

RESOLUCION DE INECUACIONES VARIACIONALES Y APLICACIONES

A. Bermúdez\*, F.J. Fernández\*, L. Moreno\*\*, C. Rodríguez\*\*\*, A. Samartín\*\*\*.

\*Facultad de Matemáticas. Universidad de Santiago.

\*\* E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad de Santander.

\*\*\* Colegio Universitario de Orense. Universidad de Santiago.

1.- RESUMEN. Las inecuaciones variacionales son un instrumento funcional adecuado para formular gran número de problemas no lineales de la física. Citemos, por ejemplo, aquellos que surgen al modelizar fenómenos como el contacto unilateral entre un cuerpo elástico y otro rígido, el rozamiento, el flujo de fluidos no-newtonianos de tipo Bingham, la transferencia de calor con cambio de estado (problema de Stefan), la torsión elastoplástica de una barra, etc. (ver Duvaut-Lions [1]).

Se trata, en general, de problemas en los que una de las incógnitas es la posición de una frontera libre.

Numerosos libros y artículos estudian las inecuaciones variacionales, tanto desde el punto de vista teórico (existencia, unicidad, regularidad, etc.) como numérico. Destacamos entre los primeros Lions [1], Duvaut-Lions [1], Glowinski-Lions-Tremolières [1]. Kinderlehrer-Stampacchia [1], Friedman [1], Glowinski [1], etc.

En esta comunicación se pretende dar una breve introducción a las inecuaciones variacionales, y exponer las líneas de trabajo que sobre este tema se desarrollan en el Departamento de Ecuaciones Funcionales de la Universidad de Santiago. Asimismo se resumen algunas contribuciones publicadas o en curso de realización.

2.- INECUACIONES VARIACIONALES: INTRODUCCION.

Es bien conocido que un gran número de problemas de contorno lineales para ecuaciones en derivadas parciales, admiten una formulación variacional o débil del tipo:

$$(2.1) \quad \begin{cases} a(u,v) = L(v), & \forall v \in V \\ u \in V \end{cases}$$

siendo V un espacio de Hilbert,  $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  una

aplicación bilineal, continua y coerciva y  $L: V \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional lineal continuo.

Así, por ejemplo, si  $\Omega$  es un abierto de  $\mathbb{R}^3$  con frontera  $\Gamma$  regular, y  $V, a, L$  se definen de la manera siguiente:

$$(2.2) \quad V = \{v \in (H^1(\Omega))^3 : v|_{\Gamma_0} = 0\}$$

$$(2.3) \quad a(u,v) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \epsilon_{ij}(v) dx$$

$$(2.4) \quad L(v) = \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\Gamma_1} g \cdot v d\Gamma$$

donde  $f \in (L^2(\Omega))^3$ ,  $g \in (L^2(\Gamma_1))^3$  y  $\Gamma_0$  y  $\Gamma_1$

son subconjuntos de  $\Gamma$ , la ecuación variacional (2.1) es la formulación débil del problema de elasticidad lineal

$$(2.5) \quad \begin{cases} -\sigma_{ij,j}(u) = f_i & \text{en } \Omega \\ \sigma_{ij}(u) = \lambda \epsilon_{kk}(u) + 2\mu \epsilon_{ij}(u) & \text{en } \Omega \\ u|_{\Gamma_0} = 0 \\ \sigma_{ij} n_j = g_i & \text{en } \Gamma_1 \end{cases}$$

La función  $u$ , solución de este problema, representa los desplazamientos que experimentan los puntos de un cuerpo elástico que ocupa la región del espacio  $\Omega$ , empotrado por  $\Gamma_0$  y sobre el que actúa una carga distribuida  $f$  y superficial  $g$  sobre  $\Gamma_1$ .

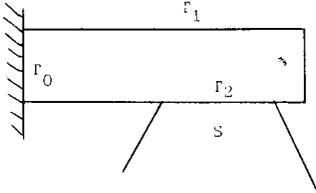
También es un resultado conocido que, si  $a$  es simétrica, la solución de (2.1) es el único elemento de  $V$  que realiza el mínimo del funcional:

$$(2.6) \quad J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - L(v)$$

En el caso particular de (2.5), este hecho expresa un principio físico bien conocido: la solución es el campo de desplazamientos que hace mínimo el funcional "energía potencial", entre to-

dos los desplazamientos cinematicamente admisibles.

Imaginemos ahora la situación representada en la figura 1, es decir, supongamos que una parte de la superficie del cuerpo, denotada por  $\Gamma_2$ , está en contacto con un medio rígido S.



Es evidente que ahora los desplazamientos admisibles quedan reducidos a los del conjunto convexo y cerrado de  $V$ :

$$(2.7) \quad K = \{veV : v.n \leq 0 \text{ en } \Gamma_2\}$$

donde  $n$  representa un vector unitario normal a  $\Gamma_2$  y dirigido hacia el exterior de  $\Omega$ , y  $V$  está definido por (2.2).

En estas condiciones el campo de desplazamientos bajo la acción de las fuerzas  $f$  y  $g$  viene dado por la única función de  $K$  solución del problema:

$$(2.8) \quad \begin{cases} \text{minimizar } J(v) \\ v \in K \end{cases}$$

La "ecuación" de Euler para este problema del cálculo de variaciones es la siguiente:

$$(2.9) \quad \begin{cases} a(u, v-u) \geq L(v-u), \quad \forall v \in K \\ u \in K \end{cases}$$

Nótese que (2.9) coincide con (2.1) si  $K=V$ .

La formulación (2.9) es un ejemplo de inecuación variacional. El problema de contacto unilateral que hemos expuesto se conoce con el nombre de "problema de Signorini".

Sea  $\chi_K$  la función indicatriz del conjunto  $K$ , es decir,

$$(2.10) \quad \chi_K(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \in K \\ \infty & \text{si } v \notin K \end{cases}$$

Si  $K$  es convexo, cerrado y no vacío, esta función es convexa, semi-continua inferiormente (s.c.i.) y propia. Utilizando  $\chi_K$ , el problema (2.9) puede escribirse de la forma equivalente:

$$(2.11) \quad \begin{cases} a(u, v-u) + \chi_K(v) - \chi_K(u) \geq L(v-u), \quad \forall v \in V \\ u \in V \end{cases}$$

Esta inecuación es un caso particular de la siguiente:

$$(2.12) \quad \begin{cases} a(u, v-u) + \psi(v) - \psi(u) \geq L(v-u), \quad \forall v \in V \\ u \in V \end{cases}$$

donde  $\psi: V \rightarrow (-\infty, \infty]$  es una función convexa, s.c.i. y propia cualquiera.

En adelante vamos a suponer que  $\psi$  es de la forma

$$(2.13) \quad \psi(v) = \varphi(B^*v + g)$$

donde  $H$  es un espacio de Hilbert que identificaremos a su dual topológico,  $g \in H$  y  $B \in \mathcal{L}(H, V')$ .

Nótese que (2.12) es equivalente a

$$(2.14) \quad L - Au \in \partial \psi(u)$$

En (2.14)  $A$  representa el operador de  $\mathcal{L}(V, V')$  asociado a la forma bilineal  $a$ , es decir,

$$(2.15) \quad (Au, v)_{V, V'} = a(u, v), \quad \forall u, v \in V$$

mientras que  $\partial \psi$  denota la subdiferencial de la función  $\psi$  (ver Ekeland-Temam [1]).

Es conocido que siempre es válida la inclusión

$$(2.16) \quad B(\partial \varphi(B^*v + g)) \subset \partial \psi(v).$$

Sin embargo, la igualdad no se verifica con carácter general. Condiciones suficientes para ello son cada una de las dos siguientes:

- 1)  $\varphi$  es finita y continua en algún punto de la forma  $B^*v + g$ .
- 2) Existe  $\beta > 0$  tal que  $\|Bx\| \geq \beta \|x\|$ ,  $\forall x \in H$  (condición de Brezzi-Babuska).

Assumiendo la validez de la mencionada igualdad, es evidente que el problema (2.12) equivale a

$$(2.17) \quad L - Au \in B(\partial \varphi(B^*u + g))$$

En Bermúdez-Moreno [1] se exponen varios métodos iterativos para resolver (2.17). Se basan en el resultado siguiente:

Sea  $G$  un operador maximal monótono de  $H$  en  $H$  (ver p. ej. Brezis [1]). Entonces son equivalentes

i)  $p \in G(z)$

ii)  $p = G_\lambda(v + \lambda p), \lambda > 0$

donde  $G_\lambda$  representa la llamada regularización Yosida de  $G$ :

$$(2.18) \quad G_\lambda = \frac{I - J_\lambda^G}{\lambda}$$

En (2.18)  $I$  denota el operador identidad y  $J_\lambda^G$  el operador resolvente:

$$(2.19) \quad p = J_\lambda^G(z) \iff p + \lambda G(p) \ni z$$

Este resultado también es válido para perturbaciones de operadores maximales monótonos del tipo  $G^\omega = G - \omega I$ . En particular se tiene:

$$(2.20) \quad (G^\omega)_\lambda(v) = \frac{1}{1-\lambda\omega} \left( \frac{1}{1-\lambda\omega} v \right) - \frac{\omega}{1-\lambda\omega} v$$

De estas consideraciones se deduce que, si  $u$  es solución de (2.17) y  $\omega$  es cualquier real positivo, deberá existir  $p \in H$  tal que:

$$(2.21) \quad \begin{cases} Au + \omega BB^*u = L - Bp - \omega Bg \\ p = G_\lambda^\omega(B^*u + g + \lambda p) \end{cases}$$

con  $G = \partial\Phi$ .

Esta nueva forma de escribir la inecuación variacional de partida sugiere los algoritmos siguientes, cuya convergencia se estudia en Bermúdez-Moreno [1].

$$(2.22) \quad \begin{cases} Au^n + \omega BB^*u^n = L - Bp^n - \omega Bg \\ p^{n+1} = \rho G_\lambda^\omega(B^*u^n + g + \lambda p^n) + (1-\rho)p^n \end{cases}$$

$$(2.23) \quad \begin{cases} Au^n + \omega BB^*u^n + \rho G_\lambda^\omega(B^*u^n + g + \lambda p^n) = L - Bp^n - \omega Bg \\ p^{n+1} = \rho G_\lambda^\omega(B^*u^n + g + \lambda p^n) + (1-\rho)p^n \\ \rho \in (0, 1] \end{cases}$$

Si  $\omega = 0$ ,  $\rho = 1$  y  $A$  es simétrico, el algoritmo (2.23) no es otro que el de penalización-dualidad o de Uzawa para la lagrangiana aumentada:

$$(2.24) \quad \mathcal{L}_\lambda(v, q) = \frac{1}{2} (Av, v) - (f, v) + \frac{1}{\lambda} (B^*v + g + \lambda q) - \frac{\lambda}{2} \|q\|^2$$

(ver Fortin-Glowinski [1]).

Nótese que mientras en el algoritmo (2.22)  $u^n$  es solución de un problema lineal, en el (2.23)  $u^n$  es solución de un problema no lineal. Métodos

para resolverlo se estudian en Bermúdez-Moreno [1].

Por otra parte, en Bermúdez [2] se generaliza (2.22) al caso de una ecuación con varios términos no lineales del tipo:

$$(2.25) \quad Au + \sum_{i=1}^m B_i G_i(B_i^*u) \ni f$$

Tras probar un resultado de convergencia, el algoritmo se aplica a la resolución del problema de contorno

$$(2.26) \quad \begin{cases} \frac{\partial \alpha(u)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} (B(\frac{\partial u}{\partial x})) = f \text{ en } [0, 1] \\ u(0, t) = g_1(t), \quad u(1, t) = g_2(t) \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

que es un modelo matemático para el flujo de un gas en un conducto a baja presión.

Otras aplicaciones de estos algoritmos o variantes de ellos a problemas no lineales de transmisión de calor pueden verse en Bermúdez [1].

Finalmente, el algoritmo (2.22) ha sido implementado en la biblioteca MODULEF para resolver dos inecuaciones variacionales que formulan otros tantos problemas de la mecánica: la torsión elastoplástica de una barra y el flujo de un fluido de Bingham en un conducto cilíndrico (Rodríguez [1]).

### 3.- RESOLUCION DE UN MODELO PARA EL EFECTO MARRANGONI.

Quando una gota de un líquido, parcial o totalmente soluble en agua y con menor tensión superficial que ésta, se deja caer a través de un capilar sobre una superficie de agua en contacto con el aire, se genera a partir de la interfase un campo de velocidades que se transmite a las capas inferiores de agua.

Un modelo simplificado para el estudio de este fenómeno, conocido con el nombre de efecto Marangoni, lo constituye el siguiente problema de valor inicial:

$$(3.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u \geq 0 \quad (y, t) \in (0, \infty) \times [0, T] \\ v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{F(t)}{u} \quad \text{en } y = 0 \\ u = 0 \quad \text{en } y = \infty \\ u = 0 \quad \text{en } t = 0 \end{cases}$$

En Rodríguez [2], Bermúdez-Rodríguez [1] se

obtiene la siguiente formulación variacional de (3.1):

$$(3.2) \quad \begin{cases} \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial t} (v-u) dy + \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (v-u) dy + \\ + F(t)\varphi(v(0)) - F(t)\varphi(u(0)) \geq 0 \\ \forall v \in H^1(0, \infty) \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

donde  $\varphi$  es la función (convexa, s.c.i. y propia):

$$(3.3) \quad \varphi(x) = \begin{cases} -\ln s & \text{si } s > 0 \\ \infty & \text{si } s \leq 0 \end{cases}$$

Se demuestra que (3.2) posee solución en sentido débil y se resuelve numericamente utilizando métodos de elementos finitos y diferencias finitas.

Si el agua se sustituye por un fluido no-newtoniano, el término

$$v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

en (3.1) debe reemplazarse por

$$v \frac{\partial}{\partial y} \left( \beta \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right)$$

donde  $\beta$  es una función no lineal, posiblemente multívoca en cero.

En este caso, en lugar del segundo término de la formulación variacional (3.2) aparecería la diferencia  $(\beta = \beta_j)$

$$v \int_0^\infty j \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy - v \int_0^\infty j \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy$$

Por otra parte, es posible conseguir expresiones asintóticas de la solución  $u$  para valores de  $t$  e  $y$  muy pequeños, que pueden utilizarse como datos iniciales para un método numérico de diferencias finitas en la variable  $t$  (Rodríguez [3]).

#### 4.- METODOS DE ELEMENTOS FINITOS MIXTOS PARA PROBLEMAS NO LINEALES.

Las formulaciones (2.12) ó (2.14) reciben el nombre de "primal" ó "en desplazamientos" porque en los problemas de elasticidad la solución es el campo de desplazamientos.

Por el contrario, la formulación (2.21) se denomina "mixta", porque además de la variable primal  $u$  aparece la variable "dual"  $p$ .

Es por ello que los métodos de elementos finitos que se utilizan para discretizar (2.14) se

denominan "primal", mientras que aquellos que discretizan (2.21) reciben el nombre de "mixtos".

Un completo análisis de los métodos mixtos e híbridos para problemas no lineales puede verse en la "tesis de estado" de Thomas [1], donde se obtienen condiciones para la existencia de solución del problema discretizado y estimaciones del error. Asimismo se introducen familias de elementos finitos mixtos e híbridos, útiles para resolver problemas de segundo orden.

Por lo que se refiere a los problemas no lineales, citaremos los artículos de Brezzi-Hager-Raviart [1], Guirault-Raviart [1], Johnson [1], Le Tallec [1], Bermúdez [3],[4].

En Bermúdez [3] se realiza un estudio sistemático para formulaciones mixtas del tipo

$$(4.1) \quad \begin{cases} Au + Bp = f \\ -B^* u + \varphi^*(p) \geq g \end{cases}$$

donde  $A$  puede ser no lineal.

(Nótese que (4.1) coincide con (2.21) si  $\omega = 0$ ).

Tras introducir formulaciones mixtas e híbridas para varios problemas no lineales de la física, se estudia la discretización del problema (4.1), obteniéndose acotaciones del error.

Como ejemplo de aplicación se considera el problema de contorno:

$$(4.2) \quad \begin{cases} -\nabla \cdot (|\nabla u|^{r-2} \nabla u) = f & \text{en } \Omega \\ u|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

para el que se construye una formulación mixta del tipo (4.1). A continuación se discretiza utilizando los elementos Raviart-Thomas de grado uno  $y$ , para  $1 < r \leq 2$ , se obtiene una estimación de orden  $O(h)$ , del error que se comete al aproximar  $\nabla u$ , que mejora la obtenida en Glowinski-Marrocco [1] para un método primal.

La aplicación de estos métodos al problema de la torsión elastoplástica es objeto de estudio en Bermúdez [4], donde puede verse un algoritmo iterativo para resolver el problema discretizado.

Finalmente, el caso del fluido de Bingham es analizado en Bermúdez-Rodríguez [2]. Allí se recogen resultados numéricos que se comparan favorablemente con los métodos primales, especialmente a la hora de determinar la frontera libre.

Las figuras 1 y 2 muestran algunos de estos resultados para diferentes gradientes de presión en el conducto. Puede observarse que para  $f=20$  los elementos mixtos predicen una zona rígida que no es detectada, sin embargo, por el método primal.

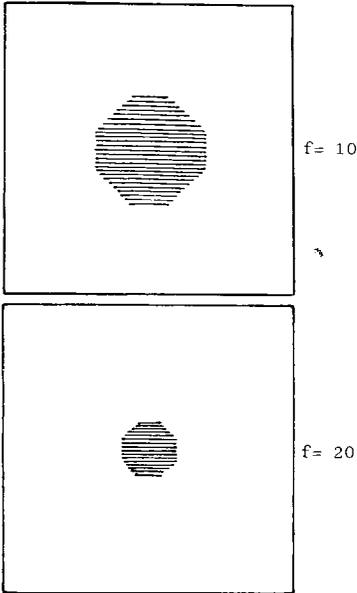


Fig. 1.- Elementos mixtos  $v=1$ .

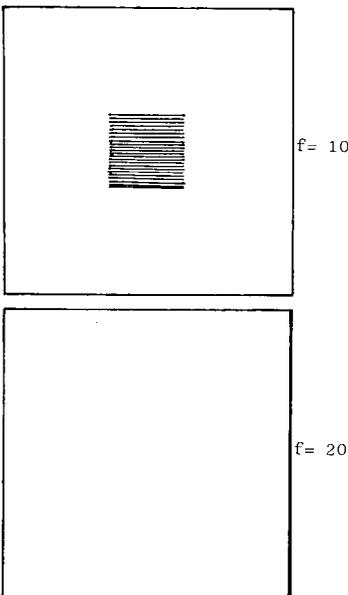


Fig. 2.- Elementos primales  $v=1$ .

5.- PROBLEMAS UNILATERALES

Un primer ejemplo de este tipo de problemas es el que aparece en la introducción. Sobre los aspectos numéricos pueden verse los trabajos de Oden y Kikuchi [ 1 ], y Oden-Kim [ 1 ], donde se emplean métodos de penalización.

Una implementación en la biblioteca MODULEF utilizando los algoritmos de la sección 3, está en curso de realización en el Departamento de Ecuaciones Funcionales.

Si el dominio  $\Omega$  está ocupado por una placa o una barra, el modelo descrito en (2.5) debe reemplazarse por las conocidas ecuaciones de cuarto orden. De este modo, al formular los problemas unilaterales aparecen inecuaciones variacionales asociadas a subconjuntos del espacio  $H^2(\Omega)$ , que se estudian desde el punto de vista teórico en Kinderlherer-Stampacchia [ 1 ] Friedman [ 1 ] etc.

Métodos numéricos con elementos finitos para el caso de una viga que descansa sobre un medio rígido o elástico, se consideran en Bermúdez-Fernández [ 1 ].

El modelo utilizado es el siguiente:

$$(5.1) \begin{cases} EI \frac{d^4 u}{dx^4} = f+q \text{ en } [0,1] \\ u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

donde  $q$  representa la reacción del apoyo y verifica:

a) Caso rígido :  $q(x) \geq 0$  ,  $u(x) \geq 0$   
 $u(x)q(x) = 0$

b) Caso elástico:  $q(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } u(x) > 0 \\ -Bu(x) & \text{si } u(x) \leq 0 \end{cases}$

siendo  $B$  el módulo de balasto.

Las formulaciones variacionales de estos problemas son las siguientes:

a) Caso rígido:

$$(5.2) \begin{cases} \int_0^1 u''(v''-u'') dx \geq \int_0^1 f(v-u) dx, \quad \forall v \in K \\ u \in K \\ K = \{ v \in H_0^2(0,1) : v(x) \geq 0, \quad \forall x \in [0,1] \} \end{cases}$$

b) Caso elástico:

$$(5.3) \begin{cases} \int_0^1 u''v'' dx + \int_0^1 G_B(u)v dx = \int_0^1 fv, \\ u \in H_0^2(\Omega) \quad \forall v \in H_0^2(\Omega) \end{cases}$$

Con vistas a la discretización de estos problemas se considera una partición  $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{N_h} = 1$  del intervalo  $[0,1]$ , de norma

$$h = \max_{1 \leq i \leq N_h} |x_i - x_{i-1}|,$$

y asociados a ella se definen los conjuntos:

$$(5.4) \quad V_h = \{v_h \in C^1[0,1] : v_h|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_3^i, i = 0, \dots, N_h - 1\}$$

$$v_h(0) = v_h'(0) = v_h(1) = v_h'(1) = 0$$

(elementos finitos de Hermite de grado 3)

$$K_h = \{v_h \in V_h : v_h(x_i) \geq 0 \quad i = 0, \dots, N_h\}$$

Nótese que  $K_h$  no es un subconjunto de  $V_h$ .

Se introducen los problemas discretizados:

a) Caso rígido

$$(5.5) \quad \begin{cases} \int_0^1 u_h''(v_h'' - u_h'') dx \geq \int_0^1 f(v_h - u_h) dx, & \forall v_h \in K_h \\ u_h \in K_h \end{cases}$$

b) Caso elástico

$$(5.6) \quad \begin{cases} \int_0^1 u_h'' v_h'' dx + \int_0^1 G_B(u_h) v_h dx = \int_0^1 f_h v_h dx, & \forall v_h \in V_h \\ u_h \in V_h \end{cases}$$

En Bermúdez-Fernández [1] se obtienen las siguientes estimaciones de error para (4.7) y (4.8):

a) Caso rígido

$$\| |u - u_h| \|_{H^2(\Omega)} = O(h^{1/2})$$

b) Caso elástico

$$\| |u - u_h| \|_{H^2(\Omega)} = O(h)$$

Asimismo los métodos expuestos se aplican a los ejemplos de prueba con cargas puntuales y distribuidas.

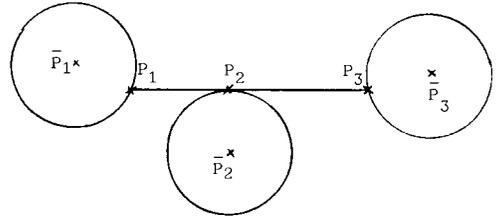
Un estudio análogo para placas está en curso de realización. En este caso, además de tener en cuenta "obstáculos distribuidos", se consideran apoyos a lo largo de líneas y también articulaciones.

6.- UN PROBLEMA DE TRAZADO DE CURVAS.

Se considera el siguiente problema: Dados  $N$  puntos  $\bar{P}_i = (\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ , ( $i = 1, \dots, N$ ) y unos círculos  $C_i$  de centro en  $\bar{P}_i$  y radios  $d_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) se trata de elegir  $P_i \in C_i$  y una curva  $z(s)$  de clase  $C^2$ , que pase por los puntos  $P_i$ , tenga curvatura nula en  $P_1$  y  $P_N^*$  y haga mínimo el funcional:

$$(6.1) \quad J(z) = \int_0^L |\dot{z}(s)|^2 ds$$

siendo  $s$  la longitud de arco, es decir,  $|\dot{z}(s)| = 1$ .



Problemas de este tipo pueden verse en Irons [1], Moreno-Samartin-Bermúdez [1], etc. En este último artículo se exige que la curva  $z$  pase exactamente por los puntos  $\bar{P}_i$  y tenga en algunos de ellos pendientes o curvaturas prefijadas.

Volviendo al problema enunciado más arriba, consideremos por un momento que se conocen los puntos  $P_i$ , ( $i = 1, \dots, N$ ) y que se quiere construir una curva  $z$  que pase por ellos, tenga curvatura nula en  $P_1$  y  $P_N$ , y haga mínimo el funcional  $J$ .

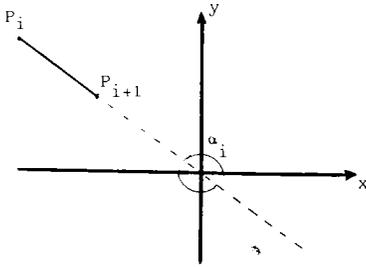
Es éste último un problema de minimización no convexo, debido a la restricción  $|\dot{z}(s)| = 1$ . Nuestro objetivo es aproximarlo por uno cuadrático sin restricciones, para lo cual se procede del siguiente modo:

Sean  $l_i$  y  $\alpha_i$  definidos por:

$$(6.2) \quad l_i = \frac{1}{2} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \quad i = 1, \dots, N-1$$

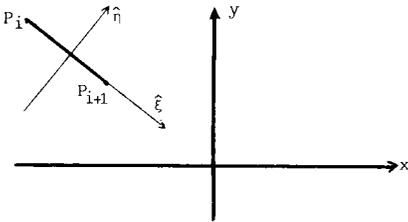
$$(6.3) \quad \cos \alpha_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{2l_i} \quad \text{sen } \alpha_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{2l_i}$$

(\*) Otro tipo de "condiciones de contorno" podrían ser consideradas.



Para cada  $i = 1, \dots, N-1$  se considera el cambio de coordenadas

$$(6.4) \begin{cases} \hat{\xi} = (x - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}) \cos \alpha_i + (y - \frac{y_i + y_{i+1}}{2}) \sin \alpha_i \\ \hat{\eta} = -(x - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}) \sin \alpha_i + (y - \frac{y_i + y_{i+1}}{2}) \cos \alpha_i \end{cases}$$



que transforma el segmento  $P_i P_{i+1}$  en el segmento:

$$(6.5) \{ (\hat{\xi}, \hat{\eta}) \mid -1_i \leq \hat{\xi} \leq 1_i, \hat{\eta} = 0 \}$$

Supongamos que la curva  $z(s)$  admite en cada tramo  $P_i P_{i+1}$  una parametrización relativa al plano  $\hat{\xi}, \hat{\eta}$  del tipo:

$$(6.6) \hat{\xi} \in [-1_i, 1_i] \rightarrow (\hat{\xi}, f_i(\hat{\xi})) \in \mathbb{R}^2$$

Se tiene entonces

$$(6.7) \int_{P_i}^{P_{i+1}} |\dot{z}(s)|^2 ds = \int_{-1_i}^{1_i} \frac{1_i \frac{(f_i'(\hat{\xi}))^2}{(1+(f_i'(\hat{\xi}))^2)^3} \sqrt{1+(f_i'(\hat{\xi}))^2} d\hat{\xi}$$

o todavía, haciendo el cambio de variable

$$(6.8) \xi = \frac{1}{1_i} \hat{\xi}, \quad \eta = \frac{1}{1_i} \hat{\eta}$$

resulta

$$(6.9) \int_{P_i}^{P_{i+1}} |\dot{z}(s)|^2 ds = \int_{-1}^1 \frac{1_i \frac{(g_i'(\xi))^2}{(1+(g_i'(\xi))^2)^3} \sqrt{1+(g_i'(\xi))^2} 1_i d\xi$$

Con objeto de linealizar el problema se hace la hipótesis:

$$(6.10) (g_i'(\xi))^2 \ll 1$$

lo cual permite escribir

$$(6.11) \int_{P_i}^{P_{i+1}} |\dot{z}(s)|^2 ds \approx \int_{-1}^1 \frac{1_i}{1_i} |g_i''(\xi)|^2 d\xi.$$

De este modo, el problema enunciado más arriba puede aproximarse por el siguiente (del tipo "punto de silla")

$$(6.12) \max_{\lambda \in \mathbb{R}^{N-2}} \min_{g \in [H^2(-1,1) \cap H_0^1(-1,1)]^{N-1}} \mathcal{L}(\lambda, g)$$

siendo

$$(6.13) \mathcal{L}(\lambda, g) = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{1_i} \int_{-1}^1 |g_i''(\xi)|^2 d\xi + \sum_{i=2}^{N-1} 2\lambda_i (g_i'(-1) - g_{i-1}'(1) + 2m_i)$$

$$(6.14) \begin{aligned} \lambda &= (\lambda_2, \dots, \lambda_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-2} \\ g &= (g_1, \dots, g_{N-1}) \in [H^2(-1,1) \cap H_0^1(-1,1)]^{N-1} \end{aligned}$$

$$(6.15) m_i = \text{tg} \frac{\alpha_i - \alpha_{i-1}}{2}$$

$$(6.16) \begin{cases} H^2(-1,1) = \{ v: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \frac{dv}{dx} \in L^2(-1,1), \\ \frac{d^2v}{dx^2} \in L^2(-1,1) \} \\ H_0^1(-1,1) = \{ v: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \frac{dv}{dx} \in L^2(-1,1), \\ v(-1) = v(1) = 0 \} \end{cases}$$

Naturalmente el término de la lagrangiana en el que aparecen los  $\lambda_i$  se introduce para que la curva resultante al unir los diferentes trozos sea de clase  $C^2$ .

Este problema de punto de silla tiene solución única que puede calcularse fácilmente, sin hacer ningún tipo de aproximación. En efecto, sencillas integraciones por partes nos llevan a las ecuaciones:

$$(6.17) \begin{cases} i=1 & \frac{d^4 g_1}{d\xi^4} = 0 \text{ en } (-1,1), \quad g_1(-1) = g_1(1) = 0 \\ & \frac{d^2 g_1}{d\xi^2}(-1) = 0, \quad \frac{1}{1_1} \frac{d^2 g_1}{d\xi^2}(1) = \lambda_2 \end{cases}$$

$$(6.18) \quad \begin{cases} 2 \leq i \leq N-2 \\ \frac{d^4 g_i}{d\xi^4} = 0 \text{ en } (-1,1), g_i(-1) = g_i(1) = 0 \\ \frac{1}{l_i} \frac{d^2 g_i}{d\xi^2}(-1) = \lambda_i, \quad \frac{1}{l_i} \frac{d^2 g_i}{d\xi^2}(1) = \lambda_{i+1} \end{cases}$$

$$(6.19) \quad \begin{cases} i = N-1 \\ \frac{d^4 g_{N-1}}{d\xi^4} = 0 \text{ en } (-1,1), g_{N-1}(-1) = g_{N-1}(1) = 0 \\ \frac{1}{l_{N-1}} \frac{d^2 g_{N-1}}{d\xi^2}(-1) = \lambda_{N-1}, \quad \frac{d^2 g_{N-1}}{d\xi^2}(1) = 0 \end{cases}$$

Estas ecuaciones pueden integrarse y resulta (tomando  $\lambda_1 = \lambda_N = 0$ ):

$$(6.20) \quad g_i(\xi) = l_i \left[ \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)}{12} \xi^3 + \frac{\lambda_{i+1} + \lambda_i}{4} \xi^2 - \frac{\lambda_{i+1} - \lambda_i}{12} \xi - \frac{\lambda_{i+1} + \lambda_i}{4} \right]$$

Por consiguiente

$$(6.21) \quad \begin{cases} g'_{i-1}(1) = l_{i-1} \frac{2\lambda_i + \lambda_{i-1}}{3} \\ g'_i(-1) = -l_i \left( \frac{\lambda_{i+1} + 2\lambda_i}{3} \right) \end{cases}$$

de manera que la condición  $g'_{i-1}(1) - m_i = g'_i(-1) + m_i$  conduce al sistema lineal en las  $\lambda_i$

$$(6.22) \quad \frac{l_{i-1}}{3} \lambda_{i-1} + \frac{2}{3}(l_{i-1} + l_i) \lambda_i + \frac{l_i}{3} \lambda_{i+1} = 2m_i$$

$i = 2, \dots, N-1, \quad \lambda_1 = \lambda_N = 0$

que permite calcular  $\lambda_1 \dots \lambda_N$  y a continuación las funciones  $g_i$ .

Evaluemos el funcional J en la curva solución. es fácil comprobar que se tiene:

$$(6.23) \quad J(z_{op}) = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{l_i} \int_{-1}^1 |g_i''(\xi)|^2 d\xi = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{2l_i}{3} (\lambda_{i+1}^2 + \lambda_{i+1} \lambda_i + \lambda_i^2)$$

Volvamos ahora al problema enunciado al principio de esta sección.

Sean  $(x_i, y_i)$ , las coordenadas del punto  $P_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ),  $x = (x_1, \dots, x_N)$ , e  $y = (y_1, \dots, y_N)$ .

S. define  $F(x, y)$  como el valor de J en la curva  $z_{cp}$ , es decir,

$$F(x, y) = G(x, y, \lambda(x, y))$$

siendo  $G(x, y, \lambda) = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{2l_i}{3} (\lambda_{i+1}^2 + \lambda_{i+1} \lambda_i + \lambda_i^2)$  y  $\lambda_i(x, y)$ , ( $i = 1, \dots, N$ ) denota la solución de (5.22).

Con estas notaciones el problema a resolver es el siguiente

$$(6.25) \quad \min_{(x, y) \in K} F(x, y)$$

siendo  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2N} : (x_i - \bar{x}_i)^2 + (y_i - \bar{y}_i)^2 \leq d_i^2 \quad i = 1, \dots, N\}$

Para calcular una solución de este problema de minimización con restricciones se han utilizado métodos de penalización-dualidad del tipo de los descritos en la sección 2. Los problemas de minimización sin restricciones que aparecen en cada iteración, se han resuelto utilizando un método quasi-Newton (concretamente la subrutina VA13A de la biblioteca Harwell).

El cálculo del gradiente de F se ha realizado introduciendo un estado adjunto, técnica clásica en los problemas de control óptimo.

Concretamente, puede probarse lo siguiente:

Sea  $A(x, y)$  la matriz del sistema (6.22),  $(\lambda_2, \dots, \lambda_{N-1})$  la solución de (6.22) y  $p \in \mathbb{R}^{N-2}$  la solución del sistema

$$A(x, y)p = - \frac{\partial G}{\partial \lambda}(x, y, \lambda).$$

Entonces se verifica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_j} &= \sum_{i=1}^{N-1} \frac{2}{3} \frac{\partial l_i}{\partial x_j} (\lambda_{i+1}^2 + \lambda_{i+1} \lambda_i + \lambda_i^2) + \\ &+ \sum_{i=2}^{N-1} p_i \left[ -2 \frac{\partial m_i}{\partial x_j} + \frac{1}{3} \lambda_{i-1} \frac{\partial l_{i-1}}{\partial x_j} + \right. \\ &\left. + \frac{2}{3} \lambda_i \frac{\partial l_{i-1}}{\partial x_j} + \frac{2}{3} \lambda_i \frac{\partial l_i}{\partial x_j} + \frac{1}{3} \lambda_{i+1} \frac{\partial l_i}{\partial x_j} \right] \end{aligned}$$

y una expresión análoga para  $\frac{\partial F}{\partial y_j}$ .

#### BIBLIOGRAFIA.-

A. Bermúdez [1]. Dos algoritmos para la resolución numérica de una ecuación parabólica casi-lineal. Coll. Math. Vol. XXX. Fasc. 2º (1979).  
 A. Bermúdez [2]. Un método numérico para la resolución de ecuaciones con varios términos no lineales. Aplicación a un problema de flujo de gas en un conducto. Rev. Real. Acad. Cien-

- cias. Madrid (aparecerá).
- A.Bermúdez [3]. Elementos finitos mixtos para problemas no lineales. IV C.E.D.Y.A. Sevilla (1981).
- A.Bermúdez [4]. A mixed method for the elastoplastic torsion problem. IMA Journal of Numerical Analysis, 2, 325-334 (1982).
- A.Bermúdez, F.J.Fernández [1]. Numerical solution of some unilateral problems for elastic beams. VI CEDYA. Jaca (1983).
- A.Bermúdez, C.Moreno [1]. Duality methods for solving variational inequalities. Comp. and Math. with Appl. Vol. 7, 45-58 (1981).
- A.Bermúdez, C.Moreno [2]. On a multiplier method for solving nonlinear functional equations. Ecuaciones Funcionales y Análisis Numérico. Vol. 5. Santiago (1980).
- A.Bermúdez, C.Rodríguez [1]. Resolución de una ecuación de evolución no lineal. III CEDYA. Santiago (1980).
- A.Bermúdez, C.Rodríguez [2]. Resolución de algunos problema no lineales con elementos mixtos de Raviart-Thomas. VI CEDYA. Jaca (1983).
- H.Brézis [1]. Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contraction dans les espaces de Hilbert. North-Holland (1973).
- F.Brezzi, W.Hager, P.A.Raviart [1]. Error estimates for the finite element solution of variational inequalities: II. Mixed methods. Numer. Math. 31, 1-16 (1978).
- G.Duvaut, J.L.Lions [1]. Les inequations en mécanique et en physique. Dunod (1972)
- I.Ekeland, R.Temam [1]. Analyse convexe et problèmes variationnelles. Dunod (1974)
- M.Fortin, R.Glowinski [1]. Méthodes de lagrangien augmenté. Dunod (1982).
- A.Friedman [1]. Variational principles and free boundary problems. John Wiley (1982).
- R.Glowinski [1]. Numerical methods for nonlinear variational problems. Springer (1984).
- R.Glowinski, J.L.Lions, R.Tremolières [1]. Analyse numérique des inéquations variationnelles. Dunod (1976).
- R.Glowinski, A.Marroco [1]. Sur l'approximation par éléments finis, et la resolution par penalisation-dualité, d'une classe de problèmes de Dirichlet non-linéaires. RAIRO Analyse Numérique 12, 335-348 (1978).
- Guirault, P.A.Raviart [1]. Analysis of a mixed finite element method for the Navier-Stokes equations. Numer. Math. 33, 235-272 (1979).
- B.M.Irons [1]. Hyper-beams, generalized splines and practical curve fitting. En Energy methods in finite element analysis. Ed. R.Glowinski, E.Y.Rodin, O.C.Zienkiewicz. John Wiley (1979).
- C.Johnson [1]. A mixed finite element method for the Navier-Stokes equations. RAIRO Analyse Numerique 12, 335-348 (1978).
- D.Kinderlherer, G.Stampacchia [1]. An introduction to variational inequalities and their applications. Academic Press (1980).
- P. le Tallec [1]. A mixed finite element approximation of the Navier-Stokes equations. Numer. Math. 35, 381-404 (1980).
- J.L.Lions [1]. Quelques methodes de resolution des problèmes aux limites non-linéaires. Dunod (1969).
- L.Moreno, A.Samartín, A.Bermúdez [1]. Aplicación del MEF al dibujo de curvas. En aplicaciones del método de los elementos finitos en ingeniería, Ed. E.Oñate, E.Alonso, M.Casteleiro, U.Pol. Barcelona (1982).
- J.T.Oden, N.Kikuchi [1]. Finite element methods for constrained problems in elasticity. Int. J. Num. Meth. Eng. Vol. 18, 701-725 (1982).
- J.T.Oden, S.J.Kim [1]. Interior penalty methods for finite element approximations of the signorini problem in elastostatics. Comp. Math. with Appl. vol. 8 nº 1 35-36 (1982).
- C.Rodríguez [1]. Resolución des problèmes de la torsion elastoplastique d'un arbre cylindrique et de l'écoulement d'un fluide de Bingham dans une conduite cylindrique. Publicación MODULEF (1984).
- C.Rodríguez [2]. Estudio de una ecuación de evolución no lineal que aparece en mecánica de fluidos. Tesis de Licenciatura. Ec. Func. y An. Num. nº 5. Santiago (1980).
- C.Rodríguez [3]. Aparecerá.
- J.M.Thomas [1] Sur l'analyse numérique des méthodes d'éléments finis hybrides et mixtes. Tesis de Estado. Universidad de Paris VI (1977).