

## ELEMENTOS FINITOS EN SUELOS DEFORMABLES

González de Cangas, José R. y Avelino Samartín Quiroga

Dres. Ingenieros de Caminos. Universidad de Santander.

1.- EL TERRENO COMO MEDIO ELASTICO

En el estudio de determinados elementos estructurales de cimentación — vigas y losas flotantes, pilotes, etc. — se han desarrollado modelos simplificados para simular el comportamiento del terreno, asimilándolo a un medio continuo y elástico. Esta idealización, claramente alejada de la realidad, ha sido y aún sigue siendo utilizada en numerosos casos en los que el grado de fiabilidad requerido no hace recomendable el recurrir a técnicas de análisis más sofisticadas y económicamente más costosas, como podría ser, por ejemplo, la discretización del conjunto "elemento estructural-terreno de cimentación" mediante elementos finitos.

Una simulación frecuente y poco refinada, pero que puede ser de gran interés en una primera aproximación, corresponde al terreno tipo Winkler(1), en el cual su efecto se idealiza mediante un conjunto continuo de resortes elásticos independientes (figura 1), lo que equivale a suponer que en cada punto el suelo reacciona proporcionalmente al desplazamiento que experimenta, denominándose al factor constante de proporcionalidad,  $k$ , coeficiente de balasto.

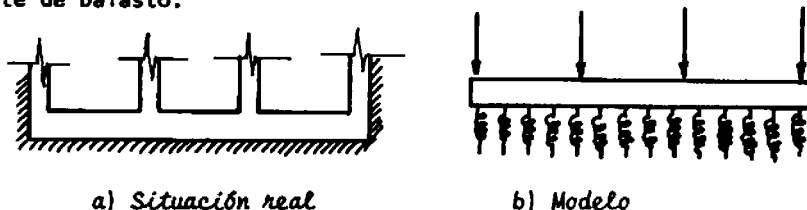


Fig. 1 - Terreno tipo Winkler

Según el tipo de análisis que se pretenda realizar, y de acuerdo con las características del medio y con el esquema resistente del elemento estructural, puede ser necesaria la consideración de diferentes coeficientes de balasto: a desplazamientos verticales, a giros de flexión, torsión, etc.

La anterior hipótesis de que el suelo se deforma únicamente bajo la zona directamente cargada resulta aceptable en diversas situaciones reales, como se comprueba a partir de los ensayos efectuados por Föppl en 1922. Dicha hipótesis se confirma formalmente para un terreno elástico e isótropo, heterogéneo, de módulo de elasticidad variable linealmente con la profundidad y valor nulo en la superficie, y cuyo coeficiente de Poisson es igual a 0,5 {2}.

Una mejor aproximación al comportamiento real del suelo consiste en considerar variable su coeficiente de balasto, bien linealmente con la longitud de la viga{3}, bien de acuerdo con una determinada función{4}:

$$k = k_0 + f(x)$$

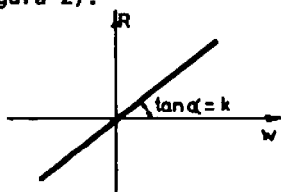
en donde  $k_0$  es el valor medio del coeficiente de balasto bajo la viga, y la función  $f(x)$  indica la variación de  $k$  respecto al valor medio, linealmente en el primer caso y no linealmente en el segundo.

Otros modelos no basados en el coeficiente de balasto son abundantes en la literatura geotécnica. A este respecto, puede verse la publicación{5}.

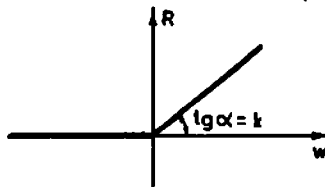
Una posibilidad más acorde con la realidad que la hipótesis de Winkler, pero, a su vez, de sencillo análisis y fácil implementación en ordenador, es el modelo "quasi-Winkler" que a continuación se desarrolla.

## 2.- VIGAS SOBRE FUNDACION ELASTICA: MODELO "QUASI-WINKLER"

En este modelo se supone que el terreno está formado por un conjunto continuo de resortes elásticos independientes, capaces de reaccionar únicamente a compresión. En otras palabras, el terreno es incapaz de soportar tracciones, por lo que reacciona en cada punto con una fuerza proporcional a la flecha del elemento estructural si éste lo comprime, y no reacciona si se despega de él (figura 2).



a) Modelo Winkler



b) Modelo "quasi-Winkler"

Fig. 2 - Leyes de comportamiento

Para el estudio de este modelo, existen diversas alternativas. Una posibilidad consiste en analizar el elemento estructural — viga, por ejemplo — de forma continua por medio de su ecuación diferencial, o mejor, a través de las ecuaciones diferenciales de los tramos de viga correspondientes a las distintas zonas de actuación (reacción) —zonas b— o no actuación (no reac-

ción) -- zonas a -- del terreno (figura 3):

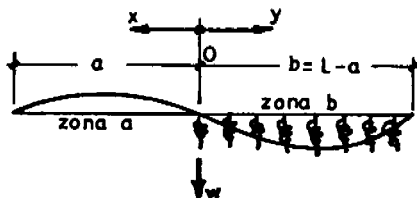


Fig. 3 - Modelo "quasi-Winkler". Zonas de actuación y no actuación del terreno.

Como ejemplo ilustrativo, se considera la viga de la figura 1-a, de inercia constante  $I$ , módulo de elasticidad  $E$  y luz  $L$ , apoyada en un medio elástico "quasi-Winkler", y sometida a la actuación de una carga arbitraria  $p(x)$  —distribuida o puntual—.

Se supone, en principio, que la ley de flechas de la viga anterior es análoga a la mostrada en la figura 3, en donde el valor del parámetro  $a$  es desconocido.

La ecuación diferencial correspondiente a la zona  $a$  es:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = p(x)$$

y tiene por solución:

$$w^a = A_1 + A_2 \frac{x}{a} + A_3 \left(\frac{x}{a}\right)^2 + A_4 \left(\frac{x}{a}\right)^3 + w_p^a(x)$$

mientras que para la zona  $b$  se verifica:

$$EI \frac{d^4 w}{dy^4} + kw = p(y)$$

cuya solución es:

$$w^b = e^{\beta y} (B_1 \cos \beta y + B_2 \sin \beta y) + e^{-\beta y} (B_3 \cos \beta y + B_4 \sin \beta y) + w_p^b(y)$$

siendo:

$A_i$ ,  $B_i$  ( $i=1,2,3,4$ ): constantes arbitrarias

$w_p^a$ ,  $w_p^b$ : soluciones particulares respectivas

$k$ : coeficiente de balasto

$$\beta^4 = \frac{k}{4EI}$$

Así pues, el número total de incógnitas del problema es de nueve:  $A_i$ ,  $B_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) y el parámetro  $a$ .

Las ecuaciones disponibles son también nueve: cuatro ecuaciones de continuidad en  $O$  ( $x=0$ ,  $y=0$ ); dos condiciones de contorno en  $x=a$  y dos en  $y=b$ , y, por último, la condición de flecha nula en el origen  $O$ .

Se observa, de inmediato, que el anterior sistema es no lineal en  $a$ , por lo cual la mayor dificultad del método estriba,

precisamente, en su resolución. A fin de evitar esta enojosa tarea, se puede suponer intuitivamente la deformada (valor del parámetro  $\alpha$ , o parámetros, según los casos) y resolver el problema lineal resultante. Posteriormente, se comprueba la bondad de la aproximación que, en los casos sencillos, será, en general, válida. Sin embargo, en algunas situaciones prácticas, pueden aparecer importantes diferencias, particularmente en las zonas en que existan cargas concentradas, o si hay momentos.

Por otra parte, puede ocurrir que la deformada prevista y la real difieran de un modo notable, en cuyo caso este método no conduciría a resultados adecuados.

A continuación, se presentan métodos numéricos alternativos que evitan algunos inconvenientes del procedimiento lineal anterior y, sobre todo, no exigen el arriesgado proceso de suposición de una deformada.

### 3.- TRATAMIENTO DEL CONJUNTO VIGA-SUELO COMO UN ENTRAMADO PLANO

Una posibilidad, útil en una primera aproximación, consiste en tratar el conjunto viga-suelo como una estructura reticulada plana, tal como se describe a continuación.

Se supone la viga sustentada en una serie de resortes elásticos, suficientemente próximos entre sí, como se representa en la figura 4. Dichos resortes se consideran barras de un entra-

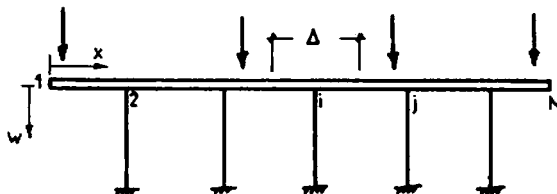


Fig. 4 - Entramado plano equivalente

mado plano, con inercia nula ( $I=0$ ) y una rigidez ante el esfuerzo axial igual, en principio, para todos los resortes, de valor

$$\frac{E^* \Omega}{L^*} = k \Delta$$

en donde  $L^*$  es la longitud ficticia de cada resorte;  $E^*$  su módulo de elasticidad y  $\Omega$ , el área de su sección transversal.

Se calcula el entramado anterior bajo las cargas  $p(x)$ , deduciéndose los desplazamientos verticales  $w_n$  en los nudos  $n$  ( $n=1, 2, \dots, i, \dots, j, \dots, N$ ). En aquellos nudos  $n$  en que  $w_n > 0$ , se sigue manteniendo, para el resorte correspondiente a dichos puntos, la rigidez  $E^* \Omega / L^*$  adoptada. Si  $w_n < 0$ , en el resorte en cuestión se hace  $E^* \Omega / L^* = 0$  y se repite el cálculo del entramado, bajo las mismas cargas, iterando el proceso, hasta alcanzar la aproximación deseada.

Este método presenta, entre otras, la ventaja de permitir

la utilización de programas generales de cálculo matricial de estructuras de barras. Adolece, sin embargo, del defecto de exigir un elevado número de nudos, con objeto de simular adecuadamente la acción continua del suelo sobre la estructura.

Es posible evitar esta excesiva discretización incorporando a la propia viga elemental  $i-j$  (figura 4) la acción del terreno, es decir, determinando la matriz de rigidez y vector de cargas equivalentes de una viga sobre fundación elástica "quasi-Winkler", según se describe seguidamente.

#### 4.- METODO MATRICIAL ITERATIVO

##### 4.1.- Matrices de rigidez elementales. Solución exacta

Por motivos que se hacen evidentes al final de este apartado, se estudia a continuación una viga elemental con una zona parcial de actuación del terreno (figura 5). Se consideran los

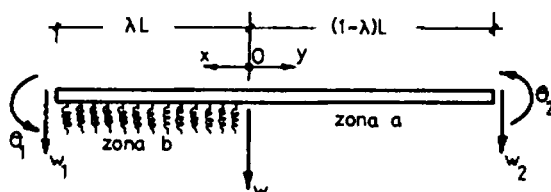


Fig. 5 - Viga elemental. Ejes y grados de libertad

ejes y grados de libertad que se muestran en la citada figura.

La ecuación diferencial correspondiente a la zona b es:

$$EI \frac{d^4 w^b}{dx^4} + kw^b = 0$$

cuya solución es

$$w^b = e^{\beta x} (B_1 \cos \beta x + B_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (B_3 \cos \beta x + B_4 \sin \beta x)$$

en donde  $\beta$  ya ha sido definido, y  $B_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) son constantes arbitrarias.

Para la zona a se tiene:

$$EI \frac{d^4 w^a}{dy^4} = 0$$

que proporciona la solución

$$w^a = A_1 + A_2 \left(\frac{y}{\alpha}\right) + A_3 \left(\frac{y}{\alpha}\right)^2 + A_4 \left(\frac{y}{\alpha}\right)^3$$

con  $\alpha = (1 - \lambda)L$ , y  $A_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) constantes arbitrarias.

Las condiciones de continuidad en  $x=0$ ,  $y=0$ , conducen a una relación del tipo:

$$\{A_{\dot{x}_i}\} = (T_{\dot{x}_j}) \cdot \{B_j\} \quad (1-a)$$

con  $i, j = 1, 2, 3, 4$

o, más abreviadamente

$$A = T \cdot B \quad (1-b)$$

Asimismo, si se establecen las condiciones de contorno cinemáticas y estáticas para  $x = \lambda L$  e  $y = (1-\lambda)L$ , y se tiene en cuenta la relación (1-b) anterior, se deduce:

$$d = G_d \cdot B \quad (2)$$

$$p = G_p \cdot B \quad (3)$$

siendo

$$d^T = (w_1, \frac{\theta_1}{\beta}, w_2, \frac{\theta_2}{\beta}) \text{ los movimientos nodales}$$

$$p^T = (Q_1, BM_1, Q_2, BM_2) \text{ las fuerzas eficaces}$$

$$B^T = (B_1, B_2, B_3, B_4) \text{ matriz de constantes arbitrarias}$$

$G_p$  y  $G_d$ , sendas matrices cuadradas, de dimensión  $4 \times 4$ , cuyos términos dependen del parámetro  $\lambda$  y de funciones trigonométricas y exponenciales del mismo.

Si se eliminan las constantes  $B$  entre las ecuaciones (2) y (3), se obtiene la matriz de rigidez elemental como sigue:

$$k^e = G_p \cdot G_d^{-1} \quad (4)$$

Mediante un proceso análogo, se determinan, de forma sencilla, las cargas nodales equivalentes a una acción genérica.

#### 4.2.- Matrices de rigidez elementales. Método de los elementos finitos

En el planteamiento exacto anterior, se observa la necesidad de realizar la inversión de la matriz  $G_d$ , a fin de poder hallar la matriz elemental  $k^e$  y las cargas equivalentes en los nudos. Si bien dicha inversión puede ser llevada a cabo en el computador, es preferible disponer de la matriz  $k^e$  en forma explícita, por el ahorro computacional que ello supone. Por ese motivo, es conveniente calcular  $G_d^{-1}$  manualmente en forma algebraica.

Un modo de obviar este trabajo adicional de inversión de  $G_d$  consiste en recurrir al método de los elementos finitos, según se detalla a continuación.

Sea el elemento viga de la figura 5, en el que, ahora, se toma como origen de abscisas  $x$  el extremo 1. Se define la flecha  $w(x)$  mediante la expresión

$$w(x) = \{ N_1, N_2, N_3, N_4 \} \cdot \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = N \cdot d$$

en donde las funciones de forma (polinomios de Hermite) son las que siguen:

$$N_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3; N_2 = -\xi(1-\xi)^2 L; N_3 = 3\xi^2 - 2\xi^3; N_4 = \xi^2(1-\xi)L \quad \text{y} \quad \xi = \frac{x}{L}$$

Mediante técnicas convencionales del método de los elementos finitos, se deduce:

- Matriz de rigidez elemental:

$$k^e = (k_{ij}) = \int_0^{\lambda L} B^T \cdot D \cdot B \cdot dx + k \cdot \int_0^{\lambda L} N^T \cdot N \cdot dx \quad (*) \quad (5)$$

- Cargas equivalentes en los nudos:

$$q = \int_0^L N^T \cdot p(x) \cdot dx \quad (6)$$

siendo

$$B = -\frac{1}{L^2} \{ 6(-1+2\xi), (4-6\xi)L, 6(1-2\xi), (2-6\xi)L \} \quad \text{y} \quad D = EI$$

Operando en (5), se obtiene:

$$k_{11} = \frac{12EI}{L^3} + kL\lambda(1-2\lambda^2+\lambda^3) + \frac{9}{5}\lambda^4 - 2\lambda^5 + \frac{4}{7}\lambda^6$$

$$k_{12} = -\frac{6EI}{L^2} - kL^2\lambda(1-\frac{2}{3}\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda^3) + \frac{8}{5}\lambda^4 - \frac{7}{6}\lambda^5 + \frac{2}{7}\lambda^6$$

$$k_{13} = -\frac{12EI}{L^3} + kL\lambda^3(1-\frac{1}{2}\lambda - \frac{9}{5}\lambda^2 + 2\lambda^3 - \frac{4}{7}\lambda^4)$$

$$k_{14} = -\frac{6EI}{L^2} + kL^2\lambda^3(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\lambda - \frac{3}{5}\lambda^2 + \frac{5}{6}\lambda^3 - \frac{2}{7}\lambda^4)$$

$$k_{22} = \frac{4EI}{L} + kL^3\lambda^3(\frac{1}{3} - \lambda + \frac{6}{5}\lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda^3 + \frac{1}{7}\lambda^4)$$

$$k_{23} = \frac{6EI}{L^2} - kL^2\lambda^4(\frac{3}{4} - \frac{8}{5}\lambda + \frac{7}{6}\lambda^2 - \frac{2}{7}\lambda^3)$$

$$k_{33} = \frac{12EI}{L^3} + kL\lambda^5(\frac{9}{5} - 2\lambda + \frac{4}{7}\lambda^2)$$

$$k_{34} = \frac{6EI}{L^2} + kL^2\lambda^5(\frac{3}{5} - \frac{5}{6}\lambda + \frac{2}{7}\lambda^2)$$

---

(\*) Se está suponiendo que el coeficiente de balasto,  $k$ , es constante. La consideración de que sea variable,  $k(x)$ , se lleva a cabo introduciéndolo bajo el símbolo integral.

$$k_{44} = \frac{4EI}{L} + kL^3\lambda^5 \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{3\lambda} + \frac{1}{7\lambda^2} \right) \quad (7)$$

Las cargas equivalentes en los nudos, en el supuesto de  $p(x) = p = \text{constante}$ , son

$$q = pL \begin{pmatrix} 1/2 \\ -L/12 \\ 1/2 \\ L/12 \end{pmatrix} \quad (8)$$

4.3.- Esquema del proceso de cálculo

En el cálculo se emplea un procedimiento iterativo, siguiendo las etapas que se describen a continuación:

- a) Se supone que en todas las vigas elementales (figura 5) existe reacción de Winkler, independientemente del sentido de las flechas. Las matrices de rigidez que se consideran son las obtenidas en (7), para el caso particular de  $\lambda=1$ .
- b) Mediante técnicas convencionales de cálculo matricial de estructuras, se procede al ensamblaje de la matriz de rigidez global de la viga (figura 6), deduciéndose:

$$K^{(1)} = \begin{pmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{12}^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{21}^2 & k_{22}^2 + k_{11}^3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_{21}^{N-2} & k_{22}^{N-2} + k_{11}^{N-1} & k_{12}^{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & k_{21}^{N-1} & k_{22}^{N-1} \end{pmatrix}$$



Fig. 6 - Discretización de la viga en elementos finitos

Se observa la configuración en banda de la matriz anterior, debido, precisamente, a la hipótesis de Winkler. En caso de suponer que los resortes no son independientes, la matriz sería



llena.

- c) Se procede al ensamblaje de las cargas nodales equivalentes, alcanzándose, finalmente, la conocida expresión

$$P^{(1)} = K^{(1)} \cdot D^{(1)}$$

a partir de la cual, una vez introducidas las condiciones de contorno, se hallan los movimientos  $d_i$  en los nudos ( $i=1, 2, \dots, N$ ) siendo

$$d_i^{(1)} = \begin{Bmatrix} w_i^{(1)} \\ \theta_i^{(1)} \end{Bmatrix}$$

- d) Conocidos los valores de las flechas  $w_i^{(1)}$  anteriores, en cada viga elemental se pueden presentar las  $w_i^{(1)}$  situaciones representadas en la figura 7. El caso a) corresponde a  $\lambda=1$  y el b) a

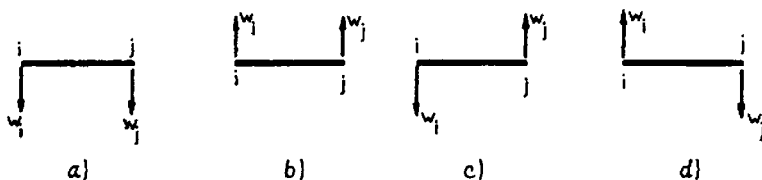


Fig. 7 - Posibilidades de desplazamientos en una viga elemental

$\lambda=0$ , por lo que no son más que casos particulares del general, ya analizado en los apartados anteriores. El caso c) es el caso general, con una zona b de actuación del terreno y otra a de no actuación (figura 5); el valor del parámetro  $\lambda$  se determina como sigue

$$\lambda^{(1)} = \frac{|w_i^{(1)}|}{|w_i^{(1)}| + |w_j^{(1)}|} \quad (*)$$

El caso d) se deduce a partir del c) mediante el oportuno cambio de ejes. Así, para la matriz de rigidez elemental, se tiene:

$$k_{ii}^d = k_{ii}^c; \quad k_{ij}^d = k_{ij}^c, \quad \text{si } i+j = 2; \quad k_{ij}^d = -k_{ij}^c, \quad \text{si } i+j = 2+1$$

En lo que se refiere a las fuerzas nodales, para el caso d), son iguales a las del caso c) en fuerzas, y contrarias en momentos.

- e) Se modifican las matrices de rigidez elementales, de acuerdo con las ideas explicadas en el paso anterior, y se procede, de nuevo, al ensamblaje de la matriz de rigidez global y vector

(\*) Esta fórmula supone una distribución lineal de flechas entre los extremos de la viga elemental, aproximación que resulta suficiente para los propósitos prácticos del método. Evidentemente, pueden ser utilizadas otras aproximaciones e incluso hallar la ley de flechas exacta.

de cargas nodales, planteándose un nuevo sistema

$$P^{(2)} = K^{(2)} \cdot D^{(2)}$$

que proporciona los valores de otras flechas,  $w_i^{(2)}$ , a partir de las cuales se obtienen unos nuevos parámetros  $\lambda_i^{(2)}$ , que modifican las matrices de rigidez elementales en la forma ya descrita.

- f) Se repite el proceso hasta alcanzar la aproximación deseada. Un posible criterio es el que sigue:

Si se denomina por  $\lambda_i^{(n)}$  al valor del parámetro  $\lambda$  correspondiente a una viga  $i$  genérica, y  $n$  es el número de la iteración en la resolución del sistema  $P = K \cdot D$ , en el programa de computador se puede introducir una cota de error,  $\epsilon$ , de modo que el cálculo se da por finalizado cuando se verifique

$$\text{máx } |\lambda_i^{(n)} - \lambda_i^{(n-1)}| < \epsilon$$

o bien

$$\sum_i |\lambda_i^{(n)} - \lambda_i^{(n-1)}|^2 < \epsilon$$

siendo

$$i = 1, 2, \dots, \text{número de vigas}$$

## 5.- EXTENSION A PROBLEMAS BIDIMENSIONALES: LOSAS DE CIMENTACION

La extensión de las ideas anteriores a problemas prácticos bidimensionales, tales como losas de cimentación (figura 8), es inmediata. Aquí, la utilización del método de los elementos finitos resulta ineludible.

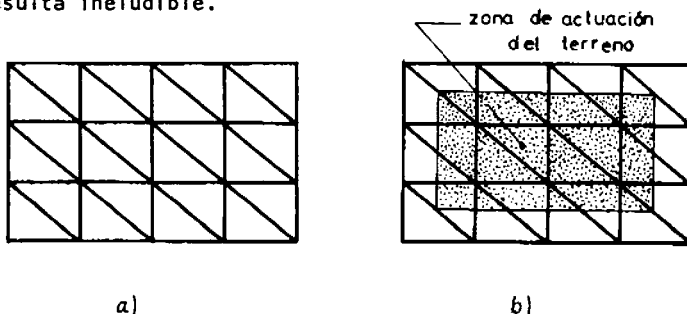


Fig. 8 - Modelo "quasi-Winkler" en problemas bidimensionales

Al igual que en el caso monodimensional, es preciso definir la matriz de rigidez de un elemento con una zona parcial de actuación del terreno, como corresponde al modelo "quasi-Winkler".

El procedimiento que se describe a continuación, en el que se consideran únicamente elementos triangulares de flexión,

es totalmente general, no dependiendo del tipo de elemento  $C^1$  que se elija.

Sea el elemento triangular representado en la figura 9-a:

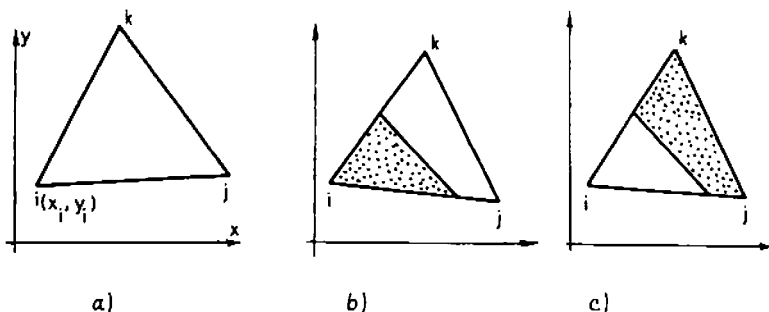


Fig. 9 - Modelo "quasi-Winkler". Elementos triangulares

Si se denomina por  $w_i$  a la flecha del nudo  $i$ , positiva cuando comprime el terreno, las situaciones que se pueden presentar son:

- 1)  $w_i > 0$  ;  $w_j < 0$  y  $w_k < 0$  ( $i, j, k = 1, 2, 3$ )
- 2)  $w_i < 0$  ;  $w_j > 0$  y  $w_k > 0$

La situación 1) se representa en la figura 9-b, mientras que la situación 2) es la indicada en la figura 9-c.

Conocidas las flechas en los tres nodos del elemento:  $w_i$ ,  $w_j$  y  $w_k$ , y suponiendo que en el elemento la ley de flechas se distribuye según un plano(\*), la ecuación de éste es:

$$\begin{vmatrix} x & y & w & 1 \\ x_i & y_i & w_i & 1 \\ x_j & y_j & w_j & 1 \\ x_k & y_k & w_k & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

cuya intersección con el plano del elemento proporciona la ecuación de la recta que sirve de separación a las zonas de actuación y no actuación del terreno (figuras 9-b y 9-c).

Si se considera que en el elemento triangular se cumplen las relaciones siguientes:

$$x = \sum_{\delta} x_{\delta} L_{\delta} ; y = \sum_{\delta} y_{\delta} L_{\delta} ; 1 = \sum_{\delta} L_{\delta} \quad (\delta = i, j, k)$$

[\*] Esta hipótesis resulta aceptable desde el punto de vista práctico siempre y cuando el tamaño de los elementos no sea excesivamente grande. El considerar otro tipo de interpolación o la ley exacta de flechas complica extraordinariamente el proceso

siendo  $L_\delta$  las coordenadas triangulares, y se sustituyen dichas relaciones en (9), la ecuación de la antedicha recta de intersección se halla haciendo  $w = 0$ , y resulta ser:

$$\sum_{\delta} m_{\delta} L_{\delta} = 0 \quad (\delta = i, j, k) \tag{10}$$

con

$$m_{\delta} = \begin{vmatrix} y_i & w_i & 1 \\ y_j & w_j & 1 \\ y_k & w_k & 1 \end{vmatrix} x_{\delta} - \begin{vmatrix} x_i & w_i & 1 \\ x_j & w_j & 1 \\ x_k & w_k & 1 \end{vmatrix} y_{\delta} - \begin{vmatrix} x_i & y_i & w_i \\ x_j & y_j & w_j \\ x_k & y_k & w_k \end{vmatrix}$$

Los puntos de corte de la recta definida por (10) con los lados del elemento (figura 10) se determinan haciendo en dicha ecuación (10)  $L_j = 0$  y  $L_k = 0$ . Las coordenadas cartesianas resultantes para esos puntos son:

$$x_{ij} = x_i + \frac{m_i}{m_i - m_j} (x_j - x_i) ; y_{ij} = y_i + \frac{m_i}{m_i - m_j} (y_j - y_i)$$

$$x_{ik} = x_i + \frac{m_i}{m_i - m_k} (x_k - x_i) ; y_{ik} = y_i + \frac{m_i}{m_i - m_k} (y_k - y_i)$$

con  $i, j, k = 1, 2, 3$  (\*)

Los nudos que definen el dominio de actuación del terreno tienen, pues, las siguientes coordenadas cartesianas:

$$x'_i = x_i ; y'_i = y_i$$

$$x'_j = x_{ij} ; y'_j = y_{ij}$$

$$x'_k = x_{ik} ; y'_k = y_{ik}$$

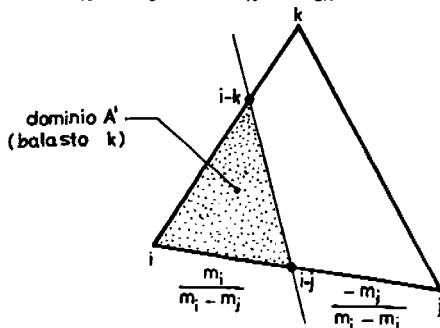


Fig. 10 - Definición del dominio de actuación del terreno

(\*) Sólo es necesario definir un caso, por ejemplo  $i=1; j=2; k=3$ . Cualquier otro caso se obtiene fácilmente a partir del anterior, mediante permutación circular de los índices.

Así pues, la matriz de rigidez elemental de un elemento genérico, con un dominio  $A'$  de actuación del terreno, de coeficiente de balasto  $k$ , en general variable, es, para  $w_i > 0$  (figura 10):

$$k^e = \int_A B^T \cdot D \cdot B \cdot dA + \int_{A'} k \cdot N^T \cdot N \cdot dA \quad (11)$$

en donde las funciones de forma que intervienen en la segunda integral están referidas a las coordenadas triangulares del dominio global  $A$ , es decir:

$$L_\delta = a_\delta x + b_\delta y + c_\delta$$

Con objeto de facilitar el proceso de integración numérica, es conveniente referir la segunda integral a las coordenadas triangulares del dominio  $A'$ . Si se denomina por  $L'_i$  a dichas coordenadas, y se hace uso de las igualdades:

$$x = \sum_{\delta} x'_\delta L'_\delta; \quad y = \sum_{\delta} y'_\delta L'_\delta; \quad 1 = \sum_{\delta} L'_\delta \quad (\delta = i, j, k)$$

se deduce

$$L'_\delta = \sum_{x=1}^3 (a_\delta x'_x + b_\delta y'_x + c_\delta) L'_x \quad (\delta = i, j, k)$$

que permiten transformar

$$\int_{A'} k \cdot N^T \cdot N \cdot |J| \cdot dA'$$

a las nuevas coordenadas  $L'_\delta$ , simplificando el proceso de integración numérica.

$|J|$  representa el jacobiano de la transformación.

En el desarrollo anterior, se ha supuesto que se verifica:  $w_i > 0$ ;  $w_j, w_k < 0$  (figura 9-b). Para el caso en que se cumple:  $w_i < 0$ ;  $w_j, w_k > 0$  (figura 9-c), se tiene:

$$k^e = \int_A B^T \cdot D \cdot B \cdot dA + \int_A k \cdot N^T \cdot N \cdot dA - \int_{A'} k \cdot N^T \cdot N \cdot |J| \cdot dA' \quad (12)$$

y el procedimiento a seguir es totalmente análogo.

En suma, se ha determinado la matriz de rigidez del elemento triangular con una zona parcial de actuación del terreno, según fórmulas totalmente generales, en las que el tipo de elemento considerado se manifiesta únicamente a través de sus funciones de forma.

El esquema del proceso de cálculo es, al igual que en el caso de elementos monodimensionales, iterativo, según se describe a continuación:

1 - Inicialmente, se parte de una situación en la que para todos los elementos se supone que el terreno actúa en el dominio to

tal (figura 8-a), es decir, para todos ellos la matriz de rigidez elemental es:

$$k^e = \int_A B^T \cdot D \cdot B \cdot dA + \int_A k \cdot N^T \cdot N \cdot dA \quad (13)$$

- 2 - Se realiza un cálculo convencional, mediante el método de los elementos finitos, determinando, en cada nodo  $n$ , su flecha  $w_n^{(1)}$ . Así, para cada elemento se conocen

$$w_i^{(1)}, w_j^{(1)}, w_k^{(1)} \quad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

- 3 - Las situaciones que se pueden presentar son:

a)  $w_i^{(1)} > 0 \quad (i = 1, 2, 3)$

b)  $w_i^{(1)} < 0 \quad (i = 1, 2, 3)$

c)  $w_i^{(1)} > 0$ ;  $w_j^{(1)}, w_k^{(1)} < 0 \quad (i, j, k = 1, 2, 3)$

d)  $w_i^{(1)} < 0$ ;  $w_j^{(1)}, w_k^{(1)} > 0 \quad (i, j, k = 1, 2, 3)$

En el caso a) la matriz de rigidez del elemento sigue siendo la obtenida según (13). Para la situación b) se calcula la nueva matriz de rigidez con  $k=0$ . El caso c) exige la modificación de la matriz de rigidez elemental según (11), y en el d) se modifica de acuerdo con la fórmula (12).

- 4 - Una vez definidas las nuevas matrices de rigidez, se realiza un nuevo cálculo en el que se hallan las flechas nodales  $w_n^{(2)}$  y se itera el proceso.
- 5 - El análisis finaliza cuando, establecido un criterio de error, la aproximación se considera adecuada. Un posible criterio es el siguiente:

$$\sum_n \{ w_n^{(p)} - w_n^{(p-1)} \}^2 < \epsilon$$

en donde  $w_n^{(p)}$  representa la flecha del nodo  $n$  en la iteración  $p$  y  $\epsilon$  es una cota de error prefijada.

REFERENCIAS

- {1} WINKLER, E. "Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit". 1867.
- {2} GIBSON, R.E. "Some results concerning displacements and stresses in a non-homogeneous elastic half-space". Géotechnique, 17. 1967.
- {3} TERZAGHI, K. "Evaluation of coefficients of subgrade reaction". Géotechnique, vol. 5. 1965.
- {4} SOBOLEV, D.N. " Métodos prácticos para la determinación de los esfuerzos de cálculo en edificios prefabricados por paneles sobre una base heterogénea". Editorial de la Construcción. 1963.
- {5} SANTOS MIRON, J. "Interacción estática suelo-estructura. Modelos de suelos empleados". Revista de Obras Públicas, n° 3178. Febrero-marzo. 1980.