjunto de valores o configuraciones de cada variable. Por conveniencia, el marco del conjunto vacío estará formado por un elemento que simbolizaremos  $\diamond$ .

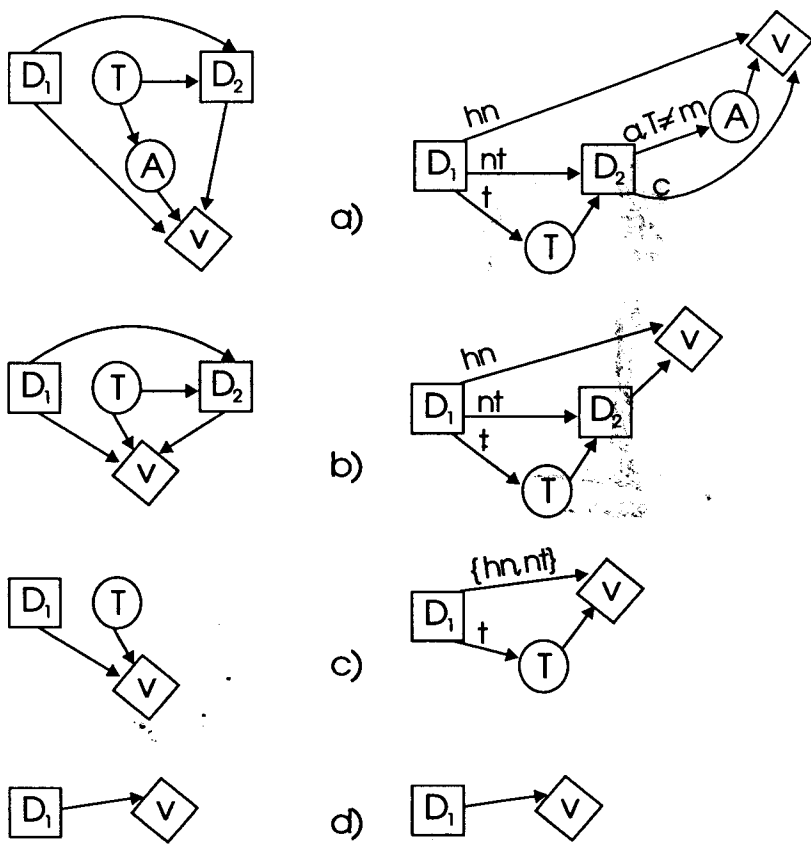


Figura 1.15: Eliminación concurrente de nodos.

Las RE introducen además nuevos tipos de nodos:

- Los factores multiplicativos de la distribución de probabilidad conjunta, con forma triangular, se denominan *evaluaciones de probabilidad (e.p.)* o *potenciales*.
- Los factores de la función de utilidad conjunta se denominan *evaluaciones de utilidad (e.u.)*.
- Existe otro tipo de evaluaciones, las *evaluaciones indicadoras (e.i.)*, con forma triangular de bordes dobles, que representa restricciones cualitativas sobre los marcos conjuntos de las variables. Para definir este tipo de evaluaciones basta describir los elementos de su marco asociado que tengan probabilidad 1, reflejando que son los únicos elementos posibles.

Los arcos no dirigidos que conectan las variables con las evaluaciones denotan los dominios de éstas. Notemos que las e.p. indican exclusivamente los dominios de las funciones factores de la distribución de probabilidad conjunta, no qué tipo de probabilidad (condicionada, conjunta) se tiene. La Figura 1.16 y la información de las Tablas 1.3 y 1.4 constituyen una representación completa del problema del reactor mediante una RE.

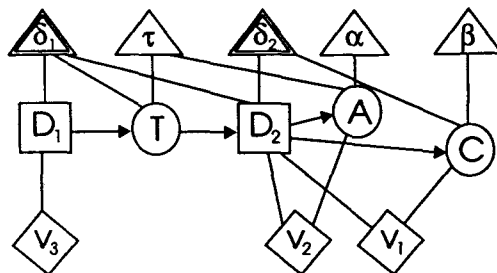


Figura 1.16: RE para el problema del reactor.

Tabla 1.3: E.u. en el problema del reactor.

$\Omega_{\{D_2,C\}}$	$v_1$	$\Omega_{\{D_2,A\}}$	$v_2$	$\Omega_{D_1}$	$v_3$
<i>n nc</i>	0	<i>n ae</i>	0	<i>hn</i>	0
<i>c ce</i>	8	<i>n al</i>	0	<i>nt</i>	0
<i>c cf</i>	-4	<i>n am</i>	0	<i>t</i>	-1
<i>a nc</i>	0	<i>c ae</i>	0		
		<i>c al</i>	0		
		<i>c am</i>	0		
		<i>a ae</i>	12		
		<i>a al</i>	-6		
		<i>a am</i>	-10		

Tabla 1.4: E.p. y e.i. en el problema del reactor.

$\Omega_C$	$\beta$	$\Omega_A$	$\alpha$	$\Omega_{\{A,T\}}$	$\tau$
<i>nc</i>	1	<i>ae</i>	.660	<i>ae nr</i>	1
<i>ce</i>	.98	<i>al</i>	.244	<i>ae m</i>	0
<i>cf</i>	.02	<i>am</i>	.096	<i>ae b</i>	.182
				<i>ae e</i>	.818
				<i>al nr</i>	1
				<i>al m</i>	.288
				<i>al b</i>	.565
				<i>al e</i>	.147
				<i>am nr</i>	1
				<i>am m</i>	.313
				<i>am b</i>	.437
				<i>am e</i>	.250

$$\Omega_{\delta_1} = \{(hn, nr, n), (nt, nr, c), (nt, nr, a), (t, m, c), (t, b, c), (t, b, a), (t, e, c), (t, e, a)\}$$

$$\Omega_{\delta_2} = (n, nc), (c, ce), (c, cf), (a, nc)\}$$



Observamos que hay tres e.u.  $v_1, v_2$  y  $v_3$ , que son los sumandos de la descomposición aditiva de la función de utilidad. Las e.i.  $\delta_1$  y  $\delta_2$  equivalen, respectivamente, a los árboles de distribución de  $D_1$  y de  $C$  del DI, cuyo significado ya estudiamos entonces (ver Figura 1.6). Los potenciales  $\alpha$  y  $\beta$  son las distribuciones marginales de  $A$  y de  $C$ , respectivamente.  $\tau$  representa la misma información que la Figura 1.2, con el estado  $nr$  añadido para  $T$ . Notemos que se ha definido un nuevo valor  $nc$  para  $C$  que indica la no relevancia del valor que tome  $C$ .

Los conceptos de e.i. y *marco efectivo* permiten modelizar y resolver problemas asimétricos. El marco efectivo de un conjunto de variables es un subconjunto del marco asociado, conteniendo sólo aquellas configuraciones posibles. Se definen usando las e.i. ya que son éstas las que controlan las configuraciones posibles y pueden además calcularse por computación local (Shenoy, 1995).  $\Omega_s$  denota el marco efectivo del conjunto de variables  $s$ . Algunos ejemplos pueden verse en las Tablas 1.3 y 1.4. Por ejemplo, al usar el marco efectivo  $\Omega_{\{D_2, C\}}$  aparecen sólo 4 configuraciones en lugar de las 9 que se tendrían usando el marco completo de  $\{D_2, C\}$ . Toda la información numérica de las evaluaciones y todos los cálculos de la fase de solución se harán sobre los marcos efectivos.

### 1.9.2 Solución con RE

Para resolver el problema se utiliza el *algoritmo de fusión* (Shenoy, 1992). Las operaciones que se realizan son *combinaciones* y *marginalizaciones* de evaluaciones. La *combinación* de dos e.p. o de dos e.u.  $\pi_i$  y  $\pi_j$ , se simboliza mediante  $\pi_i \otimes \pi_j$  y es la multiplicación de ambas. Sólo en el caso de que las dos sean factores aditivos de la función de utilidad conjunta la operación será la suma de ambas. Notemos que esta operación es asociativa excepto cuando intervienen una (o más) e.p. y más de

una e.u. La combinación de dos e.i. es otra e.i. que vale uno en el conjunto formado por la unión de los marcos de cada evaluación. Por último, combinar evaluaciones de diferente tipo consiste en multiplicarlas, donde en el caso de intervenir alguna e.i., no habrá que realizar ningún cálculo ya que las e.i. valen 1 sobre los marcos efectivos.

La *marginalización* de una evaluación reduce el dominio donde ésta está definida. Para una e.i. consiste en quedarse con las configuraciones del nuevo dominio reducido. Para una e.p. es la operación común en el Cálculo de Probabilidades. Para una e.u., depende del tipo de variable que vamos a eliminar de su dominio. Así, si  $\alpha$  es una e.u. con dominio el conjunto de variables  $h$ , entonces la marginal de  $\alpha$  para  $h - \{X\}$ , denotada  $\alpha^{h-\{X\}}$ , es la siguiente e.u. definida  $\forall c \in \Omega_{h-\{X\}}$ :

$$\alpha^{h-\{X\}}(c) = \begin{cases} \sum_{x \in \Omega_X} \alpha(c, x), & \text{si } X \text{ es de azar} \\ \max_{x \in \Omega_X} \alpha(c, x), & \text{si } X \text{ es de decisión} \end{cases}$$

Básicamente, el procedimiento para suprimir una variable con el algoritmo de fusión consiste en combinar todas las evaluaciones que contienen a dicha variable en su dominio y después marginalizar la función resultante eliminando de su dominio a la variable. Ésta es la llamada *fusión*, que depende del tipo de variable a eliminar. El algoritmo requiere que la RE esté bien definida (Shenoy 1992, 1995).

Aplicamos esta técnica al problema del reactor. Comenzamos eliminando la variable  $C$  que conlleva combinaciones en el marco de  $\{D_2, C\}$ . La Figura 1.17 muestra los resultados; los detalles numéricos aparecen en la Tabla 1.5. Observemos que no hacemos ningún cálculo para hallar  $\beta \otimes \delta_2$  al ser  $\delta_2$  una e.i., pero  $\delta_2$  sí contribuye a la información sobre el dominio de la combinación: el dominio de  $\beta \otimes \delta_2$  es  $\{D_2, C\}$  mientras que el de  $\beta$  es  $C$ .

Ahora eliminamos el nodo  $A$ . Como  $A$  está en el dominio de sólo algunas e.u.,

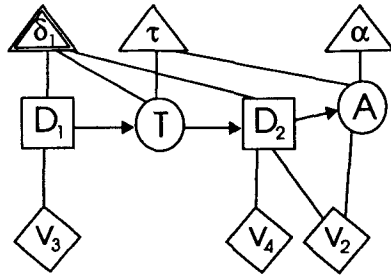


Figura 1.17: Fusión con respecto a  $C$  para el problema del reactor.

Tabla 1.5: Detalles de la fusión con respecto a  $C$ .

$\Omega_{\{D_2, C\}}$	$v_1$	$\beta \otimes \delta_2$	$v_1 \otimes \beta \otimes \delta_2$	$(v_1 \otimes \beta \otimes \delta_2)^{\downarrow D_2}$ $\equiv v_4$
$n \quad nc$	0	1	0	0
$c \quad ce$	8	.98	7.84	7.76
$c \quad cf$	-4	.02	-.08	
$a \quad nc$	0	1	0	0

debemos calcular una nueva e.p.  $\tau' = (\alpha \otimes \tau)^{\downarrow T}$  y utilizarla después para calcular la nueva e.u.  $v_5$ . La nueva RE se muestra en la Figura 1.18. Las Tablas 1.6 y 1.7 tienen todos los detalles.

El siguiente nodo a eliminar es  $D_2$ . Como es un nodo de decisión que no pertenece al dominio de ninguna e.p., combinamos todas las e.u. y e.i. que incluyen a  $D_2$  en su dominio y calculamos la marginal de la e.u. resultante, eliminando de su dominio la variable  $D_2$ . Es decir, calculamos  $(\delta_1 \otimes v_4 \otimes v_5)^{\downarrow \{D_1, T\}} = v_6$ . La e.i.  $\delta_1$  se incluye en esa combinación porque restringe las elecciones que pueden hacerse en  $D_2$ , y deben entonces considerarse al maximizar. La Figura 1.19a) y la Tabla 1.8 muestran los resultados. La columna de  $\Psi_{D_2}$  registra las alternativas de  $D_2$  donde se alcanzaron los máximos.

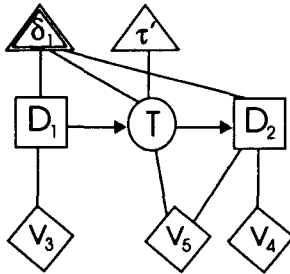


Figura 1.18: Fusión con respecto a  $A$  para el problema del reactor.

Tabla 1.6: Detalles de la fusión con respecto a  $A$ .

$\Omega_{\{T,A\}}$	$\alpha$	$\tau$	$\alpha \otimes \tau$	$(\alpha \otimes \tau)^{\downarrow T} \equiv \tau'$	$(\alpha \otimes \tau) / (\alpha \otimes \tau)^{\downarrow T}$
<i>nr ae</i>	.660	1	.660	1	.660
<i>nr al</i>	.244	1	.244		.244
<i>nr am</i>	.096	1	.096		.096
<i>m ae</i>	.660	0	0	.1	0
<i>m al</i>	.244	.288	.07		.7
<i>m am</i>	.096	.313	.03		.3
<i>b ae</i>	.660	.182	.120	.3	.40
<i>b al</i>	.244	.565	.138		.46
<i>b am</i>	.096	.437	.042		.14
<i>e ae</i>	.660	.818	.540	.6	.90
<i>e al</i>	.244	.147	.036		.06
<i>e am</i>	.096	.250	.024		.04

Tabla 1.7: Detalles de la fusión con respecto a  $A$  (continuación).

$\Omega_{\{T, D_2, A\}}$	$v_2$	$(\alpha \otimes \tau)/(\alpha \otimes \tau)^{\downarrow T}$	$v_2 \otimes (\alpha \otimes \tau)/(\alpha \otimes \tau)^{\downarrow T}$	$(v_2 \otimes (\alpha \otimes \tau)/(\alpha \otimes \tau)^{\downarrow T})^{\downarrow \{T, D_2\}}$ $\equiv v_5$
<i>nr n ae</i>	0	.660	0	0
<i>nr n al</i>	0	.244	0	
<i>nr n am</i>	0	.096	0	
<i>nr c ae</i>	0	.660	0	0
<i>nr c al</i>	0	.244	0	
<i>nr c am</i>	0	.096	0	
<i>nr a ae</i>	12	.660	7.92	5.496
<i>nr a al</i>	-6	.244	-1.464	
<i>nr a am</i>	-10	.096	-.960	
<i>m c ae</i>	0	0	0	0
<i>m c al</i>	0	.7	0	
<i>m c am</i>	0	.3	0	
<i>b c ae</i>	0	.40	0	0
<i>b c al</i>	0	.46	0	
<i>b c am</i>	0	.14	0	
<i>b a ae</i>	12	.40	4.80	.64
<i>b a al</i>	-6	.46	-2.76	
<i>b a am</i>	-10	.14	-1.40	
<i>e c ae</i>	0	.90	0	0
<i>e c al</i>	0	.06	0	
<i>e c am</i>	0	.04	0	
<i>e a ae</i>	12	.90	10.8	10.04
<i>e a al</i>	-6	.06	-.36	
<i>e a am</i>	-10	.04	-.4	

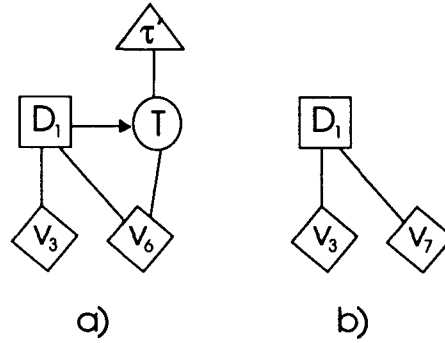


Figura 1.19: Fusión con respecto a  $D_2$  en a) y a  $T$  en b) para el problema del reactor.

Tabla 1.8: Detalles de la fusión con respecto a  $D_2$ .

$\Omega_{\{D_1, T, D_2\}}$			$v_4$	$v_5$	$\delta_1 \otimes v_4 \otimes v_5$	$(\delta_1 \otimes v_4 \otimes v_5)^{\downarrow\{D_1, T\}}$ $\equiv v_6$	$\Psi_{D_2}$
<i>hn</i>	<i>nr</i>	<i>n</i>	0	0	0	0	<i>n</i>
<i>nt</i>	<i>nr</i>	<i>c</i>	7.76	0	7.76	7.76	<i>c</i>
<i>nt</i>	<i>nr</i>	<i>a</i>	0	5.496	5.496		
<i>t</i>	<i>m</i>	<i>c</i>	7.76	0	7.76	7.76	<i>c</i>
<i>t</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	7.76	0	7.76	7.76	<i>c</i>
<i>t</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	0	.64	.64		
<i>t</i>	<i>e</i>	<i>c</i>	7.76	0	7.76	10.04	<i>a</i>
<i>t</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	0	10.04	10.04		

El nodo  $T$  se elimina a continuación. La Figura 1.19b) y la Tabla 1.9 muestran los resultados. Finalmente eliminamos el nodo  $D_1$ , como se muestra en la Tabla 1.10.

Esto completa el algoritmo de fusión. Una estrategia óptima se extrae conjuntamente de las funciones de decisión  $\Psi_{D_1}$  (Tabla 1.10) y  $\Psi_{D_2}$  (Tabla 1.8). La utilidad esperada de esta estrategia es  $(v_7 \otimes v_3)^{\downarrow\emptyset}(\diamond) = 8.128$  Mill.\$.

El número de operaciones realizadas es distinto que con un DI (ver Tabla 1.1)

Tabla 1.9: Detalles de la fusión con respecto a  $T$ .

$\Omega_{\{D_1, T\}}$		$\tau'$	$v_6$	$\tau' \otimes v_6$	$(\tau' \otimes v_6)^{+D_1} \equiv v_7$
$hn$	$nr$	1	0	0	0
$nt$	$nr$	1	7.76	7.76	7.76
$t$	$m$	.1	7.76	.776	9.128
$t$	$b$	.3	7.76	2.328	
$t$	$e$	.6	10.04	6.024	

Tabla 1.10: Detalles de la fusión con respecto a  $D_1$ .

$\Omega_{D_1}$	$v_7$	$v_3$	$v_7 \otimes v_3$	$(v_7 \otimes v_3)^{+\emptyset}(\diamond)$	$\Psi_{D_1}$
$hn$	0	0	0	8.128	$t$
$nt$	7.76	0	7.76		
$t$	9.128	-1	8.128		

sólo en que para eliminar  $A$  han hecho falta 17 multiplicaciones y 13 sumas en vez de 19 y 12 que requería el DI. El número total se eleva a 52 operaciones.

## 1.10 Comparación de los métodos

Especificamos en las Tablas 1.11 y 1.12 las características más importantes de los métodos gráficos analizados.

Los ArD resultan herramientas expresivas y flexibles, facilitan el seguimiento e interpretación de los resultados, y muestran estrategias a seguir además de la óptima. La utilización de asimetrías es directa y no requieren métodos de simetrización. Los DI, RE y DDS capturan asimetrías localmente, es decir, en la definición de cada nodo. Los ArD capturan asimetrías globales, de todo el problema.

Tabla 1.11: Propiedades de representación.

Propiedades	ArD	DI	DDS	RE
compacidad	no <sup>1</sup>	sí	sí	sí
modelos probabilísticos que soporta	condicionadas	condicionadas <sup>2</sup>	condicionadas <sup>2,3</sup>	cualquiera
dependencias probabilísticas explícitas	no	sí <sup>4</sup>	sí <sup>4</sup>	sí <sup>5</sup>
tratamiento de asimetrías con	enumeración explícita	árboles de distribución <sup>6</sup>	historias	e.i y marcos efectivos
preproceso innecesario	sí	no <sup>7</sup>	sí <sup>3</sup>	no
restricciones de información	orden completo <sup>8</sup>	orden parcial	orden parcial	orden parcial
utilidad separable	no	sí	no	sí

<sup>1</sup> Evitable, en parte, con coalescencia (*ad hoc*) y/o con árbol esquemático

<sup>2</sup> Tener condicionadas no es tan factible en modelos no causales

<sup>3</sup> Los órdenes de asignación de probabilidades implicados por el DI y el DDS han de ser compatibles y entonces suele ser necesario un preproceso

<sup>4</sup> Arcos hacia nodos de azar en el DI

<sup>5</sup> E.p., e.i. y arcos asociados

<sup>6</sup> Distribuciones compartidas, colapsadas y recortadas

<sup>7</sup> Siempre que se tenga factorización en condicionadas

<sup>8</sup> Afecta al aprovechamiento o no de la coalescencia, dependiendo de cómo se complete el orden



Tabla 1.12: Propiedades computacionales.

Propiedades	ArD	DI	DDS	RE
computación local para condicionadas	no <sup>1</sup>	sí	sí	sí <sup>2</sup>
divisiones innecesarias	sí <sup>3</sup>	sí <sup>4</sup>	sí <sup>4</sup>	no
aprovechamiento separabilidad de f. de utilidad	sí <sup>5</sup>	sí	sí	sí

<sup>1</sup>problema de los dos árboles y utilización de la distribución conjunta

<sup>2</sup> a veces no hace falta calcularlas

<sup>3</sup> a veces, en el preproceso de probabilidades (Shenoy, 1994a)

<sup>4</sup>a veces, en la inversión de arcos, al demandar condicionadas (Shenoy, 1994a)

<sup>5</sup>aunque su dominio no es explícito

Sin embargo, el tamaño del ArD crece exponencialmente con el número de variables del problema, y presenta el problema de los dos árboles en la representación y solución del problema, debido a la incapacidad para detectar las independencias condicionales. Las desventajas principales de los ArD se deben a que unen en el mismo diagrama la representación (difícil de automatizar) y la solución.

Los DI y las RE no requieren preproceso para la representación del problema, facilitando enormemente la comunicación entre el analista y el decisor. Los DI asimétricos capturan las asimetrías prácticamente como los ArD, y las independencias condicionales como los DI convencionales.

Los DDS recogen los aspectos asimétricos de forma gráfica, más compactamente que los ArD, y de forma analítica, a través de los distintos tipos de historias. Las historias mínimas contienen la información necesaria para la formulación del problema y las relevantes, la necesaria para la resolución. Esto revierte en una mayor independencia de los datos que los DI y las RE y en menos requisitos de almacenamiento, al menos en la etapa de formulación. Sin embargo, como vimos al resolver el problema del reactor, prácticamente se utilizan las historias completas, aunque de forma eficaz. A diferencia de los otros métodos, los DDS no permiten aprovechar la estructura separable de la función de utilidad lo que revierte en una pérdida de localidad. Como los ArD, los DDS requieren el preproceso de probabilidades (para rellenar la tabla de formulación), acudiendo para ello a otros métodos, como la inversión de arcos de su DI asociado.

Los DI y los DDS permiten identificar la información innecesaria del problema mediante la identificación de los *nodos irrelevantes*, ver Shachter (1988) y Covaliu (1994), simplificando el modelo inicial y disminuyendo la carga computacional.

A diferencia del resto de los métodos, las RE representan directamente cualquier modelo probabilístico, sin necesidad de realizar ningún preproceso. Esta ventaja no es tan importante si recordamos que asignar modelos con condicionadas es muy intuitivo (sobre todo, en modelos causales y cuando la asignación la realiza un experto). En estos casos es más natural utilizar un DI o un DDS. Las RE también se utilizan entonces, pudiendo deducirse las independencias condicionales (Shenoy, 1994b).

Las RE son más flexibles al ser el único método que no requiere un orden total de las variables de decisión (propiedad de *memorización*). Como consecuencia, presentarán el inconveniente de ofrecer eventualmente un mayor número de secuencias

posibles de borrado de nodos.

Las RE presentan en el propio diagrama las asimetrías estructurales mediante las e.i. El mismo efecto producen los DI pero en el nivel numérico, con los árboles de distribución, y los DDS con las historias. Su aprovechamiento en la fase de solución es posible gracias a los marcos efectivos (en las RE), las estructuras especiales de los árboles de distribución (en los DI) y las historias relevantes (en los DDS).

En las RE, la distribución de probabilidad conjunta puede descomponerse en funciones con dominios más pequeños que en los DI. Ello se debe a que los DI sólo permiten tener distribuciones condicionadas. Así, por ejemplo, la distribución de  $T$  tiene como dominio a  $\{D_1, A, T\}$  en el DI y sin embargo, a  $\{A, T\}$  en la RE. El árbol de distribución de  $T$  del DI se obtendría de la RE calculando  $\delta_1^{\downarrow\{D_1, T\}} \otimes \tau$ . Y el árbol de distribución de  $C$ , haciendo  $\beta \otimes \delta_2$ , aunque de esta forma no obtendríamos una distribución no especificada, aspecto que no permiten modelizar las RE. Resulta útil no tener que especificar ciertas distribuciones aunque no podrán responderse a muchas preguntas. SHM no dan un método para saber si un problema está o no completamente especificado. La propiedad anterior de las RE implica a su vez, mayor localidad en la fase de solución. Así, mientras para eliminar el nodo  $A$  de la RE trabajamos en el marco efectivo de  $\{T, D_2, A\}$  (que conlleva utilizar como máximo un marco de tres variables  $\{D_1, T, D_2\}$ , ver (1.2) más abajo), para eliminarlo del DI lo hacemos en  $\{D_1, T, D_2, A\}$ .

Sin embargo, la presentación de datos en árboles de distribución es más compacta que en las tablas de las RE, gracias a recursos tales como recortes y particiones. Para ello, basta observar por ejemplo, la compacidad del árbol de distribución de  $v_2$  (Figura 1.6) frente a la Tabla de  $v_2$  de la RE (Tabla 1.3). La RE no permite modelizar la irrelevancia del nodo  $A$  en la asignación de  $v_2$ , para los escenarios

$D_2 = n$  o  $c$ , los cuales además, comparten un subárbol. Esta propiedad confiere a los DI mayor expresividad que las RE para representar asimetrías.

Los DI asimétricos requieren que las variables condicionantes del árbol de distribución asociado a un nodo coincidan con aquéllas cuyos arcos inciden en ese nodo en el diagrama. Esto produce árboles demasiado extensos, en los que la búsqueda de los recortes se hace tediosa y poco eficiente, y donde se pierde la computación local. Proponemos solucionar esto distinguiendo en el DI dos tipos de arcos sobre los nodos de decisión: arcos de dependencia (sí son necesarios para la distribución del nodo) y arcos informativos o de memoria (variables cuyo resultado conoce el decisor cuando toma la decisión de ese nodo, pero que no afectan al conjunto de alternativas disponibles). También habría arcos mixtos de info-dependencia.

Los DI asimétricos presentan información duplicada en los árboles de distribución. Por ejemplo,  $T = nr$  con probabilidad 1 si  $D_1 = hn$  o  $nt$  en el árbol para  $T$  (ver Figura 1.6). El recorte de  $T$  en el árbol de  $D_2$  describe la misma información: si  $D_1 = hn$  o  $nt$ ,  $T = nr$  es la única posibilidad. Todo esto exige entonces que haya consistencia entre ambos árboles, aunque los recortes sean un recurso opcional para ganar en eficiencia. Con las RE no se tiene este problema pues primero se especifican las e.i., después se calculan los marcos efectivos y finalmente se especifican los valores numéricos de las e.p. y de las e.u. No hace falta especificar los escenarios posibles más de una vez; de aquí se deducen automáticamente los nuevos recortes.

Algunos árboles de distribución de los DI contienen información innecesaria. Por ejemplo, para obtener la Figura 1.11, sólo se utilizan 8 datos de los 12 que tiene la Figura 1.10, de la que procede. Prueba de ello es también que las operaciones realizadas para obtener -7.2 de la Figura 1.9, que son 2 multiplicaciones y 1 suma, no se realizan con ningún otro método. Esta desventaja proviene del hecho de que

la distribución de  $D_2$  inicial, que contiene los escenarios posibles, sólo la utilizamos al eliminar  $D_2$ . Y sin embargo, habría mayores ahorros si al añadir el arco  $(T, v_2)$  el algoritmo dedujese los recortes debidos a la secuencia  $D_1, T$  y  $D_2$  que aparece en el árbol de distribución de  $v_2$ , deducibles precisamente de la distribución de  $D_2$ . Pero el método de SHM no sistematiza este tipo de operación: no pueden crearse recortes o comparticiones nuevas al añadir un arco.

Las RE sí automatizan este aspecto: al eliminar  $A$  están teniendo en cuenta las restricciones que se representan en  $\delta_1$  sobre  $D_2$  ya que el marco efectivo  $\Omega_{\{T, D_2, A\}}$  de la Tabla 1.7 se calcula localmente según:

$$\delta_2^{\perp D_2} \otimes \delta_1^{\perp \{T, D_2\}} \otimes \iota_A, \quad (1.2)$$

donde  $\iota_A$  es la e.i. trivial  $\Omega_{\iota_A} = \{ae, al, am\}$ .

Las condiciones que se imponen al problema para que esté *bien definido* según cada método de representación, trae como consecuencia la incapacidad para modelizar algunas asimetrías. Así, los DI sólo exigen formar un grafo dirigido acíclico para que el problema esté bien definido. Las RE exigen condiciones más costosas de comprobar (Shenoy, 1995). En el problema del reactor, esto causa que ambos métodos no puedan modelizar una asimetría: la distribución condicionada de  $A$  es irrelevante si  $D_2 = c$  o  $n$ . Sin embargo, estamos permitiendo que  $A = ae, as$  o  $am$  cuando  $D_2 = n$  o  $c$ . Si quisiéramos modelizar esto en el DI, tendríamos un arco  $(D_2, A)$  en el DI, que crearía un ciclo. Los DDS sí modelizan esto a través de la función nodo siguiente: el nodo siguiente a  $D_2 = c$  es  $C$  y a  $D_2 = a$  es  $A$ , como puede verse en la Figura 1.14 o en la Tabla 1.2.

Las RE no realizan las divisiones innecesarias (y sus correspondientes multiplicaciones compensatorias) que realizan el resto de métodos en determinadas situaciones, ver Shenoy (1994a). En general, con potenciales arbitrarios y factorización

aditiva de la función de utilidad, no pueden evitarse las divisiones si queremos tener computación local. En esos casos, la eficiencia de las RE, DI y DDS son similares.

Las RE representan las distribuciones de probabilidad mediante nodos. Esto implica mayor número de nodos y arcos en el diagrama, y por tanto, crea mayor confusión en la representación de problemas de gran dimensión. Por otra parte, precisamente por no realizar divisiones innecesarias (como consecuencia de no demandar condicionadas), las tablas del algoritmo de fusión que contienen las funciones de decisión de cada nodo de decisión no proporcionan la utilidad esperada en ese nodo. Esto podría resultar un inconveniente a la hora de realizar análisis de sensibilidad.

Las diferencias entre las operaciones realizadas por los métodos tienen que ver con las propiedades vistas. Así, aunque en este ejemplo sea inapreciable, los ArD realizan más operaciones en la fase de preproceso que el resto de los métodos por no realizar computación local, con el consiguiente incremento de requisitos de memoria. Los DI realizan operaciones innecesarias debido a la falta de implementación de los recortes y comparticiones en el momento de añadir un arco. Las RE realizan algunas operaciones que no se hacen con el DI. En nuestro ejemplo, 2 sumas en la Tabla 1.6 para  $T = nr$ , que calculan la marginal de  $A$ , que se tenía ya originalmente. El DI trabaja con una distribución atómica determinística que evita las 2 sumas anteriores. Los DDS realizan operaciones similares a los ArD pero el preproceso se hace localmente. Sin embargo, como vimos en nuestro ejemplo, las referencias recursivas del algoritmo se hacen a través de las historias completas, aunque al menos las historias relevantes eviten cálculos repetidos. Al no poder aprovechar la separabilidad de la función de utilidad, se trabaja en conjuntos con mayor número de variables y se han de realizar cálculos innecesarios para definir la utilidad de partida.

## 1.11 Conclusiones y recomendaciones

La introducción de herramientas gráficas para la representación y evaluación de problemas de decisión ha posibilitado, entre otras cosas, la automatización de algunas partes del AD. La principal contribución de este capítulo es poner de manifiesto las diferencias entre las herramientas existentes al tratar problemas asimétricos de decisión. Hemos detallado las formas de asimetría en los problemas de decisión. Además, hemos extendido el método de DI asimétricos de SHM a varios nodos de valor. Todo el estudio se ha hecho desde un punto de vista crítico y se ha ilustrado con un ejemplo. Las tablas de propiedades suministradas junto con el análisis comparativo pueden ser de gran ayuda a la hora de tener que elegir un método.

Prueba de este avance en la implementación es el numeroso software disponible, como *Supertree* de McNamee y Celona (1990) para ArD, *InDia* de Gordon y Nease (1991) y *Diana* de García de la Cruz (1993) para DI, y *Valnet* de Alberite (1995) para RE, entre otros.

Es evidente que la eficiencia de los cuatro métodos aplicados a nuestro problema no queda demostrada contando solamente el número de operaciones. Lo interesante sería ver en general cómo crece tal número en función del tamaño del problema. Pero esto depende en gran medida de la estructura del problema. Además, existe otro tipo de operaciones que debe tenerse en cuenta:

En la fase de modelización,

- La definición de las variables y sus rasgos asimétricos:
  - en los ArD, el preproceso para representar las creencias
  - en los DI, los árboles de distribución
  - en los DDS, las historias mínimas, el preproceso para representar las cre-

encias y el cálculo de la utilidad conjunta

– en las RE, las evaluaciones indicadoras.

- Ver si ha sido necesario crear configuraciones ficticias. En nuestro ejemplo, sólo las RE crearon para  $C$  el estado  $nc$ , para indicar irrelevancia del valor de  $C$ . Sin embargo, es más agradable semánticamente no explicar qué significado tiene  $nc$ , como hicieron los demás métodos. También se creó  $nr$  para la variable  $T$ , en todos los métodos salvo en los ArD, y  $n$  para  $D_2$  sólo en las RE y DI.

En la fase de solución,

- Comprobar si una operación a realizar es o no trivial: las operaciones con ceros y unos no las teníamos en cuenta por ser 'baratas', pero obviamente hay que detectarlas y ocupan espacio en memoria. En esto, las RE son quizá las menos eficientes.
- Contar cuántas búsquedas de información almacenada se realizan en la eliminación de nodos y cuál es el máximo número de configuraciones utilizadas en ello.
- Contar cuál es el dominio utilizado con más variables durante la ejecución del algoritmo.

Dado que la filosofía de cada método es diferente, es difícil encontrar una forma de medir todos estos aspectos en una escala común cuasi cuantitativa. Para recomendar entonces una de estas técnicas, hacemos la siguiente apreciación final: consideramos que los DDS son una mera traducción automática de los ArD con mejoras en la detección de independencias condicionales gracias a la utilización de DI; las RE, a pesar de automatizar eficientemente los escenarios posibles mediante los marcos efectivos, son quizá menos intuitivas. Los DI, una vez extendidos aquí al caso



de varios nodos de valor, constituyen una herramienta amigable, permitiendo una descripción casi directa del problema y permitiendo dejar elementos sin especificar. Consideraremos, por ello, a los DI como punto de partida en lo que sigue.

## Capítulo 2

# Diagramas de influencia bajo información parcial

### 2.1 Introducción

Los diagramas de influencia (DI) (Shachter (1986), Smith (1989a, 1989b)) se utilizan, tal y como vimos en el Capítulo 1, para representar y resolver problemas complejos de Inferencia y de AD. Un Bayesiano que usa DI debe proporcionar entradas precisas de sus juicios (preferencias y creencias) en los nodos. Por otra parte, los Bayesianos robustos, ver por ejemplo Berger (1994), han expuesto ampliamente las dificultades de proporcionar tales asignaciones de forma precisa. En la práctica es frecuente encontrar decisores que prefieren soluciones flexibles y abiertas a modificaciones posteriores, antes que soluciones determinadas bajo la hipótesis de que sus juicios iniciales son absolutos y permanentes. Hay que tener en cuenta que los datos de entrada son constantemente revisados a medida que el decisor comprende las implicaciones y posibles inconsistencias de sus juicios.

Por tanto, parece natural preguntar qué hacer una vez que hemos construido un

DI y tan sólo somos capaces de asignar algunas restricciones sobre las probabilidades y las utilidades. Este es el tema de este capítulo, que puede verse como un primer paso hacia una aproximación coherente al análisis de sensibilidad en DI. Con este último podrán explorarse las consecuencias de perturbaciones sobre las probabilidades y utilidades en los resultados del análisis, e investigar así la robustez de las conclusiones del problema de decisión.

Los fundamentos para nuestro marco son los de Ríos Insua (1992). Allí se sugiere un modelo para creencias y preferencias imprecisas a través de una clase de distribuciones de probabilidad y una clase de funciones de utilidad. Las creencias se modifican aplicando la fórmula de Bayes a cada miembro de la clase. Un modelo paramétrico asocia a cada alternativa  $a_j$  una función de evaluación  $\Psi_j(w)$ , típicamente la utilidad esperada (u.e.), que depende de parámetros  $w \in S$  que modelizan la imprecisión en las creencias y preferencias del decisor: una alternativa  $a_j$  es a lo sumo tan preferida como una alternativa  $a_k$  si y sólo si  $\Psi_j(w) \leq \Psi_k(w), \forall w \in S$ . En consecuencia, debemos buscar alternativas no dominadas.

Implementamos este marco cuando el problema de decisión está modelizado mediante un DI. Después de introducir los DI bajo información parcial, sugerimos cómo calcular las alternativas no dominadas en él. Los algoritmos para el cálculo de alternativas óptimas en DI convencionales pueden generalizarse para calcular las alternativas no dominadas en DI bajo información parcial. Damos reglas eficientes para el proceso, así como un análisis de aspectos relacionados con la tarea de encontrar dónde será necesaria información adicional.

Un ejemplo sugiere un problema potencial: el tamaño del conjunto no dominado puede crecer enormemente a medida que procedemos hacia atrás en los cálculos. Por tanto, introduciremos algunos criterios adicionales para limitar el tamaño de los

conjuntos, y eventualmente, escoger una alternativa no dominada. Conjeturamos que para otros modelos gráficos como los estudiados en el Capítulo 1, los procedimientos son similares. Un resumen de este capítulo puede verse en Bielza, D. Ríos Insua y S. Ríos Insua (1996).

## 2.2 Diagramas de influencia bajo información parcial

Suponemos que es conveniente modelizar un problema de AD a través de un DI estructural, es decir, un grafo dirigido acíclico  $G = (N, A)$ , cuyo conjunto de nodos  $N$  está particionado en tres subconjuntos (ver Capítulo 1): nodos de decisión  $i \in D$ , nodos de azar  $i \in C$ , y un nodo de valor  $v$ , sin sucesores.  $C(i)$  denota los predecesores directos del nodo  $i$  en el grafo.

Supondremos v.a. que toman un número finito de valores y decisiones con un número finito de alternativas.  $\Omega_i$  denotará el conjunto donde toma valores la variable  $i$ .  $\Omega_J$  con  $J = \{n_1, \dots, n_r\} \subset N$  indicará el espacio  $\Omega_{n_1} \times \dots \times \Omega_{n_r}$  y  $x_J$  el vector  $(x_{n_1}, \dots, x_{n_r})$ . Además, las decisiones están totalmente ordenadas, es decir, existe un camino dirigido que contiene a todas ellas.

Consideramos el caso en el que hemos construido un DI estructural pero sólo podemos recoger información parcial sobre las asignaciones necesarias en los nodos de azar (distribuciones de probabilidad) y de valor (función de utilidad), en consonancia con el análisis Bayesiano robusto, ver Berger (1994). Estas asignaciones se expresarán ahora de forma paramétrica.

**Definición 2.1** *Un DI bajo información parcial (DIIP) es un DI estructural tal que:*

- *En cada nodo de azar  $i$ , las tablas de probabilidad (posiblemente) condicionadas dependen además de algunos parámetros  $w_i \in S_i$ : asignamos una clase de distribuciones de probabilidad  $\{\pi_i(x_i|x_{C(i)}, w_i)\}_{w_i \in S_i}$ , con  $x_{C(i)}$  valores que las v.a.  $X_{C(i)}$  asociadas a los nodos  $C(i)$  pueden tomar, y  $S_i$  el conjunto paramétrico correspondiente.*
- *En el nodo de valor  $v$ , la utilidad esperada es una función de los predecesores condicionales  $C(v)$  y de algunos parámetros  $w_v \in S_v$ : asociamos al nodo  $v$  la clase de utilidades esperadas  $\{u(x_{C(v)}|w_v)\}_{w_v \in S_v}$ .*

Por tanto, consideramos DI en los que hemos asignado clases de distribuciones de probabilidad en los nodos de azar y una clase de funciones de utilidad en el nodo de valor.

### Ejemplo 2.1

El ejemplo de la Figura 2.1 ilustra el tipo de diagramas en los que estamos interesados. En este ejemplo tenemos dos decisiones a tomar, que se denotan por  $D_1$  y  $D_2$ . Para la primera, hay dos alternativas  $d_{11}$  y  $d_{12}$ . Para la segunda,  $d_{21}$ ,  $d_{22}$  y  $d_{23}$ . Tenemos también dos v.a.  $\Theta_1$  y  $\Theta_2$ . La primera depende de  $D_1$  y toma dos valores  $\theta_{11}$  y  $\theta_{12}$ . Estamos seguros de las asignaciones  $P(\theta_{11}|d_{11}, w) = P(\theta_{12}|d_{11}, w) = .5$ . Sin embargo, no estamos seguros de cómo conseguir información precisa cuando se toma  $d_{12}$ , por lo que modelizamos  $P(\theta_{11}|d_{12}, w) = w_2$ ,  $P(\theta_{12}|d_{12}, w) = 1 - w_2$ ,  $w_2 \in [0, 1]$ . De manera similar,  $\Theta_2$  toma dos valores  $\theta_{21}$  y  $\theta_{22}$ , y  $P(\theta_{21}|w) = w_1$ ,  $P(\theta_{22}|w) = 1 - w_1$ ,  $w_1 \in [.4, .55]$ . Los predecesores del nodo de valor son  $\Theta_1$ ,  $\Theta_2$  y  $D_2$ . Omitimos el arco de memoria ( $D_1, D_2$ ). ◁

Para simplificar la notación, escribiremos  $w = ((w_i)_{i \in C}, w_v)$ , donde  $C$  es el con-

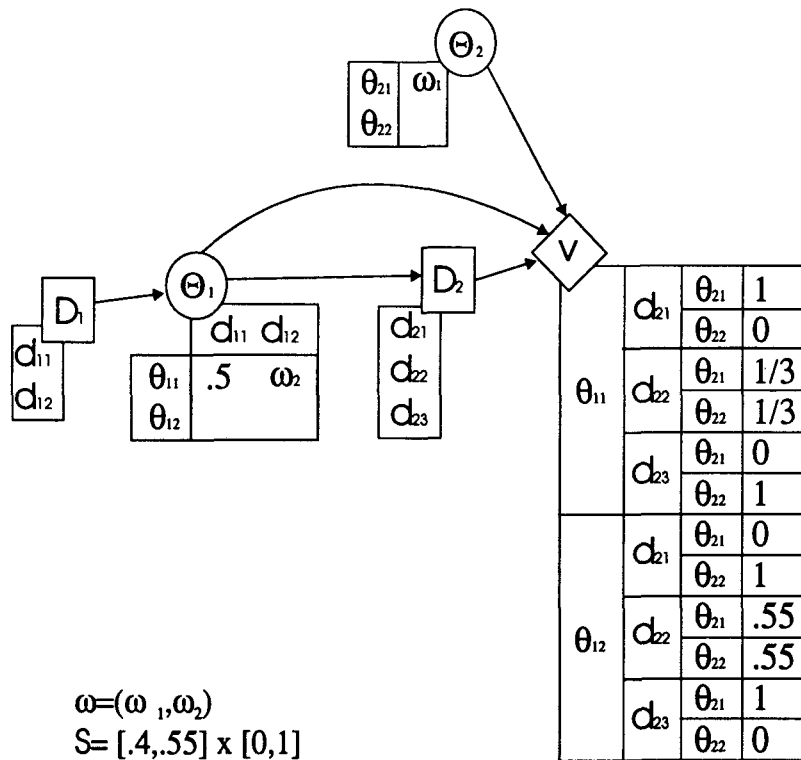


Figura 2.1: Ejemplo de DIIP.

junto de nodos de azar, y  $w \in S$ , con  $S = \prod_{i \in C} S_i \times S_v$  representando las restricciones proporcionadas por el decisor sobre sus juicios. Hacemos depender así de un mismo parámetro las utilidades y probabilidades. Notemos que los DI convencionales, como en Shachter (1986), son un caso particular de DIIP en los que  $S$  es un conjunto unitario, como demandan los fundamentos de la Teoría de la Decisión Bayesiana.

## 2.3 Alternativas no dominadas en DI

### 2.3.1 Transformaciones en el diagrama

Como indicamos en la introducción, nuestro objetivo computacional será el conjunto de alternativas no dominadas (en el sentido de Pareto) respecto a una clase de u.e. Esto se puede hacer en un DIIP aplicando operaciones similares a las usadas cuando se resuelve un DI convencional. Las motivaciones para esto último son:

- La actualización de creencias en el caso impreciso se hace aplicando la fórmula de Bayes a cada miembro de la clase de distribuciones de probabilidad, ver Ríos Insua (1992).
- El cálculo de las alternativas no dominadas se puede realizar vía programación dinámica siempre que las funciones objetivo sean separables y monótonas, ver Yu (1986). Esto ocurre en nuestro contexto, considerando nuestra parametrización y teniendo en cuenta que tomar esperanzas (sumas y multiplicaciones por probabilidades, i.e. funciones no negativas) induce funciones objetivo monótonas y separables.

En la literatura encontramos aplicaciones de la programación dinámica para calcular estrategias no dominadas, como en Brown y Strauch (1965), en el contexto de procesos de decisiones secuenciales con horizonte finito. White y El-Deib (1986) consideran una función de utilidad imprecisa y un número finito de estados y acciones. Bajo ciertas condiciones, obtienen estrategias óptimas para algún valor del parámetro que modeliza la imprecisión (es decir, calculan estrategias potencialmente óptimas, que veremos más adelante).

Aplicamos al DIIP tres tipos de transformaciones que mantienen su estado de información (*transformaciones que preservan el valor*):

**1. Eliminación de un nodo de azar** *Un nodo de azar  $i$  cuyo único sucesor es el nodo de valor  $v$  puede ser eliminado de un DIIP, heredando  $v$  los predecesores condicionales de  $i$ .*

Esta transformación representa la toma de esperanzas condicionadas. La herencia de nodos es como en los DI convencionales (Shachter, 1986). Notar sin embargo, que las esperanzas tienen que tomarse paramétricamente. Antes de eliminar el nodo  $i$ , tenemos una función de utilidad esperada  $u(x_{C(v)}|w)$  asociada con cada combinación  $x_{C(v)}$  de valores de los predecesores, donde  $C(v)$  designa los predecesores de  $v$  antes de la reducción. Después, obtenemos la u.e. dados los nuevos predecesores  $C'(v)$  de  $v$ : asociamos al nodo  $v$  nuevas funciones  $u'$  definidas mediante

$$u'(x_{C'(v)}|w) = \sum_{x_i \in \Omega_i} u(x_{C(v)}|w) \pi_i(x_i|x_{C(i)}, w).$$

**Ejemplo 2.1 (Cont.)**

En el ejemplo anterior, podemos eliminar el nodo de azar  $\Theta_2$  obteniendo la Figura 2.2.

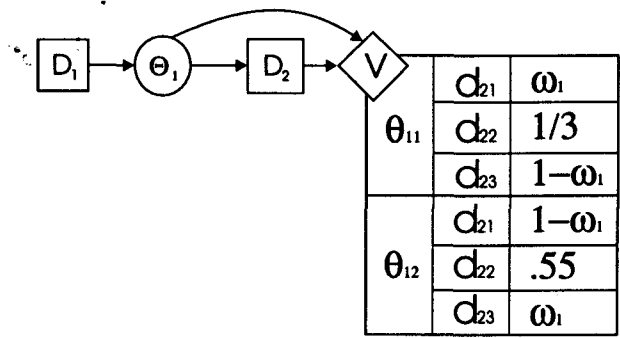


Figura 2.2: Eliminación del nodo de azar  $\Theta_2$ .

◁



**2. Inversión de arcos** *Un arco  $(i, j)$  entre los nodos de azar  $i$  y  $j$ , tal que no hay otro camino dirigido entre  $i$  y  $j$ , puede ser reemplazado por el arco  $(j, i)$ .*

Esta transformación es la representación (paramétrica) de la fórmula de Bayes. La herencia de nodos es como en los DI convencionales. Las probabilidades cambian aplicando la fórmula de Bayes paramétricamente de forma que:

$$\pi'_j(x_j|x_{C'(j)}, w) = \sum_{x_i \in \Omega_i} \pi_j(x_j|x_{C(j)}, w) \pi_i(x_i|x_{C(i)}, w)$$

$$\pi'_i(x_i|x_{C'(i)}, w) = \frac{\pi_j(x_j|x_{C(j)}, w) \pi_i(x_i|x_{C(i)}, w)}{\pi'_j(x_j|x_{C'(j)}, w)}.$$

Los resultados que ayudan a limitar, para no perder información, el número de arcos nuevos introducidos, siguen siendo válidos (Smith 1989a, 1989b).

### Ejemplo 2.2

El arco  $(i, j)$  en la Figura 2.3 se invierte como se indica. ◁

Notar que después de varias inversiones la notación puede hacerse bastante incómoda y puede entonces que tengamos que introducir una reparametrización. Esto ayudaría a automatizar estas operaciones. Así, en el Ejemplo 2.2, podríamos renombrar

$$w_3 = \frac{w_2 w_1}{w_2 w_1 + .6(1 - w_1)}.$$

Para la operación final suponemos que los nodos sumidero ya se han eliminado (Shachter, 1986).

**3. Eliminación de un nodo de decisión** *Suponiendo que no hay sumideros, un nodo de decisión  $i$  que es predecesor de  $v$  y cuyos predecesores incluyen a los de  $v$  (excepto  $i$ ), puede eliminarse del diagrama, calculando las funciones de utilidad esperada de las alternativas no dominadas, condicionadas a los valores de sus predecesores.*

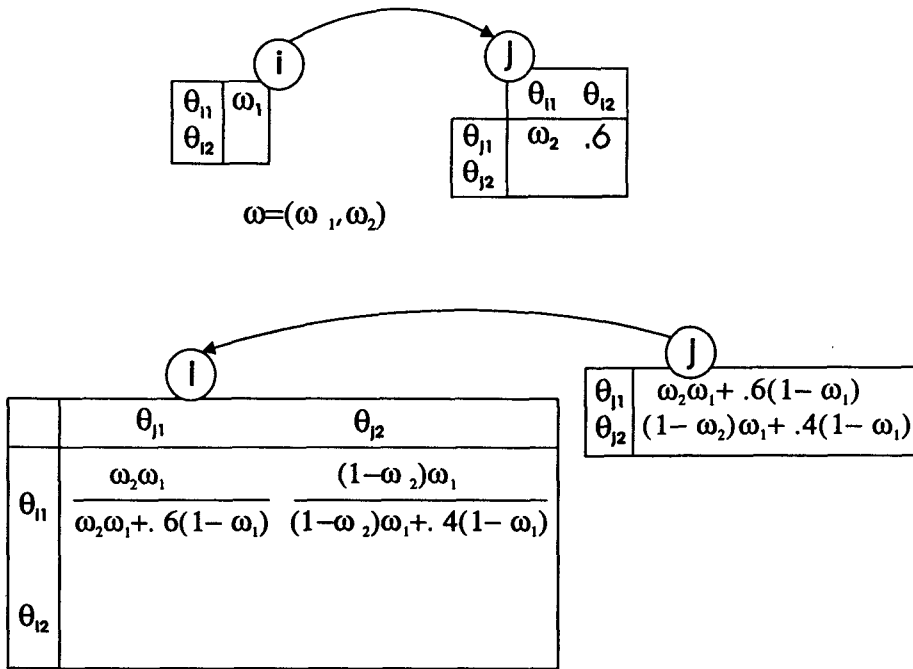


Figura 2.3: Un ejemplo de inversión de arcos.

Esta transformación representa el cálculo de las alternativas no dominadas en cada nodo de decisión. La herencia de nodos es como en los DI convencionales. Las alternativas no dominadas, dado el estado de información del decisor en ese nodo, se registran vía

$$d_i^*(x_{C'(v)}) = \arg \text{ndom}_{x_i \in \Omega_i, w \in S} u(x_i, x_{C'(v)} | w),$$

y sus u.e. se registran como

$$u'(x_{C'(v)} | w) = \text{ndom}_{x_i \in \Omega_i, w \in S} u(x_i, x_{C'(v)} | w).$$

Notemos que el conjunto  $d_i^*$  de alternativas no dominadas es, a menudo, no unitario y sus elementos no equivalentes. Por eso, dado  $x_{C'(v)}$ ,  $u'(x_{C'(v)} | w)$  puede ser un vector de funciones (ver Figura 2.4 más abajo).

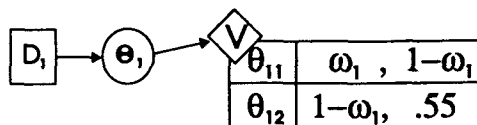
Al reducir un nodo de decisión tenemos que resolver una serie de problemas de optimización: por ejemplo, si queremos comprobar si una alternativa  $a_j$  asociada con  $\Psi_j(w) = u(x_j, x_{C'(v)}|w)$  no está dominada por  $a_k$ , asociada con  $\Psi_k(w) = u(x_k, x_{C'(v)}|w)$ , debemos resolver

$$\min_{w \in S} \Psi_k(w) - \Psi_j(w).$$

Si el valor óptimo es negativo entonces  $a_j$  no está dominada por  $a_k$ .

### Ejemplo 2.1 (Cont.)

Procedemos ahora a la eliminación de  $D_2$  cuyo resultado puede verse en la Figura 2.4.



$$d_{D_2}^*(\theta_{11}) = \{d_{21}, d_{23}\}$$

$$d_{D_2}^*(\theta_{12}) = \{d_{21}, d_{22}\}$$

Figura 2.4: Eliminación del nodo de decisión  $D_2$ .

Por ejemplo, podemos ver que  $d_{21} \in d_{D_2}^*(\theta_{11})$  porque los valores óptimos de los problemas

$$\min_{w_1 \in [.4, .55]} (1/3 - w_1)$$

$$\min_{w_1 \in [.4, .55]} (1 - w_1 - w_1)$$

son negativos:  $-13/60$  y  $-0.1$ , respectivamente. Así,  $d_{21}$  no está dominada por  $d_{22}$  ni por  $d_{23}$ , cuando  $\Theta_1$  toma el valor  $\theta_{11}$ . Por otra parte,  $d_{22} \notin d_{D_2}^*(\theta_{11})$  al ser positivos los valores óptimos de

$$\min_{w_1 \in [.4, .55]} (w_1 - 1/3)$$

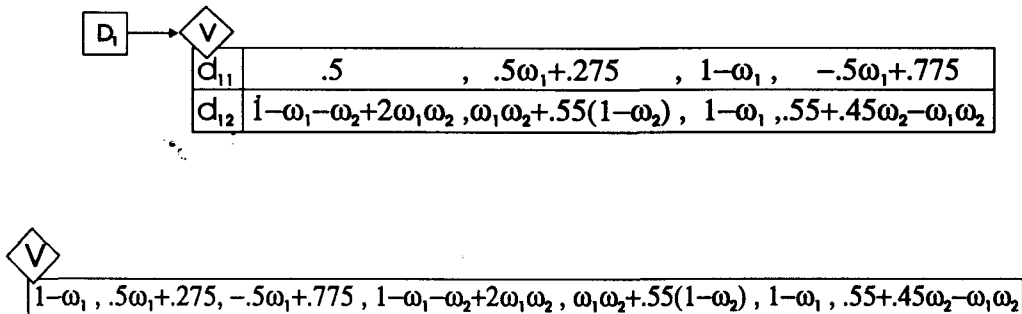
$$\min_{w_1 \in [.4, .55]} (1 - w_1 - 1/3)$$

que valen  $1/15$  y  $7/60$  respectivamente. Cualquiera de estos dos óptimos nos lleva a descartar  $d_{22}$  por estar dominada, cuando  $\Theta_1$  toma el valor  $\theta_{11}$ .  $\triangleleft$

Las operaciones anteriores pueden combinarse de forma similar a la empleada en la evaluación de DI precisos, constituyendo el algoritmo de evaluación del nuevo tipo de diagramas introducidos. En cada nodo de decisión registramos las alternativas no dominadas, junto con las u.e. en forma paramétrica. En lugar de repetir el algoritmo, como en Shachter (1986), con los cambios apropiados en las operaciones elementales, lo ilustramos en nuestro ejemplo.

### Ejemplo 2.1 (Cont.)

Después de las reducciones previas nos queda la Figura 2.5.



$$d_{D_1}^* = \{d_{11}, d_{12}\}$$

Figura 2.5: Eliminación de los nodos  $\Theta_1$  y  $D_1$ .

$\triangleleft$

En la siguiente sección explicamos en detalle los pasos seguidos hasta obtener estos diagramas de la Figura 2.5.

### 2.3.2 Análisis de un problema

En la eliminación de  $D_2$ , Figura 2.4, obtuvimos conjuntos no unitarios de alternativas no dominadas. Como consecuencia, al eliminar la variable  $\Theta_1$ , hemos de calcular un número mayor de esperanzas que en los DI convencionales, según las combinaciones posibles de u.e. presentes en la tabla del nodo de valor. En general, la tabla del nodo de valor será como la Tabla 2.1, donde  $\theta_1, \dots, \theta_r$  son los valores que toma el nodo de azar  $i$  y  $u_{kl}$  es  $u(x_{C(v)\setminus\{i\}}, \theta_k|w)$  situada en la columna  $l$  de la tabla. Para cada  $x_{C(v)\setminus\{i\}}$ , y cada  $x_{C(i)\setminus C(v)}$  tendremos que calcular un total de  $j_1 \times \dots \times j_r$  esperanzas. Así, el número de u.e. que hay que guardar en cada tabla del nodo de valor va aumentando a medida que eliminamos nodos.

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \begin{array}{|c|cc} \hline & \theta_1 & u_{11} \ u_{12} \ \cdots \ u_{1j_1} \\ \hline x_{C(v)\setminus\{i\}} & \vdots & \vdots \\ \hline & \theta_r & u_{r1} \ u_{r2} \ \cdots \ u_{rj_r} \\ \hline \end{array} \\ \vdots \end{array}$$

Tabla 2.1: Tabla genérica del nodo de valor.

Supondremos que al eliminar un nodo de azar, siempre vamos a seguir cierto orden en la elección de las u.e. que van a ponderarse en la esperanza. En concreto, supondremos que los elementos elegidos cuyos índices van a variarse primero por

columnas son los de la última fila de la tabla, después los de la penúltima, . . . , los de la primera. En el ejemplo, Figura 2.4, el orden es  $w_1$  con  $1 - w_1$ ;  $w_1$  con .55;  $1 - w_1$  con  $1 - w_1$ ;  $1 - w_1$  con .55. Esto facilita la automatización del algoritmo y la recuperación de la solución, como expondremos más adelante.

Para terminar de resolver el ejemplo, debemos calcular las alternativas no dominadas al eliminar  $D_1$ . Notar que las 8 u.e. en el nodo de valor corresponden a 8 estrategias hasta ahora elegidas de entre las 18 posibles. Las dominancias entre éstas pueden producirse dentro de la misma fila de la tabla o en filas distintas. Así, dado un nodo de decisión  $D$  a eliminar, debemos resolver  $\forall z, y \in \Omega_D$ , los problemas de optimización:

$$[c_{zy}] \quad \min_{w \in S} u^h(z, x_{C'(v)}|w) - u^l(y, x_{C'(v)}|w)$$

$$[f_{hl}] \quad \min_{w \in S} u^h(z, x_{C'(v)}|w) - u^l(z, x_{C'(v)}|w),$$

donde el superíndice de la u.e. denota su posición dentro de la fila a la que pertenece.  $[c_{zy}]$  trata la dominancia en filas distintas mientras que  $[f_{hl}]$  es en la misma fila siendo en este caso  $h \neq l$ .

En el ejemplo, se obtiene que  $\min_{w \in S} u^4(d_{11}|w) - u^1(d_{11}|w)$  es cero y como  $\min_{w \in S} u^1(d_{11}|w) - u^4(d_{11}|w)$  es -0.075, la estrategia correspondiente a  $u^1(d_{11}|w)$  (tomar primero  $D_1 = d_{11}$ , y elegir después  $D_2 = d_{21}$ ) está dominada por la correspondiente a  $u^4(d_{11}|w)$  (tomar primero  $d_{11}$ , y si ocurre  $\theta_{11}(\theta_{12})$  tomar  $d_{23}(d_{22})$ ). Este es un problema del tipo  $[f_{hl}]$ . No hay más relaciones de dominancia. El último diagrama de la Figura 2.5 recoge el resultado final.

### 2.3.3 Obtención de todas las estrategias no dominadas mediante el algoritmo de evaluación de DIIP

Demostremos ahora que con el algoritmo de evaluación de DIIP se obtienen todas las estrategias no dominadas del problema de decisión asociado.

**Proposición 2.1** *Si  $N$  denota el conjunto formado por todas las estrategias no dominadas del problema (correspondería a las obtenidas si resolviéramos el problema transformándolo en una tabla de decisión) y por  $N_A$  el conjunto de estrategias no dominadas obtenidas por el algoritmo de evaluación de DIIP. Entonces,  $N = N_A$ .*

#### **Demostración**

Supongamos que  $\exists \delta \in N$  y  $\delta \notin N_A$ . Supongamos también que el algoritmo ha reducido cierto nodo de decisión  $D$ , calculando los conjuntos  $d_D^*(x_{C'(v)})$ . Si  $\delta$  afirma escoger  $d \in \Omega_D$  cuando  $X_{C'(v)} = x_{C'(v)}$ , como  $\delta \notin N_A$ , existirá  $d' \in d_D^*(x_{C'(v)})$  que domina a  $d$ . Sea esta etapa del algoritmo la primera (hacia atrás) en que ocurre esto con  $\delta$ . Como las esperanzas inducen funciones monótonas y separables, basta tomar una estrategia  $\delta'$  que escoja  $d'$  cuando  $X_{C'(v)} = x_{C'(v)}$ , y en el resto de su definición coincida con  $\delta$  hacia atrás. Se tiene que  $\delta'$  domina a  $\delta$  lo que conduce a una contradicción.

Recíprocamente, supongamos que  $\exists \delta \in N_A$  y  $\delta \notin N$ . Existe entonces otra estrategia  $\delta'$  que domina a  $\delta$ . Se tiene que  $\delta' \notin N$  pues en caso contrario  $\delta' \in N_A$  lo cual lleva a una contradicción ( $\delta, \delta' \in N_A$  y  $\delta$  está dominada por  $\delta'$ ). Por tanto,  $\exists \delta''$  que domina a  $\delta'$ . De nuevo se deduce que  $\delta'' \notin N$  (pues si  $\delta'' \in N$  entonces  $\delta'' \in N_A$  y domina también a  $\delta$  por la transitividad de la relación de dominancia). Continuando el proceso se llega a que  $N = \emptyset$  lo cual es una contradicción al disponer de un conjunto finito de estrategias.  $\square$

#### 2.3.4 Reglas para la eliminación eficiente de un nodo de decisión

Damos aquí algunas reglas para el cálculo eficiente de alternativas no dominadas al eliminar un nodo de decisión  $D$ .  $\tau'$  denota la tabla del nodo de valor anterior a la eliminación de  $D$ . Si  $\tau'$  se obtuvo a partir de otra tabla  $\tau$  —correspondiente a la eliminación de otro nodo de decisión—, mediante la eliminación de un nodo  $i$ , distinguimos dos reglas según el tipo de nodo que sea  $i$ :

##### Regla 1

Si  $i$  es de azar: dos u.e. de una misma fila de  $\tau'$  obtenidas con exactamente las mismas u.e. de  $\tau$  excepto una de ellas, no requieren ser comparadas para comprobar la relación de dominancia entre ellas en la eliminación de  $D$ . Es decir, no será necesario resolver un problema del tipo  $[f_{hl}]$ . Esto es obvio debido a que equivale a comparar elementos de una misma fila en  $\tau$ , los cuales sabemos que no se dominan entre sí. La detección de estas comparaciones innecesarias puede automatizarse fácilmente si se ha seguido un orden prefijado (como el ya indicado) en el cálculo de las esperanzas.

En el ejemplo, si numeramos las 8 utilidades  $u_1, \dots, u_8$  del primer diagrama de la Figura 2.5, comenzando por la primera fila, resultan innecesarias las comparaciones de  $u_{2k+1}$  con  $u_{2k+2}$ , con  $k = 0, 1, 2, 3$ . Con esta regla, evitamos 8 problemas  $[f_{hl}]$ .

##### Regla 2

Si  $i$  es de decisión (siendo por tanto, ambos nodos predecesores de  $v$  en el DIIP que contiene a  $\tau$ ): no será necesario resolver ningún problema  $[f_{hl}]$  al eliminar  $D$ . Se debe a que en  $\tau$  ya se estudiaron las dominancias de elementos que en  $\tau'$  forman parte de una misma fila.



Las siguientes reglas tienen relación con las propiedades de la relación de dominancia.

### Regla 3

Si una alternativa resulta dominada por otra, se descartará del proceso de resolución de problemas  $[c_{zy}]$  y de  $[f_{hl}]$ .

### Regla 4

La relación de dominancia cumple propiedades tales como irreflexiva, asimétrica, transitiva... que ayudan a deducir comparaciones innecesarias de alternativas al eliminar  $D$ .

En el ejemplo, numeramos las estrategias asociadas a  $u_1, \dots, u_8$  de la Figura 2.5. En la Tabla 2.2 recogemos si la estrategia de la fila  $i$  está o no dominada por la de la columna  $j$  ( $i, j = 1, \dots, 8$ ).  $N$  significa *no* y  $S$  *sí*; el signo - indica que no ha sido necesario estudiar la dominancia del par de estrategias asociadas.

Supongamos que la tabla se ha ido rellenando ordenadamente por filas. Los elementos de la diagonal de la tabla responden trivialmente a la propiedad irreflexiva de la relación de dominancia (regla 4). La regla 1 se aplica desde un principio a las celdas (1,2), (3,4), (5,6), (7,8) y sus simétricas en la tabla. En la fila y columna 7 se ahorran todas las comparaciones al ser  $u_7 \equiv u_3$  y la estrategia asociada a  $u_3$  ya estudiada. La columna 1 y celdas (1, $j$ ),  $j = 5, 6, 7, 8$  aparecen con el símbolo - como consecuencia de la regla 3: en la fila 1 se detectó que la estrategia 4 dominaba a la 1. La celda (4,1) responde, además de a la regla 3, a la propiedad de asimetría de la relación de dominancia (regla 4).

En resumen, de los 64 problemas de optimización que a lo sumo habría que

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-	-	N	S	-	-	-	-
2	-	-	N	N	N	N	-	N
3	-	N	-	-	N	N	-	N
4	-	N	-	-	N	N	-	N
5	-	N	N	N	-	-	-	N
6	-	N	N	N	-	-	-	N
7	-	-	-	-	-	-	-	-
8	-	N	N	N	N	N	-	-

Tabla 2.2: Aplicación de reglas 1-4 al eliminar  $D_1$ .

resolver, 8 son trivialmente evitables (elementos de la diagonal) y 28 se omiten gracias a las reglas eficientes. Tan sólo se realizan 28 problemas tipo  $[c_{zy}]$  o  $[f_{ht}]$ .

Podemos dar una regla más.

### Regla 5

Usando cualquier  $\omega \in S$  (puede ser por ejemplo una estimación de  $w$  dada por el decisor), ordenar las alternativas  $a_j$ 's según los valores  $\Psi_j(\omega)$ . Si  $\Psi_j(\omega) > \Psi_k(\omega)$  (y por tanto  $j < k$ ), entonces  $a_j$  no puede estar dominada por  $a_k$ . En caso de que  $\Psi_j(\omega) = \Psi_k(\omega)$ , además de comprobar si  $a_j$  domina a  $a_k$  hay que ver si  $a_k$  domina a  $a_j$ .

Si tomamos en el ejemplo  $\omega = (.46, .2)$ , la tabla de dominancias por pares de estrategias es la Tabla 2.3.

En ella se han dispuesto las estrategias según el orden explicado en la regla 5. Como todas las  $\Psi_j(\omega)$  toman valores distintos, obviamos el triángulo superior de la

	8	4	3	7	6	5	2	1
8	-	-	-	-	-	-	-	-
4	N	-	-	-	-	-	-	-
3	N	-	-	-	-	-	-	-
7	-	-	-	-	-	-	-	-
6	N	N	N	-	-	-	-	-
5	N	N	N	-	-	-	-	-
2	N	N	N	-	N	N	-	-
1	N	S	-	-	-	-	-	-

Tabla 2.3: Aplicación de reglas 1-5 al eliminar  $D_1$ .

tabla. El resto de los símbolos - se explican como en la Tabla 2.2 ya comentada. Ahora hemos realizado únicamente 15 problemas de optimización tipo  $[c_{zy}]$  o  $[f_{hl}]$ .

### 2.3.5 Pérdidas potenciales en utilidad esperada

Como resultado de los problemas de dominancia resueltos en la reducción de los nodos de decisión, obtenemos estimaciones de las pérdidas potenciales en utilidad esperada, como se hace en los estudios de robustez global, ver Berger (1994).

Así, si dos alternativas  $d_1$  y  $d_2$  con u.e.  $\Psi_1(w)$  y  $\Psi_2(w)$  son no dominadas, querrá decir que se dará una de las siguientes dos situaciones:

1.  $\min_{w \in S} (\Psi_2(w) - \Psi_1(w)) = m < 0$  y  
 $\min_{w \in S} (\Psi_1(w) - \Psi_2(w)) = m' < 0$ , o bien
2.  $\min_{w \in S} (\Psi_2(w) - \Psi_1(w)) = 0$  y  
 $\min_{w \in S} (\Psi_1(w) - \Psi_2(w)) = 0$ .

De la primera situación deducimos  $\Psi_2(w) + m' \leq \Psi_1(w) \leq \Psi_2(w) - m$ , es decir,  $\Psi_1(w)$  cae en un entorno de centro  $\Psi_2(w)$  y radio  $\varepsilon = \max\{|m'|, |m|\}$ . Si  $\varepsilon$  es pequeño (próximo a cero) se puede descartar una de las dos alternativas controlando con  $\varepsilon$  la pérdida de optimalidad.

En nuestro ejemplo, si tomamos  $u_3$  y  $u_8$  ya mencionadas, como  $\Psi_1(w)$  y  $\Psi_2(w)$ , se obtiene  $m = -0.05$  y  $m' = -0.1$ , lo que da  $\varepsilon = 0.1$ . El decisor puede plantearse escoger con mayor seguridad entre una y otra opción sabiendo a qué se atiene. También podemos utilizar esta información para, eventualmente, decidir si es necesario obtener información adicional.

De la segunda situación se deduce  $\Psi_1 \equiv \Psi_2$  (como  $u_3$  y  $u_7$  del ejemplo) y al ser  $\varepsilon = 0$  puede descartarse inmediatamente cualquiera de las dos decisiones  $d_1$  o  $d_2$ .

### 2.3.6 Recuperación de la estrategia asociada a una u.e. de la tabla final de $v$

Supongamos que el decisor decide escoger cierta u.e.  $u(w)$  acumulada en la última tabla del nodo  $v$ , habiendo estudiado para ello la pérdida potencial en utilidad por no escoger otras. Nos preguntamos ahora si a partir de  $u(w)$  puede recuperarse la estrategia asociada, utilizando la información registrada durante el proceso de evaluación.

En nuestro ejemplo, supongamos que escogemos  $u(w) = -.5w_1 + .775$  de la última tabla de  $v$ . La pregunta es cuál sería la estrategia a seguir. Localizando  $u(w)$  en la tabla anterior (de eliminación de  $\Theta_1$ ), podemos deducir que la decisión a tomar en  $D_1$  es  $d_{11}$ . A continuación, y sabiendo por su posición en la tabla cómo se construyó  $u(w)$  (las esperanzas se hacían siguiendo un determinado orden sobre la tabla de la Figura 2.4), deducimos que si ocurre  $\theta_{11}(\theta_{12})$  se elegirá  $d_{23}$  ( $d_{22}$ ). Tal es la estrategia

a seguir si se decide  $u(w) = -.5w_1 + .775$ .

Como vemos, la búsqueda de la estrategia asociada a una u.e. de la tabla final de  $v$  no se limita a los conjuntos de alternativas obtenidas al reducir los nodos de decisión, como se hacía en DI convencionales. Ahora, típicamente, estos conjuntos (de alternativas no dominadas) contendrán menos elementos que u.e. en cada fila asociada de la tabla del nodo de valor.

Se hace entonces necesario dar un algoritmo que indique cómo se recupera la estrategia asociada a una función  $u(w)$ . Básicamente consistirá en ir recorriendo hacia atrás todas las tablas obtenidas en el nodo  $v$ . Así, si  $\tau$  y  $\tau'$  son respectivamente las tablas del nodo  $v$  al terminar las etapas  $i - 1$  e  $i$  del algoritmo de evaluación del DIIP, queremos sacar conclusiones en  $\tau$  respecto a cierta  $u$  que se encuentra en  $\tau'$ . Supongamos que  $\tau'$  se obtuvo al reducir un nodo  $i$ . Distinguiamos la acción a realizar dependiendo del tipo de nodo que sea  $i$ :

- Si  $i$  es de decisión,  $u$  se encuentra en  $\tau$  además de en  $\tau'$ . Si al localizarlo en  $\tau$  se halla en  $u(x_{C(v)\setminus\{i\}}, x_i|w)$ , concluimos: "escoger  $x_i$  si ocurre  $x_{C(v)\setminus\{i\}}$ ".
- Si  $i$  es de azar, supongamos que  $u \equiv u^\ell(x_{C'(v)}|w)$  de la tabla  $\tau'$ . La tabla  $\tau$  genérica es la Tabla 2.1 ya vista. Para poder sacar conclusiones futuras debemos deducir a partir de  $\ell$ , el elemento de cada fila de  $\tau$  que originó  $u$ . Para ello podemos aplicar el siguiente algoritmo:

1.  $k \leftarrow 0$ ,  $j_0^* \leftarrow j_1 \times \cdots \times j_r$ ,  $E \leftarrow 0$ .
2.  $k \leftarrow k + 1$ . SI  $k \geq r$ , ir a 5.
3.  $j_k^* \leftarrow j_{k-1}^*/j_k$
4. DESDE  $h = 1$  A  $j_k$  HACER:
 

SI  $E + (h - 1)j_k^* < \ell \leq E + hj_k^*$  ENTONCES

apuntar  $u_{kh}$

$E \leftarrow E + (h - 1)j_k^*$

ir a 2

FINSI
5. apuntar  $u_{r(\ell-E)}$  y parar.

Con  $j_k^*$  hallamos cuántos elementos seguidos de la fila donde está  $u$  provienen del mismo  $u_{kh}$  ( $h = 1, \dots, j_k$ ) de  $\tau$ . Al entrar en el SI del paso 4, tenemos siempre  $j_{k-1}^*/j_k^*$  grupos de dichos elementos entre las posiciones  $E$  y  $E + j_k j_k^*$  de  $\tau'$ . Con ese SI se detecta en cuál de esos grupos se encuentra nuestra  $u$ . Al final, no hace falta calcular  $j_r^*$  pues siempre vale 1 y de ahí el paso 5. Las  $u_{kh}$  y  $u_{r(\ell-E)}$  constituyen la salida del algoritmo.

### 2.3.7 Evaluación de los rangos de las utilidades esperadas

A pesar del crecimiento progresivo de los conjuntos no dominados, demostramos ahora que las u.e. toman valores en intervalos de  $\mathbb{R}$  cuya longitud va haciéndose menor o igual, a medida que el algoritmo avanza hacia atrás un paso más. De esta forma, cuando el decisor opte por una determinada u.e. de la tabla final de  $v$ , no sólo conocerá la pérdida potencial de optimalidad sino que sabrá que aunque haya obtenido funciones de  $w$  más o menos complejas, los intervalos donde valoran las

u.e. forman una sucesión (finita) decreciente durante la evaluación de un DIIP. Facilitamos de nuevo la tarea de reducir el conjunto no dominado.

La transformación que modifica las u.e. durante la evaluación de un DIIP es la eliminación de un nodo de azar. Por tanto, hemos de probar la siguiente afirmación:

**Proposición 2.2** *El operador esperanza no incrementa los rangos de las utilidades esperadas sobre las que se aplica.*

### **Demostración**

Basta verlo para un par de u.e. Sean  $u_1(w)$  y  $u_2(w)$  dos u.e. que toman valores en los intervalos  $[a_1, b_1]$ ,  $[a_2, b_2]$  de  $\mathbb{R}$ , respectivamente. Por simplicidad, escribimos las u.e. sólo como funciones de  $w$ . El rango del par de funciones  $u_1(w)$  y  $u_2(w)$  será

$$\max\{b_1, b_2\} - \min\{a_1, a_2\},$$

que podemos suponer por ejemplo, igual a  $b_1 - a_2$ . Hemos de probar que  $\lambda u_1(w) + (1 - \lambda)u_2(w)$  tiene un rango inferior o igual a  $b_1 - a_2$ ,  $\forall \lambda \in [0, 1]$ .

Tenemos que,  $\forall w \in S$ ,

$$\begin{aligned} \lambda u_1(w) &\leq \lambda b_1 \\ (1 - \lambda)u_2(w) &\leq (1 - \lambda)b_2 \leq (1 - \lambda)b_1, \end{aligned}$$

de donde se deduce

$$\lambda u_1(w) + (1 - \lambda)u_2(w) \leq b_1.$$

Análogamente, se obtiene

$$\lambda u_1(w) + (1 - \lambda)u_2(w) \geq a_2$$

y con ello queda probada la proposición. □

Como ilustración, se puede comprobar en nuestro ejemplo que la u.e.  $-.5w_1 + .775$  de la última figura (que tiene rango .075) proviene de aplicar la esperanza a las u.e.  $1 - w_1$  y .55 de la Figura 2.2 (con rango conjunto igual a .15). A su vez, cada una de éstas proviene de aplicar la esperanza a las u.e. siguientes de la Figura 2.1: 0 y 1 (rango 1), .55 y .55 (rango 0), respectivamente. Por tanto, los intervalos decrecientes a los que hacíamos referencia son: al eliminar  $\Theta_2$ ,  $[0, 1]$  da lugar a  $[.45, .6]$  mientras que la u.e. .55 permanece invariante. Antes de eliminar  $\Theta_1$  tenemos entonces el intervalo de valores  $[.45, .6]$  que se transforma en el  $[.5, .575]$  al reducir este nodo.

## 2.4 Criterios adicionales

El Ejemplo 2.1 muestra un problema potencial en el cálculo de soluciones no dominadas en un DI: los conjuntos no dominados pueden hacerse muy grandes al movernos hacia atrás en el diagrama y la información que se ha de guardar va creciendo exponencialmente. Esto no es sólo computacionalmente incómodo sino que también puede ayudar poco a centrar la atención del decisor en el problema. Por otra parte, se tiene que no es válido realizar una reducción arbitraria del conjunto no dominado, eligiendo por ejemplo un subconjunto del mismo al reducir un nodo de decisión. Veamos por qué.

Si en la Figura 2.4 del ejemplo estudiado reducimos los conjuntos a  $d_{D_2}^*(\theta_{11}) = \{d_{21}\}$  y  $d_{D_2}^*(\theta_{12}) = \{d_{21}\}$ , la eliminación de  $\Theta_1$  proporcionaría una tabla para  $v$  con  $u(d_{11}|w) = .5$  y  $u(d_{12}|w) = 1 - w_1 - w_2 + 2w_1w_2$ . Como las estrategias asociadas a estas u.e. son no dominadas entre sí,  $u_1$  y  $u_5$  ya estudiadas, al reducir  $D_1$  resulta seleccionada la estrategia que escoge  $D_1 = d_{11}$  y  $D_2 = d_{21}$ , la cual vimos que estaba dominada (por la asociada a  $u_4$ ).

Cualquier reducción coherente del conjunto no dominado implica añadir más



restricciones a los conjuntos  $S_i$ , y esto supondría una adquisición adicional de información. Alternativamente, podríamos escoger una alternativa no dominada intuitivamente atractiva y usarla como base para más discusión y extracción de información, vía análisis de sensibilidad. Ésta es una práctica común en análisis Bayesiano robusto. Esto nos lleva a buscar criterios adicionales para escoger una solución tales que:

- tengan una interpretación atractiva,
- conduzcan a soluciones no dominadas,
- sean compatibles con la programación dinámica,
- conlleven cálculos simples.

Podemos adaptar a nuestro contexto varios criterios del AD bajo incertidumbre, ver French (1986), Schneller y Sphicas (1983), y White (1982). Si  $\mathcal{A}$  es el conjunto de todas las estrategias del problema, con nuestra notación tendríamos los siguientes criterios adicionales:

**Definición 2.2**  $a_j \in \mathcal{A}$  es *S-maximin* si  $\forall a_k \in \mathcal{A}$

$$\min_{w \in S} \Psi_j(w) \geq \min_{w \in S} \Psi_k(w).$$

Su interpretación heurística es conocida: protegerse contra un mal resultado.

**Definición 2.3**  $a_j \in \mathcal{A}$  es *S-maximax* si  $\forall a_k \in \mathcal{A}$

$$\max_{w \in S} \Psi_j(w) \geq \max_{w \in S} \Psi_k(w).$$

Este criterio escoge la alternativa con mayor máximo.

**Definición 2.4**  $a_j \in \mathcal{A}$  es *S-retorno maximin* si  $\forall a_k \in \mathcal{A}$

$$\min_{w \in S} (\Psi_j(w) - \max_i \Psi_i(w)) \geq \min_{w \in S} (\Psi_k(w) - \max_i \Psi_i(w)).$$

Según este criterio, asociamos a cada  $a_j$ , para  $w$  fijo, la diferencia entre el valor obtenido con  $a_j$  en ese  $w$  y el valor que obtendríamos tomando la mejor alternativa para ese mismo  $w$ . Después se aplica un criterio maximin a los valores resultantes. Es por tanto un indicador de la máxima pérdida de optimalidad por escoger  $j$  incorrectamente.

**Definición 2.5**  $a_j \in \mathcal{A}$  es *S-Laplace* si  $\forall a_k \in \mathcal{A}$

$$\int_S \Psi_j(w) d\mu(w) \geq \int_S \Psi_k(w) d\mu(w), \text{ siendo } \mu(S) > 0.$$

Ahora se observa el valor de la integral en  $S$  de cada función  $\Psi_k$  y elegimos la mayor.

**Definición 2.6**  $a_j \in \mathcal{A}$  es *potencialmente óptima (p.o.)* si para algún  $w \in S$

$$\Psi_j(w) \geq \Psi_k(w), \forall a_k \in \mathcal{A}.$$

Si conociésemos con seguridad el valor de  $w$ , propondríamos aquella  $a_j$  que maximizase  $\Psi_j(w)$ ; como sólo sabemos que  $w \in S$ , nuestra solución final estará entre las estrategias potencialmente óptimas.

**Definición 2.7**  $a_j \in \mathcal{A}$  es *S-dominio* si  $\forall a_k \in \mathcal{A}$

$$vol(S_j) \geq vol(S_k), \text{ donde } S_j = \{w \in S : \Psi_j(w) \geq \Psi_k(w), \forall k\}.$$

El conjunto  $S_j$  se denomina subconjunto de optimalidad asociado a  $a_j$ .

$M, MX, R, L, P, V$  denotan los conjuntos de estrategias correspondientes a cada criterio definido, respectivamente. Suponemos las condiciones apropiadas que aseguran la existencia de estas estrategias, i.e. continuidad de las funciones de evaluación, y compacidad y convexidad del conjunto  $S$ .

Con lo expuesto hasta ahora en esta sección, ya hemos visto que los criterios escogidos tienen una interpretación atractiva y conllevan cálculos más o menos simples, con la ayuda de algoritmos apropiados. Sin embargo, pedíamos criterios que además condujeran a soluciones no dominadas y que fuesen compatibles con la programación dinámica. Veamos que estas características no las satisfacen todos los criterios, impidiendo en ese caso utilizar algoritmos similares al usado para el cálculo de estrategias no dominadas.

#### 2.4.1 Criterios adicionales y relación de dominancia

El criterio de Laplace proporciona siempre alternativas no dominadas, como se demuestra en la siguiente proposición de demostración sencilla.

**Proposición 2.3** *Sea  $\mu$  una medida en  $S$  tal que  $\mu(A) > 0$  para cada  $A = S \cap \mathcal{E}(w)$ , donde  $w \in S$  y  $\mathcal{E}(w)$  es un entorno de  $w$ . Si  $a_j \in \mathcal{A}$  es  $S$ -Laplace, entonces es no dominada.*

El criterio  $S$ -dominio también proporciona alternativas no dominadas, y si  $a_j \in \mathcal{A}$  está dominada entonces  $S_j \subset S_k$  para algún  $k$ .

Por el contrario, el resto de los criterios no conducen necesariamente a soluciones no dominadas. Lo único que podemos asegurar es que hay soluciones no dominadas entre las maximin, entre las maximax, y entre las retorno maximin. La siguiente proposición lo demuestra para las maximin.

**Proposición 2.4** *Siempre existe al menos una solución  $S$ -maximin que es no dominada.*

#### Demostración

Supongamos que la alternativa  $S$ -maximin  $a_*$  es única. Entonces es no dominada.

Si no fuera así, existiría  $a_j \in \mathcal{A}$  tal que  $\Psi_*(w) \leq \Psi_j(w) \forall w \in S$ , con la desigualdad anterior estricta para algún  $w \in S$  y obviamente,  $a_j$  sería también  $S$ -maximin, contra la hipótesis de unicidad.

Si hubiera más de una alternativa  $S$ -maximin, supongamos que  $a_*$  es una de ellas y está dominada por  $a_j$ . Entonces, aplicando el argumento de antes,  $a_j$  es  $S$ -maximin. Si ésta está dominada, repetimos el argumento hasta que encontramos una alternativa no dominada  $S$ -maximin.  $\square$

En el caso de que una solución  $S$ -maximin esté dominada, acabamos de ver que lo estaría por otra que también es  $S$ -maximin. Respecto a las alternativas p.o. tenemos el siguiente resultado, que puede verse en Ríos Insua (1990):

**Proposición 2.5** *Para cada  $w \in S$  hay una alternativa no dominada que es p.o.*

Es decir, el conjunto no dominado incluye maximizadores de la función de evaluación para cada  $w \in S$ . Sin embargo, de ahí no se deduce ninguna implicación entre ambos conceptos de solución, i.e. ni una alternativa p.o. ha de ser no dominada ni una no dominada ha de ser p.o.

Como consecuencia de estos resultados, si escogemos con cuidado las soluciones propuestas por estos criterios, éstas serán también no dominadas. En el caso de las p.o., debemos buscar con más cuidado alternativas que sean p.o. y además no dominadas.

Lo interesante sería que todas estas soluciones pudieran calcularse con un algoritmo similar al usado para calcular las no dominadas, en el que la eliminación de nodos de decisión correspondiese a escoger un subconjunto de soluciones no dominadas satisfaciendo alguno de estos criterios adicionales. Para que esto sea válido es necesario que los criterios cumplan la última característica que les pedíamos ini-

cialmente: la compatibilidad con la programación dinámica.

### 2.4.2 Criterios adicionales y programación dinámica

En este apartado demostramos que el único criterio compatible con la programación dinámica es, bajo ciertas condiciones, el de Laplace. Por tanto, el algoritmo para calcular las estrategias que satisfacen el criterio de Laplace (que sabemos que son siempre no dominadas) es análogo al del cálculo de las soluciones no dominadas sobre un DIIP. Lo único que cambia es la forma de seleccionar alternativas al reducir un nodo de decisión  $D$ , que consistirá en calcular las soluciones  $S$ -Laplace en dicho nodo, registrándolas en los conjuntos  $d_D^L(x_{C'(v)})$ .

**Proposición 2.6** *Con distribuciones de probabilidad independientes de  $w$  en los nodos de azar, el conjunto  $L$  de estrategias  $S$ -Laplace coincide con el conjunto de estrategias  $L_A$  que proporciona este nuevo algoritmo.*

#### Demostración

Es análoga a la vista para los conjuntos no dominados  $N$  y  $N_A$ , teniendo en cuenta que el operador integral es lineal y monótono. Es decir, sin pérdida de generalidad, supongamos que el DIIP contiene un nodo  $D$  de decisión y otro  $\Theta$  de azar, con  $D, \Theta \in C(v)$  y  $\Theta \in C(D)$ . Supongamos que  $\Theta$  toma los valores  $\theta_1$  y  $\theta_2$  con probabilidades  $\pi(\theta_1|x_{C(\Theta)})$  y  $\pi(\theta_2|x_{C(\Theta)}) = 1 - \pi(\theta_1|x_{C(\Theta)})$ .

Si al eliminar  $D$  se obtiene  $d \in d_D^L(x_{C'(v) \setminus \{\Theta\}}, \theta_i)$ ,  $d' \notin d_D^L(x_{C'(v) \setminus \{\Theta\}}, \theta_i) \forall i = 1, 2$ , siendo  $d, d' \in \Omega_D$ , es porque

$$\int_S u(x_{C(v) \setminus \{D, \Theta\}}, d, \theta_i | w) dw > \int_S u(x_{C(v) \setminus \{D, \Theta\}}, d', \theta_i | w) dw, \forall i = 1, 2.$$

Cuando se elimine  $\Theta$ , el siguiente nodo a reducir, se obtendrá

$$\begin{aligned}
& \int_S \left( \sum_{i=1}^2 u(x_{C(v) \setminus \{D, \Theta\}}, d, \theta_i | w) \pi(\theta_i | x_{C(\Theta)}) \right) dw = \\
& = \sum_{i=1}^2 \left( \int_S u(x_{C(v) \setminus \{D, \Theta\}}, d, \theta_i | w) \pi(\theta_i | x_{C(\Theta)}) dw \right) \\
& > \sum_{i=1}^2 \left( \int_S u(x_{C(v) \setminus \{D, \Theta\}}, d', \theta_i | w) \pi(\theta_i | x_{C(\Theta)}) dw \right) \\
& = \int_S \left( \sum_{i=1}^2 u(x_{C(v) \setminus \{D, \Theta\}}, d', \theta_i | w) \pi(\theta_i | x_{C(\Theta)}) \right) dw.
\end{aligned}$$

Esto nos asegura que estrategias descartadas en algún paso del algoritmo no pueden llegar a ser  $S$ -Laplace en pasos posteriores. Es suficiente para probar el resultado.  $\square$

Notar que hemos escrito las probabilidades independientes de  $w$  pues en caso contrario el resultado no tiene por qué ser válido. Esto supone una limitación siendo otra, el hecho de que el cálculo de las integrales puede hacerse complicado si la dimensión de  $S$  es suficientemente grande.

Comprobada la validez de la programación dinámica para el cálculo de las estrategias  $S$ -Laplace en el caso indicado, si el decisor escogiese este criterio *ad hoc*, el algoritmo explicado limita bastante los tamaños intermedios de soluciones no dominadas.

Para la aplicación eficiente del algoritmo podemos dar reglas similares a las vistas en la sección anterior.

### Ejemplo 2.1 (Cont.)

Aunque en este caso las probabilidades sí dependen de  $w$ , el método funciona. La eliminación de  $D_2$  produce  $d_{D_2}^L(\theta_{11}) = \{d_{23}\}$  y  $d_{D_2}^L(\theta_{12}) = \{d_{22}\}$ . La eliminación de  $\Theta_1$  da como resultado la tabla siguiente para el nodo de valor:

$d_{11}$	$-.5w_1 + .775$
$d_{12}$	$(.45 - w_1)w_2 + .55$

Como

$$\int_S -.5w_1 + .775 dw = \int_S (.45 - w_1)w_2 + .55 dw = .080625,$$

al eliminar  $D_1$  se llega a  $d_{D_1}^L = \{d_{11}, d_{12}\}$ . Por tanto, obtenemos 2 estrategias a seguir: tomar cualquier decisión en el nodo  $D_1$  y si ocurre  $\theta_{11}(\theta_{12})$  tomar en  $D_2$  la decisión  $d_{23}(d_{22})$ . El conjunto de las 7 estrategias no dominadas que se había obtenido ha quedado reducido a 2 no dominadas y  $S$ -Laplace.  $\triangleleft$

Para el resto de criterios sería muy ventajoso si pudiésemos aplicar la programación dinámica para calcular las soluciones ( $S$ -maximin, por ejemplo) y, al final del algoritmo, escoger las obtenidas que sean además no dominadas que sabemos que existen para la mayoría de los criterios. Para las maximin, como sólo pueden estar dominadas por otras que son también maximin, sólo habría que comprobar las dominancias entre las alternativas que proporciona el algoritmo.

Sin embargo, como mostramos en el ejemplo que sigue, esto no puede hacerse. Por tanto, para este tipo de operaciones dentro de los nodos de decisión, asociadas a estos criterios, el esquema no funciona.

### Ejemplo 2.3

Supongamos un DIIP con un nodo de cada tipo:  $D, \Theta$  y  $v$ , tales que  $\Theta, D \in C(v)$  y  $\Theta \in C(D)$ . Además,  $\Omega_D = \{d_1, d_2\}$ ,  $\Theta$  toma los valores  $\theta_1$  y  $\theta_2$  con probabilidad  $1/2$  cada uno y  $w \in S = [0, 3]$ . La tabla del nodo de valor es:

$\theta_1$	$d_1$	1.7
	$d_2$	$3w + 1.5$
$\theta_2$	$d_1$	$1 - e^{-(w-2)^2}$
	$d_2$	0.1

Mediante programación dinámica, la eliminación de  $D$  daría los conjuntos siguientes de soluciones  $S$ -maximin en ese nodo:

$$d_D^M(\theta_1) = \{d_1\}$$

$$d_D^M(\theta_2) = \{d_2\},$$

pues:

$$\min_{w \in S} 1.7 = 1.7$$

$$\min_{w \in S} 3w + 1.5 = 1.5$$

$$\min_{w \in S} 1 - e^{-(w-2)^2} = 0$$

$$\min_{w \in S} 0.1 = 0.1$$

A partir de aquí, eliminando  $\Theta$  queda solamente la u.e. 0.9 en la tabla final de  $v$ . La estrategia que hemos obtenido, que escoge  $d_1$  ( $d_2$ ) si ocurre  $\theta_1$  ( $\theta_2$ ) no es, sin embargo, una estrategia maximin. Veámoslo.

En este ejemplo hay 4 posibles estrategias:

$\delta_1$ : escoger  $d_1$  siempre

$\delta_2$ : escoger  $d_1$  ( $d_2$ ) si ocurre  $\theta_1$  ( $\theta_2$ )

$\delta_3$ : escoger  $d_2$  ( $d_1$ ) si ocurre  $\theta_1$  ( $\theta_2$ )

$\delta_4$ : escoger  $d_2$  siempre.

Las utilidades esperadas y sus correspondientes mínimos se recogen en la tabla siguiente:



	u.e.	valor mínimo
$\delta_1$	$1.35 - .5e^{-(w-2)^2}$	.85
$\delta_2$	.9	.9
$\delta_3$	$1.25 + .5(3w - e^{-(w-2)^2})$	$1.25 - .5e^{-4} \simeq 1.24$
$\delta_4$	$\frac{3}{2}w + .8$	.8

Por tanto la única estrategia maximin es  $\delta_3$  y sin embargo habíamos obtenido  $\delta_2$ . Observar que  $\delta_3$  corresponde a las decisiones justamente descartadas por el criterio maximin al eliminar  $D$ .

Con este ejemplo, comprobamos además que entre el conjunto  $M$  de estrategias maximin y el conjunto  $M_A$  de estrategias obtenidas por el algoritmo, no hay ninguna relación de inclusión ya que hemos obtenido  $M = \{\delta_3\} \neq M_A = \{\delta_2\}$ .  $\triangleleft$

La clave está en que con el criterio maximin sólo nos fijamos en el punto que alcanza el mínimo de la u.e. y no en una propiedad global, como puede ser la integral. Análogamente se probaría con el resto de los criterios mencionados.

De todo esto deducimos que para calcular las estrategias no dominadas satisfaciendo alguno de los criterios adicionales (excepto el de Laplace en el caso considerado):

- No podemos realizarlo con algoritmos similares al de la evaluación de DIIP, seleccionando las no dominadas entre las obtenidas al final del proceso, ni siquiera cuando éste proporciona una estrategia única.
- Tampoco podemos realizarlo si en cada reducción de un nodo de decisión calculásemos no sólo las decisiones que cumplen el criterio sino también las no dominadas. El Ejemplo 2.3 vuelve a ser prueba de ello.

- Proponemos entonces aplicar estos criterios al final del proceso normal de evaluación de DIIP, sobre el conjunto total  $N(= N_A)$  de estrategias no dominadas.

Resumiendo las ideas expuestas en esta sección, si el decisor escoge un criterio, podremos calcular las estrategias no dominadas que verifican el criterio de acuerdo a:

- Si el criterio es el de Laplace y las probabilidades almacenadas en los nodos de azar no dependen de  $w$ , mediante el algoritmo similar al de DIIP, calculando las soluciones de Laplace localmente, es decir, en cada nodo de decisión.
- Si es otro criterio, aplicándolo a todas las soluciones no dominadas obtenidas por el algoritmo de DIIP.

Para terminar, proporcionamos las soluciones correspondientes del Ejemplo 2.1.

### **Ejemplo 2.1 (Cont.)**

Aplicamos cada uno de los criterios a las u.e. obtenidas en la tabla final de  $v$  de estrategias no dominadas (Figura 2.5). El siguiente cuadro resume los resultados. De las 18 estrategias posibles de este problema sólo mostramos las no dominadas, obtenidas con anterioridad.

$N$	En $D_1$ escoger	En $D_2$ escoger		$M \cap N$	$MX \cap N$	$R \cap N$	$L \cap N$	$P \cap N$	$V \cap N$
		si $\theta_{11}$	si $\theta_{12}$						
$a_1$	$d_{11}$	$d_{21}$	$d_{22}$					X	X
$a_2$	$d_{11}$	$d_{23}$	$d_{21}$		X			X	
$a_3$	$d_{11}$	$d_{23}$	$d_{22}$	X		X	X	X	
$a_4$	$d_{12}$	$d_{21}$	$d_{21}$		X				
$a_5$	$d_{12}$	$d_{21}$	$d_{22}$					X	
$a_6$	$d_{12}$	$d_{23}$	$d_{21}$		X			X	X
$a_7$	$d_{12}$	$d_{23}$	$d_{22}$		X		X	X	

◁

## 2.5 Conclusiones

Hemos mostrado cómo tratar computacionalmente el caso realista de un DI en el que las probabilidades y utilidades se han asignado sólo parcialmente, según el espíritu Bayesiano robusto.

Las ideas de arriba proporcionan un primer paso hacia un marco para el análisis de sensibilidad en DI (o incluso en otros formalismos gráficos, como los vistos en el Capítulo 1). Primero, podemos ver el algoritmo como una forma de filtrar o descartar alternativas malas. Segundo, como resultado del algoritmo, obtenemos ideas sobre las pérdidas potenciales de optimalidad, lo que puede sugerir dónde se requieren esfuerzos adicionales de adquisición de información. Finalmente, mediante el uso de criterios adicionales (*ad hoc*) podemos identificar una alternativa inicial sobre la cual comenzar las discusiones.

## Capítulo 3

# Un heurístico miope para la resolución de problemas de decisión secuenciales

### 3.1 Introducción a problemas de decisión secuenciales

Un proceso de decisión secuencial es un modelo para un sistema dinámico en el que en cada periodo, el decisor escoge una acción basado en la información recogida al observar el estado del sistema. Como consecuencia, se recibe una recompensa inmediata y se determina una distribución de probabilidad para el estado siguiente del sistema. Al elegir una acción se ha de tener en cuenta que afecta a la evolución futura del sistema. Se trata de escoger la política, o sucesión de acciones, que optimice el rendimiento del sistema sobre el horizonte de decisión.

Describimos el tipo de problema de decisión secuencial que nos interesa. Dado el estado inicial  $x_0$  del sistema, la variable de estado se representa por  $x_t$  y se genera

mediante la función

$$x_t = f_t(x_{t-1}, \theta_t, d_t) \quad 1 \leq t \leq N + 1$$

donde  $d_t$  es el control o variable de decisión en la etapa  $t$  y  $\theta_t$  indica la componente aleatoria del sistema. La función objetivo  $c_t(x_{t-1}, x_t)$  es la función de pérdida, coste,... en cada etapa. Asociada con cualquier sucesión de controles  $\mathbf{d} = \{d_t\}$  hay definida una función objetivo total

$$J(\mathbf{d}) = \sum_{t=1}^N c_t(x_{t-1}, x_t).$$

Una estrategia  $\mathbf{S}$  es una sucesión de funciones que seleccionan un control (factible) para cada estado  $x$  y etapa  $t$ :  $S_t(x) = d_t$ . Se trata de encontrar una estrategia o política  $\mathbf{S}^*$  que minimice

$$J(\mathbf{S}) = E\left[\sum_{t=1}^N c_t(x_{t-1}, f_t(x_{t-1}, \theta_t, S_t(x_{t-1})))\right].$$

Existen muchos métodos para resolver este tipo de problemas dentro de la Investigación Operativa y la Teoría de Control, abarcando técnicas de programación lineal estocástica, técnicas de programación no lineal y simulación. La técnica más utilizada es la programación dinámica (PD) y sus variantes: PD estocástica, PD incremental, PD diferencial,... La elección del método depende de las características del sistema, de la disponibilidad de los datos, y de los objetivos y restricciones especificadas. Pueden combinarse también varios métodos.

Esencialmente, la PD para el caso de horizonte finito consiste en resolver recursivamente hacia atrás la siguiente ecuación de optimalidad, que proporciona las funciones de retorno óptimo  $c_N^*(x), \dots, c_0^*(x)$

$$c_t^*(x_t) = \min_{d_t} E[c_t(x_{t-1}, f_t(x_{t-1}, \theta_t, d_t)) + c_{t+1}^*(x_{t+1})], \quad t = N, N - 1, \dots, 0, \quad (3.1)$$

donde  $c_{N+1}^*(x_{N+1}) \equiv 0$ . Se determina después la estrategia óptima hacia delante con  $S_t^*(x) = d_t^*$ , siendo  $d_t^*$  un minimizador de la parte derecha de la igualdad (3.1). Descomponemos así el problema multietápico en una sucesión de problemas monoetápicos más simples definidos inductivamente.

Para implementar esta aproximación, suele discretizarse el espacio de estados y de controles (PD discreta). Con ello surgen errores y se incrementa exponencialmente el esfuerzo computacional a medida que crece la dimensión del espacio de estados. Utilizando algunas de las variantes citadas de PD se disminuye la carga computacional, pero la mayoría se utilizan en problemas determinísticos, con procedimientos iterativos y descomposición en subsistemas. La consecuencia práctica es que a pesar de los numerosos avances en este campo, los problemas computacionales habituales debido a la alta dimensionalidad, sugieren la introducción de otros métodos.

Por ello, en este capítulo vamos a desarrollar un heurístico para resolver este tipo de problemas de decisión secuenciales. La motivación principal del uso de este heurístico es la resolución de un problema real de gestión conjunta de dos embalses, que explicamos en la siguiente sección. Ello nos lleva a formular la metodología en términos generales. Básicamente consiste primero en encontrar una trayectoria de referencia a partir de una versión determinística del problema original. La idea central es tratar entonces de no desviarse del estado de referencia en cada etapa, para lo cual se resuelve recursivamente hacia delante un conjunto de problemas monoetápicos que incluyen este aspecto. Proponemos además su extensión a problemas de AD modelizados mediante DI, pudiendo contener v.a. continuas. Para terminar, evaluamos el heurístico en algunos casos importantes.

## **3.2 Una aplicación a gestión de embalses**

En esta sección describimos la aplicación del AD Bayesiano a un problema concreto de gestión de embalses que sugerirá una nueva metodología, evaluada en secciones posteriores en términos más generales.

### **3.2.1 Situación actual en la gestión de embalses**

Los problemas de gestión de embalses son complicados debido a la presencia de factores como: objetivos conflictivos múltiples, incertidumbre en el proceso de entradas a los embalses, dinámica cambiante del sistema, variación en el tiempo de los parámetros que influyen en la tarea de gestión, funciones objetivo y restricciones imprecisas,... Por ello, se han realizado grandes esfuerzos en el desarrollo de métodos de gestión de embalses. Sin embargo, todavía no se ha aceptado de forma general una metodología para desarrollar políticas para embalses.

Los primeros métodos utilizados en este campo se basaban en diagramas sencillos, Klemes (1981). Desde entonces, aunque se han utilizado técnicas de simulación, se han propuesto normalmente técnicas de optimización uni y multiobjetivo. Pueden verse revisiones en Yakowitz (1982), Yeh (1985) y Reznicek y Cheng (1991). También, se ha incluido incertidumbre tanto explícitamente (mediante modelos y técnicas probabilísticas) como implícitamente (mediante escenarios). Pero, como se explica en Lamond et al. (1995), la optimización estocástica de los modelos multiembalse sufre la 'maldición de la dimensionalidad'. Yakowitz (1982) señala que mientras que se han resuelto sistemas determinísticos de hasta diez embalses, con programación dinámica estocástica sólo se registran sistemas de a lo sumo dos embalses. Por todo ello, se hace necesaria la investigación para sobrellevar la gran carga computacional del caso estocástico, que es nuestro problema de interés.

### 3.2.2 Una propuesta para la gestión de embalses con métodos Bayesianos

Proponemos resolver el problema dentro del marco del AD Bayesiano. Ello requerirá:

- definir el conjunto de alternativas, en nuestro caso políticas de control  $u$ ;
- proporcionar un modelo de predicción para las afluencias  $i$  al embalse;
- modelizar las consecuencias  $c(u, i)$  asociadas a la política  $u$  y la afluencia  $i$ ;
- modelizar las preferencias del decisor mediante una función de utilidad  $F$ , típicamente multiobjetivo y multietápica.

Entonces, en el periodo (mes)  $t$ , si  $h$  designa la densidad predictiva de las afluencias;  $D$  la información histórica sobre la afluencia; el subíndice  $j$  hace referencia al periodo  $j$ -ésimo; y  $k$  es el horizonte de planificación, nuestro problema implicaría encontrar los controles  $(u_{t+1}, \dots, u_{t+k})$ , que maximicen la utilidad esperada

$$\int F(c(u_{t+1}, i_{t+1}), \dots, c(u_{t+k}, i_{t+k}), s_{t+k+1})h(i_{t+1}, \dots, i_{t+k}|D_t) di_{t+1} \dots di_{t+k}$$

teniendo en cuenta la dinámica del sistema y las restricciones sobre los controles y los niveles del embalse, con  $s_{t+k+1}$  el nivel final de almacenamiento. La solución exacta del modelo es demasiado complicada, y resulta inabordable para  $k$  realista, pongamos 36 meses. La razón de ello radica en que tenemos un problema dinámico estocástico de horizonte largo, en el que la evaluación de cada control requiere resolver una integral de dimensión muy alta y la incertidumbre sobre el proceso de afluencia se propaga rápidamente a través del tiempo.

En su lugar, introducimos en forma *ad hoc* un método que nos ayude a encontrar una buena política. Adoptamos una estrategia basada en el concepto de 'trayectoria



de referencia', que supone haber encontrado en cada periodo un nivel de almacenamiento 'bueno', es decir, que asegure una gestión satisfactoria del embalse en el futuro (algunos periodos). Entonces, en cada periodo, nos gustaría maximizar el valor esperado de una función de utilidad  $F^*$  teniendo en cuenta las consecuencias de interés y la desviación a ese estado de referencia, es decir,

$$\int F^*(c(u_{t+1}, i_{t+1}), \delta(s_{t+2}, s_{t+2}^*))h(i_{t+1}|D_t) di_{t+1}$$

donde  $\delta(s_{t+2}, s_{t+2}^*)$  representa la desviación del estado final  $s_{t+2}$  al estado de referencia  $s_{t+2}^*$ . Intuitivamente, si los estados de referencia se definen de forma que tengan en cuenta los aspectos dinámicos del problema, no perderíamos demasiado con esta aproximación. De hecho, nuestra hipótesis está basada en un método 'tradicional' de gestión de embalses que usa el concepto de *reglas de curva*, que representan trayectorias óptimas del embalse a largo plazo, ver Loucks y Sigvaldasson (1982).

Aplicamos aquí esta metodología a un sistema real de embalses. Dado su éxito, evaluamos formalmente la metodología en problemas generales de decisión secuenciales y la extendemos a problemas modelizados como DI.

### 3.2.3 Aplicación del heurístico a un caso real

El río que estudiamos es el Zambezi, en África, cuyo uso esencial es la generación de electricidad. Los embalses principales son el Lago Kariba (LK) y Cahora Bassa (CB). El Lago Kariba, en la frontera de Zambia y Zimbabwe, suministra casi el 70 % de la electricidad consumida en estos dos países. Cahora Bassa está situado en Mozambique. La energía producida se vende principalmente a Sudáfrica.

El estudio es consecuencia del trabajo realizado por el IIASA (International Institute for Applied Systems Analysis, en Laxenburg, Austria) a petición de un acuerdo

firmado entre cinco países (UNEP, 1987), ver Ríos Insua, Salewicz, Müller y Bielza (1996).

En cuanto a la notación, el superíndice  $c$  se referirá a Cahora Bassa y  $k$  al Lago Kariba. Por ejemplo,  $i_t^c$  designará la afluencia al CB en el mes  $t$ .

### A. Definición de controles

En la actualidad, las políticas de control se definen mediante curvas paramétricas que asocian la suelta con la cantidad de agua almacenada en el embalse. Los parámetros de estas curvas se eligen para que optimicen cierta función. En su lugar, introducimos unas reglas mucho más flexibles, que describimos para Cahora Bassa:

- Al principio del mes, el gestor anuncia las cantidades deseadas de agua  $u_{1t}^c$  y  $u_{2t}^c$  (en mill.m<sup>3</sup>/mes) que hay que liberar, respectivamente, para producción de energía (por turbinas) y para controlar el nivel del embalse (por aliviaderos).
- Si no hay agua suficiente para liberar  $u_{1t}^c$ , se suelta toda el agua disponible para producir energía. En caso contrario, se suelta  $u_{1t}^c$  para producir energía.
- Si después de liberar  $u_{1t}^c$ , hay todavía agua disponible, se suelta adicionalmente algo de agua para controlar el nivel de almacenamiento del embalse. Si no hay agua suficiente para soltar el volumen  $u_{2t}^c$  anunciado, se suelta todo el agua disponible. Si no, se libera  $u_{2t}^c$ . Si tras las dos sueltas, el agua restante excediese el almacenamiento máximo  $M^c = 60000$  mill.m<sup>3</sup>, se vertería tal exceso.

Para el Lago Kariba, existen también las correspondientes cantidades  $u_{1t}^k$  y  $u_{2t}^k$ , definidas de forma similar, con un máximo almacenamiento  $M^k = 70980$  mill.m<sup>3</sup>.

Encontraremos los controles óptimos  $u_1^c, u_2^c, u_1^k$  y  $u_2^k$  asociados a nuestro modelo. Notar que las cantidades reales diferirán de las anunciadas, dependiendo del agua

disponible.

## B. Consecuencias de las políticas de control y dinámica del sistema

Desde el punto de vista de la gestión y administración, las consecuencias de una política de control dada, para Cahora Bassa al final de cada mes son:

1. la cantidad de energía producida  $E_t^c$  en GWh/mes,
2. el nivel de almacenamiento del embalse  $s_t^c$  en mill.m<sup>3</sup>.

Para Kariba las consecuencias relevantes son

1. la existencia de déficit de energía  $k_t$ , con un objetivo marcado de conseguir 750 GWh/mes de energía,
2. el volumen de agua malgastada  $u_{2t}^k$ ,
3. el volumen de agua liberada  $u_{1t}^k + u_{2t}^k$ ,
4. el nivel de almacenamiento del embalse  $s_t^k$ .

Notar las diferencias para ambos embalses: la primera es que en CB la energía se vendería eventualmente a otros países, mientras que la del LK la consumen las naciones productoras. La segunda consecuencia de interés para el LK se debe a un objetivo relacionado con la homogeneidad en el funcionamiento a lo largo del tiempo, por razones descritas en Gandolfi y Salewicz (1991): se ha de minimizar la cantidad de agua malgastada por razones económicas, medioambientales y de seguridad. La tercera tiene que ver con la necesidad de tener en cuenta en el modelo de afluencia del CB las cantidades soltadas desde el Kariba. Finalmente, los niveles de almacenamiento de los pantanos se requieren para poder seguir de cerca la evolución de éstos.

Un rasgo importante en el problema es la dinámica de la cuenca. Describimos aquí la de CB. La dinámica interembalses se reflejará más adelante, en el modelo de predicción, ya que depende del agua liberada del Kariba. La del LK puede verse en Ríos Insua y Salewicz (1995).

Sean  $u_t^c$  y  $e_t^c$ , respectivamente, las cantidades de agua liberada y evaporada durante el mes  $t$ , con  $i_t^c$  y  $s_t^c$  definidos como antes. La ecuación de continuidad describe la relación entre ellas:

$$s_{t+1}^c = s_t^c + i_t^c - u_t^c - e_t^c.$$

El agua total liberada es:

$$u_t^c = u_{1t}^c + u_{2t}^c. \quad (3.2)$$

Para la evaporación usamos un modelo

$$e_t^c = m_t \left( a \times \frac{s_t^c + s_{t+1}^c}{2} + b \right),$$

donde  $m_t$  representa la intensidad de evaporación durante el mes  $t$ . Es periódica y se puede estimar con series temporales de datos de evaporación. Cálculos sencillos conducen a una nueva versión de la ecuación de continuidad:

$$s_{t+1}^c = d_{1t}^c s_t^c + d_{2t}^c (i_t^c - u_t^c) + d_{3t}^c, \quad (3.3)$$

donde  $d_{1t}^c$ ,  $d_{2t}^c$ ,  $d_{3t}^c$  son constantes periódicas apropiadas obtenidas mediante simples transformaciones, ver Ríos Insua, Salewicz, Müller y Bielza (1996).

El volumen activo almacenado, en mill.m<sup>3</sup>, no debe ser menor que un mínimo que permita la vida de la población acuática ni mayor que el máximo

$$1344 \leq s_t^c \leq M^c. \quad (3.4)$$

Suponemos que están funcionando cuatro turbinas (de cinco). El máximo volumen de agua por cada turbina es 1212.19 mill.m<sup>3</sup>/mes. Por tanto

$$0 \leq u_{1t}^c \leq 4848.76 = m^c. \quad (3.5)$$

También hay restricciones sobre el volumen de agua  $u_{2t}^c$  que se suelta por los aliviaderos. Dada la estructura especial de la presa, la suelta de agua por los aliviaderos dependerá del nivel del embalse. Damos la suelta máxima como una función del nivel  $l_t$ , medido en metros sobre el nivel del mar:

$$0 \leq u_{2t}^c \leq \begin{cases} 36761, & \text{si } l_t \geq 326 \\ 3423.822\sqrt{l_t - 210}, & \text{si } 320 \leq l_t < 326 \\ 3338.186\sqrt{l_t - 210}, & \text{si } l_t < 320 \end{cases} \quad (3.6)$$

Proporcionamos una relación entre almacenamiento y nivel, que obtenemos ajustando una curva por mínimos cuadrados del tipo

$$l_t = l_t(s_t^c) = \alpha(1 - \exp(\tau s_t^c)) + \gamma,$$

que lleva a las estimaciones

$$\alpha = 48.83; \tau = -0.0000183393; \gamma = 296.11.$$

Damos ahora una relación para la energía producida. Necesitamos primero una relación entre la cabeza  $h_t$ ; el nivel  $l_t$  y la cola  $r_t$ , en metros:

$$h_t = l_t - r_t.$$

Usando datos disponibles del diseño del embalse, ajustamos un modelo por mínimos cuadrados, relacionando la cola y el agua liberada

$$r_t = \beta \ln(u_t^c) + \delta,$$

con estimaciones

$$\beta = 10.3816; \delta = 113.8537.$$

Finalmente, la energía producida en GWh/mes es

$$E_t^c = \eta u_{1t}^c h_t, \quad (3.7)$$

con

$$\eta = 0.002725 \times .85 \times .778 = .00180204.$$

Podemos entonces construir la Tabla 3.1 que muestra las consecuencias de la política de suelta  $u_1^c, u_2^c$ , como función de la afluencia  $i^c$  y de la cantidad de agua disponible en CB  $h(i^c) = d_1^c s^c + d_2^c i^c + d_3^c$ , donde, por simplificar, omitimos el subíndice  $t$ . Usamos la notación

$$h_1 = \frac{d_2^c u_1^c - d_1^c s^c - d_3^c}{d_2^c}$$

$$h_2 = \frac{d_2^c u^c - d_1^c s^c - d_3^c}{d_2^c}$$

$$h_3 = \frac{M^c + d_2^c u^c - d_1^c s^c - d_3^c}{d_2^c}$$

y consideramos únicamente el caso  $0 \leq h_1$ , en el que si no hubiese afluencia, no podríamos satisfacer las demandas del gestor respecto al agua por las turbinas, es decir,  $u_1^c \geq h(0)/d_2^c$ .

Tabla 3.1: Consecuencias para las políticas de CB. Caso  $h_1 \geq 0$ .

Afluencia	Almac.Fin.	Energía
$i^c \leq h_1$	0	$\eta \frac{h(i^c)}{d_2^c} [l(s^c) - \beta \log(\frac{h(i^c)}{d_2^c}) - \delta]$
$h_1 < i^c \leq h_2$	0	$\eta u_1^c [l(s^c) - \beta \log(\frac{h(i^c)}{d_2^c}) - \delta]$
$h_2 < i^c \leq h_3$	$d_2^c i^c - d_2^c h_2$	$\eta u_1^c [l(s^c) - \beta \log(u^c) - \delta]$
$i^c > h_3$	$M^c$	$\eta u_1^c [l(s^c) - \beta \log(s^c \frac{d_1^c}{d_2^c} + i^c + \frac{d_3^c}{d_2^c} - \frac{M^c}{d_2^c}) - \delta]$

Asimismo, cuando la afluencia al Kariba es  $i^k$  y el agua disponible en Kariba es  $g(i^k) = d_1^k s^k + d_2^k i^k + d_3^k$ , y

$$g_1 = \frac{d_2^k u_1^k - d_1^k s^k - d_3^k}{d_2^k}$$

$$g_2 = \frac{d_2^k u^k - d_1^k s^k - d_3^k}{d_2^k}$$

$$g_3 = \frac{M^k + d_2^k u^k - d_1^k s^k - d_3^k}{d_2^k}$$

$$g_4 = g_1 + \frac{M^k}{d_2^k},$$

donde  $d_1^k, d_2^k, d_3^k$  son las constantes de evaporación para el Kariba, tenemos la Tabla 3.2, ver Ríos Insua y Salewicz (1995) para más detalles.

Tabla 3.2: Consecuencias para las políticas de LK. Caso  $g_1 \geq 0$ .

Afluencia	Vertida	Total Liber.	Alm.Fin.	Afluen.	Defi.
$i^k \leq g_1$	0	$g(i^k)/d_2^k$	0		
$g_1 < i^k \leq g_2$	$i^k - g_1$	$g(i^k)/d_2^k$	0	$i^k \leq o_1$	0
$g_2 < i^k \leq g_3$	$u_2^k$	$u_1^k + u_2^k$	$d_2^k(i^k - g_2)$		
$i^k > g_3$	$i^k - g_4$	$(g(i^k) - M^k)/d_2^k$	$M^k$	$i^k > o_1$	1

De nuevo, hemos incluido sólo el caso  $0 \leq g_1$ , en el que, si no hubiera afluencia, no podríamos satisfacer las demandas del gestor respecto al agua por las turbinas.  $o_1$  es un nivel mínimo de afluencia que no conduce a déficit de energía, dado que la energía producida es una función no decreciente de la afluencia.

## C. Modelos de predicción

La principal fuente de incertidumbre en la gestión de embalses está asociada al proceso de afluencia: las sueltas mensuales deben tener en cuenta la afluencia en el mes correspondiente y en los posteriores, que son inciertos. Para resolver el problema de predicción empleamos Modelos Dinámicos (MD). Una descripción completa de estos modelos puede consultarse en West y Harrison (1989) y West (1995).

Dada la localización de ambos embalses, consideramos un modelo para predecir las afluencias al Kariba, que sólo resumiremos, ver Ríos Insua y Salewicz (1995) para los detalles, y un modelo para predecir las afluencias al Cahora Bassa. Este último dependerá de afluencias que no provienen del Kariba, que llamamos afluencias incrementales, y de las sueltas del Kariba. Tenemos así en cuenta la dinámica interembalses.

### C.1 Afluencias al Lago Kariba

Tras aplicar una transformación logarítmica, modelizamos la serie temporal de las afluencias al Kariba mediante un modelo dinámico lineal (MDL), con un término para el nivel, otro para la variación estacional (anual) y un término autorregresivo de primer orden con coeficiente bajo para mejorar las predicciones a corto plazo. Sólo retuvimos el primer armónico para la parte estacional:

- *Ecuación de observación.*

$$y_t^k = z_t^{1k} + z_t^{2k} + z_t^{4k} + v_t^k, \quad v_t^k \sim N(0, v^k)$$

donde  $y_t^k = \log(i_t^k)$  es el logaritmo de la afluencia al Kariba;  $z_t^{1k}$  designa el nivel de la serie;  $z_t^{2k}$  y  $z_t^{3k}$  hacen referencia al término estacional, ver más abajo;  $z_t^{4k}$



se refiere al término autorregresivo; y  $v_t^k$  designa un término de error gaussiano con varianza constante  $v^k$ , pero desconocida.

- *Ecuación del sistema.*

$$\begin{aligned} z_t^{1k} &= z_{t-1}^{1k} + w_t^{1k} \\ z_t^{2k} &= \cos(\pi/6)z_{t-1}^{2k} + \sin(\pi/6)z_{t-1}^{3k} + w_t^{2k} \\ z_t^{3k} &= -\sin(\pi/6)z_{t-1}^{2k} + \cos(\pi/6)z_{t-1}^{3k} + w_t^{3k} \\ z_t^{4k} &= .4z_{t-1}^{4k} + w_t^{4k} \end{aligned}$$

con  $\mathbf{w}_t^k = (w_t^{1k}, \dots, w_t^{4k})$  un término de error tal que

$$\mathbf{w}_t^k \sim N \left( \mathbf{0}, \begin{pmatrix} v^k W_t^{*k} & 0 \\ 0 & \sigma^{k2} \end{pmatrix} \right),$$

donde  $\sigma^{k2}$  es la varianza autorregresiva; y  $W_t^{*k}$ , la matriz de varianzas (salvo el término  $v^k$ ) de los tres primeros términos. Esta matriz se definió usando descuento, con factor de descuento de .8 para el nivel y de .95 para la parte estacional.

- *Información a priori.*

$$\mathbf{z}_0^k | \phi^k \sim N(\mathbf{m}_0^k, v^k C^{*k})$$

$$\phi^k \sim \text{Gamma}(n_0^k/2, d_0^k/2)$$

con  $\mathbf{z}_0^k = (z_0^{1k}, z_0^{2k}, z_0^{3k}, z_0^{4k})$  y  $\phi^k = \frac{1}{v^k}$ .

Los parámetros a priori se especificaron con ayuda de un experto como sigue:  $m_0^k$  como (7.8,-1.02,.33,0),

$$C^{**k} = \begin{pmatrix} .02 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .002 & .0007 & 0 \\ 0 & .0007 & .003 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .1 \end{pmatrix},$$

$n_0^k = 10$  y  $d_0^k = .8$ . Se comprobó la robustez de las predicciones a cambios en la distribución a priori.

## C.2 Regresión dinámica Kariba-Cahora Bassa

El análisis exploratorio de los datos sugiere realizar una regresión dinámica con las afluencias de ambos embalses, tras transformación logarítmica. Para ello, definimos  $y_t^c = \log(i_t^c)$  y  $z_t = y_t^c - y_t^k$ , que puede verse en la Figura 3.1. Tratamos de predecir  $z_t$ , de nuevo mediante un término para el nivel y otro para la parte estacional. En este caso, como al experto no le resultaba fácil asignar esta variable, basamos las asignaciones en los datos, revisándolos después vía análisis de sensibilidad. Los resultados se indican en la Tabla 3.3.

Tabla 3.3: Asignaciones para el nivel y para los efectos estacionales.

	Niv	Oct	Nov	Dic	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep
Media	.85	1.64	1.59	1.06	.91	.85	.41	-.16	-.04	.36	.86	1.23	1.46
Efecto		-.79	-.74	-.21	-.06	-.00	.43	1.01	.89	.48	-.01	-.38	-.61
Maxdv	.33	.35	.38	1.06	1.11	.98	1.13	1.01	.85	.68	.69	.49	.39
Dvtip	.16	.00	.02	.36	.39	.32	.39	.33	.25	.17	.17	.08	.03

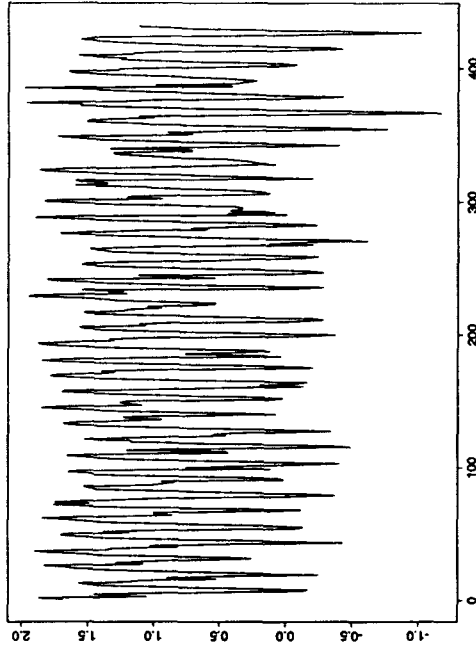


Figura 3.1: Diferencia de logaritmos de las afluencias a Cahora y Kariba.

De acuerdo con esto se dedujeron las varianzas, suponiendo independencia entre los efectos nivel y mensual. Por ejemplo, para el nivel, la máxima desviación del valor esperado es aproximadamente .33 y suponemos una desviación estándar de .165. Analizamos éste y otros valores mediante análisis de sensibilidad.

La descomposición de Fourier de la parte estacional es la que vemos en la Tabla 3.4. con matrices de covarianzas deducidas de las de los efectos. Por ejemplo, para

Tabla 3.4: Descomposición de Fourier de los efectos estacionales.

Armónico	0	1	2	3	4	5	6
$a_i$	0.	-.779	.056	-.122	.033	-.003	.017
$b_i$	-	-.103	.143	-.091	-.048	-.012	-

el primer armónico

$$C_1^* = \begin{pmatrix} .017 & .005 \\ .005 & .015 \end{pmatrix}.$$

La relevancia de los armónicos se evalúa con métodos descritos en West y Harrison (1989) con resultados en la Tabla 3.5.

Tabla 3.5: Relevancia de armónicos.

Armónico	1	2	3	4	5	6
Estadístico	-5.77	-.15	.49	-.28	-.00	-.00

Como consecuencia, sólo se retuvo inicialmente el primer armónico. Sin embargo, análisis posteriores sugirieron incluir el segundo armónico, junto con un término autorregresivo de primer orden de bajo coeficiente, para mejorar las predicciones a corto plazo. En resumen, utilizamos el siguiente MDL:

- *Ecuación de observación.*

$$z_t = s_t^1 + s_t^2 + s_t^4 + s_t^5 + v_t^c, \quad v_t^c \sim N(0, v^c)$$

donde  $s_t^1$  designa al nivel de la serie;  $s_t^2$  y  $s_t^3$  hacen referencia al primer armónico del término estacional;  $s_t^4$  y  $s_t^5$  se refieren al segundo armónico;  $s_t^6$  se refiere al término autorregresivo; y  $v_t^c$  designa un término de error gaussiano de varianza constante  $v^c$ , pero desconocida.

- *Ecuación del sistema.*

$$\begin{aligned} s_t^1 &= s_{t-1}^1 + w_t^{1c} \\ s_t^2 &= \cos(\pi/6)s_{t-1}^2 + \text{sen}(\pi/6)s_{t-1}^3 + w_t^{2c} \\ s_t^3 &= -\text{sen}(\pi/6)s_{t-1}^2 + \cos(\pi/6)s_{t-1}^3 + w_t^{3c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_t^4 &= \cos(\pi/3)s_{t-1}^4 + \text{sen}(\pi/3)s_{t-1}^5 + w_t^{4c} \\
s_t^5 &= -\text{sen}(\pi/3)s_{t-1}^4 + \cos(\pi/3)s_{t-1}^5 + w_t^{5c} \\
s_t^6 &= .4s_{t-1}^6 + w_t^{6c}
\end{aligned}$$

con  $\mathbf{w}_t^c = (w_t^{1c}, \dots, w_t^{6c})$  un término de error tal que

$$\mathbf{w}_t^c \sim N \left( \mathbf{0}, \begin{pmatrix} v^c W_t^{*c} & 0 \\ 0 & \sigma^{c2} \end{pmatrix} \right),$$

con  $\sigma^{c2}$  la varianza autorregresiva; y  $W_t^{*c}$ , la matriz de varianzas (salvo el término  $v^c$ ) de los cinco primeros términos. Esta matriz se definió usando descuento, con un factor de descuento  $\delta_1^c$  para el nivel y  $\delta_2^c$  para la parte estacional.

• *Información a priori.*

$$\mathbf{s}_0 | \phi^c \sim N(\mathbf{m}_0^c, v^c C^{*c})$$

$$\phi^c \sim \text{Gamma}(n_0^c/2, d_0^c/2)$$

con  $\mathbf{s}_0 = (s_0^1, \dots, s_0^6)$  y  $\phi^c = \frac{1}{v^c}$ .

La asignación de los parámetros de la gamma fue más complicada, y la basamos en una estimación de la varianza esperada y en representaciones gráficas de las densidades correspondientes. Como resultado de las asignaciones, se especificó  $\mathbf{m}_0^c$  como (.850, -.779, -.103, .056, .144, 0),

$$C^{*c} = \begin{pmatrix} .09 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .017 & .005 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .005 & .015 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .02 & -.002 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -.002 & .022 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .1 \end{pmatrix},$$

$n_0^c = 8$  y  $d_0^c = 1.2$ .

Se realizaron análisis de sensibilidad detallados con respecto a:  $\delta_1^c$  y  $\delta_2^c$ ; los parámetros de la gamma  $n_0^c$  y  $d_0^c$ ; el coeficiente autorregresivo y la varianza. Estudiamos el efecto de cambios en las estimaciones iniciales de estos parámetros sobre el comportamiento de las varianzas predictivas, el error absoluto en media de los errores en las predicciones a un paso y sus funciones de autocorrelación. El modelo parecía bastante robusto y se seleccionaron los siguientes parámetros de descuento:  $\delta_1^c = .95$  y  $\delta_2^c = .95$ .

### C.3 Afluencias al Cahora Bassa

El modelo que proponemos ahora para Cahora Bassa depende de las sueltas del Kariba y de la afluencia incremental ( $inc_t$ ) al Cahora Bassa. Teniendo en cuenta que el tiempo durante el cual viaja el agua es menor que un mes, usamos la siguiente relación:

$$i_t^c = u_t^k + inc_t.$$

Dado que los datos sobre las sueltas no están disponibles, y dependerán realmente de las sueltas de nuestro enfoque, usaremos la siguiente aproximación para estimar las afluencias incrementales. Primero, si no hubiese embalse, tendríamos la siguiente relación entre las afluencias:

$$i_t^c = i_t^k + inc_t.$$

La segunda relación describe una regresión dinámica entre las afluencias al CB y al LK, y refleja la relación física de que la afluencia está relacionada con el tamaño de la cuenca:

$$i_t^c = \beta_t i_t^k.$$

Cálculos sencillos sugieren entonces modelizar las afluencias incrementales mediante

$$inc_t = (\beta_t - 1)i_t^k,$$

y las afluencias al CB mediante

$$i_t^c = u_t^k + (\beta_t - 1)i_t^k.$$

Observar que ya no tenemos un MDL, ya que tanto los pesos de la regresión como los regresores están sujetos a incertidumbre. Además, la distribución de  $u_t^k$  ya no es normal. La predicción de  $i_t^c$  se realiza fácilmente mediante simulación, ya que conocemos o sabemos muestrear fácilmente todas las distribuciones implicadas. La de  $i_t^k$  se obtiene del modelo de las afluencias al Lago Kariba (apartado C.1);  $u_t^k$  se obtiene del modelo del apartado C.1 y usando la tabla de consecuencias para el Kariba ya vista (como la Tabla 3.2); la distribución de  $\beta_t$  proviene de la inversión de la transformación hecha en el apartado C.2 de la regresión dinámica y del modelo allí usado. Después de un número suficiente de etapas,  $i_t^k$  y  $\beta_t$  seguirán una distribución lognormal.

## D. Funciones de utilidad

Como se describe en la sección 3.2.2, la función de utilidad usada en nuestra aproximación tiene en cuenta las consecuencias de interés, ya descritas, y las desviaciones de una trayectoria de referencia. Describimos primero cómo calcular las trayectorias de referencia y después el modelo completo de preferencias.

### D.1 Cálculo de la trayectoria de referencia

Describimos aquí el cálculo de la trayectoria de referencia para Cahora Bassa. Un procedimiento similar se aplicó en Ríos Insua y Salewicz (1995) para obtener una

trayectoria de referencia para el Kariba. Esencialmente, usamos versiones determinísticas de nuestros problemas, donde las afluencias mensuales se consideran conocidas y fijadas en sus valores esperados predictivos. La dinámica del sistema es la anterior. El periodo de planificación se toma igual a un año.

Para el problema determinístico, necesitamos un volumen inicial. Hacemos

$$s_0^c = .7M^c = 42000. \quad (3.8)$$

Como en el estudio del Lago Kariba, la función objetivo incluye un término relacionado con la desviación del estado inicial  $s_0^c$ , un término relacionado con el objetivo principal del problema estocástico, que es la producción de energía, y un término que supone una penalización de carácter ecológico, que se define mediante la función

$$g(s^c) = \begin{cases} 0, & \text{si } 41500 \leq s^c \leq 51600 \\ \frac{1}{2141400000}(s^{c2} - 93100s^c) + 1, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces, la función objetivo es

$$f(u^c) = \rho_0(s_{12}^c - s_0^c)^2 - \rho_1 \sum_{t=1}^{12} \eta u_{1t}^c (l_t - r_t) + \rho_2 \sum_{t=1}^{12} g(s_t^c),$$

y está relacionada con la función de utilidad del problema estocástico que consideraremos en el siguiente apartado. Las constantes  $\rho_i$  reflejan la importancia relativa de cada componente.

El problema de optimización es  $\min f(u^c)$  s.a. (3.2) – (3.8). Lo resolvemos mediante programación dinámica, con varias reformulaciones para simplificar la solución. El subproblema de cada etapa se resolvió con una versión modificada de OPQSQP (NOC, 1990). Se adoptó una estrategia multicomienzo para evitar converger a óptimos locales malos. Para cada mes  $t$ , se ajustó una función suave como aproximación a la función de valor óptimo (de la que sólo se conocían varios puntos).



La trayectoria de referencia se obtuvo como la solución óptima del problema de optimización dinámica determinística con condición inicial (3.8), y se describe en la Tabla 3.6. Se introdujo una restricción adicional  $u_{2t}^e \leq 18000$  para obtener un rendimiento más homogéneo.

Tabla 3.6: Trayectoria de referencia para Cahora Bassa.

Mes	inicial	por turb	por aliv	energía	final
Octubre	42000	4848	0	1052	42256
Noviembre	42256	4848	0	1053	41420
Diciembre	41420	4848	0	1049	43293
Enero	43293	4848	0	1047	48258
Febrero	48258	4848	0	1063	55948
Marzo	55948	4848	18000	956	45969
Abril	45969	4848	18000	922	32458
Mayo	32458	4848	0	1013	35660
Junio	35666	4848	0	1026	38037
Julio	38037	4848	0	1036	40065
Agosto	40065	4848	0	1044	41457
Septiembre	41457	4848	0	1048	42179

Corresponde a un rendimiento excelente del embalse, con sueltas homogéneas y producción elevada de energía.

## D.2 La expresión de la utilidad esperada

Por razones descritas en Ríos Insua y Salewicz (1995), usamos una función de utilidad aditiva para Kariba que incluye un término relacionado con el déficit de energía, otro con el agua malgastada y otro que penaliza las desviaciones al estado de referencia. La forma general es:

$$F_K(u_1^k, u_2^k) = F_K(k, u_2^k, s^k) = \lambda f_1(k) + (1 - \lambda) f_2(u_2^k) + \rho_K (s^k - s^{k*})^2,$$

donde  $k$  representa la existencia (1) o no (0) de déficit,  $s^k$  es el estado final del embalse,  $s^{k*}$  es el estado de referencia,  $u_2^k$  es el volumen de agua malgastada,  $\lambda$  y  $\rho_K$  son pesos y  $f_1$  y  $f_2$  son funciones de utilidad monobjetivo. Para  $f_1$ , dado que  $k$  sólo puede tomar dos valores (0 ó 1), y 0 es mejor, escogemos

$$f_1(k) = 1 - k.$$

Para  $f_2$ , dado que los gestores tienen aversión al riesgo frente a sueltas grandes, y se prefieren sueltas pequeñas a grandes, escogemos una función de utilidad exponencial no decreciente con aversión al riesgo:

$$f_2(u_2^k) = -.07171 + 1.08365 \exp(-.0001415u_2^k).$$

$\lambda$  se fijó inicialmente en 0.75. Para la asignación de parámetros utilizamos métodos estándar, ver por ejemplo French (1986). Escogimos  $\rho_K = -10^{-10}$  para conseguir que la penalización tuviera una escala adecuada a las otras componentes de la utilidad.

Para Cahora Bassa, modelizamos

$$F_C(u_1^c, u_2^c) = F_C(E^c, s^c) = f_3(E^c) + \rho_C (s^c - s^{c*})^2,$$

donde  $E^c$  es la energía producida,  $s^c$  y  $s^{c*}$  son el almacenamiento y el almacenamiento de referencia en Cahora Bassa. Usando técnicas estándar de asignación de utilidades, con Salewicz como experto proporcionando información sobre las preferencias, usamos una función de utilidad convexa-cóncava con 765 GWh/mes como punto de inflexión:

$$f_3(E^c) = \begin{cases} .0038(-1 + \exp(0.0066E^c)), & \text{si } E^c \leq 765 \\ 1.003473 - .4034728 \exp(-.02377571(E^c - 765)), & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por las mismas razones que antes, utilizamos  $\rho_C = -10^{-10}$ .

Finalmente, se componen ambas funciones de utilidad de forma que

$$F(u_1^k, u_2^k, u_1^c, u_2^c) = \mu F_K(u_1^k, u_2^k) + (1 - \mu) F_C(u_1^c, u_2^c)$$

y la utilidad esperada es

$$\Psi(u_1^k, u_2^k, u_1^c, u_2^c) = \int F(u_1^k, u_2^k, u_1^c, u_2^c) dH(i^k, i^c|D),$$

donde  $H(i^k, i^c|D)$  es la distribución predictiva de las afluencias a los embalses, obtenida del modelo de predicción del apartado C. Inicialmente tomamos  $\mu = 0.5$ . Evaluamos además la sensibilidad de los distintos parámetros.

## E. Maximización de la utilidad esperada

En cada etapa, hemos de maximizar la utilidad esperada con respecto a las variables de control y sujeto a las restricciones sobre los controles (sueitas del embalse): el volumen de agua liberada ha de ser no negativo; el volumen de agua liberada para producción de energía y control del flujo está limitado por la capacidad de las turbinas y de los aliviaderos. El problema de optimización viene dado entonces por:

$$\begin{aligned} & \max \Psi(u_1^k, u_2^k, u_1^c, u_2^c) \\ \text{s.a. } & 0 \leq u_1^k \leq m^k \\ & 0 \leq u_2^k \\ & 0 \leq u_1^c \leq m^c \end{aligned}$$

con las restricciones impuestas a  $u_2^c$  debido a la estructura de la presa del CB.  $m^k$  y  $m^c$  son los máximos posibles por turbinas en Kariba y CB. Notar sin embargo que no tenemos una expresión explícita de la utilidad esperada. Las complicaciones de los cálculos se reflejan en el siguiente diagrama de influencia de la Figura 3.2 que describe el problema de Análisis de Decisiones en cada etapa.

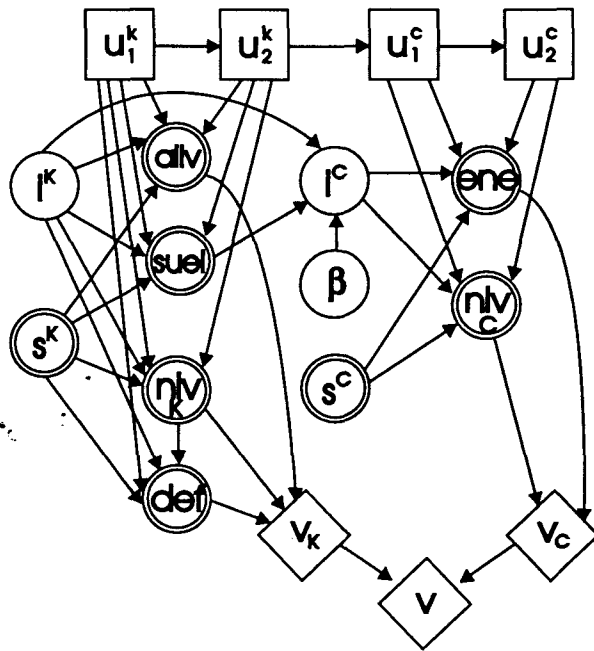


Figura 3.2: Problema de decisión en cada etapa.

Sin embargo, para cada  $(u_1^k, u_2^k, u_1^c, u_2^c)$ , la utilidad esperada se puede calcular fácilmente por simulación:

Para cada  $(u_1^k, u_2^k, u_1^c, u_2^c)$  fijo,

1. Generar  $(i_k^1, \dots, i_k^N)$ , de la distribución predictiva en C.1.
2. Para cada  $i_j^k$ , y dado  $(u_1^k, u_2^k, u_1^c, u_2^c)$ 
  - Calcular agua malgastada, liberada en total, almacenamiento final, déficit,  $F_K(u_1^k, u_2^k)_j$  (con tablas apropiadas, como la 3.2)
  - De la distribución predictiva en C.1, C.2 y C.3, y sueltas del Kariba, generar  $i_j^c$
  - Calcular energía, almacenamiento final,  $F_C(u_1^c, u_2^c)_j$  (con tablas apropiadas, como la 3.1).
3. Aproximar  $\Psi(u_1^k, u_2^k, u_1^c, u_2^c)$  por

$$\hat{\Psi}_N(u_1^k, u_2^k, u_1^c, u_2^c) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\mu F_K(u_1^k, u_2^k)_j + (1 - \mu) F_C(u_1^c, u_2^c)_j)$$

En consecuencia, en cada etapa resolvemos el problema

$$\max \hat{\Psi}_N(u_1^k, u_2^k, u_1^c, u_2^c)$$

con las restricciones ya indicadas antes. Resolvimos estos problemas con el algoritmo de Nelder Mead, como se implementa en las IMSL (1989), siendo la razón principal la necesidad de un método robusto, dados los cambios en la función objetivo en las diferentes etapas, y la necesidad de un método que requiera sólo evaluaciones de la función, ver Nemhauser et al (1989). Para evitar la convergencia a un óptimo local malo, se usó una estrategia multicomenzo guiada.

## F. Resultados

Esta aproximación se probó con datos mensuales de afluencias de Octubre de 1930 a Septiembre de 1965. Las simulaciones incluyeron un periodo de calentamiento

para el algoritmo de predicción, seguido por un periodo en el que tuvieron lugar la predicción y la optimización. El primer aspecto que analizamos fue el impacto de los parámetros clave en el rendimiento del embalse, principalmente  $\mu$ ,  $\rho_K$  y  $\rho_C$ . El análisis de sensibilidad de otros parámetros se ha descrito en Ríos Insua y Salewicz (1995).

Como las sueltas del Kariba eran bastante irregulares, se modificó  $\rho_K$  a  $-10^{-9}$  y, por homogeneidad, se hizo un cambio similar con  $\rho_C$ . Se incluyeron también cotas superiores de las cantidades de agua vertidas anunciadas para los dos embalses. Más aún, como éstos tendían a estar demasiado llenos para niveles de afluencia muy altos, se introdujo una regla que incrementó  $\rho_K$  y  $\rho_C$  a  $-5 \times 10^{-9}$  cuando los embalses estaban al 90% de su capacidad máxima.

Las Figuras 3.3 y 3.4 proporcionan el comportamiento de ambos embalses con nuestras políticas, mostrando las sueltas por las turbinas, el agua malgastada, la energía producida y el agua almacenada.

En lo que respecta al Kariba, notar que la energía está muy por encima del objetivo marcado de 750 GWh/mes, el cual es mucho mayor que el actual de 600 GWh/mes, sugiriendo por tanto una gestión mucho más eficiente. Respecto a las sueltas, siempre están por debajo del nivel de 4000 mill.m<sup>3</sup>, excepto en dos periodos: uno de tres meses, en el que las sueltas fueron 19451, 11331 y 4491, respectivamente; y otro de dos meses, con sueltas de 5392 y 7108, respectivamente. Sin embargo, en esos meses las afluencias fueron 25486, 27690 y 14281 (suficientes para llenar el embalse), y 12295, 17475, 15899, 10637, correspondiendo a una regulación aceptable de la afluencia. Globalmente, las sueltas fueron bastante homogéneas y mucho menores a las de la gestión actual. Además, excepto en los cinco meses en los que el embalse estuvo en su nivel máximo de retención, la gestión estuvo bajo condiciones

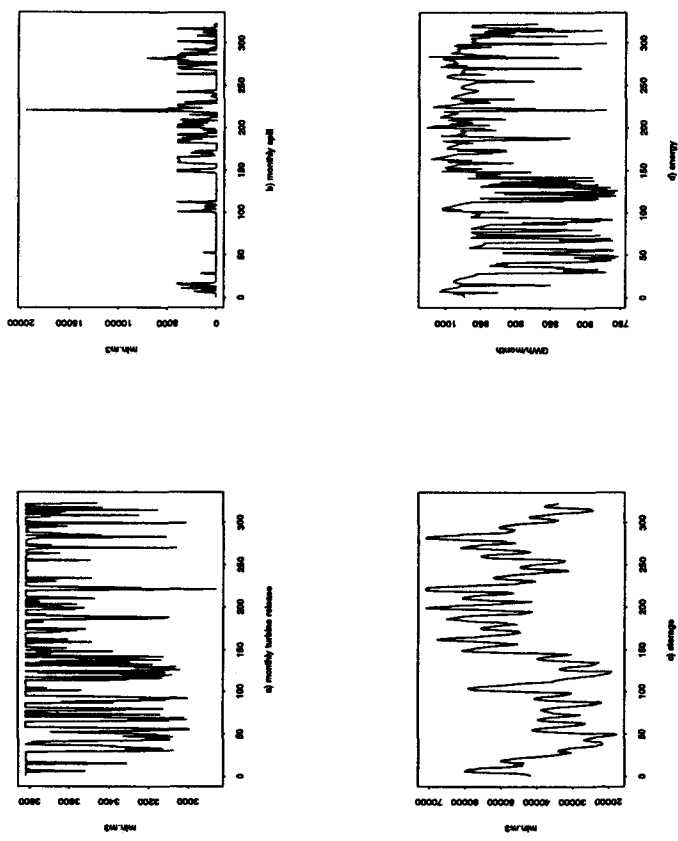


Figura 3.3: Rendimiento simulado del Kariba: resultados de las sueltas, almacenamiento y energía.

seguras. Las sueltas por turbinas tendieron a estar próximas al máximo de 3820 mill.m<sup>3</sup>.

Para CB se observa un comportamiento similar. Las sueltas por turbinas tendieron a estar próximas al máximo de 4848.76 mill.m<sup>3</sup>. La energía osciló entre 895 GWh/mes y 1066 GWh/mes. La gestión de ambos embalses es bastante equilibrada,

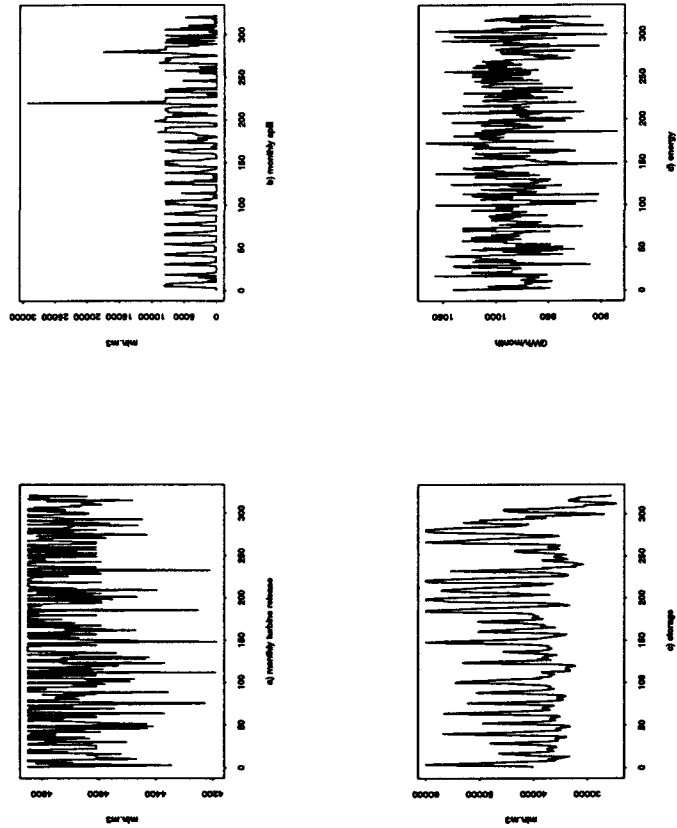


Figura 3.4: Rendimiento simulado del Cahora Bassa: resultados de las sueltas, almacenamiento y energía.

tanto en términos económicos como de seguridad.

Probamos varios escenarios. Primero, estudiamos el rendimiento de los embalses comenzando con niveles de almacenamiento muy bajos, y también con niveles próximos a sus máximos. Después simulamos los embalses con afluencias muy bajas. Bajo estas condiciones extremas, el rendimiento era aún aceptable.



La forma típica de las reglas de suelta de agua obtenidas como resultado de los cálculos es, ver Figura 3.5: la cantidad de agua liberada para producir energía es decreciente ante niveles de almacenamiento bajos, ya que se requiere menos cantidad de agua para alcanzar el objetivo de producción de energía propuesto y queremos permanecer próximos al estado de referencia; en niveles más altos de almacenamiento, la política de control tiende a soltar tanta agua como sea necesaria para generar electricidad, minimizando el agua malgastada. En niveles de almacenamiento muy altos, el mecanismo que controla la desviación del estado real al de referencia comienza a actuar y se vierte el agua excedente para asegurar que se sigue la trayectoria de referencia.

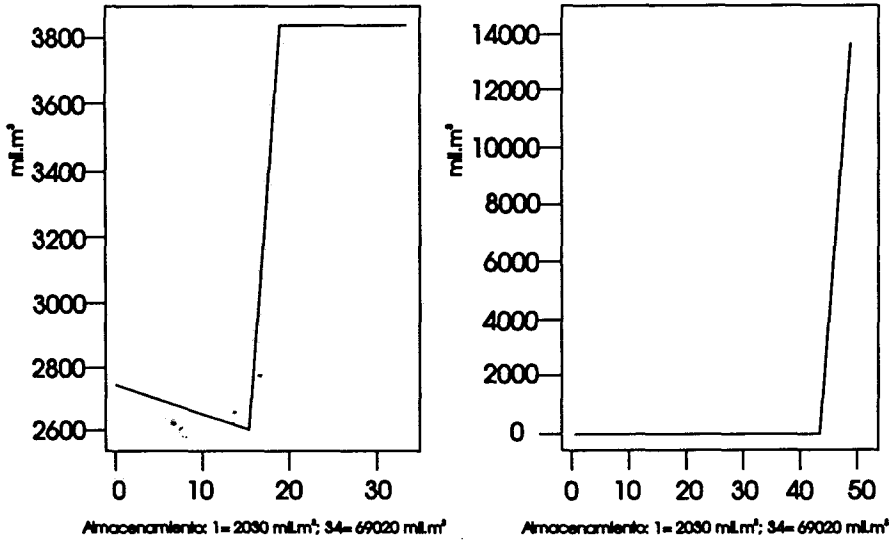


Figura 3.5: Forma típica de las políticas.

Los aspectos clave en este estudio han sido la definición de políticas flexibles, el uso de modelos de predicción Bayesianos, una modelización cuidadosa de las preferencias (que incluye un término que refleja la desviación de una trayectoria de referencia), un heurístico que proporciona una política de aproximación de la

utilidad máxima esperada, y una comprobación de nuestra política mediante análisis de sensibilidad.

### 3.3 Formalización del heurístico

Motivados por los resultados satisfactorios obtenidos en la gestión de los embalses Kariba y Cahora Bassa, estudiamos ahora esta metodología más detalladamente, evaluando su bondad en problemas de decisión multietápicas más generales. Después especificamos el heurístico en la solución de diagramas de influencia.

#### 3.3.1 Idea subyacente

Formulamos el heurístico para el problema genérico de decisión secuencial descrito en la Sección 3.1. Suponemos que en cada periodo tenemos una trayectoria de referencia para el sistema ( $\hat{x}_0 = x_0, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{N+1}$ ). La resolución del problema consistirá entonces en resolver en cada periodo

$$\min_{d_t} E[c_t(x_{t-1}, x_t) + \rho(x_t - \hat{x}_t)^2], \quad \rho \geq 0 \quad (3.9)$$

obteniendo

$$d'_t(x_{t-1}) = \arg \min_{d_t} E[c_t(x_{t-1}, x_t) + \rho(x_t - \hat{x}_t)^2].$$

Por razones de simplicidad computacional utilizamos la distancia euclídea ponderada, donde la ponderación  $\rho$  se puede someter a análisis de sensibilidad. El valor de la solución viene dado por

$$E\left[\sum_{t=1}^N c_t(x_{t-1}, f_t(x_{t-1}, \theta_t, d'_t(x_{t-1})))\right].$$

La estrategia  $S'$  sugerida por este heurístico se conseguiría utilizando los  $d'_t$  obtenidos.

El heurístico propuesto se compone por tanto de dos fases. En la fase I se construye la trayectoria de referencia de tal forma que tenga en cuenta los aspectos dinámicos del problema, como explicaremos más adelante. En la fase II resolvemos en cada etapa el problema de minimización del coste asociado únicamente a esa etapa, penalizando los estados que se desvíen del de referencia. Como es usual en la teoría de funciones de penalización, ver Nemhauser et al (1989), la solución de la ecuación (3.9) nos lleva a un estado  $x'_t$  que depende de  $\rho$  y que se aproxima al estado de referencia  $\hat{x}_t$  a medida que  $\rho$  tiende a infinito.

Notemos que la resolución del problema es ahora hacia delante, pero conjeturamos que la aproximación es buena pues el hecho de que cada etapa dependa de los resultados de etapas anteriores, que es el motivo de la recurrencia hacia atrás, se está considerando en el cálculo de la trayectoria de referencia en la fase I. Si este cálculo es sencillo obtenemos ventajas computacionales. Por ejemplo, cuando se tiene un problema determinístico que se ha de resolver varias veces con horizontes de planificación diferentes (porque la planificación se revisa periódicamente o bien porque se desconoce el horizonte apropiado y se lleva a cabo un análisis de sensibilidad), se obtienen ventajas con la recurrencia hacia delante pues se evitan cálculos previos. Se trata entonces de un heurístico miope.

### 3.3.2 Descripción formal del heurístico

Describimos formalmente el heurístico para un problema con dos etapas. Las ideas se extienden a cualquier número de etapas. Supondremos que el modelo probabilístico es de Markov para no recargar la notación. En la Sección 3.4, relativa a DI, se utilizan modelos probabilísticos más generales.

El problema que debemos resolver es

$$\min_{d_1, d_2} E_{\theta_1, \theta_2} (c_1(x_1, x_0) + c_2(x_2, x_1))$$

$$\text{s.a. } x_1 = f_1(x_0, \theta_1, d_1)$$

$$x_2 = f_2(x_1, \theta_2, d_2)$$

que se resuelve por PD mediante

$$\min_{d_1} E_{\theta_1} [c_1(x_1, x_0) + \min_{d_2} E_{\theta_2 | \theta_1} (c_2(x_2, x_1))],$$

obteniendo  $d_1^*$  y  $d_2^*$  como soluciones.

Alternativamente, proponemos resolver el problema de forma aproximada como sigue:

**FASE I:** Cálculo de la trayectoria de referencia

1. Tomar valores representativos de la v.a.  $(\theta_1, \theta_2)$ , denotados  $(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ .
2. Resolver el problema de PD determinístico

$$\min_{d_1, d_2} c_1(x_1, x_0) + c_2(x_2, x_1)$$

$$\text{s.a. } x_1 = f_1(x_0, \tilde{\theta}_1, d_1)$$

$$x_2 = f_2(x_1, \tilde{\theta}_2, d_2)$$

La solución de este problema es  $\hat{d}_1, \hat{d}_2$  que conduce a la trayectoria de referencia  $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ .

**FASE II:** Procedimiento hacia delante

1. Resolver  $\min_{d_1} E_{\theta_1} (c_1(x_1, x_0) + \rho(x_1 - \hat{x}_1)^2)$ , obteniendo la primera decisión propuesta  $d_1'$ .

2. Conocido el valor que toma  $\theta_1$ , resolver  $\min_{d_2} E_{\theta_2|\theta_1}(c_2(x_2, x_1) + \rho(x_2 - \hat{x}_2)^2)$ , obteniendo  $d'_2$ .

Para evaluar el heurístico deberíamos comprobar si  $h(d_1^*, d_2^*) - h(d_1', d_2')$  es una cantidad pequeña, donde

$$h(d_1, d_2) = E_{\theta_1, \theta_2}(c_1(x_1, x_0) + c_2(x_2, x_1)),$$

con  $x_1 = f_1(x_0, \theta_1, d_1)$  y  $x_2 = f_2(x_1, \theta_2, d_2)$ .

### 3.4 Aplicación a diagramas de influencia

En esta sección aplicamos el heurístico a la resolución aproximada de DI con variables continuas. Este es un problema muy difícil del que sólo existen soluciones en algunos casos especiales. En el Capítulo 4, daremos otra aproximación basada en simulación.

Los *DI gaussianos* estudian el modelo gaussiano-cuadrático-lineal, ver Shachter y Kenley (1989). En ellos, la distribución de probabilidad conjunta de las variables del modelo es normal multivariante. Cada variable condicionada  $X_j|X_{C(j)}$  sigue una distribución normal de media  $\mu_j + \sum_{k \in C(j)} b_{kj}(X_k - \mu_k)$  y varianza  $v_j$ . Se tienen resueltos los casos de función de valor cuadrática con utilidad exponencial y aversión al riesgo constante. El algoritmo, análogo al de DI convencionales, realiza operaciones escalares de interpretación intuitiva y gráfica, a diferencia del álgebra matricial empleada usualmente en los modelos gaussianos. Ver Burns y Clemen (1993) para una comparación de ambos enfoques.

Es interesante notar que para asignar probabilidades que están condicionadas a una variable de decisión se fija primero un valor de referencia para ésta: por ejemplo, la política actual o el resultado de una optimización determinística. Una vez que se calcula su correspondiente política óptima, este nodo de decisión se convierte en

nodo de azar reemplazando esta política al valor de referencia y siendo eliminado como nodo probabilístico. Cuando se eliminan todos los nodos, se propagan hacia delante los cambios en las medias para obtener el diagrama de la política.

La extensión de estos modelos sería a casos en que

$$X_j = f_j(X_{C(j)}) + e_j \quad j = 1, \dots, n$$

donde  $\{f_j\}$  son funciones reales arbitrarias y  $\{e_j\}$  son v.a. independientes. En el caso anterior, las  $\{f_j\}$  son lineales y las  $\{e_j\}$  normales. Pero si las  $\{e_j\}$  no son normales y/o las  $\{f_j\}$  no son lineales, es decir, en cuanto el modelo probabilístico se desvía del normal multivariante, el estudio resulta extremadamente complicado y se restringe mucho la clase de problemas de decisión que se pueden resolver mediante un DI gaussiano, por lo que hay que buscar otros métodos.

Proponemos entonces aplicar nuestro heurístico para resolver DI con variables continuas. Estudiamos problemas que se asimilen al esquema introducido previamente. Un ejemplo simple (Figura 3.6) nos sugiere la forma de hacerlo.

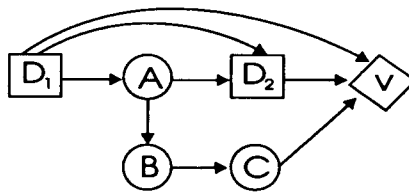


Figura 3.6: DI para aplicar el heurístico.

La sucesión de variables a eliminar, tan clara en los problemas de decisión secuenciales, se puede encontrar en un DI (bien definido) resolviendo éste cualitativamente. En el ejemplo, la única sucesión sería  $C, B, D_2, A, D_1$ . Identificamos fácilmente las v.a. que se conocen antes y después de tomar cada decisión, asemejándose con los

procesos de decisión secuenciales a los que hemos aplicado el heurístico en secciones anteriores. En el ejemplo, conocemos el valor que toma la v.a.  $A$  una vez tomada la decisión  $D_1$  y antes de tomar la decisión  $D_2$ . Después se revela el valor de las v.a.  $B$  y  $C$ .

Partiremos de un DI *en forma extensiva* (Smith, 1989a), que no requiere ninguna inversión de arcos para ser resuelto. Esto equivale a que cualquier nodo de azar que preceda a un nodo de decisión sea también predecesor directo de él. Además, en estos diagramas podemos borrar directamente los nodos irrelevantes, es decir, aquéllos que sólo tienen nodos de decisión como sucesores directos.

Por otra parte, al igual que en los problemas de decisión secuenciales, partimos de una función de utilidad separable, Tatman y Shachter (1990): denotando por  $N = \{1, \dots, n\}$  los índices de los nodos del modelo y  $X_1, \dots, X_n$  a las correspondientes variables, la función de utilidad  $v$  será de la forma

$$v(X_N) = \sum_{i=1}^q v_i(X_{C_i(v)}),$$

donde  $X_{C_i(v)}$  es el vector de variables cuyo índice corresponde al grupo de predecesores condicionales del nodo  $v$  que define cada factor  $v_i$  de  $v(X_N)$ , tal que no contenga a más de una variable de decisión. Esta descomposición se utiliza habitualmente, aunque podrían estudiarse otras.

El problema puede por tanto representarse mediante DI con varios nodos de valor, revelando gráficamente la naturaleza separable de la función de utilidad. El DI del ejemplo está en la Figura 3.7.

Definido ya el tipo de problema que vamos a resolver, describimos el heurístico. El punto de partida son los problemas de decisión anteriores expresados en forma extensiva. La identificación de qué arcos se han de invertir puede hacerse a partir de la definición dada de la forma extensiva o bien resolviendo el problema cualita-

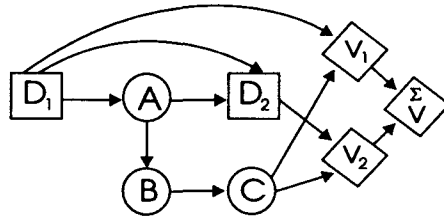


Figura 3.7: DI anterior, con varios nodos de valor.

tivamente. Los cálculos pueden realizarse, si es necesario, por simulación.

**FASE I:**

La fase I determina los valores de referencia para las decisiones. Como hacíamos en el caso general, resolveremos el problema dinámico determinístico que se obtiene una vez que las v.a. han sido sustituidas por valores representativos. Podemos tomar también sus medias como tales valores. Por tanto, la fase I consiste en

1. Tomar valores representativos del vector de v.a.  $X_C$ , como por ejemplo el vector de medias  $\bar{X}_C$ . El subíndice  $C$  denota el conjunto de v.a. del problema.
2. Resolver el problema dinámico determinístico:

$$\max_{X_D} v(\bar{X}_C, X_D),$$

donde el subíndice  $D$  denota el conjunto de variables de decisión del problema.

La solución de este problema se designará  $\hat{X}_D = (\hat{X}_{d_1}, \dots, \hat{X}_{d_r})$ .

Para calcular el vector de medias en 1., podemos aprovechar la factorización particular de la distribución conjunta en distribuciones condicionadas, que subyace en el DI junto con los métodos que nos ofrece la simulación: supongamos que  $X_1, \dots, X_k$  son las v.a. del problema; sabemos que existe una *lista de nodos ordenados*, en la que ninguno de los predecesores de un nodo sigue al nodo en la lista (Shachter,



1988). La lista comenzaría con un nodo que no tenga predecesores directos y se irían añadiendo nodos que tengan todos sus predecesores directos ya en la lista. Si una lista es  $\{X_1, \dots, X_k\}$ , calcularemos

Paso 1:  $E(X_1)$

Paso 2:  $E(X_2) = E_{X_1}[E(X_2|X_1)]$

⋮

Paso  $i$ ,  $i = 3, \dots, k$ :

Se realizan los pasos:

$$= E(X_i | X_{C(i)})$$

1)  $E_{X_{i-1}}[\overbrace{E(X_i | X_1, \dots, X_{i-1})}^{= E(X_i | X_{C(i)})} | X_1, \dots, X_{i-2}] = E(X_i | X_1, \dots, X_{i-2})$

2)  $E_{X_{i-2}}[E(X_i | X_1, \dots, X_{i-2}) | X_1, \dots, X_{i-3}] = E(X_i | X_1, \dots, X_{i-3})$

⋮

$j$ )  $E_{X_{i-j}}[E(X_i | X_1, \dots, X_{i-j}) | X_1, \dots, X_{i-j-1}] = E(X_i | X_1, \dots, X_{i-j-1})$

⋮

$i - 1$ )  $E_{X_1}[E(X_i | X_1)] = E(X_i)$

Por tanto, utilizamos únicamente las distribuciones presentes en el diagrama. Por ejemplo, en el caso particular en el que  $\{i - 1\} = C(i)$ ,  $\forall i = 1, \dots, k$ , típico en procesos Markovianos, se reduciría a hallar

$$E(X_i) = E_{X_1}[E_{X_2|X_1}[\dots[E(X_i|X_{i-1})]]].$$

En general, puede ocurrir que  $\exists D$  variable de decisión, tal que  $D \in C(X)$ , con  $X$  v.a. Supongamos que las variables de decisión que se encuentran en esta situación son  $X_{d_{j_1}}, \dots, X_{d_{j_s}}$ , que toman valores en  $\Omega_{X_{d_i}}$ ,  $i = j_1, \dots, j_s$ . Entonces, el producto de todas las distribuciones condicionadas del DI dará lugar a toda una familia de distribuciones de probabilidad de todas las v.a. del problema condicionada a esas

decisiones:

$$\mathcal{P} = \{P(X_C | (X_{d_{j_1}} = x_{d_{j_1}}, \dots, X_{d_{j_s}} = x_{d_{j_s}})) : x_{d_i} \in \Omega_{X_{d_i}} \ i = j_1, \dots, j_s\}$$

En estos casos, podemos considerar primero que cada variable de decisión toma valores en un conjunto finito. En el caso de que valore en un conjunto continuo, como  $\mathcal{P}$  tiene un conjunto infinito no numerable de elementos, tenemos varias dificultades:

- La asignación de cada elemento de  $\mathcal{P}$ . Podríamos realizar la asignación para unos cuantos valores de la variable de decisión y después ajustar una curva.
- El cálculo de los valores representativos de las v.a. Podríamos realizar los cálculos paramétricamente, como se verá en el Ejemplo 3.1.

## FASE II:

La fase II utiliza un procedimiento hacia adelante, a partir de  $\hat{X}_D$ . Para la primera decisión resolvemos:

$$\max_{X_{d_1}} E[v_{h_1}(X_{C_{h_1}(v)}) - \rho(X_{d_1} - \hat{X}_{d_1})^2]$$

donde  $\rho > 0$  y  $h_1$  es el índice del factor de la función de utilidad conjunta donde interviene  $X_{d_1}$ . La esperanza se calcula respecto a las v.a. en  $C_{h_1}(v)$ , condicionado a todos los valores ya conocidos. Para esto, normalmente será necesario calcular nuevas distribuciones (o, tal vez, sólo algunos momentos) y se hará mediante propagación de nodos, Shachter (1988), vía simulación si es necesario.

La solución de este problema la denotaremos  $X'_{d_1}$ . Se continúa el proceso para  $X_{d_2}, \dots, X_{d_r}$ . La solución propuesta es  $X'_{d_1}, \dots, X'_{d_r}$ .

### Ejemplo 3.1

Desarrollamos en detalle el ejemplo de la Figura 3.6. Suponemos que las distribuciones almacenadas en los nodos de azar son normales de varianza 1 y de media, la variable predecesora. Las variables de decisión toman valores en  $[0, 1]$ . La función de utilidad se descompone aditivamente según

$$v(D_1, D_2, C) = v_1(D_1, C) + v_2(D_2, C) = D_1C + D_2C.$$

Para calcular la solución propuesta por el heurístico, como el DI se encuentra ya en forma extensiva y no hay nodos irrelevantes, debemos calcular el vector de medias de la distribución conjunta  $P(A, B, C|D_1 = d_1)$ , para cada  $d_1 \in [0, 1]$ .

En nuestro caso, fijado  $d_1 \in [0, 1]$ ,  $E(A|d_1) = d_1$  al ser  $A|d_1 \sim N(d_1, 1)$ . De ahí

$$E(B) = E_{A|d_1}(E(B|A)) = E_{A|d_1}(A) = d_1$$

$$E(C) = E_{A|d_1}(E_{B|A}(E(C|B))) = E_{A|d_1}(E_{B|A}(B)) = E_{A|d_1}(A) = d_1$$

Es decir, el vector de medias es  $(d_1, d_1, d_1)$ , para cada  $d_1 \in [0, 1]$  fijo. Sustituyendo estos valores en la función de utilidad, hay que resolver:

$$\begin{aligned} \max_{d_1, d_2} v_1(d_1, d_1) + v_2(d_2, d_1) &= d_1^2 + d_2d_1 \\ \text{s.a. } d_1, d_2 &\in [0, 1] \end{aligned}$$

Mediante programación no lineal se obtiene fácilmente la solución  $\hat{d}_1 = \hat{d}_2 = 1$ , que es el valor de referencia con el que terminamos la fase I.

En la fase II, comenzamos buscando la solución sugerida para  $D_1$ . Se obtiene resolviendo:

$$\max_{d_1} E_{C|d_1}(d_1C - \rho(d_1 - 1)^2) \quad \text{s.a. } d_1 \in [0, 1]. \quad (3.10)$$

Para hallar esta esperanza hemos de calcular la distribución  $C|d_1$ . En este caso, por ser distribuciones normales, los cálculos no son complicados. En un primer paso de la propagación se obtiene  $C|A \sim N(A, \sqrt{2})$  a partir de  $C|B \sim N(B, 1)$  y  $B|A \sim N(A, 1)$ . En un segundo paso, calculamos ya  $C|d_1 \sim N(d_1, \sqrt{3})$  a partir de las distribuciones de  $C|A$  y  $A|d_1$ .

El problema (3.10) es entonces

$$\max_{d_1} d_1^2 - \rho(d_1 - 1)^2 \quad \text{s.a. } d_1 \in [0, 1]$$

cuya solución es  $d_1' = 1$ . Tomada esta decisión, la distribución de  $A$  es  $N(1, 1)$ . Y conocido  $A = a$ , buscamos la solución para  $D_2$  mediante

$$\max_{d_2} E_{C|d_1', A=a}[d_2 C - \rho(d_2 - 1)^2] = d_2 a - \rho(d_2 - 1)^2.$$

Esta parábola tiene un máximo local en  $d_2 = \frac{a}{2\rho} + 1$  que es mayor que 1. Luego,  $d_2' = 1$ . En consecuencia, la solución que proporciona el heurístico es  $d_1' = d_2' = 1$ .

Como este ejemplo es sencillo, podemos calcular la solución óptima del problema y compararla con la que da el heurístico. Para la óptima, eliminamos primero el nodo  $C$  y luego el  $B$  por esperanza condicionada, obteniendo una utilidad esperada  $d_1 a + d_2 a$ . Al eliminar  $D_2$  calculamos

$$\max_{d_2} (d_1 a + d_2 a) = \begin{cases} d_1 a + a & \text{si } a \geq 0 \\ d_1 a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

registrando la política óptima para  $D_2$  como la que escoge  $d_2^* = 1$ , si  $a > 0$ , y  $d_2^* = 0$  en otro caso. Al eliminar  $A$  resulta como utilidad esperada

$$\begin{aligned} d_1 E(A) + \int_0^\infty (d_1 A + A) p(A|d_1) dA &= \\ = d_1^2 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_1^2} + d_1 P(Z > -d_1), & \quad \text{con } Z \sim N(0, 1). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Finalmente, la eliminación de  $D_1$  nos conduce a maximizar (3.11) respecto a  $d_1$ , alcanzándose el óptimo en  $d_1^* = 1$ . La utilidad máxima esperada de este problema es 2.08327. La solución aproximada que da el heurístico es 2, muy próxima.  $\triangleleft$

### 3.5 Algunos casos de evaluación del heurístico

En esta sección describimos una estrategia para el cálculo de la trayectoria de referencia y evaluamos de hecho algunos casos importantes del heurístico. Planteamos después cómo se evaluarían casos más complicados.

Para resolver la fase I, el decisor ha de dar los valores representativos  $\tilde{\theta}_i$ . Para ello, pueden tomarse, por ejemplo, las medias, las modas, las medianas,... La aplicación específica puede sugerir la medida representativa. Por ejemplo, en un problema de gestión de embalses en el que el río en cuestión sea regular, su flujo estará bien representado mediante sus medias. Un recurso extremo para encontrar valores representativos sería convertir el problema estocástico en determinístico como se hace a menudo en estudios de gestión a muy corto plazo (estudios horarios o diarios), donde las entradas al embalse podrían considerarse determinísticas.

Analizamos el caso de tomar como  $\tilde{\theta}_i$  la media  $\bar{\theta}_i$ .

#### Problemas monoetápicos

Distinguimos varios casos según el tipo de funciones  $c_1$  y  $f_1$ .

##### CASO 1

Supongamos  $f_1$  y  $c_1$  lineales respecto a todas sus variables, es decir,

$$\begin{aligned} f_1(x_0, \theta_1, d_1) &= a_0x_0 + a_1\theta_1 + a_2d_1 + a_3 \\ c_1(x_1, x_0) &= b_0x_0 + b_1x_1 + b_2, \end{aligned}$$

con  $a_i, b_i \in \mathbb{R} \forall i$ . Como la esperanza y  $f_1$  y  $c_1$  son lineales, resulta

$$E_{\theta_1}[c_1(f_1(x_0, \theta_1, d_1), x_0)] = c_1(f_1(x_0, \bar{\theta}_1, d_1), x_0).$$

Así,  $d_1^*$  coincide con la solución  $\hat{d}_1$  del problema determinístico realizado en la fase I. Como consecuencia, la fase I del heurístico nos conduce a la solución óptima y no es necesaria la fase II.

### CASO 1'

Generalizando el caso 1, se comprueba que lo anterior es también válido si  $f_1$  es lineal sólo en  $\theta_1$ , y  $c_1$  sólo en  $x_1$ . Es decir

$$\begin{aligned} f_1(x_0, \theta_1, d_1) &= a_1\theta_1 + g_0(x_0, d_1) \\ c_1(x_1, x_0) &= b_1x_1 + g_1(x_0), \end{aligned}$$

con  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ , y  $g_i$  funciones cualesquiera  $\forall i$ .

### CASO 2

Suponemos  $f_1$  lineal y  $c_1$  cuadrática:

$$\begin{aligned} f_1(x_0, \theta_1, d_1) &= a_0x_0 + a_1\theta_1 + a_2d_1 + a_3 \\ c_1(x_1, x_0) &= b_0x_0^2 + b_1x_1^2 + b_2x_0x_1 + b_3, \end{aligned}$$

con  $a_i, b_i \in \mathbb{R} \forall i$ . Se tiene que

$$E_{\theta_1}[c_1(f_1(x_0, \theta_1, d_1), x_0)] - c_1(f_1(x_0, \bar{\theta}_1, d_1), x_0) = b_1a_1^2[E(\theta_1^2) - \bar{\theta}_1^2],$$

que es independiente de  $d_1$ . De nuevo,  $\hat{d}_1 = d_1^*$  y también evitamos la fase II.

### CASO 3

Suponemos  $f_1$  cuadrática y  $c_1$  lineal:

$$\begin{aligned} f_1(x_0, \theta_1, d_1) &= a_0x_0^2 + a_1\theta_1^2 + a_2d_1^2 + a_3x_0\theta_1 + a_4x_0d_1 + a_5\theta_1d_1 + a_6 \\ c_1(x_1, x_0) &= b_0x_0 + b_1x_1 + b_2 \end{aligned}$$

De nuevo ocurre

$$E_{\theta_1}[c_1(f_1(x_0, \theta_1, d_1), x_0)] - c_1(f_1(x_0, \bar{\theta}_1, d_1), x_0) = b_1 a_1 [E(\theta_1^2) - \bar{\theta}_1^2],$$

que es independiente de  $d_1$ . Como en el caso anterior,  $\hat{d}_1 = d_1^*$ .

#### CASO 4

Suponemos  $c_1$  lineal en  $x_1$ , i.e  $c_1(x_1, x_0) = b_1 x_1 + g_1(x_0)$ , y  $f_1$  desarrollable en serie de Taylor respecto a  $\theta_1$ . Para cada  $d_1$ , al desarrollar  $f_1$  en serie de Taylor alrededor de  $\bar{\theta}_1$  hasta el término cuadrático, tendremos

$$E_{\theta_1}[c_1(f_1(x_0, \theta_1, d_1), x_0)] - c_1(f_1(x_0, \bar{\theta}_1, d_1), x_0) \simeq \frac{b_1}{2!} [E(\theta_1^2) - \bar{\theta}_1^2] \frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} f_1(x_0, \bar{\theta}_1, d_1).$$

De aquí deducimos que

- Si la varianza de  $\theta_1$  es próxima a cero, entonces se obtiene  $\hat{d}_1 \approx d_1^*$ , y el valor  $E_{\theta_1}[c_1(f_1(x_0, \theta_1, d_1^*), x_0)]$  será próximo a  $E_{\theta_1}[c_1(f_1(x_0, \theta_1, \hat{d}_1), x_0)]$ , con lo que perderemos poco con la aproximación.
- Si  $\frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} f_1(x_0, \bar{\theta}_1, d_1)$  no depende de  $d_1$ , entonces  $\hat{d}_1 = d_1^*$ , y volvemos a una situación similar a la de casos anteriores. Por ejemplo, siendo  $f_1$  aditiva y/o multiplicativa en sus variables, si no contiene el factor  $\theta_1^k d_1^j$ , con  $k \geq 2, j \geq 1$ , se ajustaría a este caso.

Estas deducciones son válidas siempre que la aproximación a la serie de Taylor sea buena. Damos a continuación un ejemplo en el que se pueden dar problemas.

#### Ejemplo 3.2

En este ejemplo  $f_1$  contiene un factor  $\theta_1^2 d_1$ , y entonces la varianza de  $\theta_1$  determina si  $\hat{d}_1 \approx d_1^*$ .

Sea

$$\begin{aligned}
 x_0 &= 0 \\
 x_1 &= f_1(x_0, \theta_1, d_1) = d_1^2 - d_1\theta_1^2 \\
 c_1(x_0, x_1) &= ax_1 = ad_1^2 - ad_1\theta_1^2, \quad a > 0 \\
 \theta_1 &\sim \text{Exp}(\lambda) \\
 d_1 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Se tiene que  $E_{\theta_1}[ad_1^2 - ad_1\theta_1^2] = ad_1^2 - ad_1\frac{2}{\lambda^2}$  alcanza el mínimo en  $d_1^* = \frac{1}{\lambda^2}$ . La función  $c_1$  se minimiza en  $\hat{d}_1 = \frac{1}{2\lambda^2}$ , que es la solución de la fase I. La pérdida de optimalidad si tomamos  $\hat{d}_1$  en vez de  $d_1^*$  es

$$h(d_1^*) - h(\hat{d}_1) = -\frac{a}{4\lambda^2}. \quad (3.12)$$

Esta cantidad puede ser muy grande (en valor absoluto) si  $\lambda$  es pequeño, es decir, si la varianza de  $\theta_1$  es grande. Por tanto, si la varianza es pequeña,  $\hat{d}_1 \approx d_1^*$ , y terminamos de resolver el problema en la fase I del heurístico, cuantificando (3.12) la pérdida con la aproximación. Si por el contrario, la varianza es grande, no podemos tomar  $\hat{d}_1$  como buena aproximación de  $d_1^*$ . Pasamos a la fase II, que proporcionará  $d_1'$  como solución. En tal caso, debemos calcular

$$\begin{aligned}
 \min_{d_1 \geq 0} E_{\theta_1}(c_1(x_1, x_0) + \rho(x_1 - \hat{x}_1)^2) &= \\
 &= \rho d_1^4 - \rho \frac{4}{\lambda^2} d_1^3 + (a + \frac{51\rho}{2\lambda^4}) d_1^2 - (\frac{23\rho}{\lambda^6} + \frac{2a}{\lambda^2}) d_1 + \frac{89\rho}{16\lambda^8}.
 \end{aligned}$$

Este polinomio de grado 4 tiene mínimo, al ser positivo el coeficiente del monomio  $d_1^4$ . Podemos ilustrar el resultado para un valor arbitrario de  $a$  (siempre que sea positivo) y de  $\lambda$  (siempre que sea próximo a cero). Tomamos por ejemplo,  $a = 2$ , y  $\lambda = .1$ . La derivada del polinomio que hay que minimizar sólo tiene una raíz real,



que además, tiende al valor 50 cuando  $\rho \rightarrow \infty$ . Es decir, tenemos

$$d_1^* = 100 \implies h(d_1^*) = -20000$$

y

$$\hat{d}_1 = 50, d'_1 = 50 \implies h(d'_1) = -15000,$$

que supone una pérdida de optimalidad de -5000, en términos relativos del 25%. ◁

### CASO 5

Con  $f_1$  y  $c_1$  generales, podríamos dar una aproximación cuadrática de  $f_1$  (alrededor de  $\bar{\theta}_1$ ) y una aproximación lineal de  $c_1$  (alrededor de  $f_1(x_0, \bar{\theta}_1, d_1)$ ). Realizando algunos cálculos se llega a que

$$\begin{aligned} E_{\theta_1}[c_1(f_1(x_0, \theta_1, d_1), x_0)] - c_1(f_1(x_0, \bar{\theta}_1, d_1), x_0) &\simeq \\ &\simeq \frac{\partial}{\partial x_1} c_1(f_1(x_0, \bar{\theta}_1, d_1), x_0) \frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} f_1(x_0, \bar{\theta}_1, d_1) [E(\theta_1^2) - \bar{\theta}_1^2] \frac{1}{2!}. \end{aligned}$$

Volvemos a ver que con una varianza pequeña, la función que se minimiza en la fase I es aproximadamente la misma que para el cálculo de la solución óptima. En este caso tan general, ésta es la máxima simplificación.

### Problemas bietápicos

Con más de una etapa la situación se vuelve más compleja y engorrosa. Lo más apropiado sería evaluar estos problemas por simulación. De cualquier forma, veamos un ejemplo donde podamos evaluar la bondad de nuestro heurístico.

### Ejemplo 3.3

Sea

$$\begin{aligned}
 x_0 &= 0 \\
 x_1 &= f_1(x_0, \theta_1, d_1) = d_1^2 - d_1\theta_1^2 \\
 x_2 &= f_2(x_1, \theta_2, d_2) = d_2 + \theta_2 \\
 c_1(x_0, x_1) &= x_0 + x_1 = d_1^2 - d_1\theta_1^2 \\
 c_2(x_1, x_2) &= x_1 + x_2 = d_1^2 - d_1\theta_1^2 + \theta_2 + d_2 \\
 \theta_1 &\sim N(1, 1) \\
 \theta_2|\theta_1 &\sim N(\theta_1, 1) \\
 d_1, d_2 &\in [0, 1].
 \end{aligned}$$

La solución óptima es  $d_2^* = 0$  y  $d_1^* = 1$ . Por el contrario, la fase I nos lleva a  $\hat{d}_2 = 0$  y  $\hat{d}_1 = \frac{1}{2}$ . Por ello comenzamos la fase II a partir de  $\hat{x}_1 = -\frac{1}{4}$  y  $\hat{x}_2 = 1$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 \min_{d_1 \in [0,1]} E_{\theta_1} [c_1(x_0, x_1) + \rho(x_1 + \frac{1}{4})^2] &= \\
 = \rho d_1^4 - 4\rho d_1^3 + (1 + \frac{21}{2}\rho)d_1^2 - (\rho + 2)d_1 + \frac{\rho}{16},
 \end{aligned}$$

nos lleva a  $d_1' = 1$  pues la derivada de ese polinomio de grado 4 tiene un único cero real, que es mayor que 1,  $\forall \rho \geq 0$ . (Para  $\rho = 10^{-8}$ , el mínimo se alcanza en el punto 1.0165; para  $\rho = 0.5$  se alcanza en el 2.2381; cuando  $\rho \rightarrow \infty$  el mínimo se alcanza en el punto 2.2119). Además,

$$\begin{aligned}
 \min_{d_2} E_{\theta_2|\theta_1} [c_2(x_1, x_2) + \rho(x_2 - 1)^2] &= \\
 = \rho d_2^2 + (1 + 2\rho\theta_1 - 2\rho)d_2 + \theta_1 + \rho + \rho\theta_1^2 - 2\rho\theta_1 + 1 - \theta_1^2
 \end{aligned}$$

nos lleva a

$$d'_2 = \begin{cases} -\frac{1}{2\rho} + 1 - \theta_1 & \text{si } -\frac{1}{2\rho} < \theta_1 < 1 - \frac{1}{2\rho} \\ 0 & \text{si } \theta_1 \geq 1 - \frac{1}{2\rho} \\ 1 & \text{si } \theta_1 \leq -\frac{1}{2\rho} \end{cases}$$

Calculamos ahora  $h(d_1, d_2) = E_{\theta_1, \theta_2}(c_1(x_1, x_0) + c_2(x_2, x_1))$  en cada uno de los dos casos:

$$h(d_1^*, d_2^*) = -1$$

y

$$\begin{aligned} h(d'_1, d'_2) &= -1 + E_{\theta_1} E_{\theta_2|\theta_1}(d'_2) = \\ &= -1 + \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2\rho}} g(\theta_1) d\theta_1 + \int_{-\frac{1}{2\rho}}^{1-\frac{1}{2\rho}} \left(-\frac{1}{2\rho} + 1 - \theta_1\right) g(\theta_1) d\theta_1, \end{aligned}$$

donde  $g(\theta_1)$  es la función de densidad de una  $N(1, 1)$ . Las dos integrales cuantifican la diferencia de optimalidad si usamos  $d'_1, d'_2$  en vez de  $d_1^*, d_2^*$ . Si hacemos tender  $\rho$  a infinito,

$$\begin{aligned} h(d'_1, d'_2) &= -1 + \int_{-\infty}^0 g(\theta_1) d\theta_1 + \int_0^1 (1 - \theta_1) g(\theta_1) d\theta_1 = \\ &\doteq -1 + .1587 + .157 = -.684, \end{aligned}$$

que es muy próximo al valor que proporciona el óptimo. ◁

La generalización a más de dos etapas sigue patrones similares. En ocasiones, podemos evitar realizar la fase I si el decisor o el experto es capaz de dar directamente la trayectoria de referencia. Es frecuente restringir el conjunto de posibles estrategias a un pequeño número de reglas basadas en la experiencia y el sentido común. En este caso se comenzaría directamente en la fase II.

### 3.6 Conclusiones

Hemos introducido una aproximación nueva para la resolución aproximada de problemas de decisión secuenciales, basada en un heurístico miope. Su aplicación a la gestión de embalses proporciona resultados muy buenos, incorporando coherentemente todas las fuentes de información y numerosos elementos nuevos, dentro del marco del AD Bayesiano. Tal heurístico conlleva el cálculo de una trayectoria de referencia que asegura la controlabilidad del embalse a largo plazo. La metodología se aplica a problemas del AD que pueden encuadrarse en este contexto, modelizados con DI, y donde se permite que las v.a. del problema sean continuas. Se analiza cómo actúa el heurístico, mostrando varios casos que llevan a simplificaciones importantes disminuyendo las dificultades computacionales.

## Capítulo 4

# Métodos de simulación en Análisis de Decisiones Bayesiano

### 4.1 Introducción

Muchos problemas de decisión reales son tan complejos que a menudo los métodos exactos son incapaces de resolverlos. Por ello, sólo podremos obtener soluciones aproximadamente óptimas en la práctica. Las diferencias entre las distintas técnicas se hallan en la velocidad de convergencia, en los requisitos computacionales y en la conveniencia de su aplicación.

La complejidad de los problemas se debe principalmente a:

- gran número de variables a modelizar y con numerosas interrelaciones (algunos modelos gráficos existentes fueron analizados en el Capítulo 1),
- imprecisión en los juicios del decisor (el Capítulo 2 abordó este tema),
- influencia del tiempo (el Capítulo 3 tuvo en cuenta este aspecto),

- función de utilidad multiatributo (los tres capítulos consideraron funciones de este tipo),
- presencia de variables continuas.

En este último punto nos detendremos. Algunos de los métodos gráficos vistos en el Capítulo 1 no pueden modelizar y manejar variables continuas de azar y/o de decisión. Su presencia no implica no poder aplicar la teoría, que sigue siendo válida, pero sí provoca que los cálculos se hagan frecuentemente impracticables: el teorema de Bayes y los cálculos de esperanzas con variables continuas requieren típicamente integración numérica, y maximizar la utilidad esperada sobre una variable de decisión continua requiere típicamente una búsqueda iterativa. Estos dos problemas incrementan la carga computacional en problemas grandes.

Para evitarlo, las soluciones más comúnmente usadas son:

- Discretizar las variables continuas y aplicar un método de variables discretas. Sin embargo, si se eligen pocos puntos, pueden no representar bien la variable, especialmente cuando las colas de la distribución son pesadas, ver Miller y Rice (1983) y Merkhofer (1987). En cambio, si se eligen demasiados puntos, resulta un modelo muy costoso computacionalmente.
- Resumir las distribuciones continuas mediante sus primeros momentos, y las funciones mediante sus primeras derivadas (Smith, 1993). Las aproximaciones analíticas relacionadas, como la de Laplace, se usan para encontrar distribuciones a posteriori. Sin embargo, estos métodos pueden ser inexactos para distribuciones irregulares o multimodales.
- Utilizar una aproximación paramétrica, ajustando a las v.a. continuas, distribuciones continuas paramétricas que sean fácilmente manejables, como el

modelo gaussiano multivariante. Poland (1994) ajusta a las v.a., mixturas de distribuciones continuas. Sin embargo, esta aproximación tiene un campo de aplicación restringido.

- Utilizar una aproximación algebraica que permita incluir variables de decisión continuas, como se hace en Stonebraker (1993), extendiendo el método de Kirkwood (1993) ya comentado en el Capítulo 1.
- Utilizar algún heurístico, tal y como hicimos en el Capítulo 3.
- Utilizar simulación. Se generan muestras de las distribuciones modelizadas, y el decisor examina las consecuencias de varios escenarios, teniendo una aproximación del comportamiento de las distintas alternativas. Los gráficos y las medidas descriptivas obtenidas pueden utilizarse como base para tomar una decisión apropiada.

Respecto al último punto, Clemen (1991) subraya el potencial de la simulación en el AD a pesar de su escasa aplicación en la actualidad. Por contra, la Estadística Bayesiana ha experimentado un gran avance debido a la introducción de métodos de Monte Carlo. Por ejemplo, mientras existen numerosos métodos de simulación para Redes Bayesianas, ver por ejemplo Pearl (1987) o York (1992), sólo conocemos un esbozo de un método de simulación para DI en Jenzarli (1995).

Matzkevich y Abramson (1995) sugieren como razón posible que los problemas de decisión considerados tradicionalmente requieren estructuras relativamente pequeñas, con lo que los métodos estándar exactos dan respuestas en un tiempo razonable. Sin embargo, el mismo impulso computacional que ha desarrollado la Estadística Bayesiana, permitiendo modelizaciones más complejas y realistas, debería alcanzar al AD.

En este capítulo exploramos en varias direcciones el uso de métodos de simulación en problemas de decisión. En la primera parte del capítulo, consideramos problemas continuos de decisión con preferencias y creencias imprecisas, como se vio en el Capítulo 2. Proporcionamos una aproximación del conjunto de soluciones no dominadas mediante técnicas de simulación. Este método serviría también para el caso de precisión, pero equivaldría a un método de búsqueda aleatoria pura. Por ello, en la segunda parte, proporcionamos un método de Monte Carlo basado en cadenas de Markov (MCCM), que especificamos para problemas modelizados mediante DI, en los que permitimos que haya nodos de azar con distribuciones continuas asociadas y nodos de decisión continuos.

## 4.2 Aproximación Monte Carlo de conjuntos no dominados

Los problemas de decisión con información parcial conducen a ordenar las alternativas de acuerdo a una clase de utilidades esperadas a posteriori, con respecto a una clase de funciones de utilidad y una clase de distribuciones de probabilidad a priori. Estos problemas se estudiaron en el Capítulo 2, cuando el problema de decisión venía modelizado mediante un DI. Una cuestión que nos planteamos ahora es, por ejemplo, cómo resolver estos problemas en el caso de existir nodos de decisión con conjuntos de alternativas continuos. Como ya indicamos, el concepto natural de solución es el de *alternativa no dominada*. Nuestro objetivo computacional es el cálculo del conjunto no dominado.

Aunque nuestra motivación sea resolver este problema concreto, vamos a resolver de hecho un problema más general. Los *problemas de programación multiobjetivo*, donde las alternativas se ordenan en el sentido de Pareto, respecto a varias funciones objetivo, ver Ríos et al (1988), pueden encuadrarse en nuestro marco. Asi-



mismo, podrían incluirse aquí muchos problemas de Investigación Operativa y de Estadística, que conducen a comparaciones de alternativas en términos de una clase de funciones de evaluación, según comentaremos en el Capítulo 5.

Se han descrito soluciones para el cálculo del conjunto no dominado, bajo condiciones estructurales fuertes. Dos ejemplos son el cálculo de la frontera de Pareto en programación lineal multiobjetivo, ver Yu (1986), o del conjunto no dominado en problemas discretos de AD con información parcial, ver Ríos Insua y French (1991). Pero no existe aún una aproximación lo suficientemente general para resolver el problema en el marco continuo. De hecho, el informe CONDOR (1988) sugiere este problema, en el contexto más limitado de decisiones con multicriterios, como uno de los más importantes que deben resolverse en Investigación Operativa en esta década.

Describimos primero el procedimiento general, basado en iteraciones sobre un ciclo de aproximación discreta del conjunto de alternativas, obtención del conjunto no dominado de la aproximación, y suavización de tal conjunto. Describimos algunos procedimientos de suavización. Después ilustramos el marco anterior en problemas de programación multiobjetivo, con dos ejemplos: uno convencional de programación lineal multiobjetivo y otro complejo de programación no lineal (no convexa) multiobjetivo. Mostramos luego el uso de estas ideas en Análisis Bayesiano robusto en el caso importante de que se disponga de una clase paramétrica de distribuciones de probabilidad a priori y una clase paramétrica de funciones de utilidad. Finalmente, concluimos esta primera parte del Capítulo esbozando cómo utilizar la aproximación en DI.

### 4.2.1 Procedimiento general

Proporcionamos aquí la descripción de un procedimiento general para la aproximación del conjunto no dominado. Estudiamos primero una aproximación discreta, después una aproximación continua, discutiendo por último reglas de parada.

#### 4.2.1.1 Aproximación discreta

Suponemos que tenemos que escoger entre un conjunto  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^t$  de alternativas ordenadas según la relación

$$a \preceq b \iff (\Psi(a, w) \leq \Psi(b, w), \forall w \in S) \quad (4.1)$$

Esta formulación general permite describir de forma unificada algunos de los principales problemas en Investigación Operativa y Estadística (Bayesiana), cuando hay varios objetivos conflictivos y/o imprecisión en las preferencias y/o creencias. Por ejemplo, en un problema de programación multiobjetivo tenemos

$$a \preceq b \iff (v_i(a) \leq v_i(b), i = 1, \dots, l) \quad (4.2)$$

donde  $v_i, i = 1, \dots, l$  designa a los objetivos. Así, podríamos definir  $w = i, \Psi(a, w) = v_w(a)$ , con  $S = \{1, 2, \dots, l\}$ . Alternativamente, tenemos

$$a \preceq b \iff (\lambda'v(a) \leq \lambda'v(b), \lambda \geq 0, \sum_{i=1}^l \lambda_i = 1)$$

y podríamos hacer  $w = \lambda, \Psi(a, w) = w'v(a)$  y  $S = \{w : w_i \geq 0, \sum_{i=1}^l w_i = 1\}$ . Notar también que nuestra formulación comprende problemas no paramétricos. El ejemplo típico es

$$a \preceq b \iff \left( \int u(a, s) dp(s) \leq \int u(b, s) dp(s), \forall u \in U, \forall p \in P \right)$$

donde  $U$  es una clase de funciones  $u$  de utilidad y  $P$  es una clase de distribuciones  $p$  de probabilidad. En este caso, podemos hacer  $w = (u, p)$ ,  $\Psi(a, w) = \int u(a, s)dp(s)$  y  $S = U \times P$ . Éste es realmente el problema que nos interesa, pero queremos destacar la aplicación en otros contextos.

El objetivo computacional en estos problemas es calcular o aproximar el conjunto  $N(\mathcal{A})$  de soluciones no dominadas. Supondremos que  $\mathcal{A}$  es compacto y las funciones  $\Psi(a, w)$  son continuas en la topología apropiada para asegurar la existencia del conjunto no dominado.

No se dispone de un procedimiento para calcular (o aproximar) el conjunto no dominado en problemas generales. Éste será nuestro objetivo, proporcionando un método basado en simulación. Además, como podremos añadir estructura a nuestro método básico, éste puede ser competitivo incluso en casos en que se tenga un método estructurado, como el *símblex* multiobjetivo, dada su complejidad computacional.

Nuestra aproximación inicial puede considerarse como un método de *búsqueda aleatoria* extendido a problemas con varios (posiblemente infinitos) objetivos. La idea básica es discretizar el conjunto de alternativas y aplicar un procedimiento de comparación por pares. Hacemos dos hipótesis:

1. Sabemos muestrear aleatoriamente de  $\mathcal{A}$ . Suponemos que lo hacemos de forma que todos los elementos de  $\mathcal{A}$  están en el soporte de la distribución de la que se muestrea. El caso más simple es la distribución uniforme en  $\mathcal{A}$ , por ejemplo, por el *método de rechazo*, ver Ripley (1987), aunque éste no es siempre eficiente. Ocasionalmente, podemos tener información adicional que puede reflejarse en la distribución utilizada.
2. Dadas dos alternativas  $a, b \in \mathcal{A}$ , disponemos de un procedimiento para determinar si  $a \preceq b$ , o viceversa. Obviamente, esto requiere discusiones en los casos

específicos. Algunos ejemplos se verán más adelante y de ello también se habló en el Capítulo 2. Ríos Insua (1990), Ríos Insua y Martín (1994) incluyen algunas otras referencias importantes a este problema. Una aproximación general sugeriría resolver el problema

$$\min_{w \in S} (\Psi(b, w) - \Psi(a, w)) = \Delta_{ba},$$

ya que

- Si  $\Delta_{ba} > 0$ ,  $a \prec b$ .
- Si  $\Delta_{ba} = 0$ ,
  - si  $\Delta_{ab} < 0$ ,  $a \prec b$ ,
  - si  $\Delta_{ab} = 0$ ,  $b \sim a$ .
- Si  $\Delta_{ba} < 0$ , si  $\Delta_{ab} = 0$ ,  $b \prec a$ .

De esta forma, podemos descartar las correspondientes alternativas dominadas o equivalentes. Notar sin embargo que, como se ilustrará en los ejemplos, estos problemas pueden ser de difícil solución, entre otras razones, porque se puede carecer de una fórmula explícita para  $\Psi(\cdot, w)$ , o  $\Psi(\cdot, w)$  puede ser una integral de dimensión alta.

La aproximación propuesta procede tomando una muestra del conjunto de alternativas, i.e.  $A_n = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathcal{A}$ . Después se encuentra el conjunto  $N_n$  no dominado de esa muestra como aproximación discreta del conjunto no dominado. Para ello se procede mediante comparación de pares, reetiquetando las alternativas según se explicó en el Capítulo 2 (regla 5 para la eliminación eficiente de un nodo de decisión). También son aplicables las reglas 3 y 4. En el caso en que  $a_j \sim a_h$ , nos quedamos con una de ellas.

Podemos probar que la aproximación  $N_n$  converge al conjunto no dominado  $N(\mathcal{A})$  cuando  $n$  crece, bajo la hipótesis 1 de que todos los puntos están en el soporte de la distribución de muestreo. Suponemos que  $A_{n+1} = A_n \cup \{a_{n+1}\}$ .

**Lema 4.1**  $\forall a \in \mathcal{A}$  existe c.s. una subsucesión  $(a_{n_j})$  con límite  $a$ .

### Demostración

Si no existiese tal subsucesión, habría un entorno  $B(a)$  de  $a$ , con  $0 < pr(B(a)) < 1$ , tal que  $a_n \notin B(a), \forall n$ , suficientemente grande, pongamos  $n \geq m$ . Ahora bien,

$$\begin{aligned} pr(a_n \notin B(a), \forall n \geq m) &= \\ &= \lim_n pr(a_i \notin B(a), i = m, \dots, n) = \\ &= \lim_n \prod_{i=m}^n pr(a_i \notin B(a)) = \\ &= \lim_n (1 - pr(B(a)))^{n-m+1} = 0. \end{aligned}$$

□

En particular, el resultado se verifica para las alternativas no dominadas.

**Proposición 4.1**  $\forall a \in N(\mathcal{A})$ , existe c.s. una subsucesión convergente  $(a_{n_j})$ , con  $a_{n_j} \in N_{n_j}$  tal que  $a_{n_j} \rightarrow b$  y  $b \sim a$ .

### Demostración

Por el Lema 1 existe una subsucesión  $a_{n_j} \rightarrow a$ . Si, para casi todo  $j$ ,  $a_{n_j} \in N_{n_j}$ , ya estaría demostrado. Supongamos entonces que, para casi todo  $j$ ,  $a_{n_j} \notin N_{n_j}$ . En consecuencia, existe  $b_{n_j} \in N_{n_j}$  tal que  $a_{n_j} \prec b_{n_j}$ . Como  $\mathcal{A}$  es compacto, existe una subsucesión convergente  $b_{n_{j_k}} \rightarrow b, b \in \mathcal{A}$ . Teniendo en cuenta que  $a_{n_{j_k}} \rightarrow a, a_{n_{j_k}} \prec b_{n_{j_k}}$  y la continuidad de las funciones de evaluación, resulta  $a \preceq b$ . Ahora bien,  $a$  era no dominada. Por tanto,  $a \sim b$ , con lo que la subsucesión  $(b_{n_{j_k}})$  cumple el enunciado.

□

El resultado implica que para el  $b$  encontrado,  $\Psi(a, w) = \Psi(b, w), \forall w \in S$ . Bajo condiciones de identificabilidad, es decir, cuando

$$\Psi(a, w) = \Psi(b, w), \forall w \in S \implies a = b,$$

se tiene

**Corolario 4.1**  $\forall a \in N(\mathcal{A})$ , existe c.s. una subsucesión  $(a_{n_j})$ , con  $a_{n_j} \in N_{n_j}$  tal que  $a_{n_j} \rightarrow a$ .

#### 4.2.1.2 Aproximación continua

Los resultados anteriores sugieren utilizar  $N_n$  como una aproximación discreta del conjunto no dominado  $N(\mathcal{A})$ . Por ser  $\mathcal{A}$  continuo, podemos estar interesados en disponer de una aproximación continua de  $N(\mathcal{A})$ . Una posibilidad es plantear el problema de aproximación como uno de ajuste de una superficie sobre  $N_n$ . Para ello, por ejemplo, podemos reescribir los elementos de  $N_n$  en la forma  $(x = (x_1, \dots, x_{t-1}), y = x_t)$ , con lo que tenemos un problema de regresión no lineal  $(x, y)$ , posiblemente de alta dimensión y con poca información estructural. En consecuencia, necesitamos un método suficientemente robusto. En los ejemplos que vamos a discutir aquí, utilizamos esencialmente modelos de regresión local, implementados en la función loess de Splus, ver Cleveland, Grosse y Shyu (1992).

Puesto que puede ocurrir que el conjunto no dominado no sea conexo, y los métodos anteriores tienen esperanzas predictivas conexas, otra idea que utilizamos es la de formar conglomerados con los elementos de  $N_n$ . La agrupación del conjunto de puntos de  $N_n$  se realiza en función de su homogeneidad. En nuestra implementación actual utilizamos la distancia euclídea. Además, para asignar la distancia entre dos conglomerados aplicamos la *regla del vecino más próximo* que es la que se emplea

con mayor frecuencia. Una vez obtenidos los conglomerados, se considera el ajuste de una superficie sobre cada uno de ellos. Un ejemplo de esta técnica se verá más adelante.

En cualquier caso, como aproximación continua del conjunto no dominado sugeriríamos  $\mathcal{A} \cap \{a : \Phi_n(a) = 0\}$ , donde  $\Phi_n = 0$  define la superficie que aproxima  $N_n$ , obtenida mediante cualquiera de los métodos anteriores.

#### 4.2.1.3 Reglas de parada

Para la implementación, necesitamos una regla de parada, que debería tener en cuenta el esfuerzo empleado en generar nuevas soluciones, y alguna medida sobre la posibilidad de descubrir nuevas soluciones no dominadas y de redescubrir soluciones no dominadas ya encontradas. Este problema es, *per se*, muy interesante y está relacionado con el establecimiento de reglas de parada para métodos de optimización global estocástica, ver Rinnooy Kan y Timmer (1988).

En los problemas en los que estamos interesados, las funciones de evaluación son crecientes en  $a$ , quizá después de una transformación apropiada. Los métodos descritos antes se adaptan fácilmente para incluir estas restricciones. En consecuencia, encontramos  $\Phi_n$  tal que  $a \leq b$  implica  $\Phi_n(a) \leq \Phi_n(b)$ . La ventaja fundamental está en que, si la superficie que aproxima el conjunto no dominado satisface la restricción  $\Phi_n = 0$ , cabe esperar que podamos descartar las alternativas con  $\Phi_n(a) < 0$  (geoméricamente, las que quedan por debajo del suavizador). En este caso, utilizamos la siguiente regla:

1. Ajustar la superficie  $\Phi_n$  a  $N_n$ .
2. Generar otra muestra de  $\mathcal{A}$ . Si únicamente una proporción pequeña de la nueva muestra (por ejemplo, un 5%) está por encima de la superficie, parar. Si no, calcular la nueva aproximación.

Notar que, en este caso, sabemos que el conjunto eficiente estará en la frontera. Podríamos entonces generar uniformemente de la frontera de  $\mathcal{A}$ . Sin embargo, este problema es extremadamente complejo, incluso en el caso lineal, ver Berbee et al (1987). De hecho, podríamos ver nuestra aproximación como un método para generar aproximadamente según una distribución uniforme en la frontera eficiente.

Además, de nuevo, por saber que las alternativas eficientes están en la frontera podríamos proyectar los puntos sobre la misma, por ejemplo mediante búsqueda binaria en la dirección  $(1,1,\dots,1)$ , encontrando las soluciones no dominadas entre las proyecciones, y ajustando después la superficie.

En resumen, el procedimiento propuesto es el siguiente, donde entendemos por *agrupar*, aplicar el procedimiento de agrupación; *suavizar*, ajustar una superficie a la aproximación discreta; *proyectar*, calcular la proyección de un conjunto sobre la frontera según cierta dirección; *calcular  $N(\cdot)$* , calcular el conjunto no dominado, por comparación de pares, del conjunto correspondiente:

1. Inicialización  $n = 1$ ,  $N_0 = \emptyset$ .
2. Generar una muestra  $A_n$  de  $\mathcal{A}$ .
3. Si la regla de parada no es cierta, entonces  $N_n = N(A_n \cup N_{n-1})$ . Agrupar  $N_n$ , suavizar  $N_n$ ,  $n = n + 1$ , ir a 2.
4. Calcular  $N_n = N(A_n \cup N_{n-1})$ , proyectar  $N_n$  a  $M_n$ , agrupar y suavizar  $N(M_n)$ .



Las siguientes secciones discuten la aplicación de este marco a dos problemas importantes de la Investigación Operativa y de la Estadística: programación multiobjetivo y análisis Bayesiano robusto.

#### 4.2.2 Programación multiobjetivo

El cálculo de conjuntos no dominados en programación multiobjetivo resulta de gran interés en la actualidad y es sencillo encajarlo en nuestra propuesta. Realmente, sólo bajo condiciones estructurales fuertes (principalmente, problemas de programación lineal multiobjetivo, tal vez con información cónica sobre las preferencias) hay algoritmos disponibles para la resolución de tales problemas.

Una posibilidad sería apelar a las caracterizaciones de soluciones eficientes. Por ejemplo, en el caso convexo podemos usar sumas ponderadas de los objetivos, resolver el problema correspondiente para un conjunto suficientemente grande de ponderaciones, empleando después nuestra aproximación con el suavizador. Sin embargo, cada uno de estos problemas puede ser muy costoso (en general, requieren optimización global), pueden conducir a redescubrir la misma solución y puede ser difícil la comprobación de las condiciones bajo las que la caracterización es válida. Como alternativa, mostramos aquí la potencia de nuestro método, incluso en los casos complicados en los que el conjunto no dominado no es conexo.

El aspecto principal que queda de nuestra discusión general es comprobar si  $a \preceq b$ . En el caso de no haber información adicional sobre las preferencias es inmediato, ya que basta aplicar (4.2). Un modelo frecuente cuando hay información adicional es suponer una función de valor aditiva ponderada, ver French (1986) y las implementaciones en los paquetes HIVIEW y VISA. La información parcial sobre los pesos  $k$  viene definida típicamente mediante restricciones lineales  $k \in K$  y lo

más eficiente es calcular los generadores  $\{k_1, \dots, k_m\}$  de  $K$  y comprobar

$$a \preceq b \iff (k'_i v(a) \leq k'_i v(b), i = 1, \dots, m)$$

En el caso más general, se conocerá la función de valor no lineal salvo un parámetro  $\lambda$ , de forma que

$$a \preceq b \iff (\Phi(v(a), \lambda) \leq \Phi(v(b), \lambda), \forall \lambda \in \Lambda)$$

y resolveremos el problema de programación no lineal

$$\min_{\lambda \in \Lambda} (\Phi(v(b), \lambda) - \Phi(v(a), \lambda)).$$

Antes de ilustrar la aproximación, observemos que realmente no necesitamos resolver todos los problemas de optimización mencionados. La monotonía de las preferencias, en la relación (4.2), y las reglas comentadas en el algoritmo básico, permiten reducir el número de problemas. Además, si el suavizador es monótono, podemos utilizar su expresión para descartar las alternativas con valor negativo, una vez estimado éste, sujeto a la restricción  $\Phi_n(a) = 0$ .

Ilustramos la aproximación con dos ejemplos. El primero es de programación lineal multiobjetivo, y podría resolverse mediante el simplex multiobjetivo (de hecho, puede resolverse gráficamente). El segundo es un ejemplo típico en el que los métodos disponibles fracasarían, por ser el conjunto eficiente no conexo. Nos permite además ilustrar el uso de información parcial sobre las preferencias.

#### **Ejemplo 4.1 (Programación lineal multiobjetivo)**

Sea el conjunto  $\mathcal{A}$  de alternativas  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  definidas por:

$$\begin{aligned}
y + 2.7x &\leq 3 \\
y + x &\leq 1.5 \\
y + \frac{x}{3} &\leq 1.1 \\
0 \leq x, y &\leq 1
\end{aligned}$$

Suponemos que  $v_1(a) = a_1, v_2(a) = a_2$ , siendo  $a = (a_1, a_2)$ , con lo que

$$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \iff (x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2)$$

La aplicación de nuestro procedimiento al ejemplo sigue los pasos:

1. Generamos uniformemente puntos de  $\mathcal{A}$  (ver Figura 4.1.a)).
2. Calculamos  $N_1 = N(A_1)$ , mediante comparación por pares. La Figura 4.1.b) muestra los resultados junto con la frontera, lo que da una idea de su proximidad.
3. Ajustamos el conjunto anterior de puntos con el suavizador que utiliza regresión local, loess, de SPLUS, Venables y Ripley (1994). Ver Figura 4.1.c).
4. Generamos otra muestra de  $\mathcal{A}$ . Como menos de un 5% de los puntos se encuentra por encima de la curva estimada en el paso anterior, paramos. Uniendo el conjunto de alternativas no dominadas del Paso 2 junto con las generadas ahora, y una vez estudiada la dominancia en el conjunto resultante, se obtienen los puntos de la Figura 4.1.d).
5. Proyectamos estos puntos sobre la frontera en la dirección (1,1), ver Figura 4.1.e).
6. Descartamos de nuevo las dominadas quedando la Figura 4.1.f).

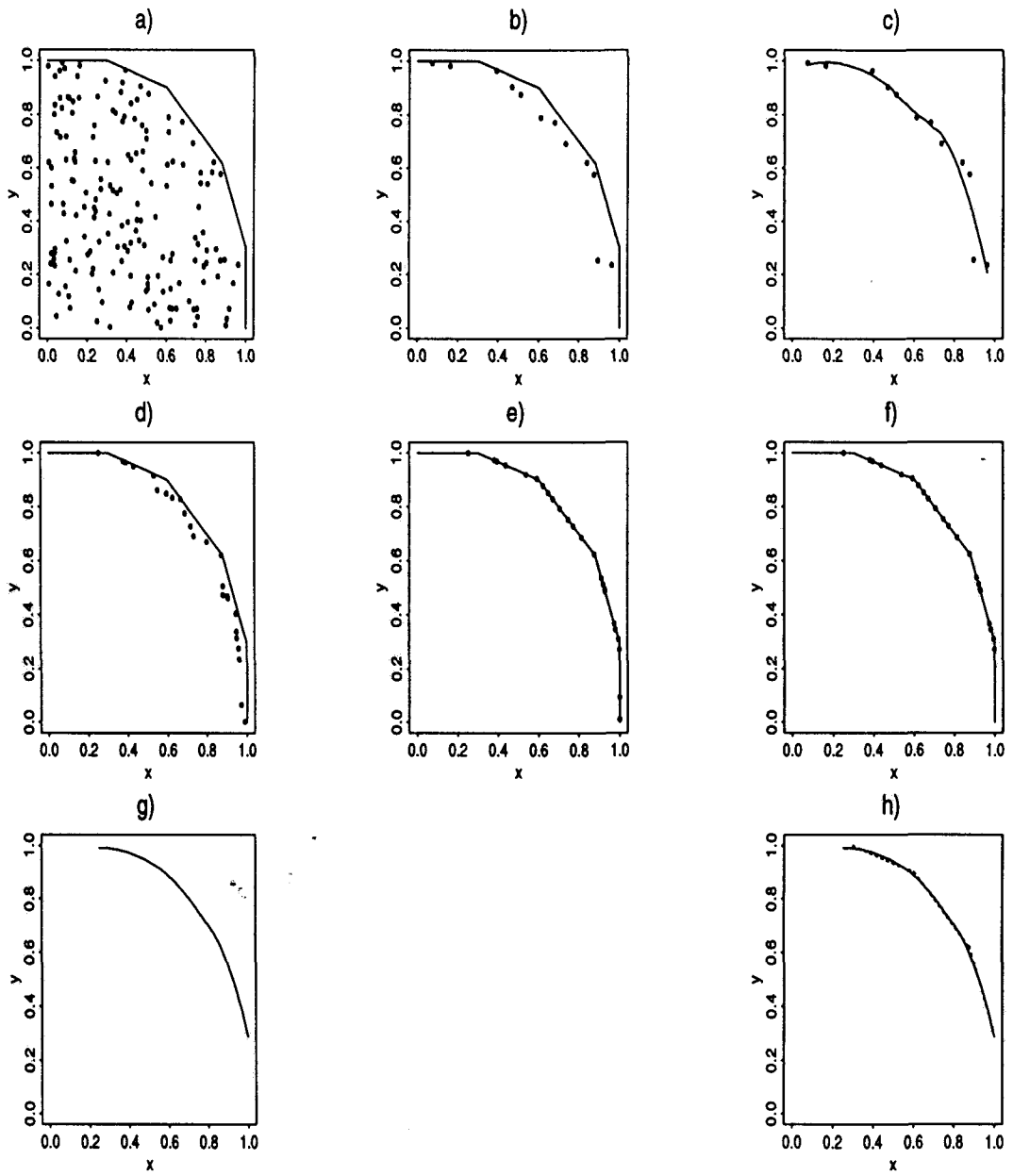


Figura 4.1: Ejemplo 4.1.

h)

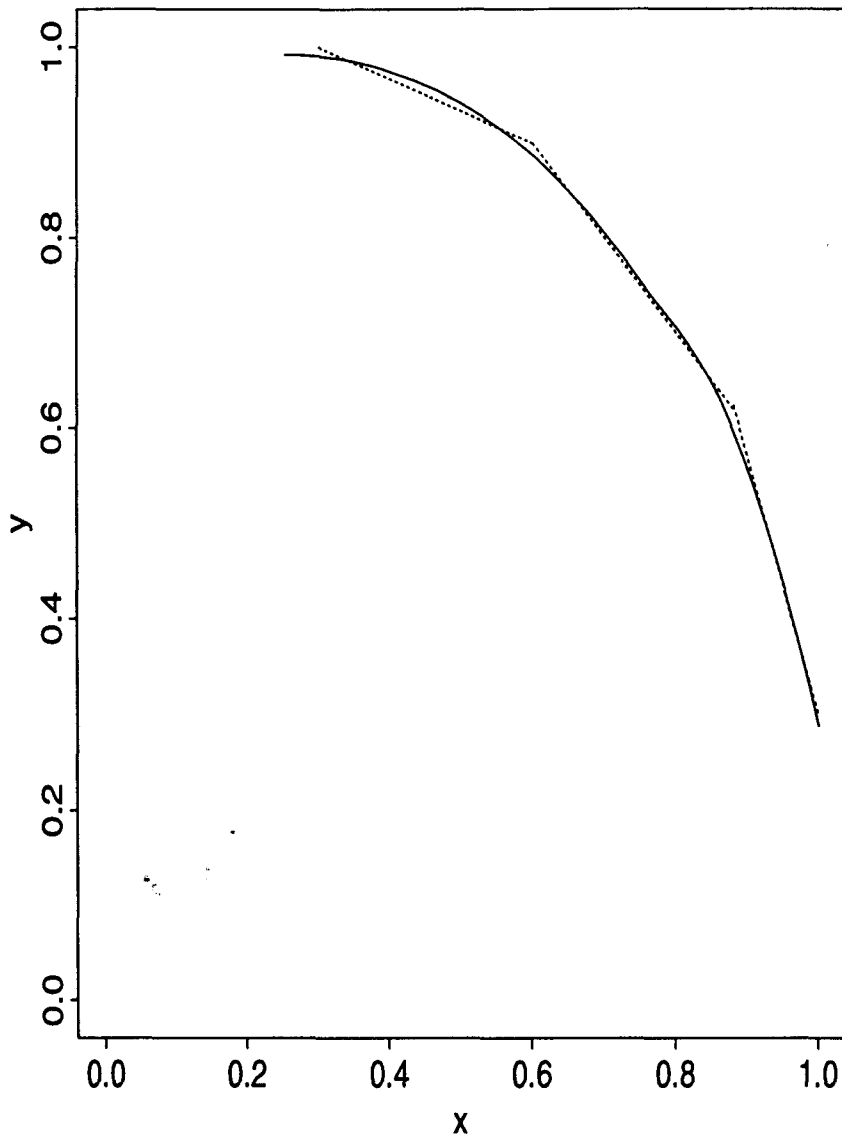


Figura 4.2: Ejemplo 4.1: comparación del conjunto eficiente y la aproximación propuesta.

7. La aproximación final del conjunto eficiente es la curva que proporciona el suavizador sobre el conjunto de puntos obtenidos en el paso 6, ver Figura 4.1.g).

En este ejemplo sencillo, podemos calcular el conjunto eficiente gráficamente, como se ilustra en la Figura 4.2, en la que el verdadero conjunto eficiente aparece marcado mediante líneas discontinuas, frente al trazo continuo de nuestra aproximación. Las únicas diferencias se observan en las regiones cercanas a los puntos extremos. Esto no es sorprendente si se considera que en el muestreo hay una probabilidad pequeña de caer precisamente en esas regiones y por tanto de que aparezcan los verdaderos puntos no dominados de ellas.  $\triangleleft$

#### Ejemplo 4.2 (Problema no convexo con información cónica )

El conjunto de alternativas  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  lo forman los puntos  $(x, y)$  que satisfacen:

$$\begin{aligned} y - \sqrt{16 - x^2} &\leq 6 \\ y + \sqrt{1 - (x - 5)^2} &\leq 4 \\ y - \sqrt{9 - (x - 5)^2} &\leq 0 \\ 0 &\leq x \leq 8 \\ 0 &\leq y \leq 10 \end{aligned}$$

La información sobre las preferencias viene dada por el cono generado por los vectores  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ . El cono polar se genera mediante los vectores  $k'_1 = (1, 0)$  y  $k'_2 = (1, 5)$ , que nos conduce a la siguiente relación para comprobar la dominancia por pares:

$$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \iff \begin{cases} k'_1(x_2 - x_1, y_2 - y_1) \geq 0 \\ k'_2(x_2 - x_1, y_2 - y_1) \geq 0 \end{cases} \quad y$$

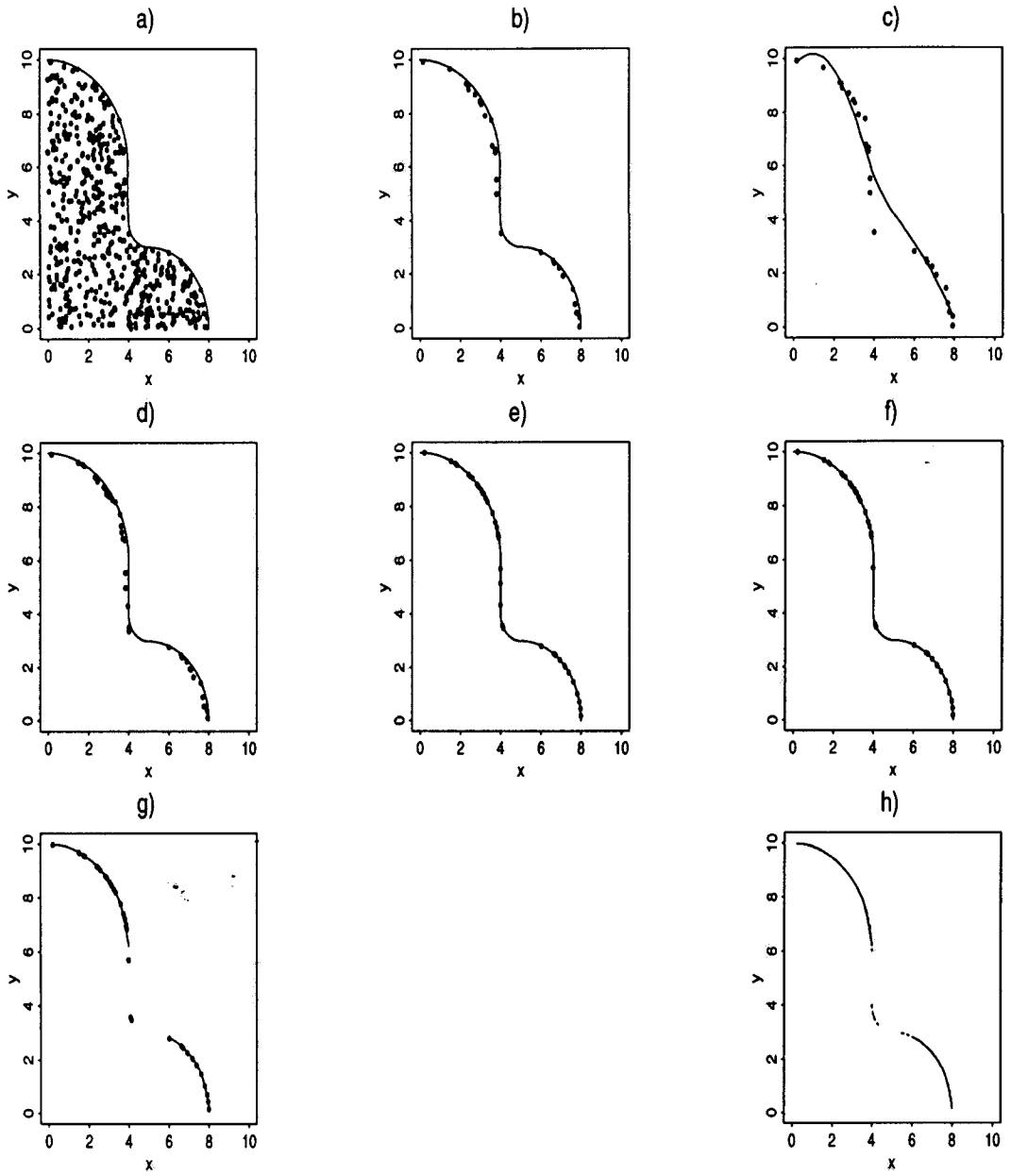


Figura 4.3: Ejemplo 4.2.

h)

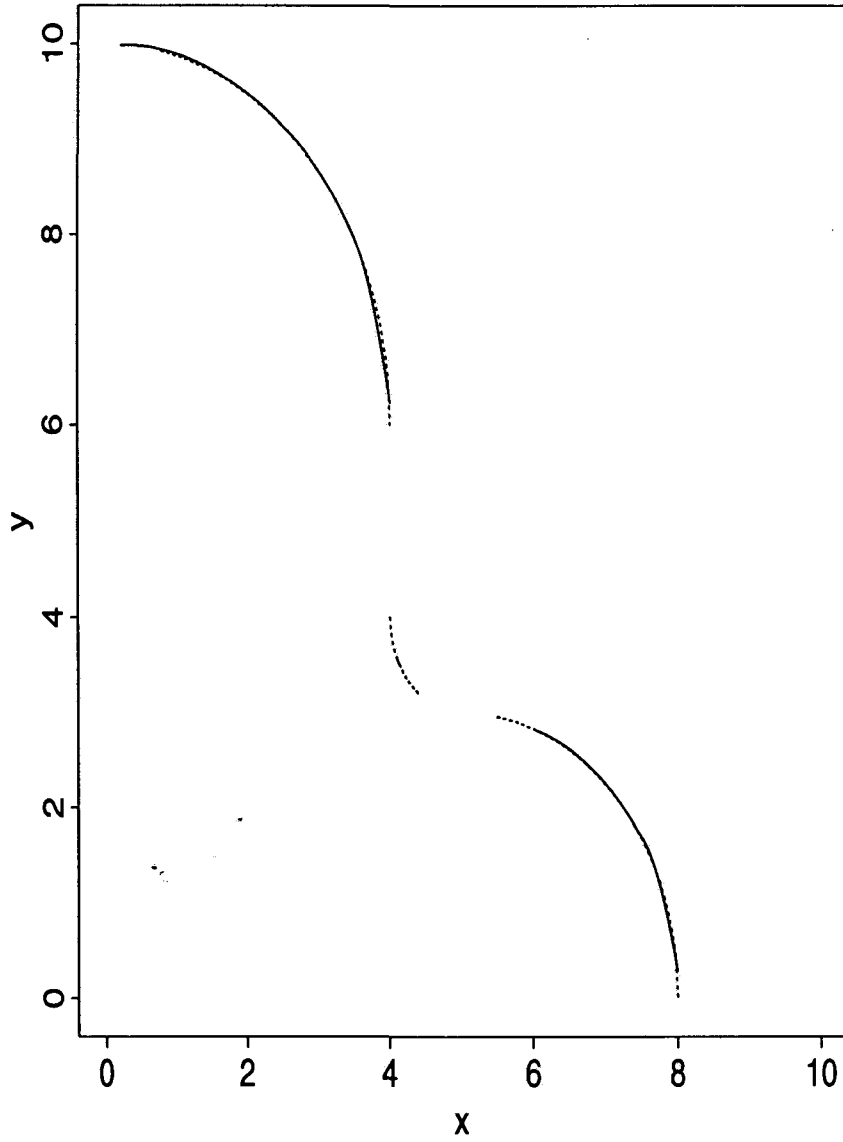


Figura 4.4: Ejemplo 4.2: comparación del conjunto eficiente y la aproximación propuesta.



La Figura 4.3 muestra los resultados. En este caso el procedimiento resulta ser muy útil teniendo en cuenta la dificultad que encierran los métodos utilizados para resolver estos problemas: por una parte, la información del decisor viene dada mediante conos, y por otra, el conjunto eficiente no es conexo. La diferencia con el ejemplo anterior se refleja en las dos últimos gráficos de la Figura 4.3. La existencia de tres grupos diferenciados a raíz de la falta de conexión del conjunto que aproxima el conjunto eficiente motiva realizar un análisis de conglomerados que los discrimine. Una vez detectados estos grupos, ajustamos el suavizador a cada uno de ellos. <

Con estos ejemplos hemos estudiado algunos casos de programación multiobjetivo, incluyendo problemas lineales, no lineales, no convexos, con información mediante conos.

### **4.2.3 Análisis Bayesiano robusto**

En el contexto del Capítulo 2, consideramos problemas de decisión con información parcial, en los que hay imprecisión en las creencias y en las preferencias. El objetivo principal es calcular el conjunto de soluciones no dominadas. La aproximación propuesta anteriormente es válida para todas las clases en las que se posee un procedimiento para comprobar la dominancia entre alternativas. Martín y Ríos Insua (1995) proporcionan resultados para varias clases de distribuciones de probabilidad cuando se considera fija la función de utilidad.

Aquí ilustramos nuestra aproximación cuando tenemos una clase de distribuciones de probabilidad a priori paramétricas y una clase de funciones de utilidad paramétricas. Este modelo nos lleva a resolver integrales, para las que frecuente-

mente no existe una primitiva, cuando queremos comprobar la dominancia entre dos alternativas. Nos centraremos en esta sección en proporcionar una aproximación que permita solucionar este problema.

Las clases paramétricas son muy utilizadas en análisis Bayesiano robusto, ver Berger (1994). Si  $\pi_\lambda(\theta)$  denota la función de densidad o la función de probabilidad, llamaremos clase paramétrica de distribuciones a priori a

$$\Gamma_\lambda = \{P : P \text{ tiene f.d. (o f.p.) } \pi_\lambda(\theta), \lambda \in \Lambda\}.$$

Ejemplos típicos son las clases de distribuciones normales con restricciones en la media y en la desviación típica, y las exponenciales con el parámetro en un cierto intervalo.

Análogamente, consideramos la clase paramétrica de funciones de utilidad:

$$\mathcal{U}_\omega = \{u_\omega : \text{funciones de utilidad dependientes de } \omega \in \Omega\}.$$

Un ejemplo es la clase de funciones de utilidad exponenciales con coeficientes de aversión al riesgo en un cierto rango. Otras clases paramétricas importantes pueden obtenerse en Bell (1995).

Definimos ahora la utilidad esperada a posteriori

$$\delta(a, \omega, \lambda) = \frac{\int u_\omega(a, \theta) f(x|\theta) \pi_\lambda(\theta) d\theta}{\int f(x|\theta) \pi_\lambda(\theta) d\theta},$$

donde  $f(x|\theta)$  es la función de verosimilitud que permite actualizar las distribuciones a priori. El problema genérico (4.1) equivale en este caso a resolver:

$$\inf_{\lambda, \Omega} \int (u_\omega(b, \theta) - u_\omega(a, \theta)) f(x|\theta) \pi_\lambda(\theta) d\theta = I, \quad (4.3)$$

puesto que podemos ignorar los denominadores cuando comparamos utilidades esperadas a posteriori.

Obsérvese que estas clases no son convexas en general, lo que está en conflicto con los resultados de fundamentos, ver Ríos Insua y Martín (1995). Sin embargo, si consideramos su envolvente convexa, obtenemos el mismo ínfimo, por lo que sólo necesitamos considerar  $\Gamma_\lambda \times \mathcal{U}_\omega$ .

Si tenemos una primitiva para esas integrales para cada  $u_\omega$ ,  $\pi_\lambda$ , entonces tenemos un problema de programación no lineal, y por tanto, estamos en condiciones similares a las de la Sección 4.2.2, cuando teníamos que apelar a la programación no lineal. Si no disponemos de primitiva, utilizaremos un método Monte Carlo de muestreo por importancia para aproximar (4.3). Shao (1989) utiliza un esquema relacionado para encontrar la alternativa con mayor utilidad esperada a posteriori.

Suponemos que  $\Lambda$  y  $\Omega$  son compactos y para cada  $\theta$ , las funciones  $u_\omega(a, \theta)$ ,  $u_\omega(b, \theta)$  y  $\pi_\lambda(\theta)$  son funciones continuas de  $\omega$  y  $\lambda$  respectivamente, y medibles en  $\theta$  para cada par  $(\lambda, \omega)$ . Suponemos también, que existe una función de densidad  $h(\theta)$  cuyo soporte contiene al de las distribuciones de  $\Gamma_\lambda$ , tal que

$$\left| (u_\omega(b, \theta) - u_\omega(a, \theta)) \cdot \frac{f(x|\theta)\pi_\lambda(\theta)}{h(\theta)} \right| \leq g(\theta)$$

donde  $g$  es integrable con respecto a  $P_h$ , distribución asociada a  $h$ , que se utilizará como función de muestreo por importancia, ver Ripley (1987). Bajo estas condiciones, podemos aplicar una versión uniforme de la ley fuerte de los grandes números, (Jennrich, 1969): para casi toda sucesión  $(\theta_1, \theta_2, \dots) \sim P_h$ ,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (u_\omega(b, \theta_i) - u_\omega(a, \theta_i)) \cdot \frac{f(x|\theta_i)\pi_\lambda(\theta_i)}{h(\theta_i)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int (u_\omega(b, \theta) - u_\omega(a, \theta)) f(x|\theta)\pi_\lambda(\theta) d\theta,$$

uniformemente  $\forall (\lambda, \omega) \in \Lambda \times \Omega$ . De aquí, para todo  $\varepsilon$ , existe  $n$  tal que, para casi toda m.a.s.  $(\theta_1, \theta_2, \dots) \sim P_h$

$$\sup \left( \left| \int (u_\omega(b, \theta) - u_\omega(a, \theta)) f(x|\theta) \pi_\lambda(\theta) d\theta - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (u_\omega(b, \theta_i) - u_\omega(a, \theta_i)) \cdot \frac{f(x|\theta_i) \pi_\lambda(\theta_i)}{h(\theta_i)} \right| \right) \leq \varepsilon$$

Esto sugiere la siguiente estrategia:

1. Generar  $\theta_1, \dots, \theta_n \sim P_h$
2. Calcular  $\inf_{\Lambda, \Omega} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (u_\omega(b, \theta_i) - u_\omega(a, \theta_i)) \cdot \pi_\lambda(\theta_i) \cdot \frac{f(x|\theta_i)}{h(\theta_i)} = I_n$ .

Utilizamos muestreo por importancia por no ser posible generar de todas las distribuciones de probabilidad de la clase  $\Gamma_\lambda$ . La cuestión inmediata es, obviamente, si  $I_n$  converge a  $I$ . Utilizaremos el siguiente lema sencillo:

**Lema 4.2** *Supongamos que  $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ ,  $\forall x \in X$  compacto. Entonces,*  
 $|\min_{x \in X} f(x) - \min_{x \in X} g(x)| \leq 2\varepsilon$ .

Podemos probar ahora

**Proposición 4.2**  $I_n \rightarrow I$ , casi seguro.

**Demostración**

Redefinimos  $I_n = \min_{\Lambda, \Omega} \Psi_n(\lambda, \omega)$  e  $I = \min_{\Lambda, \Omega} \Psi(\lambda, \omega)$ . Resulta  $\Psi_n(\lambda, \omega) \rightarrow \Psi(\lambda, \omega)$  c.s. Entonces, para un  $\varepsilon$  dado y  $n$  suficientemente grande, tenemos c.s.

$$|\Psi_n(\lambda, \omega) - \Psi(\lambda, \omega)| \leq \varepsilon.$$

Supongamos que  $\Psi(\lambda_*, \omega_*) = I$  y  $\Psi_n(\lambda_n, \omega_n) = I_n$ . Por el Lema 4.2,  $|\Psi_n(\lambda_n, \omega_n) - \Psi(\lambda_*, \omega_*)| \leq 2\varepsilon$  c.s. y obtenemos el resultado.  $\square$

Un razonamiento similar permite aproximar

$$\sup_{\Lambda, \Omega} \int (u_\omega(b, \theta) - u_\omega(a, \theta)) f(x|\theta) \pi_\lambda(\theta) d\theta = L \quad (4.4)$$

mediante

$$\sup_{\lambda, \Omega} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (u_{\omega}(b, \theta_i) - u_{\omega}(a, \theta_i)) \cdot \pi_{\lambda}(\theta_i) \cdot \frac{f(x|\theta_i)}{h(\theta_i)} = L_n.$$

Así, nuestra estrategia aproxima casi seguramente los valores óptimos, por lo que casi seguramente ofrecemos una respuesta correcta. Además, aprovechamos el hecho de que estamos interesados únicamente en el signo del supremo (o del ínfimo) más que en el supremo. Para ello, consideramos el error estándar (EE) como medida de error, ver por ejemplo Tanner (1992): denotando  $\phi(\theta, \lambda, \omega) = (u_{\omega}(b, \theta) - u_{\omega}(a, \theta)) \cdot \pi_{\lambda}(\theta) \cdot \frac{f(x|\theta)}{h(\theta)}$ , el error estándar de  $\Psi_n(\lambda, \omega)$  es

$$EE(\Psi_n(\lambda, \omega)) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\phi(\theta_i, \lambda, \omega) - \Psi_n(\lambda, \omega))^2}{n-1}},$$

es decir,  $EE(\Psi_n(\lambda, \omega))$  es un estimador de la varianza de  $\Psi(\lambda_n, \omega_n)$ .

Proponemos entonces la siguiente estrategia:

1. Calcular  $I_n = \Psi_n(\lambda_n^1, \omega_n^1)$  y  $L_n = \Psi_n(\lambda_n^2, \omega_n^2)$ .
2. Estimar  $EE(\Psi_n(\lambda_n^1, \omega_n^1)) = \widehat{EE}_n^I$  y  $EE(\Psi_n(\lambda_n^2, \omega_n^2)) = \widehat{EE}_n^L$ .
3. Si  $I_n - 2\widehat{EE}_n^I > 0$ , entonces  $a < b$ .  
 Si  $L_n + 2\widehat{EE}_n^L < 0$ , entonces  $b < a$ .  
 Si  $I_n + 2\widehat{EE}_n^I \leq 0$  y  $L_n - 2\widehat{EE}_n^L \geq 0$ , entonces no existe dominancia.  
 En otro caso, si  $\widehat{EE}_n^I$  (o  $\widehat{EE}_n^L$ ) es suficientemente pequeño, parar.  
 En otro caso, muestrear más puntos (a menos que se alcance cierto valor máximo).

Desde el punto de vista de la implementación, podemos considerar las siguientes mejoras computacionales:

- Almacenar los  $\theta_i$  generados en una iteración, para utilizarlos en la siguiente, ya que la generación puede ser costosa.

- Almacenar los valores  $f(x|\theta_i)/h(\theta_i)$ , que se usan en la función objetivo  $\Psi_n(\lambda, \omega)$ .
- La solución óptima de un problema puede utilizarse como inicial del siguiente.
- Como regla de parada, podemos establecer un número máximo  $n$  de puntos muestrales, que podría ir variándose dinámicamente, especialmente si el procedimiento va a usarse varias veces. O bien, podemos establecer una precisión  $\varepsilon$ , de forma que si  $|\widehat{EE}_n| < \varepsilon$ , paramos.
- Podemos decidir cuántos puntos más se requieren de la siguiente forma: una vez que se tiene una estimación de la varianza (mediante  $\widehat{EE}_n$ ), después de la primera iteración, podemos definir un tamaño muestral, para asegurar cierta precisión.
- El tamaño muestral de un problema puede utilizarse para el problema siguiente.

Una vez resuelto el problema de cómo determinar si  $a \preceq b$  estamos en condiciones de aplicar el esquema general explicado. Ilustramos la aproximación anterior con un ejemplo:

#### **Ejemplo 4.3 (Problema de análisis bayesiano robusto)**

Supongamos que vamos a invertir dos cantidades  $x_1$  y  $x_2$ , con  $x_1 + x_2 = 1$ . Supongamos que el retorno de la segunda inversión es 0.1. La primera inversión tiene un retorno incierto  $s$  que modelizamos mediante una distribución normal de media  $\mu$ , con  $\mu \in [.12, .15]$ , y desviación típica 0.1, es decir  $s \sim N(\mu, 0.1)$ . La función de utilidad asociada es  $u_\omega(c) = 1 - e^{-\omega c}$ , donde  $c$  es la cantidad final de dinero obtenida con la inversión y  $\omega \in [1, 2.5]$ . Deseamos calcular el conjunto eficiente de inversiones.

Para dos alternativas  $b = (x_1, 1 - x_1)$  y  $a = (x_2, 1 - x_2)$ , se comprueba fácilmente que

$$b \preceq a \iff \sup_{\omega, \mu} \left( (.1 - \mu)(x_2 - x_1) + .005\omega(x_2^2 - x_1^2) \right) \leq 0.$$

Así, si  $x_2 \geq x_1$ ,

$$b \preceq a \iff \left( -.02(x_2 - x_1) + .0125(x_2^2 - x_1^2) \right) \leq 0. \quad (4.5)$$

Con ayuda de la expresión (4.5) se comprueba que la alternativa (.8, .2) domina a todas las alternativas  $(x, 1 - x)$  con  $x \leq .79$ . El resto de alternativas son no dominadas.

Ilustramos ahora el método de aproximación. Consideramos la  $N(0, .1)$  como distribución de probabilidad para el muestreo por importancia. Así,

$$\begin{aligned} \pi(s_1 | \mu) &= \frac{1}{.1\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{s_1 - \mu}{0.1}\right)^2\right), \\ h(s_1) &= \frac{1}{.1\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{s_1}{0.1}\right)^2\right) \quad y \\ \frac{\pi(s_1 | \mu)}{h(s_1)} &= \exp(-50(\mu^2 - 2\mu s_1)) \end{aligned}$$

Dadas dos alternativas  $b = (x_1, 1 - x_1)$  y  $a = (x_2, 1 - x_2)$ , aproximamos el supremo  $L$  mediante

$$\sup_{\omega, \mu} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( e^{-\omega(s_i^i - .1)x_2} - e^{-\omega(s_i^i - .1)x_1} \right) e^{-50(\mu^2 - 2\mu s_i^i)} \right),$$

donde  $s_1^1, \dots, s_1^n$  denota una muestra procedente de una normal de media 0 y desviación típica 0.1.

La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos cuando comparamos la alter-

nativa  $b = (0, 1)$  con la alternativa  $a = (1, 0)$ :

$n$	$L_n$	$\widehat{EE}_n^L$	$L_n + 2\widehat{EE}_n^L$
500	0.00080	0.001	0.0028
5000	-0.00034	0.00041	0.00048
20000	-0.0004	0.00015	-0.0001

Los resultados indican que la alternativa  $a$  domina a la alternativa  $b$ . También damos los resultados obtenidos al comparar las alternativas  $b = (1, 0)$  y  $a = (.8, .2)$ :

$n$	$I_n$	$L_n$	$\widehat{EE}_n^I$	$\widehat{EE}_n^L$	$I_n + 2\widehat{EE}_n^I$	$L_n - 2\widehat{EE}_n^L$
500	-0.00036	0.00079	0.00038	0.00044	0.0004	-0.00009
1000	-0.0013	0.00039	0.00055	0.00084	-0.0002	-0.00071
5000	-	0.00037	-	0.00016	-	0.00005

En este caso, con una muestra de tamaño 5000 concluimos que no hay relación de dominancia entre  $a$  y  $b$ .

Para conseguir el conjunto no dominado, bastaría aplicar el esquema de comparación por pares, consiguiendo resultados similares a los anteriores. Después se procedería a la agrupación, suavizado y proyección del conjunto resultante, si queremos dar una aproximación continua del conjunto no dominado.  $\triangleleft$

Notar que podemos usar también estas ideas en problemas de decisión dinámicos. Partiendo de un problema modelizado según un DI continuo, y con el procedimiento introducido en el Capítulo 2 para calcular soluciones no dominadas en DI discretos, la eliminación de nodos procedería según la propuesta explicada en la Sección 4.2.3. Cada vez que eliminamos un nodo de decisión estamos en una situación idéntica a la de (4.4), donde  $a$  y  $b$  son alternativas disponibles en ese nodo de decisión



(pudiendo proceder de un conjunto continuo), y la integral resulta de la información almacenada en el nodo de valor.

De hecho, este procedimiento también sería válido para problemas de decisión con precisión en los juicios del decisor. Sin embargo, esto equivaldría a un método de búsqueda aleatoria pura, que es poco eficiente. Por ello proponemos un método mejor que explicamos a continuación.

### **4.3 Aproximación Monte Carlo de soluciones óptimas**

En esta segunda parte, proporcionamos un método de Monte Carlo para encontrar la alternativa de máxima utilidad esperada en un problema de AD. El método comienza considerando una distribución artificial sobre el espacio producto de alternativas y estados. La densidad de esta distribución es proporcional al producto de la utilidad y la probabilidad, explotando la dualidad entre ambos conceptos, sugerida en Girón (1979). La distribución se define de forma que su marginal en el espacio de alternativas es proporcional a la utilidad esperada de la alternativa y, en consecuencia, la alternativa óptima coincide con la moda de la marginal. Pueden entonces usarse herramientas del análisis exploratorio de datos para identificar aproximadamente la alternativa óptima. La estrategia propuesta basada en simulación consiste en generar una muestra de la distribución artificial, marginalizarla al espacio de alternativas y después encontrar la moda de la muestra. Un aspecto clave entonces es cómo muestrear de la distribución artificial. Para ello introducimos varios algoritmos de Monte Carlo basados en cadenas de Markov (MCCM), ver, por ejemplo, Smith y Roberts (1993), que nos proporcionan una muestra aproximada. Aunque el método es genérico, haremos hincapié en problemas estructurados como DI. Descripciones de otras aproximaciones Monte Carlo a problemas de decisión

pueden verse en Müller y Parmigiani (1996) y Shao (1988, 1989).

### 4.3.1 Procedimiento básico

Describimos aquí la estrategia básica a seguir, con un ejemplo sencillo. Tenemos que escoger bajo incertidumbre una alternativa  $a$  de un conjunto  $\mathcal{A}$ . El conjunto de estados  $\theta$  es  $\Theta$ . Suponemos sin pérdida de generalidad que la función de utilidad  $u(a, \theta)$  es positiva y acotada, ver French (1986). Suponemos que las acciones influyen en los estados futuros, por lo que, dada una alternativa  $a$ , modelizamos nuestras preferencias sobre los estados futuros con una distribución de probabilidad  $p_a(\theta)$ . Sugerimos como óptima la alternativa  $a^*$  con utilidad esperada máxima:

$$\max_{a \in \mathcal{A}} f(a) = \int u(a, \theta) \cdot p_a(\theta) d\theta. \quad (4.6)$$

Como hemos visto a lo largo de esta tesis, cuando el problema es complicado estructuralmente, por ejemplo es un DI muy asimétrico y denso con v.a. continuas no gaussianas, funciones de utilidad no cuadráticas y/o conjuntos continuos de alternativas en los nodos de decisión, la solución exacta es extremadamente costosa computacionalmente y es necesario un método de solución aproximado. Daremos ese método basado en simulación.

Suponemos que  $p_a(\theta) > 0$  para todo par  $(a, \theta)$ . Como hemos supuesto que la función de utilidad es positiva, podemos definir una distribución artificial sobre el espacio producto  $\mathcal{A} \times \Theta$  con densidad  $h$  proporcional al producto utilidad-probabilidad, específicamente

$$h(a, \theta) \propto u(a, \theta) \cdot p_a(\theta),$$

donde el factor de proporcionalidad es  $c = (\int \int u(a, \theta) \cdot p_a(\theta) da d\theta)^{-1}$ . Si calculamos

ahora la marginal de esta distribución en  $a$  encontramos que

$$h(a) = \int h(a, \theta) d\theta \propto f(a).$$

Por tanto, la alternativa óptima  $a^*$  coincide con la moda de la marginal de la distribución artificial  $h$  en el espacio de alternativas. Como consecuencia, resolvemos el problema (4.6) aproximadamente con el siguiente procedimiento basado en simulación:

- (1) Generar una muestra aleatoria de la distribución  $h(a, \theta)$ .
- (2) Convertirla en una muestra aleatoria de la marginal  $h(a)$ .
- (3) Hallar la moda de esta muestra.

Los pasos clave son (1) y (3). Para (3) acudiremos principalmente a las herramientas del análisis exploratorio de datos. Para (1), introduciremos varios métodos de simulación con cadenas de Markov. La idea subyacente es muy simple. Queremos generar una muestra de una distribución sobre cierto espacio, pero no podemos hacerlo directamente. Supongamos, sin embargo, que podemos construir una cadena de Markov con el mismo espacio de estados, de la que es directo simular y cuya distribución de equilibrio es la distribución deseada. Entonces, si simulamos la cadena durante un periodo largo de tiempo, eliminando los valores transitorios de la fase inicial, podemos usar los valores simulados de la cadena como muestra aproximada de la distribución deseada. Proporcionaremos en la siguiente sección varios algoritmos para construir cadenas con la distribución de equilibrio deseada, en nuestro caso la distribución artificial  $h$ . A continuación daremos un algoritmo y un ejemplo en una situación simple, de forma que podamos captar la idea básica.

La estrategia que proponemos ahora es muy simple pero puede aplicarse únicamente a casos limitados. Supongamos que podemos generar de forma eficiente

de las distribuciones condicionadas  $h(a|\theta)$  y  $h(\theta|a)$ . Sugerimos entonces el siguiente procedimiento, que se conoce con el nombre de muestreador de Gibbs en la literatura estadística, ver Gelfand y Smith (1990):

1. Comenzar con un valor arbitrario de  $a_0 \in \mathcal{A}$ . Hacer  $i = 1$ .

Hasta que se considere convergencia

2. Generar  $\theta_i \sim h(\theta|a_{i-1})$ .

3. Generar  $a_i \sim h(a|\theta_i)$ .

4. Hacer  $i = i + 1$ .

Como consecuencia de los resultados de Tierney (1994) y Roberts y Smith (1994) tenemos:

**Proposición 4.3** *Si la función de utilidad es positiva y acotada,  $p_a(\theta) > 0$  para todo  $(a, \theta)$ , y  $\mathcal{A}$  y  $\Theta$  son intervalos de  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$  respectivamente, el procedimiento anterior define una cadena de Markov con distribución estacionaria  $h$ .*

### Demostración

Bajo las condiciones dadas,  $c = \int \int u(a, \theta) \cdot p_a(\theta) da d\theta < \infty$  y  $h(a, \theta) = e \cdot u(a, \theta) \cdot p_a(\theta) > 0 \forall (a, \theta)$  está bien definida, con  $e = c^{-1}$ . También,  $h(a|\theta)$  y  $h(\theta|a)$  están bien definidas. Sea  $K$  el núcleo de transición en  $\mathcal{A} \times \Theta$

$$K((a_i, \theta_i), (a_{i+1}, \theta_{i+1})) = h(\theta_{i+1}|a_i)h(a_{i+1}|\theta_{i+1}).$$

Para cualquier conjunto  $A$  medible Lebesgue,

$$P((a_{i+1}, \theta_{i+1}) \in A | (a_i, \theta_i)) = \int_A K((a_i, \theta_i), (a, \theta)) d(a, \theta)$$

está bien definida. Por tanto, el algoritmo define una cadena de Markov.  $h(a, \theta)$  es una distribución invariante

$$\begin{aligned}
 & \int \left[ \int_A K((a, \theta), (e, \tau)) d(e, \tau) \right] h(a, \theta) d(a, \theta) = \\
 & = \int \left[ \int_A h(\tau|a) h(e|\tau) d(e, \tau) \right] h(a, \theta) d(a, \theta) = \\
 & = \int_A \left[ \int h(a, \theta) h(\tau|a) d(a, \theta) \right] h(e|\tau) d(e, \tau) = \\
 & = \int_A h(\tau) h(e|\tau) d(e, \tau) = \int_A h(e, \tau) d(e, \tau).
 \end{aligned}$$

Además, para cualquier  $(a, \theta) \in \mathcal{A} \times \Theta$  y  $A$  tal que

$$\int_A h(e, \tau) d(e, \tau) > 0,$$

tenemos

$$P((a_1, \theta_1) \in A | (a_0, \theta_0) = (a, \theta)) = \int_A h(\theta_1|a) h(a_1|\theta_1) d(a_1, \theta_1) > 0.$$

Por tanto, de los resultados de Roberts y Smith (1994), la cadena es irreducible y aperiódica. La convergencia a la distribución invariante se obtiene entonces de resultados de Tierney (1994).  $\square$

En la práctica, la convergencia del algoritmo anterior puede juzgarse con varios criterios, ver, por ejemplo, Tanner (1992). Entonces, después de  $k$  iteraciones, podemos registrar las siguientes  $N$  iteraciones de la muestra  $(a_1, \theta_1), \dots, (a_N, \theta_N)$ , y usar  $(a_1, \dots, a_N)$  como una muestra aproximada de la marginal en  $a$  de la distribución artificial. A partir de aquí, podemos intentar asignar cuál es la moda aproximadamente.

Ilustramos la aproximación anterior con un ejemplo sencillo.

#### Ejemplo 4.4

Supongamos el Ejemplo 4.3, pero ahora la función de utilidad es  $u(c) = e^c$  y  $s$  la modelizamos como una v.a.  $N(.75x_1, .75)$ .

Para una inversión dada  $(x, 1 - x)$ , la cantidad final de dinero dependerá de  $s$ ,

$$b(s) = (1 + s)x + 1.1(1 - x) = 1.1 + (s - .1)x.$$

La inversión óptima se obtiene resolviendo

$$\max_{x \in [0,1]} f(x) = \int \exp(1.1 + (s - .1)x) \frac{1}{.75\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{s - .75x}{.75}\right)^2\right) ds.$$

Tenemos fácilmente

$$f(x) = \exp(1.1 - .1x + 1.031x^2),$$

que alcanza su máximo en  $x = 1$ . Para el método propuesto, necesitamos calcular las distribuciones condicionadas de  $s|x$  y de  $x|s$ . Tenemos que:

$$s|x \propto \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{s^2}{.75^2} + 2.33xs\right)$$

y de ahí

$$s|x \sim N(1.31x, .75).$$

De forma similar, podemos ver que  $x|s \sim N(2.33s - .1, 1)$  truncada en  $[0, 1]$ . Por tanto, el método propuesto procede como sigue

1. Comenzar en un  $x_0 \in [0, 1]$  arbitrario. Hacer  $i = 1$ .

Hasta que se considere convergencia

2. Generar  $s_i \sim N(1.31x_{i-1}, .75)$ .

3. Hasta que  $x_i \in [0, 1]$ ,

$$\text{Generar } x_i \sim N(2.33s_i - .1, 1).$$

4. Hacer  $i = i + 1$ .

Una vez que se considera convergencia, registramos las siguientes  $N$  iteraciones de la muestra  $(s_1, x_1), \dots, (s_N, x_N)$ , y usamos  $(x_1, \dots, x_N)$  como una muestra aproximada de la marginal en  $x$  de la distribución artificial. Prescindimos de algunos valores entre los registrados para evitar correlación serial. Como las alternativas son unidimensionales, sólo necesitamos inspeccionar el histograma para aproximar la moda. La Figura 4.5 muestra el histograma para una muestra de tamaño 10000. Sugiere que la inversión óptima está próxima a  $x = 1$ .

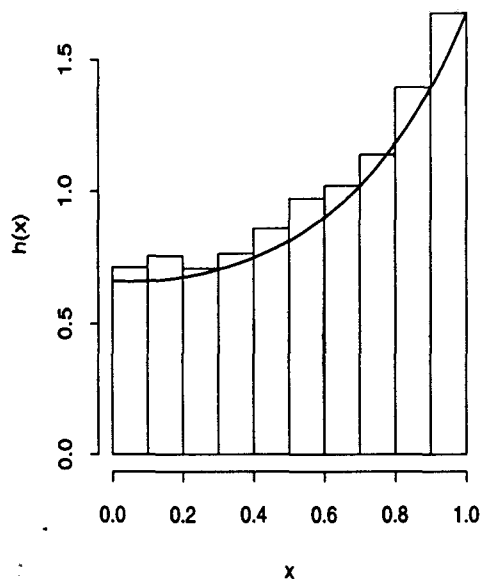


Figura 4.5: Histograma de la muestra del Ejemplo 4.4.

◁

Por supuesto, el ejemplo anterior es extremadamente simple ya que sabemos muestrear de  $a|\theta$  y de  $\theta|a$ , e inspeccionando el histograma intentamos aproximar las modas. Las siguientes secciones tratan casos más reales.

### 4.3.2 Muestrear de la distribución artificial

Aquí proporcionaremos varios métodos genéricos para muestrear de la distribución artificial. Nos centraremos en problemas estructurados como DI. Nuestros algoritmos aprovecharán esta estructura.

Por razones algorítmicas y de notación, consideraremos el conjunto  $N$  de nodos particionado en cinco subconjuntos, diferenciando tres tipos de nodos de azar:

1. Nodos de decisión  $i \in D$ . Representamos con  $d = (d_i, i \in D)$ ,  $d \in \mathcal{D}$  el vector de valores de los nodos de decisión.  $\mathcal{D}$  es el espacio de decisión.
2. Nodos de azar
  - (a)  $i \in X$ , representa v.a. anteriores a tomar la decisión, i.e. datos disponibles en el momento de tomar la decisión. Denotamos el vector de datos por  $x = (x_i, i \in X)$ ,  $x \in \mathcal{X}$ .
  - (b)  $i \in Y$  representa v.a. aún no observadas, i.e. datos que se observarán sólo después de tomar la decisión. Denotamos el vector de datos por  $y = (y_i, i \in Y)$ ,  $y \in \mathcal{Y}$ .
  - (c)  $i \in C$  representa v.a. no observables, i.e. parámetros desconocidos en el modelo de probabilidad. Denotamos el vector de parámetros por  $\theta = (\theta_i, i \in C)$ ,  $\theta \in \Theta$ .
3. Un nodo de valor  $v$ . Denotamos por  $u \in \mathcal{U}$  el valor del nodo  $v$ .

La Figura 4.6 describe un DI genérico para nuestro procedimiento.

Con esta notación, para resolver un DI debemos marginalizar en todos los nodos de azar  $i \in (C, Y)$ , condicionado a  $x$ , y maximizar sobre  $d$ . El resultado será una decisión  $d^*$  con utilidad esperada máxima, almacenada en el nodo de valor bajo  $d^*$ .



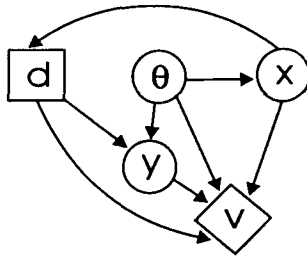


Figura 4.6: DI genérico para nuestro procedimiento.

El método que proponemos aquí es aplicable a DI con estructura no secuencial, es decir, los nodos de decisión no pueden tener como predecesores a nodos de azar que tengan a su vez distribuciones que dependen de otros nodos de decisión. Daremos alguna idea sobre cómo extender el método a diagramas secuenciales. Excepto algunas condiciones técnicas, no habrá más requisitos. En particular, las distribuciones de probabilidad implicadas pueden ser continuas y no necesitan ser conjugadas. Los espacios de decisiones también pueden ser continuos y la función de utilidad arbitraria.

#### 4.3.2.1 El modelo de probabilidad definido por los DI

Haremos varias observaciones sobre el modelo de probabilidad definido por los DI. Usaremos  $p(x)$  y  $p(x|y)$  para denotar genéricamente una medida de probabilidad o a una función de densidad/masa de probabilidad para la v.a.  $x$ , condicionada posiblemente a otra v.a.  $y$ . Si una distribución depende de algún índice  $a$ , no definido como una v.a., entonces escribimos  $p_a(x)$  y  $p_a(x|y)$ . Por sencillez, supondremos que todas las medidas de probabilidad son absolutamente continuas, i.e. tienen función de densidad de probabilidad (f.d.) con respecto a una medida de Lebesgue. Para el caso discreto, el argumento sería el mismo, reemplazando las densidades

por funciones de masa de probabilidad. Escribiremos  $u(d, x, y, \theta)$  para denotar la función de utilidad definida en el nodo de valor del DI. Sin pérdida de generalidad, supondremos que está acotada y es positiva, ver por ejemplo French (1986). Estas hipótesis son razonables en la mayoría de los problemas de decisión prácticos.

El DI define las distribuciones condicionadas  $p(x|\theta)$ ,  $p(\theta)$  y  $p_d(y|\theta)$ , y de aquí una distribución conjunta sobre las v.a.  $(x, \theta, y)$  vía  $p_d(x, \theta, y) = p(\theta)p(x|\theta)p_d(y|\theta)$  y una distribución condicionada para  $(\theta, y)$

$$p_d(\theta, y|x) \propto p(\theta)p(x|\theta)p_d(y|\theta), \quad (4.7)$$

dados los nodos observados  $x$ . Típicamente,  $x$  e  $y$  son independientes dado  $\theta$  permitiendo la factorización anterior, y  $p(\theta)$  no depende de  $d$ . Si un problema particular no se ajustase a esta estructura, es inmediata una modificación apropiada del algoritmo propuesto. Posteriormente veremos algunos ejemplos.

En este contexto, resolver un DI equivale a maximizar sobre  $d$  la utilidad esperada, donde la distribución relevante respecto a la cual se calcula la esperanza viene dada por el modelo de probabilidad  $p_d(\theta, y|x)$ . En resumen, resolver el DI es resolver

$$\max_d V(d) = \int u(d, x, \theta, y) dp_d(\theta, y|x),$$

donde  $V(d)$  es la esperanza del nodo de valor bajo la decisión  $d$ .

Resolveremos este problema de forma aproximada mediante simulación. Aumentamos la medida de probabilidad dada en (4.7) a un modelo de probabilidad para  $(\theta, y, d)$  definiendo una f.d. conjunta

$$h(\theta, y, d) \propto u(d, x, \theta, y) \cdot p_d(\theta, y|x).$$

La moda de la distribución marginal  $h(d) \propto \int \int u(d, x, \theta, y)p_d(\theta, y|x) d\theta dy = V(d)$  corresponde a la decisión óptima  $d^*$ . El fundamento subyacente en nuestro método

es simular un proceso que es una cadena de Markov en  $(\theta, y, d)$  de forma que tenga como distribución asintótica a  $h(\theta, y, d)$ . Los valores simulados  $(\theta^t, y^t, d^t)$  a partir de estados sucesivos del proceso simulado nos proporcionan una muestra de Monte Carlo de  $h(\theta, y, d)$ . Podemos inferir la decisión óptima considerando la distribución marginal en  $d^t$  de esta muestra de Monte Carlo.

El aspecto clave entonces es la definición de una cadena de Markov con la distribución límite deseada  $h(\cdot)$ . Para ello, aprovechamos los trabajos recientes en inferencia Bayesiana numérica sobre los métodos de MCMC, ver por ejemplo, Tierney (1994), Smith y Roberts (1993) y Tanner (1992). Usaremos tres métodos básicos: Metrópolis, cadenas de independencia y Gibbs. Describiremos primero un método genérico, y luego dos modificaciones que aprovechan mejor las propiedades estructurales específicas de nuestro DI genérico. Damos sólo versiones generales de los algoritmos.

#### 4.3.2.2 Una cadena Metrópolis

Daremos un algoritmo muy general que será válido para todos los DI que satisfagan las condiciones estructurales especificadas antes y algunas otras condiciones técnicas de menor importancia, discutidas después. El algoritmo que describimos es del tipo Metrópolis, en el cual generamos un nuevo candidato para los estados a partir de una distribución de 'prueba', y después se mueve a un nuevo estado o permanece en el mismo de acuerdo a ciertas probabilidades de 'aceptación-rechazo', ver Hastings (1970). Hacemos esta transición en tres pasos, para  $d$ ,  $\theta$  e  $y$ .

Sólo requerimos poder evaluar la función de utilidad  $u(d, x, \theta, y)$  y las distribuciones de probabilidad  $p_d(y|\theta)$ ,  $p(\theta)$  y  $p(x|\theta)$ , para cualquier  $d, x, y, \theta$  relevante. Esto será típicamente posible, ya que la definición de DI incluye una especificación

explícita de estas distribuciones, es decir, es probable que el decisor especifique distribuciones conocidas.

También se requerirá la especificación de las distribuciones de prueba  $g_1$ ,  $g_2$  y  $g_3$ . La elección de estas  $g_j(\cdot|\cdot)$  es conceptualmente arbitraria, con la única restricción de que la cadena de Markov resultante sea irreducible y aperiódica. Por razones descritas después, siempre que sea posible, supondremos que las distribuciones de prueba son simétricas en sus argumentos, i.e.,  $g(a|b) = g(b|a)$ .

El **Algoritmo 1** es el siguiente:

1. Comenzar con valores  $(d^0, \theta^0, y^0)$ . Hacer  $i = 1$ .

Hasta que se juzgue convergencia

2. Evaluar  $u^1 = u(d^{i-1}, x, \theta^{i-1}, y^{i-1})$ .

3. *Actualizar  $d$*

- (a) Generar un 'candidato'  $\tilde{d} \sim g_1(\tilde{d}|d^{i-1})$ .

- (b) Evaluar  $\tilde{u}^1 = u(\tilde{d}, x, \theta^{i-1}, y^{i-1})$ .

- (c) Calcular

$$a_1(d^{i-1}, \tilde{d}) = \min \left\{ 1, \frac{h(\tilde{d}, \theta^{i-1}, y^{i-1})}{h(d^{i-1}, \theta^{i-1}, y^{i-1})} \right\} = \min \left\{ 1, \frac{\tilde{u}^1}{u^1} \frac{p_{\tilde{d}}(y^{i-1}|\theta^{i-1})}{p_{d^{i-1}}(y^{i-1}|\theta^{i-1})} \right\}.$$

- (d) Hacer

$$d^i = \begin{cases} \tilde{d} & \text{con prob } a_1(d^{i-1}, \tilde{d}), \\ d^{i-1} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- (e) Sea  $u^2 = u(d^i, x, \theta^{i-1}, y^{i-1})$ .

4. Actualizar  $\theta$

(a) Generar un 'candidato'  $\tilde{\theta} \sim g_2(\tilde{\theta}|\theta^{i-1})$ .

(b) Evaluar  $\tilde{u}^2 = u(d^i, x, \tilde{\theta}, y^{i-1})$ .

(c) Calcular

$$\begin{aligned} a_2(\theta^{i-1}, \tilde{\theta}) &= \min \left\{ 1, \frac{h(d^i, \tilde{\theta}, y^{i-1})}{h(d^i, \theta^{i-1}, y^{i-1})} \right\} = \\ &= \min \left\{ 1, \frac{\tilde{u}^2}{u^2} \cdot \frac{p(\tilde{\theta})p(x|\tilde{\theta})p_{d^i}(y^{i-1}|\tilde{\theta})}{p(\theta^{i-1})p(x|\theta^{i-1})p_{d^i}(y^{i-1}|\theta^{i-1})} \right\}. \end{aligned}$$

(d) Hacer

$$\theta^i = \begin{cases} \tilde{\theta} & \text{con prob } a_2(\theta^{i-1}, \tilde{\theta}), \\ \theta^{i-1} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(e) Sea  $u^3 = u(d^i, x, \theta^i, y^{i-1})$ .

5. Actualizar  $y$

(a) Generar un candidato  $\tilde{y} \sim g_3(\tilde{y}|y^{i-1})$ .

(b) Evaluar  $\tilde{u}^3 = u(d^i, x, \theta^i, \tilde{y})$ .

(c) Calcular

$$a_3(y^{i-1}, \tilde{y}) = \min \left\{ 1, \frac{h(d^i, \theta^i, \tilde{y})}{h(d^i, \theta^i, y^i)} \right\} = \min \left\{ 1, \frac{\tilde{u}^3}{u^3} \cdot \frac{p_{d^i}(\tilde{y}|\theta^i)}{p_{d^i}(y^{i-1}|\theta^i)} \right\}.$$

(d) Hacer

$$y^i = \begin{cases} \tilde{y} & \text{con prob } a_3(y^{i-1}, \tilde{y}), \\ y^{i-1} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

6. Hacer  $i = i + 1$ .

Debemos comprobar que el algoritmo define realmente una cadena de Markov con la distribución estacionaria deseada. En Tierney (1994) y Roberts y Smith (1994)

se dispone de discusiones generales y de resultados de convergencia de métodos de MCCM, en los que nos basamos. El siguiente resultado es de convergencia para el Algoritmo 1 bajo condiciones específicas, que pueden relajarse ligeramente, siguiendo argumentos de Tierney (1994).

**Proposición 4.4** *Supongamos  $0 < u(d, x, \theta, y) < M$ ,  $p_d(x, y, \theta) > 0$ ,  $\forall(d, \theta, y)$  y  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^p$ ,  $\Theta = \mathbb{R}^m$ ,  $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^k$ . Si  $g_1, g_2$  y  $g_3$  son distribuciones simétricas de prueba con el mismo soporte que  $h$ , el Algoritmo 1 define una cadena de Markov convergente a  $h(d, \theta, y)$ , en norma de variación total.*

### Demostración

Para  $i = 1, 2, 3$ , definimos, en los espacios apropiados,

$$p_i(x, y) = \begin{cases} g_i(x, y)a_i(x, y) & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

y

$$r_i(x) = 1 - \int p_i(x, y)dy.$$

Definimos los núcleos

$$\begin{aligned} K_1(d_i, d_{i+1} | \theta_i, y_i) &= p_1(d_i, d_{i+1}) + r_1(d_i)\delta_{d_i} \\ K_2(\theta_i, \theta_{i+1} | d_{i+1}, y_i) &= p_2(\theta_i, \theta_{i+1}) + r_2(\theta_i)\delta_{\theta_i} \\ K_3(y_i, y_{i+1} | d_{i+1}, \theta_{i+1}) &= p_3(y_i, y_{i+1}) + r_3(y_i)\delta_{y_i} \end{aligned}$$

con  $\delta_x$  la distribución degenerada en  $x$ . Sea

$$\begin{aligned} &K((d_i, \theta_i, y_i), (d_{i+1}, \theta_{i+1}, y_{i+1})) = \\ &= K_1(d_i, d_{i+1} | \theta_i, y_i)K_2(\theta_i, \theta_{i+1} | d_{i+1}, y_i)K_3(y_i, y_{i+1} | d_{i+1}, \theta_{i+1}). \end{aligned}$$

Entonces, el Algoritmo 1 define una cadena de Markov con transiciones dadas por

$$P((d_{i+1}, \theta_{i+1}, y_{i+1}) \in A | (d_i, \theta_i, y_i) = (d, \theta, y)) = \int_A K((d, \theta, y), (e, \tau, z)) d(e, \tau, z).$$

Es fácil probar que  $h$  es una distribución invariante para esta cadena de Markov.

La aperiodicidad e irreducibilidad de la cadena se obtendrá si probamos que las cadenas con núcleos  $K_i, i = 1, 2, 3$ , son aperiódicas e irreducibles. Lo hacemos para  $K_1$ . Primero, como  $g_1$  es simétrica,  $g_1(d, e) = 0$  si y sólo si  $g_1(e, d) = 0$ . Por tanto, si  $g_1$  es irreducible,  $K_1$  será irreducible (Roberts y Smith, Teorema 3 ii). Como  $g_1$  tiene el mismo soporte que la marginal de  $h$  en  $d$ , entonces siempre que  $\int_A h(e) de > 0$ ,  $P(d_1 \in A | d_0 = d) = \int_A g_1(d, e) de > 0$ , para cualquier  $d, \theta, y$ . Entonces,  $g_1$  es irreducible. Por la misma razón,  $g_1$  es aperiódica. Por tanto,  $K_1$  es aperiódica (Roberts y Smith, Teorema 3i).

El resto del resultado se obtiene de Tierney (Teorema 1). □

La demostración del Algoritmo 1 requiere distribuciones de prueba que sean simétricas en sus argumentos. Si  $\theta \in R^p$  es un parámetro continuo, proponemos usar un núcleo normal  $g(\tilde{\theta} | \theta) = N(\theta, \Sigma)$  con alguna matriz de covarianzas  $\Sigma$  escogida de forma apropiada, por ejemplo, una matriz diagonal cuyos elementos diagonales correspondan a tamaños de paso razonables en cada uno de los parámetros de decisión. Para el tamaño del paso se pueden encontrar valores buenos mediante prueba y error con unos pocos valores.

Si  $\theta$  es discreto, una elección sencilla para  $g(\tilde{\theta} | \theta)$  consistiría en generar  $\theta - 1$  y  $\theta + 1$  con probabilidad 0.5. Por supuesto, hay más elecciones posibles para cada problema específico. Por ejemplo, para el problema del reactor, definimos  $d = (d_0, d_1)$  escogiendo con probabilidad 1/6 uno de seis posibles movimientos: (i) aumentar  $d_0$  y  $d_1$  en 1; (ii) disminuir  $d_0$  y  $d_1$  en 1; (iii) aumentar  $d_0$  en 1; (iv) disminuir  $d_0$  en 1;

etc.

Si se violara la simetría de las  $g_j$  haría falta añadir un factor adicional  $g(\theta|\tilde{\theta})/g(\tilde{\theta}|\theta)$  en las expresiones de las probabilidades de aceptación  $a$ . Esto correspondería a pasos Metrópolis-Hastings, más que a pasos Metrópolis. Las demostraciones de convergencia son similares, con leves modificaciones en las definiciones de los núcleos de transición.

La generalidad de este algoritmo puede implicar la lentitud de la convergencia. Sin embargo, este algoritmo general se utiliza muy raramente. Las aplicaciones corrientes permitirán modificaciones específicas del problema reemplazando los pasos generales de Metrópolis por algoritmos alternativos de MCCM (muestreador de Gibbs, cadenas de independencia, etc). Si es factible, recomendamos usar tales procedimientos de MCCM que son mucho más rápidos. Los detalles de la implementación en la práctica dependerían de las características particulares del problema que se esté estudiando. Discutiremos aquí algunas situaciones típicas.

Su diferencia principal residirá en el tratamiento de la distribución  $p(\theta|x)$ . En general, esta distribución no estará especificada explícitamente en el DI, y necesita calcularse mediante aplicaciones repetidas de la fórmula de Bayes (inversiones de arcos, en el lenguaje de los DI). Simular de  $p(\theta|x)$  supone resolver el problema de inferencia estadística de generar de la distribución a posteriori sobre  $\theta$  dados los datos  $x$ . Podríamos apelar a versiones de procedimientos apropiados de simulación a posteriori para una amplia variedad de problemas de inferencia importantes recientemente discutidos en la literatura Bayesiana.



### 4.3.2.3. Una cadena híbrida Metrópolis/de independencia

Consideramos primero las simplificaciones que se derivan por no tener a  $x$  en el DI, i.e. si no hay datos dados. En ese caso, la utilidad esperada es

$$\max_d V(d) = \int u(d, \theta, y) dp_d(\theta, y),$$

y tenemos un algoritmo más simple. Sólo necesitamos una distribución de prueba  $g$ , la función de utilidad para la evaluación y algoritmos para generar de  $p(\theta)$  y  $p_d(y|\theta)$ .

Nuestro **Algoritmo 2** es:

1. Comenzar con valores  $(d^0, \theta^0, y^0)$ . Hacer  $i = 1$ .

Hasta que se juzgue convergencia

2. Evaluar  $u^1 = u(d^{i-1}, \theta^{i-1}, y^{i-1})$ .

3. *Actualizar*  $(d, \theta, y)$

- (a) Generar

$$(\tilde{d}, \tilde{\theta}, \tilde{y}) \sim g(\tilde{d}|d)p_{\tilde{d}}(\tilde{\theta}, \tilde{y}) = g(\tilde{d}|d)p(\tilde{\theta})p_{\tilde{d}}(\tilde{y}|\tilde{\theta}). \quad (4.8)$$

- (b) Evaluar  $\tilde{u} = u(\tilde{d}, \tilde{\theta}, \tilde{y})$ .

- (c) Calcular

$$a(y^{i-1}, \tilde{y}) = \min \left\{ 1, \frac{h(\tilde{d}, \tilde{\theta}, \tilde{y})}{h(d^{i-1}, \theta^{i-1}, y^{i-1})} \frac{p_{d^{i-1}}(\theta^{i-1}, y^{i-1})}{p_{\tilde{d}}(\tilde{\theta}, \tilde{y})} \right\} = \min \left\{ 1, \frac{\tilde{u}}{u^1} \right\}.$$

- (d) Hacer

$$(d^i, \theta^i, y^i) = \begin{cases} (\tilde{d}, \tilde{\theta}, \tilde{y}) & \text{con prob } a(y^{i-1}, \tilde{y}), \\ (d^{i-1}, \theta^{i-1}, y^{i-1}) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

4. Hacer  $i = i + 1$ .

Los pasos 3(a) y 3(b) implementan una cadena de independencia, usando  $p_{\tilde{d}}(\theta, y)$  como distribución de prueba. Sólo permanece como paso de Metrópolis actualizar  $d$ . Muestrear de  $p_d(\theta, y) = p(\theta)p_d(y|\theta)$  será en general factible ya que estas distribuciones se definen explícitamente en el DI.

#### 4.3.2.4 Una cadena híbrida Metrópolis/Gibbs

En el caso general, cuando el DI incluya datos observados  $x$ , podemos usar una idea similar a la de la sección previa, con (4.8) reemplazado por

$$(\tilde{d}, \tilde{\theta}, \tilde{y}) \sim g(\tilde{d}|d)p_{\tilde{d}}(\tilde{\theta}, \tilde{y}|x) = g(\tilde{d}|d)p(\tilde{\theta}|x)p_{\tilde{d}}(\tilde{y}|\tilde{\theta}).$$

Sin embargo, mientras es típicamente inmediato simular de  $p(y|\theta)$ , hacerlo de  $p(\theta|x)$  no lo es. Como hemos mencionado, éste es el problema genérico de simulación a posteriori Bayesiana y en la literatura reciente se han desarrollado varios algoritmos de MCCM para simulación a posteriori en muchos modelos importantes, ver, por ejemplo, Roberts y Smith (1994) para una revisión. Antes de comenzar el algoritmo, podríamos generar una muestra de Monte Carlo suficientemente grande de  $p(\theta|x)$  mediante cualquier método apropiado de simulación. Nuestro **Algoritmo 3** es como sigue:

1. Comenzar con valores  $(d^0, \theta^0, y^0)$ . Hacer  $i = 1$ .

Hasta que se juzgue convergencia

2. Evaluar  $u^1 = u(d^{i-1}, x, \theta^{i-1}, y^{i-1})$ .

3. Actualizar  $(d, \theta, y)$

(a) Generar

$$(\tilde{d}, \tilde{\theta}, \tilde{y}) \sim g(\tilde{d}|d)p_{\tilde{d}}(\tilde{\theta}, \tilde{y}|x) = g(\tilde{d}|d)p(\tilde{\theta}|x)p_{\tilde{d}}(\tilde{y}|\tilde{\theta}).$$

(b) Evaluar  $\tilde{u} = u(\tilde{d}, x, \tilde{\theta}, \tilde{y})$

(c) Calcular

$$a(y^{i-1}, \tilde{y}) = \min \left\{ 1, \frac{h(\tilde{d}, \tilde{\theta}, \tilde{y})}{h(d^{i-1}, \theta^{i-1}, y^{i-1})} \frac{p_{d^{i-1}}(\theta^{i-1}, y^{i-1}|x)}{p_{\tilde{d}}(\tilde{\theta}, \tilde{y}|x)} \right\} = \min \left\{ 1, \frac{\tilde{u}}{u^1} \right\}.$$

(d) Hacer

$$(d^i, \theta^i, y^i) = \begin{cases} (\tilde{d}, \tilde{\theta}, \tilde{y}) & \text{con prob } a(y^{i-1}, \tilde{y}), \\ (d^{i-1}, \theta^{i-1}, y^{i-1}) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

4. Hacer  $i = i + 1$ .

### 4.3.3 Ejemplos

En esta sección ilustramos los algoritmos con problemas usados en capítulos anteriores. También sugerimos cómo encontrar la solución óptima. Para otros ejemplos, puede verse Bielza, Müller y Ríos Insua (1996).

#### Ejemplo 4.5 (Problema del reactor)

El problema secuencial del Capítulo 1 nos sirve ahora para ilustrar el Algoritmo 1, y ver cómo se extiende a problemas discretos.

Con nuestra notación, el problema incluye dos nodos de decisión  $d = (d_1, d_2)$ , donde  $d_1 \in \{nt, t\}$  y  $d_2 \in \{c, a\}$ . Hay tres nodos de datos:  $y_1 \in \{m, b, e\}$ ,  $y_2 \in \{ce, cf\}$  y  $y_3 \in \{ae, al, am\}$ , correspondiendo al resultado del test, los accidentes del reactor convencional y los accidentes del reactor avanzado, respectivamente. En la formulación del Capítulo 1, no hay parámetros desconocidos  $\theta$ . El problema es secuencial ya que la decisión  $d_2$  puede depender del valor de  $y_1$  y de la primera decisión  $d_1$ . Para adaptarlo a los requisitos del algoritmo de simulación propuesto, reemplazamos la segunda decisión por una lista de nodos de decisión con un nuevo nodo separado correspondiente a cada escenario posible de los nodos predecesores. Por tanto, reemplazamos  $d_2$  por el par  $(d_2^{nb}, d_2^e)$ , donde  $d_2^e$  es el tipo de reactor a escoger si  $d_1 = t, y_1 = e$ , y  $d_2^{nb}$  es el tipo a escoger en otro caso. Notar que la decisión bajo  $(d_1 = t, y_1 = m)$  está fijada por la compañía como  $d_2 = c$ . El nodo de decisión  $d_2^{nb}$  se podría partir más en  $d_2^n, d_2^b$  correspondiendo a las decisiones a tomar si  $(d_1 = nt)$  y  $(d_1 = t, y_1 = b)$ , respectivamente. Sin embargo, esto no es necesario, ya que  $d_1$  ya separa estos dos escenarios en el sentido siguiente:  $(d_1 = t, d_2^{nb})$  es la decisión que corresponde a realizar el test y obtener un buen resultado;  $(d_1 = nt, d_2^{nb})$  es la que corresponde a no realizar el test. La Figura 4.7 resume el problema.

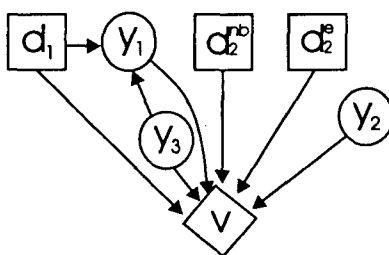


Figura 4.7: DI modificado para el problema del reactor.

Aplicamos el Algoritmo 2 para encontrar la decisión óptima. Lo único que debemos especificar es  $p(y|d)$  y la distribución  $g(\tilde{d}|d)$ . La primera se obtiene de las

Tabla 4.1: Probabilidades marginales estimadas  $h(d) = s \cdot V(d) + \delta$ , con una traslación común  $\delta = +11$  y escala  $s$  (desconocida).

$d_1$	$d_2^{nb}$	$d_2^e$	$V(d)$
$nt$	$c$		0.98
$nt$	$a$		0.87
$t$	$c$	$c$	0.93
$t$	$c$	$a$	1.00
$t$	$a$	$c$	0.82
$t$	$a$	$a$	0.89

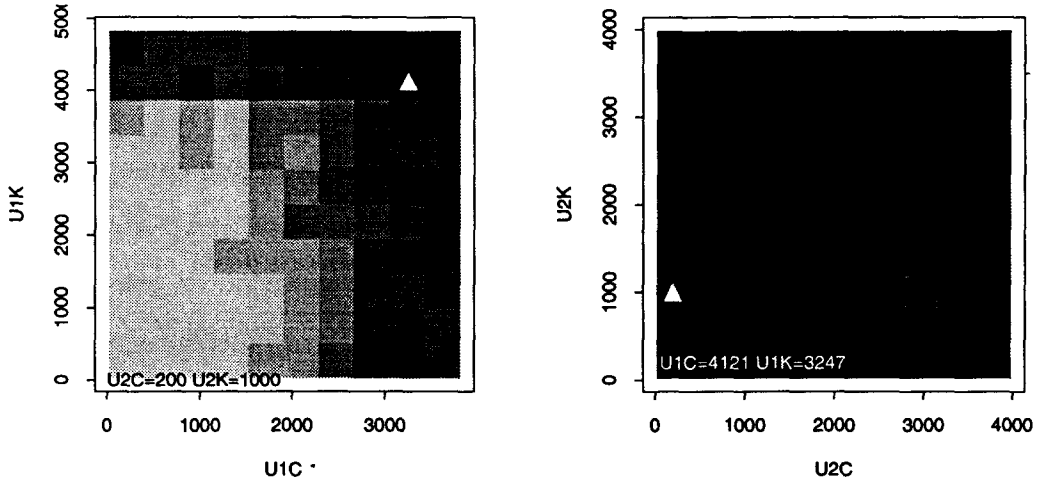
probabilidades del problema. Para la distribución de prueba, dada la naturaleza discreta de  $d$ , tomamos aleatoriamente uno de los tres elementos de  $d$ , i.e. se define  $\tilde{d}$  reemplazando un elemento escogido aleatoriamente de  $d$  por su complementario respecto a 1. La Tabla 4.1 muestra las probabilidades estimadas  $h(d)$ , i.e. las utilidades esperadas  $V(d)$ , después de 100000 iteraciones del Algoritmo 2. La decisión óptima es la misma que ya obtuvimos en el Capítulo 1.

Este problema es muy sencillo y vimos que podía resolverse con los métodos convencionales explicados en el Capítulo 1. Incluso podría usarse la aproximación más simple descrita en la Sección 4.3.1., ya que las distribuciones requeridas son discretas con pocos valores en el soporte (6 valores para las alternativas y 18 para los estados). Sin embargo, el método de simulación propuesto permite la adaptación directa a estructuras mucho más complejas. Por ejemplo, el modelo de probabilidad podría extenderse a distribuciones a priori más complicadas para los parámetros de  $p(y_1)$ ,  $p(y_2)$  y  $p(y_3)$ , sin incrementar la complejidad del algoritmo de simulación; también, el beneficio podría venir dado como un modelo más complicado de predicción.

### Ejemplo 4.6 (Problema de gestión de embalses)

Utilizando el Algoritmo 2, resolvemos el problema de la gestión conjunta de los embalses Kariba y Cahora descrito en el Capítulo 3 para un solo mes. Ilustraremos también algunos métodos para descubrir la alternativa óptima cuando el espacio de decisión tiene dimensión alta.

Recordemos que buscábamos, para cada mes  $t$ , las sueltas óptimas  $u_{1t}^k, u_{2t}^k, u_{1t}^c, u_{2t}^c$ . La Figura 3.2 mostraba el DI que representa el problema. Con nuestra notación, tenemos cuatros nodos de decisión  $d = (u_1^k, u_2^k, u_1^c, u_2^c)$  y dos nodos de datos  $i^k$  y  $\beta$ .



$$(a) f(u_1^k, u_1^c) = V(u_1^k, u_2^{k*}, u_1^c, u_2^{c*})$$

$$(b) f(u_2^k, u_2^c) = V(u_1^{k*}, u_2^k, u_1^{c*}, u_2^c)$$

Figura 4.8: (a) Utilidad esperada como función de las sueltas por turbinas  $(u_1^k, u_1^c)$  con las sueltas por los aliviaderos fijadas en sus valores óptimos; (b) como función de las sueltas por los aliviaderos  $(u_2^k, u_2^c)$  con las sueltas por turbinas fijadas en sus valores óptimos.

La Figura 4.8 muestra algunos perfiles del histograma del  $d^t \sim h(d)$  simulado, generado mediante el procedimiento de MCCM descrito antes. El vector de decisiones es de dimensión cuatro. Por tanto, usamos una rejilla de cuatro dimensiones (con

$10 \times 10 \times 10 \times 10$  celdas) para registrar un histograma de dimensión cuatro de los estados simulados. Inspeccionando la distribución empírica deducimos la estrategia óptima como  $d^* = \{u_1^{k*} = 4121, u_2^{k*} = 200, u_1^{c*} = 3247, u_2^{c*} = 1000\}$ . La solución se basa en 100000 valores simulados con el procedimiento MCCM.

La Figura ilustra también otro aspecto de nuestro método que es un procedimiento muy simple de análisis de sensibilidad. La oscuridad de la Figura 4.8(b) sugiere que la utilidad esperada es bastante plana cuando las sueltas por las turbinas se fijan en sus valores óptimos, sugiriendo por tanto su poca sensibilidad ante cambios en las sueltas por los aliviaderos. Por otra parte, la Figura 4.8(a), con sólo un área más oscura donde está el óptimo estimado, sugiere que la utilidad esperada es muy sensible a cambios en las sueltas por las turbinas.

Alternativamente, proponemos considerar este problema como uno de análisis de conglomerados. Encontrar la moda de  $h(d)$  puede considerarse equivalente a encontrar el área con mayor concentración de la muestra de Monte Carlo simulada. Dichas áreas se pueden identificar considerando un árbol jerárquico de conglomerados a partir de las salidas de la simulación. La Figura 4.9 muestra la solución basada en cortar un árbol de 1000 valores simulados  $d \sim h(d)$  a una altura de 2000 y seleccionar el conglomerado resultante con mayor número de miembros. La localización de este conglomerado indica el área de la decisión mejor. El resultado dependerá de la altura del corte, pero explorando varias alturas pueden identificarse varias decisiones de interés. El óptimo se encuentra en  $d^* = \{u_1^{k*} = 3353, u_2^{k*} = 742, u_1^{c*} = 3616, u_2^{c*} = 476\}$ . Comparándolo con la Figura 4.8, está razonablemente próximo al óptimo estimado antes y al mostrado en el Capítulo 3.

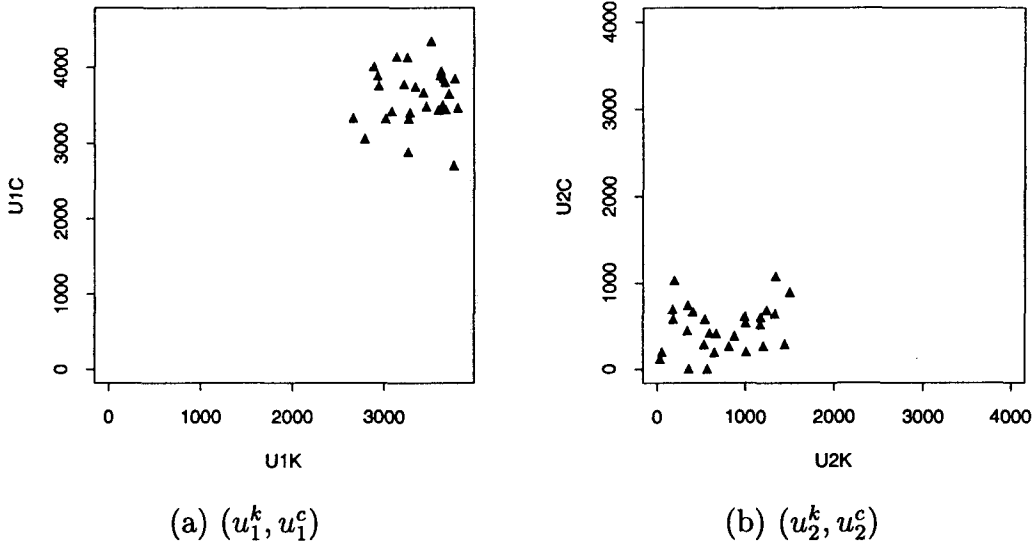


Figura 4.9: Análisis de conglomerados para el problema de gestión de embalses.

## 4.4 Conclusiones

Los problemas de decisión complejos pueden hacer que sea imposible aplicar métodos exactos para obtener decisiones óptimas. Como consecuencia, deberíamos buscar métodos de aproximación, incluyendo la simulación, que no ha tenido apenas influencia en AD.

Primeramente hemos proporcionado un método para aproximar el conjunto no dominado de alternativas en problemas de decisión con información parcial. Básicamente, se realizan dos tareas: se obtiene el conjunto no dominado de una aproximación discreta del conjunto de alternativas y después se procede a su suavizado. Para la primera tarea, se utiliza un método de Monte Carlo con muestreo por importancia para deducir si dadas dos alternativas, una domina o no a la otra. Para la segunda, se propone una regresión local con tal vez un análisis de conglomerados. De hecho, el esquema introducido es mucho más general: hemos visto, por ejemplo,



su aplicación a la programación multiobjetivo; y es directa su aplicación al caso de precisión. Pero en este último caso equivaldría a un método de búsqueda aleatoria pura, no muy eficiente.

Por ello, hemos propuesto a continuación una estrategia basada en simulación para aproximar decisiones óptimas en AD. Nuestros experimentos y ejemplos sugieren que esta aproximación puede ser muy potente para AD. La implementación de los algoritmos es casi directa a partir de las ideas proporcionadas. Los casos específicos pueden requerir modificaciones sencillas como las sugeridas en los Algoritmos 2 y 3. La exploración de la muestra simulada para buscar modas se puede hacer con cualquier software estándar estadístico. Para dimensiones pequeñas pueden usarse técnicas gráficas del análisis exploratorio de datos: para dimensiones pequeñas (uno o dos) de los vectores de decisiones, el histograma (o una versión suavizada); para dimensiones algo mayores, histogramas de dos dimensiones proyectados. También son útiles otras herramientas gráficas para identificar conglomerados de puntos, que corresponderían a modas.

Como mencionamos en el ejemplo de la gestión de embalses, una característica de nuestro método es la provisión de rasgos del análisis de sensibilidad de forma sencilla, sin coste extra.

Cuando se tienen conjuntos discretos de alternativas en los nodos de decisión, nuestro esquema se extiende fácilmente pues sólo tenemos que contar el número de veces que ha aparecido cada elemento, y escoger el que aparece con mayor frecuencia. Vale la pena retener no una sino varias de las decisiones más frecuentes y estudiarlas con detenimiento, como una forma de realizar análisis de sensibilidad. La ventaja que obtenemos es entonces poder tener nodos de azar con distribuciones continuas y/o una función de utilidad arbitraria.

## Capítulo 5

# Conclusiones y problemas abiertos

En este capítulo resumimos las contribuciones principales de esta memoria y sugerimos algunas direcciones en las que podemos extender esta investigación.

### 5.1 Conclusiones

En el Capítulo 1 hemos proporcionado un análisis comparativo de las cuatro técnicas más importantes de representación y evaluación de problemas de decisión. El método de los DI se ha ampliado para permitir manejar funciones de utilidad descomponibles. El estudio se ha realizado con el propósito de conocer cuáles eran las posibilidades actuales para el tratamiento de asimetrías, un aspecto muy corriente en problemas reales pero poco estudiado. Las variantes asimétricas de los DI resultan ser una buena herramienta.

El Capítulo 2 explora las posibilidades de los DI como método para analizar problemas de decisión con información parcial. El algoritmo resulta sencillo conceptualmente aunque complejo computacionalmente. Por ello, buscamos reglas para la eliminación eficiente de un nodo de decisión y estudiamos aspectos tales como las

pérdidas potenciales de optimalidad, y el uso de criterios adicionales que proporcionan conceptos de solución *ad hoc*. Estos aspectos ayudan al decisor a reducir el número posible de alternativas y a profundizar en el problema al que se enfrenta, constituyendo un posible camino hacia el análisis de sensibilidad.

Los dos capítulos restantes dan aproximaciones a la solución de problemas complejos que contienen variables continuas, dado que la aplicación de métodos exactos para obtener soluciones óptimas es con frecuencia imposible. La primera aproximación, en el Capítulo 3, se realiza mediante un heurístico que ha dado buenos resultados en un problema real de gestión de embalses. La idea es intuitiva y hay muchos casos particulares donde se comporta muy bien. Extendemos la idea a DI con nodos de azar y de decisión continuos.

La segunda aproximación, en el Capítulo 4, aborda estos problemas desde la simulación. Proporcionamos primero un método sencillo que aproxima el conjunto eficiente en problemas de decisión con información parcial. En cada iteración conseguimos una aproximación discreta del conjunto no dominado que se transforma en continua mediante un proceso de suavizado. La relación de dominancia entre pares de alternativas se consigue con simulación Monte Carlo con muestreo por importancia que sirve para aproximar las integrales complejas que resultan de dicha relación. Damos varios procedimientos para el suavizado así como reglas de parada. El esquema introducido es tan general que permite tratar problemas con escasa estructura y en otro tipo de marcos. Además, permite incorporar la información parcial disponible, posibilitando así el aprovechamiento de la estructura especial que se tenga. Los problemas con información completa pueden resolverse con estos procedimientos, aunque sería equivalente a un método de búsqueda aleatoria pura.

Por ello, proporcionamos una estrategia que consigue aproximar las decisiones

óptimas en un problema de AD muy general, con función de utilidad arbitraria y v.a. y de decisión continuas. Si el problema viene estructurado como un DI, éste debe ser no secuencial, aunque hemos ofrecido algunas ideas para sobrellevar esta dificultad. La decisión óptima resulta ser la moda de la marginal en el espacio de alternativas de una distribución artificial definida en el espacio producto de alternativas y de estados. El procedimiento muestrea de la distribución artificial a partir de métodos de simulación basados en cadenas de Markov, de las que es directo simular y cuya distribución de equilibrio es la distribución artificial deseada. Los algoritmos conllevan una implementación sencilla.

## 5.2 Problemas abiertos

Ante un problema de decisión podemos analizar su estructura y preguntarnos qué tipo de cuestiones esperamos resolver. La elección de un método u otro sería deseable que la pudiera realizar un ordenador, a través de un sistema experto que integrara los mejores métodos. Esta puede ser una meta para el futuro.

Podría desarrollarse una nueva metodología que permita introducir aspectos como robustez, especificaciones parciales, descomposiciones generales de la función de utilidad, etc. Conjuntamente, se desarrollaría un lenguaje para modelizar y estructurar problemas de decisión basado en alguno de los métodos gráficos vistos, lo que puede tener interés en muchas comunidades científicas y ser útil en muchas aplicaciones.

En la práctica, es frecuente encontrar variables continuas. El ArD es incapaz de representar un número infinito de escenarios por lo que debemos usar cualquiera de los otros métodos. Una posibilidad sería discretizar el rango de valores de cada variable, como en Miller y Rice (1983) y aplicar directamente lo visto en el Capítulo 1, o utilizar simulación, o tal vez algún heurístico, como hacemos en capítulos poste-

riores.

Planteamos la búsqueda de grafos más generales para representar de forma efectiva problemas de horizonte infinito, y para representar restricciones de información opuestas en escenarios diferentes (i.e.  $A$  antes que  $B$  en un escenario y al revés en otro) sin que se produzca un ciclo.

Respecto al Capítulo 2, proponemos:

- Extender el estudio al caso particular en el que las restricciones sobre  $w$  vengan dadas en forma de intervalos. Fertig y Breese (1990) incorporan imprecisión especificando cotas inferiores para las probabilidades almacenadas en cada nodo de azar. Las cotas superiores están implícitas en las inferiores. Definen las transformaciones de inversión de arcos y eliminación de un nodo de azar – no existen nodos de decisión– recalculando las nuevas cotas en función de las antiguas. Éstas resultan ser óptimas dentro de la clase de las restricciones sobre las distribuciones de probabilidad que pueden expresarse como cotas inferiores para las probabilidades que componen el diagrama. El método es eficiente en términos de almacenamiento y computación. La idea sería extender el método para considerar conjuntos de decisiones admisibles, cuando también se han dado cotas para las utilidades.
- Extender la metodología expuesta a otros formalismos gráficos como los estudiados en el Capítulo 1.
- Implementar estos algoritmos.
- Extender el estudio al caso de decisiones colectivas (Smith (1988) habla de DI para este tipo de problemas) y al caso de funciones de utilidad multiatributo.

En cuanto al Capítulo 3, las investigaciones futuras podrían ir en la línea de:

- Implementar la propuesta para la gestión de embalses en un prototipo de sistema de soporte para la planificación de recursos hidroeléctricos (actualmente en desarrollo).
- Estudiar cómo actúa el heurístico en otros embalses.
- Probada la metodología para la gestión por meses, se podría explorar su aplicación a la gestión diaria dentro de cada mes, una vez tomada la decisión mensual. Con esta gestión a corto plazo tendríamos toda una estructura jerárquica de modelos.
- Dar métodos para posibilitar el análisis de sensibilidad en problemas con estructura compleja.
- El heurístico se basa en que no se separe cada decisión de una de referencia. Otra posibilidad podría basarse en que no se separasen sus utilidades correspondientes, más que las propias decisiones.
- Estudiar DI con descomposiciones más generales de la función de utilidad, no solamente la aditiva.
- Ampliar el estudio realizado para DI en casos generales de variables de decisión continuas.
- Implementar el método para DI en ordenador.
- Estudiar el heurístico mediante simulación y para modelos probabilísticos generales.
- Analizar qué ocurre en caso de tomar la moda o mediana como valor representativo de cada v.a.

- Probar el heurístico en problemas de decisión secuenciales tradicionales de la Estadística y de la Investigación Operativa: de Diseño de Experimentos, de inventarios, etc.

El Capítulo 4 deja abiertas las siguientes líneas de investigación:

- De la primera parte, muchas otras aplicaciones potenciales son:
  - Por ejemplo, en dominancia estocástica, en la que las opciones se ordenan según una clase de utilidades esperadas respecto a una clase de funciones de utilidad. Algunas aplicaciones de esta teoría incluyen Finanzas (Levy, 1992), Diseño de Experimentos (Chaloner y Verdinelli, 1994) e Inferencia Bayesiana (Girón, 1994). En estos trabajos se proporcionan métodos para determinar cuándo una opción es mejor que otra. Tales resultados se pueden usar como entradas a nuestro procedimiento para aproximar el conjunto de inversiones, diseños o estimadores no dominados. Destacamos también que la Teoría de la dominancia estocástica podría extenderse a clases de funciones de utilidad aún más interesantes. Algunas sugerencias pueden verse en Martín (1995).

La implementación de nuestro esquema está abierta a muchas otras opciones:

- Como suavizador podríamos utilizar otros métodos de regresión no paramétrica. Una posibilidad es utilizar redes de neuronas de arquitectura variable (regresión no lineal semiparamétrica), descritas en Müller y Ríos Insua (1995).
- Podrían estudiarse reglas de parada alternativas a la propuesta, que se podrían también utilizar para decidir los tamaños muestrales de las muestras adicionales. Estas reglas deben tener en cuenta el esfuerzo empleado

en generar nuevas soluciones, y medir la posibilidad de descubrir nuevas soluciones no dominadas y de redescubrir soluciones no dominadas ya encontradas.

- Aunque en todas las aplicaciones que nos interesan las preferencias son monótonas, tal vez después de una transformación, sería importante estudiar reglas de parada para el caso no monótono.
  - Aunque hemos contemplado el caso de no poseer información adicional sobre el conjunto de alternativas, que nos llevaba a muestrear uniformemente en  $\mathcal{A}$ , en situaciones en las que sí se tenga dicha información podemos reflejarlo en la distribución utilizada, desarrollando métodos de muestreo que aprovechen la estructura del problema.
- Respecto a la segunda parte:
    - Queda abierta principalmente la labor de extender nuestro método basado en simulación a problemas secuenciales, sin perder el aprovechamiento de la estructura especial del DI que representa al problema. La estrategia utilizada para resolver el problema del reactor se puede aplicar únicamente a problemas con pocos nodos de decisión, pues conlleva enumerar prácticamente todas las estrategias, lo que puede ser impracticable en problemas de gran tamaño. El problema proviene, como es usual en AD secuencial, de poseer un número infinito de distribuciones, lo cual hace intratable la simulación.
    - Otro problema abierto sería desarrollar un entorno computacional basado en nuestra aproximación.
    - Pueden investigarse también otros métodos de simulación apropiados para generar de  $h(\cdot)$ .



– Por último, la búsqueda de la moda es un tema interesante que debería estudiarse con más detenimiento como alternativa a las descritas en el Capítulo 4.

# Bibliografía

- [1] Alberite, A. (1995) *Redes de evaluación: una herramienta para representar y resolver problemas de Análisis de Decisiones*, Proy. Fin de Carrera, Fac. Informática, UPM, Madrid.
- [2] Bell, D.E. (1995) Risk, return and utility, *Management Science*, 1, 23–30.
- [3] Berbee, H., C. Boender, A. Rinnooy Kan, C. Scheffer, R. Smith y J. Telgen (1987) Hit-and-run algorithms for the identification of non-redundant linear inequalities, *Math. Prog.*, 37, 184–207.
- [4] Berger, J.O. (1994) An overview of robust Bayesian analysis, *Test*, 3, 5–125, (con discusión).
- [5] Bielza, C., J. Martín, P. Müller y D. Ríos Insua (1996) Approximating nondominated sets in continuous problems, Work. Pap., UPM.
- [6] Bielza, C., P. Müller y D. Ríos Insua (1996) Monte Carlo methods for decision analysis with applications to influence diagrams, Work. Pap., UPM.
- [7] Bielza, C., D. Ríos Insua y S. Ríos Insua (1996) Influence diagrams under partial information, en J.M. Bernardo, J.O. Berger, A.P. Dawid y A.F.M. Smith (eds.), *Bayesian Statistics 5*, Oxford U.P. (aparecerá).

- [8] Bielza, C. y P.P. Shenoy (1996) A comparison of graphical techniques for asymmetric decision problems, Working Paper No.271, School of Business, University of Kansas, Lawrence, Kansas.
- [9] Brown, T.A. y R.E. Strauch (1965) Dynamic programming in multiplicative lattices, *Journal of mathematical analysis and applications*, 12, 364–370.
- [10] Burns, W.J. y R.T. Clemen (1993) Covariance structure models and influence diagrams, *Management Science*, 39, 7, 816–834.
- [11] Call, H.J. y W.A. Miller (1990) A comparison of approaches and implementations for automating Decision Analysis, *Reliability engineering and system safety*., 30, 115–162.
- [12] Chaloner, K. e I. Verdinelli (1994) Bayesian experimental design: a review, Tech. Rep., Dpt. Stats., U. Minnesota.
- [13] Clemen, R.T. (1991) *Making hard decisions: an introduction to decision analysis*, PWS-Kent, Boston.
- [14] Cleveland, W., E. Grosse y W. Shyu (1992) Local regression models, en Chambers, Hastie (èds.), *Statistical Models in S*, Pacific Grove.
- [15] CONDOR (1988) Operations Research: The Next Decade, *Operations Research*, 36, 619–637.
- [16] Cooper, G.F. (1990) The computational complexity of probabilistic inference using Bayesian belief networks, *Artificial Intelligence*, 42, 393–405.
- [17] Covaliu, Z. (1994) Sequential diagrams and influence diagrams: a complementary relationship for modeling and solving decision problems, presentado en el *5th Valencia Meeting on Bayesian Statistics*.

- [18] Covaliu, Z. y R.M. Oliver (1994) Representation and solution of decision problems using sequential decision diagrams, aparecerá en *Management Science*.
- [19] Fertig, K.W. y J.S. Breese (1990) Interval influence diagrams, *Uncertainty in Artificial Intelligence*, 5, 149–161.
- [20] French, S. (1986) *Decision Theory: an introduction to the Mathematics of rationality*, Ellis Horwood.
- [21] Fung, R.M. y R.D. Shachter (1990) Contingent influence diagrams, Working Paper, Department of Engineering-Economic systems, Stanford University, Stanford, CA.
- [22] Gandolfi, C. y K.A. Salewicz (1991) Water resources management in the Zambezi Valley: analysis of the Lake Kariba operation, en F.H.M. Van De Ven, D. Gutknecht y K.A. Salewicz (eds.), *Hydrology for the management of large river basins*, IAHS Publicación No. 201, 13–25.
- [23] García de la Cruz, M.A. (1993) *Diana. Diagramas de influencia: análisis*, Proy. Fin de Carrera, Fac. Informática, UPM, Madrid.
- [24] Gelfand, A.E. y A.F.M. Smith (1990) Sampling based approaches to calculating marginal densities, *Jour. Amer. Stat. Assoc.*, 85, 398–409.
- [25] Girón, J. (1979) Probabilidad y utilidad: conceptos duales de la Teoría de la Decisión, *Rev. R. Acad. Ciencias*, 73, 225–230.
- [26] Girón, J. (1994) Stochastic dominance for elliptical distributions: applications in Bayesian inference, en S. Ríos (ed.), *Decision theory and decision analysis*, Kluwer.

- [27] Gordon, M.S. y R.F. Nease (1991) *The professional edition of India users guide*, Decision Focus Inc., Los Altos, CA.
- [28] Hastings, W.K. (1970) Monte-Carlo sampling methods using Markov chains and their applications, *Biometrika*, 57, 97–109.
- [29] Howard, R.A. y J.E. Matheson (1981) Influence diagrams, en *Readings on the principles and applications of decision analysis, Vol. II*, R.A. Howard y J.E. Matheson (eds.), Strategies decisions group, Menlo Park, CA, 719–762.
- [30] IMSL (1989) *IMSL Math/Library, User's Manual*, IMSL, Problem-Solving Software Systems, Houston, Texas.
- [31] Jennrich, R. (1969) Asymptotic properties of non-linear least squares estimators, *Annals of Mathematical Statistics*, 40, 639–643.
- [32] Jenzarli, A. (1995) Solving influence diagrams using Gibbs sampling, Tech. Rep., College of Business, University of Tampa, FL.
- [33] Kirkwood, C.W. (1992) An overview of methods for applied decision analysis, *Interfaces*, 22, 6, 28–39.
- [34] Kirkwood, C.W. (1993) An algebraic approach to formulating and solving large models for sequential decisions under uncertainty, *Management Science*, 39, 7, 900–913.
- [35] Klemes, V. (1981) Applied stochastic theory of storage in evolution, *Advances in Hydrosciences*, 12, 79–141.
- [36] Lamond, B.F., S.L. Monroe y M.J. Sobel (1995) A reservoir hydroelectric system: exactly and approximately optimal policies, *European Journal of Operational Research*, 81, 535–542.

- [37] Levy, H. (1992) Expected utility analysis and stochastic dominance: survey and analysis, *Management Science*, 38, 555–593.
- [38] Loucks, D.P. y O.T. Sigvaldasson (1982) Multiple reservoir operation in North America, en Z. Kaczmarek y J. Kindler (eds.), *The operation of multiple reservoir systems*, IIASA CP-82-S02, Laxenburg, Austria.
- [39] Martín, J. (1995) *Robustez Bayesiana con imprecisión en preferencias y en creencias*, Tesis Doctoral, UPM.
- [40] Martín, J. y D. Ríos Insua (1995) Checking dominance for several classes of priors, Work. Pap., UPM.
- [41] Matzkevich, I. y B. Abramson (1995) Decision analytic networks in Artificial Intelligence, *Management Science*, 41, 1, 1–22.
- [42] McNamee, P. y J. Celona (1990) *Decision analysis with Supertree*, Scientific Press, San Francisco, CA.
- [43] Merkhofer, M.W. (1987) Quantifying judgmental uncertainty: methodology, experiences, and insights, *IEEE Trans. on Syst., Man, and Cyber.*, 17, 5, 741–752.
- [44] Miller, A.C. y T.R. Rice (1983) Discrete approximations of probability distributions, *Management Science*, 29, 3, 352–363.
- [45] Müller, P. y G. Parmigiani (1996) Optimal design via curve fitting of Monte Carlo experiments, aparecerá en *Jour. Amer. Statist. Assoc.*
- [46] Müller, P. y D. Ríos Insua (1995) Issues in Bayesian analysis of neural network models, Work. Pap., UPM.

- [47] Ndilikiliksha, P.C. (1994) Potential influence diagrams, *International Journal of Approximate Reasoning*, 10, 3, 251–285.
- [48] Nemhauser, G., A. Rinnooy Kan y J. Todd (1989) *Optimisation*, North Holland.
- [49] NOC (1991) *OPQSQP*, Numerical Optimisation Centre, Hatfield Polytechnic.
- [50] Olmsted, S.M. (1983) *On representing and solving decision problems*, Ph.D. Dissertation, Department of Engineering-Economic systems, Stanford University, Stanford, CA.
- [51] Pearl, J. (1987) Evidential reasoning using stochastic simulation of causal networks, *Artificial Intelligence*, 32, 245–257.
- [52] Poland, W.B. (1994) *Decision analysis with continuous and discrete variables: a mixture distribution approach*, Ph.D. Dissertation, Department of Engineering-Economic systems, Stanford University, Stanford, CA.
- [53] Reznicek, K. y T. Cheng (1991) Stochasting modelling of reservoir operations, *European Journal of Operational Research*, 50, 235–248.
- [54] Rinnooy Kañ, A. y G. Timmer (1988) Global Optimization, en Nemhauser, Rinnooy Kan and Todd (eds.), *Optimization*, North Holland.
- [55] Ríos Insua, D. (1990) *Sensitivity analysis in multiobjective decision making*, LNEMS 347, Springer.
- [56] Ríos Insua, D. (1992) On the foundations of decision making under partial information, *Theory and Decision*, 33, 3–100.
- [57] Ríos Insua, D. y S. French (1991) A framework for sensitivity analysis in discrete multi-objective decision-making, *EJOR*, 54, 176–190.

- [58] Ríos Insua, D. y J. Martín (1994) Robustness issues under imprecise beliefs and preferences, *J. Statist. Planning and Inference* 40, 383–389.
- [59] Ríos Insua, D. y J. Martín (1995) On the foundations of robust Bayesian statistics, Work. Pap., UPM.
- [60] Ríos S., S. Ríos Insua y M.J. Ríos Insua (1988) *Procesos de decisión multicriterio*, Ed. Eudema.
- [61] Ríos Insua, D. y K.A. Salewicz (1995) The operation of Kariba Lake: a multiobjective decision analysis, *Journal of Multicriteria Decision Analysis*, 203–222.
- [62] Ríos Insua, D., K.A. Salewicz, P. Müller y C. Bielza (1996) Bayesian Methods in reservoir operations: the Zambezi river case, aparecerá en S. French y J. Smith (eds), *Case studies in Bayesian Analysis*, Arnold.
- [63] Ripley, B. (1987) *Stochastic Simulation*, Wiley.
- [64] Roberts, G.O. y A.F.M. Smith (1994) Simple conditions for the convergence of the Gibbs sampler and Metropolis-Hastings algorithms, *Stochastic Processes and their Applications*, 49, 207–216.
- [65] Schneller, G.O. y G.P. Sphicas (1983) Decision making under uncertainty: Starr's domain criterion, *Theory and Decision*, 15, 321–336.
- [66] Shachter, R.D. (1986) Evaluating influence diagrams, *Operations Research*, 34, 6, 871–882.
- [67] Shachter, R.D. (1988) Probabilistic inference and influence diagrams, *Operations Research*, 36, 589–604.



- [68] Shachter, R.D. y C.R. Kenley (1989) Gaussian influence diagrams, *Management Science*, 35, 5, 527–550.
- [69] Shao, J. (1988) Monte Carlo approximations in Bayesian decision theory (I, II y III), Tech. Rep. 88-39, 64 y 65, Statistics Dept., Purdue University.
- [70] Shao, J. (1989) Monte Carlo approximations in Bayesian decision theory, *J. Amer. Statist. Assoc.* 84, 727–732.
- [71] Shenoy, P.P. (1992) Valuation-based systems for Bayesian decision analysis, *Operations Research*, 40, 3, 463–484.
- [72] Shenoy, P.P. (1993a) A new method for representing and solving Bayesian decision problems, en D.J. Hand (ed.), *Artificial Intelligence frontiers in Statistics: AI and Statistics III*, 119–138, Chapman and Hall, Londres.
- [73] Shenoy, P.P. (1993b) Game trees for decision analysis, Working Paper No.239, School of Business, University of Kansas, Lawrence, Kansas. Un resumen aparece como Information sets in decision theory, en M. Clarke, R. Kruse y S. Moral (eds.), *Symbolic and quantitative approaches to reasoning and uncertainty*, Lecture notes in Computer Science No. 747, 1993, 318–325, Springer.
- [74] Shenoy, P.P. (1994a) A comparison of graphical techniques for decision analysis, *European Journal of Operational Research*, 78, 1, 1–21.
- [75] Shenoy, P.P. (1994b) Representing conditional independence relations by valuation networks, *International Journal of uncertainty, fuzziness and knowledge-based systems*, 2, 2, 143–165.
- [76] Shenoy, P.P. (1994c) A new pruning method for solving decision trees and game trees, Working Paper No.261, School of Business, University of Kansas,

- Lawrence, Kansas. Aparecerá en *Uncertainty in Artificial Intelligence: proceedings of the 11th conference*, Agosto de 1995, Morgan Kaufmann, San Mateo, CA.
- [77] Shenoy, P.P. (1995) Valuation network representation and solution of asymmetric decision problems, Working Paper No.246, School of Business, University of Kansas, Lawrence, Kansas.
- [78] Smith, A.F.M. y G.O. Roberts (1993) Bayesian computation via the Gibbs sampler and related Markov chain Monte Carlo methods, *Jour Roy. Stat. Soc., B*, 55, 3–24.
- [79] Smith, J.E. (1993) Moment methods for decision analysis, *Management Science*, 39, 3, 340–358.
- [80] Smith, J.E., S. Holtzman, y J.E. Matheson (1993) Structuring conditional relationships in influence diagrams, *Operations Research*, 41, 2, 280–297.
- [81] Smith, J.Q. (1988) *Decision analysis: a Bayesian approach*, Chapman and Hall.
- [82] Smith, J.Q. (1989a) Influence diagrams for Bayesian decision analysis, *European Journal of Operational Research*, 40, 363–376.
- [83] Smith, J.Q. (1989b) Influence diagrams for statistical modelling, *The Annals of Statistics*, 17, 2, 654–672.
- [84] Stonebraker, J.S. (1993) *Applying decision analysis to sequential decisions under uncertainty with continuous decision variables*, Ph.D. Dissertation, Arizona State University.
- [85] Tanner, M.A. (1992) *Tools for Statistical Inference*, Springer.

- [86] Tatman, J.A. y R.D. Shachter (1990) Dynamic programming and influence diagrams, *IEEE Trans. on Syst., Man, and Cyber.*, 20, 2, 365–379.
- [87] Tierney, L. (1994) Markov chains for exploring posterior distributions, *Ann. Statist.*, 22, 1701–1762, (con discusión).
- [88] UNEP (1987) *Agreement on the action plan for the environmentally sound management of common Zambezi river system: final act*, Harare 26-28 de Mayo de 1987.
- [89] Venables, W. y B. Ripley (1994) *Modern Applied Statistics with S-Plus*, Springer.
- [90] West, M. (1995) Bayesian forecasting, *ISDS Discussion Paper*, Duke University.
- [91] West, M. y J. Harrison (1989) *Bayesian forecasting and dynamic linear models*, Springer.
- [92] White III, C.C. y H.K. El-Deib (1986) Parameter imprecision in finite state, finite action dynamic programs, *Operations Research*, 34, 1, 120–129.
- [93] White, D.J. (1982) *Optimality and efficiency*, Wiley.
- [94] Yakowitz, S. (1982) Dynamic programming applications in water resources, *Water Resources Research*, 18, 4, 673–696.
- [95] Yeh, W.W-G. (1985) Reservoir management and operations models: a state-of-the-art review, *Water Resources Research*, 21, 12, 1797–1818.
- [96] York, J. (1992) Use of the Gibbs sampler in expert systems, *Artificial Intelligence*, 56, 115–130.

[97] Yu, P.L. (1986) *Multiple-criteria decision making*, Londres: Plenum.