

A. Samartín y J. R. González de Cangas
Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos

**“Una expresión simplificada de la
matriz de rigidez de la
barra prismática de directriz circular”.**

Artículo publicado en el n.º 133
de la revista Hormigón y Acero.

4.º trimestre 1979.

Depósito legal: M. Sep. 853-1958

“Una expresión simplificada de la matriz de rigidez de la barra prismática de directriz circular”.

A. Samartín y J. R. González de Cangas
Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos

Introducción

1. En el cálculo de estructuras de barras, es frecuente la aparición de elementos estructurales de directriz curva. Se suelen simular estas situaciones, mediante la introducción de nudos intermedios “extra” y sustitución de los trozos de arco que resultan por barras rectas prismáticas (figura 1).
2. De este modo, mediante un único programa de cálculo matricial en desplazamientos de barras rectas y prismáticas, se pueden tratar estructuras de barras más generales –(variación de la sección, directriz curva etc ...)
3. Los inconvenientes que aparecen en este tratamiento estructural son obvios: Incremento del coste de cálculo al aumentar el número de nudos y aproximación en los resultados producida por la sustitución de la directriz curva de la barra por una poligonal inscrita. Este último aspecto implica, por una parte, la necesidad de introducir las car-

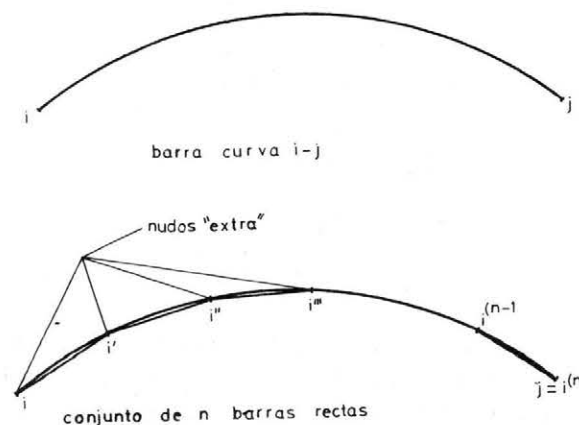


Fig. 1.

gas actuantes en las barras, de modo consistente a los nudos extra (en general isostáticamente) y por otra, la especial atención que debe tenerse en el proceso de interpretación de los resultados. En este contexto, la publicación (1) es instructiva.

4. Los anteriores inconvenientes pueden evitarse fácilmente, mediante la determinación de la matriz de rigidez y el vector solución inicial (empotramiento total en sus dos extremos) de la barra curva, ya que el método de cálculo matricial en desplazamientos, una vez conocidos estos dos conjuntos de datos, permite su tratamiento de un modo automático, sin distinción del tipo de geometría de la directriz. Es decir, un programa de cálculo por computador de estructuras de barras, basado en el método del equilibrio de los desplazamientos, permite, con un esfuerzo adicional de programación insignificante, la inclusión de cualquier tipo de barras curvas.
5. La afirmación anterior se corrobora al observar cómo programas de cálculo de barras escritos incluso en fecha no reciente, como el STRESS (2), permiten la introducción de matrices de rigidez arbitrarias y por lo tanto el tratamiento directo de barras de directriz curva y variación arbitraria de sección. La sentencia de entrada de datos es, para este programa, la cabecera STIFFNESS GIVEN, seguida de los coeficientes de la matriz de rigidez natural del elemento.
6. De los comentarios anteriores se deduce la importancia de la determinación de las matrices de rigidez de barras curvas que aparecen frecuentemente en la práctica.

Como es bien conocido, existe una técnica general de cálculo de estas matrices de rigidez para una barra o elemento bidimensional arbitrario, que puede verse por ejemplo en (3).

En esencia, en esta técnica se coaccionan "a" grados de libertad del elemento barra, de modo que se constituye en estructura isostática, es decir, se eliminan los movimientos de sólido rígido. En los restantes "b" grados de libertad, se determina, mediante un teorema energético (Castigliano), la matriz de flexibilidad F , que relaciona los desplazamientos e_b que aparecen en los "b" grados de libertad, cuando en la barra sustentada isostáticamente se le aplican las fuerzas s_b según los "b" grados de libertad, es decir:

$$e_b = F s_b$$

Se puede mostrar que, en general, la matriz de rigidez de la barra particionada según los "a" y "b" grados de libertad es:

$$\begin{bmatrix} p_a \\ p_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{aa} & k_{ab} \\ k_{ba} & k_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_a \\ d_b \end{bmatrix}$$

con:

$$\begin{aligned} k_{bb} &= F^{-1} \\ k_{ab} &= k_{ba}^T = -H F^{-1} \\ k_{aa} &= H F^{-1} H^T \end{aligned} \quad [1]$$

siendo H la matriz de equilibrio de la barra sustentada isostáticamente en los "a" grados de libertad, es decir, que relaciona las acciones s_b con las reacciones r_a en las coacciones "a". En términos matriciales H se define como sigue:

$$r_a + H s_b = 0$$

Normalmente, los "a" grados de libertad se eligen como todos los grados de libertad que aparecen en el extremo 1 de la barra, resultando un voladizo como estructura isostática básica y la partición de la matriz de rigidez corresponde a la clásica por nudos: 1 y 2.

7. En este artículo se presenta una formulación simplificada de la matriz de rigidez de una barra de sección constante y directriz circular. Se espera, con ello, reducir el esfuerzo de programación y cálculo que puede implicar la inversión de las matrices de flexibilidad. Se ha adoptado la barra de directriz circular en este estudio, por ser más frecuente y ya que permite simular barras de otro tipo de directriz, mediante la introducción de nudos extra y un conjunto de barras circulares con radios correspondientes a los de curvatura medios de cada trozo de barra entre nudos consecutivos. Indudablemente, esta sustitución de la barra real de directriz arbitraria puede ser simulada adecuadamente con un número más reducido de barras curvas circulares que en el caso de considerar únicamente barras rectas.
8. Una barra arbitraria en el espacio representa, en general, seis grados de libertad en cada nudo extremo. Estos corresponden, en movimientos, a los tres desplazamientos y los tres giros.

Se supone, en lo que sigue, que la teoría elástica y lineal de elementos monodimensionales es aplicable. La sección transversal de la barra tiene un eje principal de inercia contenido en el plano de la directriz circular y el eje de gravedad y de esfuerzos cortantes coinciden. Por otra parte, se supone que la máxima dimensión de esta sección transversal es pequeña en comparación con la longitud del arco y es posible despreciar la deformación producida por el esfuerzo cortante. Con estas consideraciones, se pueden adoptar en cada extremo de la barra los ejes de referencia de los seis grados de libertad, según el sistema intrínseco de Frenet, es decir: tangente: (1), normal principal: (2) y binormal: (3). Los ejes (2) y (3) coinciden con los ejes principales de inercia de la sección.

9. En las hipótesis anteriores, la matriz de rigidez k de la barra puede ponerse en la siguiente forma particionada:

$$\begin{bmatrix} p_a \\ p_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{aa} & 0 \\ 0 & k_{ee} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_a \\ d_e \end{bmatrix} \quad [2]$$

en donde:

p_a y d_a corresponden a las fuerzas y movimientos del comportamiento arco, y

p_e y d_e son vectores análogos a los anteriores pero con referencia al trabajo como emparrillado (figura 2).

En forma explícita se definen: $p_a = \begin{bmatrix} p_{a1} \\ p_{a2} \end{bmatrix}$ $d_a = \begin{bmatrix} d_{a1} \\ d_{a2} \end{bmatrix}$

con $p_{ai} = \begin{bmatrix} m_{ti} \\ m_{fi} \\ q_i \end{bmatrix}$ $d_{ai} = \begin{bmatrix} \theta_{ti} \\ \theta_{fi} \\ w_i \end{bmatrix}$

$$p_e = \begin{bmatrix} p_{e1} \\ p_{e2} \end{bmatrix} \quad d_e = \begin{bmatrix} d_{e1} \\ d_{e2} \end{bmatrix}$$

$$\text{con } p_{ei} = \begin{bmatrix} m_i \\ \gamma_i \\ m_i \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad d_{ei} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2)$$

La ecuación (2) implica el hecho bien conocido de la teoría elemental de elementos monodimensionales, referente al no acoplamiento o interacción entre los dos tipos de trabajos estructurales de una barra plana, emparrillado y entramado (arco).

10. A continuación se determinan cada una de las submatrices de rigidez k_{aa} y k_{bb} , en función de un número reducido de funciones del ángulo α_0 subtendido por el arco y

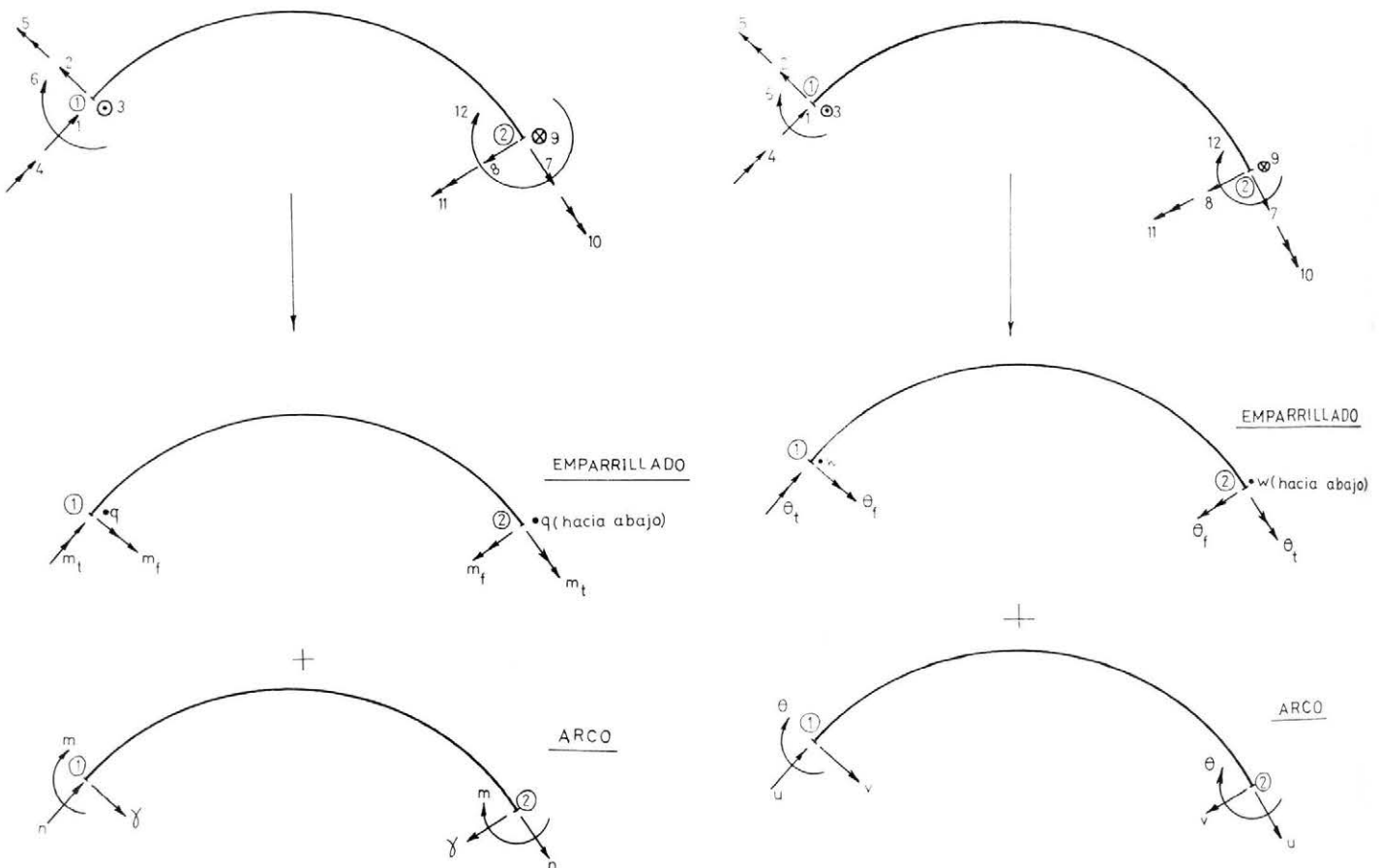


Fig. 2. a) Fuerzas.

Fig. 2. b) Movimientos.

expresando explícitamente los términos de rigidez-torsión, extensión y flexión de la sección transversal del arco.

Estructura emparrillado (viga balcón circular)

11. Se supone la barra de directriz circular de radio R y sección constante de las siguientes características:

E módulo de elasticidad

$$G \text{ módulo de torsión} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

ν coeficiente de Poisson

I inercia a flexión normal al plano de la barra de la sección transversal

J inercia de torsión de la sección transversal

Se supone que $\frac{1}{GA_0} = 0$, con A_0 el área reducida de cortante.

12. Siguiendo el procedimiento general de cálculo, se supone el extremo 1 de la barra empotrado y en el extremo 2 actuando el vector fuerza

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_t \\ m_f \\ q' \end{bmatrix}$$

con $q' = q \cdot R$

Para la determinación del vector movimiento en el extremo 2, definido como:

$$d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_t \\ \theta_f \\ w' \end{bmatrix}$$

con $w' = \frac{w}{R}$

se utiliza el teorema de Castigliano

$$d = \frac{\partial E}{\partial p} \quad [3]$$

$$\text{o bien} \quad d_i = \frac{\partial E}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad [3a]$$

con $E = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha_0} M_F^2 \frac{R d\alpha}{EI} + \frac{1}{2} \int_0^{\alpha_0} M_T^2 \frac{R d\alpha}{GJ}$ la energía complementaria elástica

de deformación de la barra.

M_F y M_T los momentos flector y torsor en una sección genérica α ($0 \leq \alpha \leq \alpha_0$), cuya expresión es:

$$M_F = m_t \operatorname{sen}(\alpha_0 - \alpha) + m_f \cos(\alpha_0 - \alpha) - q' \operatorname{sen}(\alpha_0 - \alpha)$$

$$M_T = m_t \cos(\alpha_0 - \alpha) - m_f \operatorname{sen}(\alpha_0 - \alpha) + q' [1 - \cos(\alpha_0 - \alpha)]$$

La expresión (3) o bien (3a), dado el carácter de forma cuadrática de E, puede escribirse como sigue:

$$d_i = \frac{\partial E}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^3 f_{ij} p_j$$

$$\text{con } f_{ij} = \frac{\partial^2 E}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{R}{EI} \int_0^{\alpha_0} \frac{\partial^2 M_F}{\partial p_i \partial p_j} d\alpha + \frac{R}{GJ} \int_0^{\alpha_0} \frac{\partial^2 M_T}{\partial p_i \partial p_j} d\alpha \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

La matriz $F = \{f_{ij}\}$ constituye la matriz de flexibilidad de la estructura de la figura (3) y puede ponerse en la forma:

$$F = \frac{R}{GJ} F^{(1)} + \frac{R}{EI} F^{(2)}$$

con:

$$F^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{20} & -a_{11} & a_{10} - a_{20} \\ -a_{11} & a_{02} & -a_{01} + a_{11} \\ a_{10} - a_{20} & -a_{01} + a_{11} & a_{00} - 2a_{10} + a_{20} \end{bmatrix}$$

$$F^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{02} & a_{11} & -a_{02} \\ a_{11} & a_{20} & -a_{11} \\ -a_{02} & -a_{11} & a_{02} \end{bmatrix}$$

siendo:

$$a_{ij} = \int_0^{\alpha_0} \cos^i \alpha \operatorname{sen}^j \alpha d\alpha$$

en particular:

$$a_{00} = \alpha_0$$

$$a_{10} = \operatorname{sen} \alpha_0$$

$$a_{01} = 1 - \cos \alpha_0$$

$$a_{20} = \frac{1}{2} (\alpha_0 + \operatorname{sen} \alpha_0 \cdot \cos \alpha_0)$$

$$a_{02} = \frac{1}{2} (\alpha_0 - \operatorname{sen} \alpha_0 \cdot \cos \alpha_0)$$

$$a_{11} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha_0}{2}$$

13. Con objeto de obtener una expresión simplificada de la inversa de la matriz F de flexibilidad, es conveniente resolver el siguiente problema de autovalores λ y autovectores q :

$$[F^{(2)} - \lambda F^{(1)}] q = 0 \quad [4]$$

La solución de [4] es:

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = \frac{\varphi + s}{\varphi - s} \quad \lambda_3 = \frac{\varphi(\varphi - s)}{\varphi(\varphi + s) - \varphi(1 - c)}$$

$$q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad q_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1+c}{s} \\ 0 \end{bmatrix} \quad q_3 = \begin{bmatrix} \frac{\varphi s}{1-c} - 2 \\ -\varphi \\ -2 \end{bmatrix}$$

con $\varphi = \alpha_0$, $s = \text{sen } \alpha_0$ y $c = \text{cos } \alpha_0$

Si $Q = (q_1, q_2, q_3)$ entonces se pueden obtener las matrices diagonales $D^{(1)}$ y $D^{(2)}$ siguientes:

$$Q^T F^{(1)} Q = D^{(1)}$$

$$Q^T F^{(2)} Q = D^{(2)}$$

con $D^{(1)} = \text{diag} \left[\varphi, \frac{(1+c)}{s^2} (\varphi - s), \varphi \frac{[\varphi(\varphi + s) - 4(1-c)]}{1-c} \right]$

$$D^{(2)} = \text{diag} \left[0, \frac{(1+c)}{s^2} (\varphi + s), \frac{\varphi^2 (\varphi - s)}{1-c} \right]$$

14. A partir de los resultados del apartado anterior, la matriz inversa de la flexibilidad se obtiene inmediatamente, como sigue:
sea

$$F = \frac{R}{GJ} F^{(1)} + \frac{R}{EI} F^{(2)}$$

entonces:

$$Q^T F Q = \frac{R}{GJ} D^{(1)} + \frac{R}{EI} D^{(2)} = D = \text{diag} (\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1}, \mu_3^{-1})$$

y por lo tanto:

$$F^{-1} = Q D^{-1} Q^T = (q_1, q_2, q_3) \text{diag} (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \begin{bmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ q_3^T \end{bmatrix}$$

con:

$$\mu_1 = \frac{1}{\frac{\varphi R}{GJ}}, \quad \mu_2 = \frac{1}{\frac{1+c}{s^2}(\varphi-s)\frac{R}{GJ} + \frac{1+c}{s^2}(\varphi+s)\frac{R}{EI}}$$

$$\mu_3 = \frac{1}{\frac{\varphi[\varphi(\varphi+s)-4(1-c)]}{1-c}\frac{R}{GJ} + \frac{\varphi^2(\varphi-s)}{1-c}\frac{R}{EI}}$$

La matriz de equilibrio se deduce inmediatamente de la figura 3, obteniéndose:

$$H = \begin{bmatrix} c & -s & 1-c \\ s & c & -s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

15. La matriz de rigidez de la barra circular de emparrillado se determina mediante la aplicación de las fórmulas (1), resultando las siguientes expresiones finales:

$$\begin{aligned} K_{22} &= \mu_1 \Delta_1 + \mu_2 \Delta_2 + \mu_3 \Delta_3 \\ K_{12} &= K_{21}^T = -\mu_1 \Delta_1 + \mu_2 T \Delta_2 - \mu_3 T \Delta_3 \\ K_{11} &= \mu_1 \Delta_1 + \mu_2 T \Delta_2 T + \mu_3 T \Delta_3 T \end{aligned} \quad [5]$$

siendo:

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} 1 & A & 0 \\ A & A^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{bmatrix} C^2 & -\varphi C & -2C \\ -\varphi C & \varphi^2 & 2\varphi \\ -2C & 2\varphi & 4 \end{bmatrix}$$

$$T = \text{diag}(1, -1, 1)$$

$$\mu_1 = \frac{GJ}{\varphi R} \quad \mu_2 = \frac{s}{A} \cdot \frac{1}{(\varphi-s)\frac{R}{GJ} + (\varphi+s)\frac{R}{EI}}$$

$$\mu_3 = \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{1}{(B+C)\frac{R}{GJ} + (B-C)\frac{R}{EI}}$$

$$A = \frac{1+c}{s}, \quad B = \frac{\varphi^2}{1-c} - 2, \quad C = \frac{\varphi s}{1-c} - 2$$

16. Las expresiones (5) son aplicables en el límite al caso de viga recta. En efecto, se tiene entonces:

$$R \rightarrow \infty, \quad \varphi \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad R\varphi \rightarrow \ell \quad (\text{luz de la viga})$$

Por otra parte se deduce:

$$A \rightarrow \frac{2}{\varphi} \quad B \rightarrow \frac{\varphi^2}{G} \quad C \rightarrow \frac{\varphi^2}{G}$$

$$\mu_1 \rightarrow \frac{GJ}{\ell} \quad \mu_2 \rightarrow \frac{EI\varphi^2}{4\ell} \quad \mu_3 \rightarrow \frac{3EI}{\ell\varphi^2}$$

y las matrices Δ_1 , Δ_2 y Δ_3 deben de modificarse con objeto de relacionar las variables w y q , en lugar de las $w' = w/R$ y $q' = q \cdot R$, resultando:

$$\Delta_1 \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Delta_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{\varphi} & 0 \\ \frac{2}{\varphi} & \frac{4}{\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Delta_3 \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\varphi^4}{36} & \frac{\varphi^3}{6} & \frac{\varphi^3}{3\ell} \\ \frac{\varphi^3}{6} & \varphi^2 & \frac{2\varphi^2}{\ell} \\ \frac{\varphi^3}{3\ell} & \frac{2\varphi^2}{\ell} & \frac{4\varphi^2}{\ell^2} \end{bmatrix}$$

y se obtiene

$$\begin{aligned} K_{22} &= \frac{GJ}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{EI}{4\ell} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ &+ \frac{3EI}{\ell} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{\ell} \\ 0 & \frac{2}{\ell} & \frac{4}{\ell^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{\ell} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{12EI}{\ell^3} \end{bmatrix} \\ K_{12} = K_{21}^T &= \frac{GJ}{\ell} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{EI}{4\ell} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \\ &- \frac{3EI}{\ell} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{2}{\ell} \\ 0 & \frac{2}{\ell} & \frac{4}{\ell^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{GJ}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI}{\ell} & \frac{6EI}{\ell} \\ 0 & -\frac{6EI}{\ell} & -\frac{12EI}{\ell^3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$K_{11} = \frac{GJ}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{EI}{4\ell} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{3EI}{\ell} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{\ell} \\ 0 & -\frac{2}{\ell} & \frac{4}{\ell^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{\ell} & -\frac{6EI}{\ell} \\ 0 & -\frac{6EI}{\ell} & \frac{12EI}{\ell^3} \end{bmatrix}$$

Que constituyen las bien conocidas expresiones de la matriz de rigidez de la barra recta de emparrillado.

17. Conviene observar, por último, que la determinación de las acciones de empotramien-

to rígido $\hat{p}_1 = \begin{bmatrix} \hat{m}_{t1} \\ \hat{m}_{f1} \\ \hat{q}'_1 \end{bmatrix}$ y $\hat{p}_2 = \begin{bmatrix} \hat{m}_{t2} \\ \hat{m}_{f2} \\ \hat{q}'_2 \end{bmatrix}$ bajo la acción de cargas sobre la barra, se puede

realizar de un modo directo utilizando las siguientes consideraciones:

Sea $P_\alpha = \begin{bmatrix} m_t \\ m_f \\ q \end{bmatrix}$ una acción puntual aplicada en una sección genérica de la barra, defi-

nida por el ángulo α ($0 \leq \alpha \leq \alpha_0$).

Los movimientos d_α que se producen en esa sección, en la estructura empotrada en el extremo 1 (figura 3) son evidentemente:

$$d_\alpha = F_\alpha P_\alpha$$

con F_α la matriz de flexibilidad del trozo del arco comprendido entre el extremo 1 y la sección α . Su determinación es directa, sustituyendo el valor α_0 por α , en las expresiones de los apartados anteriores.

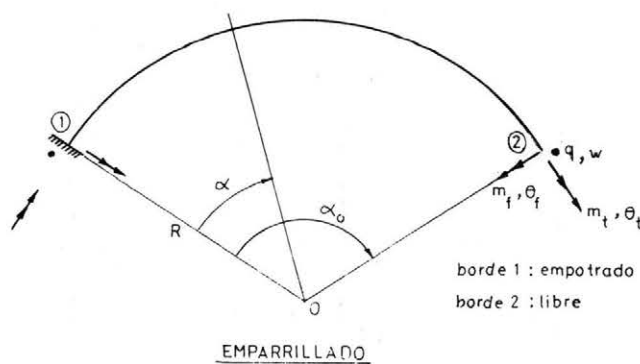


Fig. 3.

Los movimientos d_2 en el extremo 2 producidos por P_α , son entonces:

$$d_2 = H_{\alpha_2}^T d_\alpha = H_{\alpha_2}^T F_\alpha P_\alpha$$

siendo:

H_{α_2} la matriz de equilibrio correspondiente al trozo de barra comprendida entre la sección α y el extremo 2. Su expresión es idéntica a la matriz H anteriormente dada, sustituyendo allí el valor α_0 por $\alpha_0 - \alpha$.

Entonces los esfuerzos de empotramiento rígido son directamente

$$\begin{aligned} \hat{p}_1 &= -K_{12} H_{\alpha_2}^T F_\alpha P_\alpha - H_{1\alpha} P_\alpha \\ \hat{p}_2 &= -K_{22} H_{\alpha_2}^T F_\alpha P_\alpha \end{aligned} \quad [6]$$

con $H_{1\alpha}$ la matriz de equilibrio del trozo de barra comprendido entre las secciones 1 y α .

Si la carga actuante correspondiera a una distribución de acciones P_α por unidad de arco, las expresiones [6] anteriores se transformarían en las siguientes:

$$\begin{aligned} \hat{p}_1 &= -K_{12} \int_0^{\alpha_0} H_\alpha^T F_\alpha p_\alpha R \, d\alpha - \int_0^\alpha H_{1\alpha} p_\alpha R \, d\alpha \\ \hat{p}_2 &= -K_{22} \int_0^{\alpha_0} H_\alpha^T F_\alpha p_\alpha R \, d\alpha \end{aligned} \quad [7]$$

Estructura entramado (arco circular)

18. Se procede de modo completamente análogo al caso de emparrillado.

Las características de la barra se designan:

E módulo de elasticidad

Ω área de la sección transversal

I_1 inercia a flexión en el plano de la barra, de la sección transversal.

Se supone que no existe deformación por cortante.

19. La barra se coacciona completamente en su extremo 1 y en el 2, actúa el vector fuerza p (figura 4):

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m'_{f1} \\ n \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$\text{con } m'_{f1} = \frac{m_{f1}}{R}$$

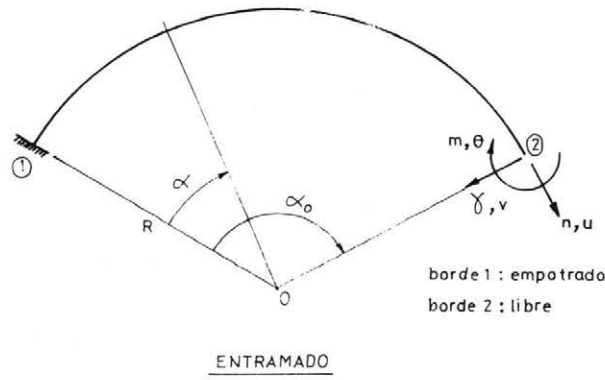


Fig. 4.

El vector movimiento d en el extremo libre, 2, se determina mediante el teorema de Castigliano

$$d = \frac{\partial E}{\partial p} \quad [8]$$

con

$$d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta' \\ u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\theta' = \theta \cdot R$$

$$E = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha_0} M_{F1}^2 \frac{R \, d\alpha}{E I_1} + \frac{1}{2} \int_0^{\alpha_0} N^2 \frac{R \, d\alpha}{E \Omega}$$

M_{F1} y N son los esfuerzos, momento flector y axil, en una sección genérica α . Su expresión es:

$$\frac{M_{F1}}{R} = m'_{f1} + n [1 - \cos(\alpha_0 - \alpha)] + q \operatorname{sen}(\alpha_0 - \alpha)$$

$$N = n \cos(\alpha_0 - \alpha) - q \operatorname{sen}(\alpha_0 - \alpha)$$

La expresión (8), dada la estructura cuadrática de E , se puede poner en la siguiente forma:

$$d = F_1 p$$

con $F_1 = \{f_{ij}\}$ matriz de flexibilidad de la estructura de la figura (4), cuyo elemento f_{ij} es:

$$f_{ij} = \frac{R}{E I_1} \int_0^{\alpha_0} \frac{\partial M_{F1}}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial M_{F1}}{\partial p_j} \, d\alpha + \frac{R}{E \Omega} \int_0^{\alpha_0} \frac{\partial N}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial N}{\partial p_j} \, d\alpha$$

o bien en forma matricial

$$F_1 = \frac{R}{E \Omega} F_1^{(1)} + \frac{R^3}{E I_1} F_1^{(2)}$$

con

$$F_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{20} & a_{11} \\ 0 & -a_{11} & a_{02} \end{bmatrix}$$

$$F_1^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{00} & -a_{10} + a_{00} & a_{01} \\ -a_{10} + a_{00} & a_{00} - 2a_{10} + a_{20} & -a_{11} + a_{01} \\ a_{01} & -a_{11} + a_{01} & a_{02} \end{bmatrix}$$

20. El problema de autovalores y autovectores siguiente:

$$[F_1^{(2)} - \lambda F_1^{(1)}] q = 0$$

tiene como solución:

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = \frac{\varphi(\varphi + s)}{\varphi(\varphi + s) - 4(1 - c)}$$

$$q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad q_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -\frac{s}{1-c} \end{bmatrix} \quad q_3 = \begin{bmatrix} \varphi(1+c) - 2s \\ -\varphi(1+c) \\ \varphi s \end{bmatrix}$$

con la misma notación que en el caso de emparrillado.

21. La matriz inversa de la de flexibilidad (rigidez) de la estructura de la figura 4 es:

$$F^{-1} = (q_1, q_2, q_3) \text{diag}(\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3), \begin{bmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ q_3^T \end{bmatrix}$$

$$\text{con} \quad \bar{\mu}_1 = \frac{1}{\frac{R^3 \varphi}{E I_1}} \quad \bar{\mu}_2 = \frac{1}{\frac{R}{E \Omega} \frac{\varphi - s}{1 - c} + \frac{R^3}{E I_1} \frac{\varphi - s}{1 - c}}$$

$$\bar{\mu}_3 = \frac{1}{\frac{R}{E \Omega} (1 + c) \varphi^2 (\varphi + s) + \frac{R^3}{E I_1} [\varphi(1 + c)(\varphi + s) - 4s^2] \varphi}$$

La matriz de equilibrio se deduce inmediatamente de la figura 4, siendo su expresión como sigue:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & (1-c) & s \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix}$$

22. La matriz de rigidez del arco circular se obtiene mediante la aplicación de las fórmulas (1), alcanzándose los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \bar{K}_{22} &= \bar{\mu}_1 \bar{\Delta}_1 + \bar{\mu}_2 \bar{\Delta}_2 + \bar{\mu}_3 \bar{\Delta}_3 \\ \bar{K}_{12} &= \bar{K}^T = -\bar{\mu}_1 \bar{\Delta}_1 + \bar{\mu}_2 \bar{T} \bar{\Delta}_2 - \bar{\mu}_3 \bar{T} \bar{\Delta}_3 \\ K_{11} &= \bar{\mu}_1 \bar{\Delta}_1 + \bar{\mu}_2 \bar{T} \bar{\Delta}_2 \bar{T} + \bar{\mu}_3 \bar{T} \bar{\Delta}_3 \bar{T} \end{aligned} \quad [9]$$

siendo:

$$\bar{\Delta}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{\Delta}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -A_1 \\ -1 & 1 & A_1 \\ -A_1 & A_1 & A_1^2 \end{bmatrix} \quad \bar{\Delta}_3 = \begin{bmatrix} A_1^2 C_1 & -A_1^2 C_1 & A_1 C_1 \\ -A_1^2 C_1 & A_1^2 & -A_1 \\ A_1 C_1 & -A_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{T} = \text{diag} (1, 1, -1)$$

$$\bar{\mu}_1 = \frac{EI}{\varphi R^3} \quad \bar{\mu}_2 = \frac{1}{A_1 B_1 \left[\frac{R}{E \Omega} + \frac{R^3}{E I_1} \right]}$$

$$\bar{\mu}_3 = \frac{1}{(B_1 + 2) \frac{R}{E \Omega} + (B_1 + 2 C_1) \frac{R^3}{E I_1}} \frac{1}{A_1}$$

$$A_1 = \frac{s}{1-c} \quad B_1 = \frac{\varphi - s}{s} \quad C_1 = 1 - \frac{2s}{\varphi(1+c)}$$

estos resultados pueden compararse con los presentados en la publicación (4).

23. Las expresiones [9] son aplicables en el límite al caso de viga recta (entramado). Se puede escribir en el límite

$$R \rightarrow \infty \quad \varphi \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad R\varphi \rightarrow \ell$$

$$A_1 \rightarrow \frac{2}{\varphi} \quad B_1 \rightarrow \frac{\varphi^2}{6} \quad C_1 \rightarrow -\frac{\varphi^2}{12}$$

$$\bar{\mu}_1 \rightarrow \frac{E I_1}{\ell R^2} \quad \bar{\mu}_2 \rightarrow \frac{1}{\frac{\ell}{3} \left(\frac{1}{E \Omega} + \frac{R^2}{E I_1} \right)} \quad \bar{\mu}_3 \rightarrow \frac{E \Omega}{4 \ell} \varphi^2$$

Las matrices $\bar{\Delta}_1$, $\bar{\Delta}_2$, $\bar{\Delta}_3$, se modifican de modo que relacionen las variables m_{f1} y en lugar de m_{f1}' y θ' . Resulta en este caso:

$$\bar{\Delta}_1 \rightarrow \begin{bmatrix} R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{\Delta}_2 \rightarrow \begin{bmatrix} R^2 & -R & -\frac{2R}{\varphi} \\ -R & 1 & \frac{2}{\varphi} \\ -\frac{2R}{\varphi} & \frac{2}{\varphi} & \frac{4}{\varphi^2} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Delta}_3 \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\varphi^4}{36} \cdot R^2 & -\frac{\varphi}{3} R & -\frac{\varphi^2}{6} \\ -\frac{\varphi R}{3} & \frac{4}{\varphi^2} & \frac{2}{\varphi} \\ -\frac{\varphi^2}{6} & \frac{2}{\varphi} & 1 \end{bmatrix}$$

Se obtiene:

$$\bar{K}_{22} = \frac{E I_1}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{3 E I}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{\ell} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{\ell} & 0 & \frac{4}{\ell^2} \end{bmatrix} + \frac{E}{4 \ell} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4 E I_1}{\ell} & 0 & -\frac{6 E I_1}{\ell^2} \\ 0 & -\frac{E \Omega}{\ell} & 0 \\ -\frac{6 E I}{\ell^2} & 0 & \frac{12 E I}{\ell^3} \end{bmatrix}$$

$$\bar{K}_{12}^T = \bar{K}_{21}^T = -\frac{E I_1}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{3 E I}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{\ell} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{\ell} & 0 & -\frac{4}{\ell^2} \end{bmatrix} + \frac{E \Omega}{4 \ell} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \frac{2 E I_1}{\ell} & 0 & -\frac{6 E I_1}{\ell^2} \\ 0 & -\frac{E \Omega}{\ell} & 0 \\ \frac{6 E I_1}{\ell^2} & 0 & -\frac{12 E I_1}{\ell^2} \end{bmatrix} \\
K_{11} &= \frac{E I_1}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{3 E I_1}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{\ell} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{\ell} & 0 & \frac{4}{\ell^2} \end{bmatrix} + \frac{E \Omega}{4 \ell} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{4 E I_1}{\ell} & 0 & \frac{6 E I_1}{\ell^2} \\ 0 & \frac{E \Omega}{\ell} & 0 \\ \frac{6 E I_1}{\ell^2} & 0 & \frac{12 E I_1}{\ell^3} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Que corresponden a las expresiones de las submatrices de rigidez de una barra recta de entramado plano de luz ℓ .

24. Por último la determinación de la solución inicial sigue la misma pauta que en el caso anterior de emparrillado.

Conclusiones

25. Las matrices de rigidez de una pieza curva circular pueden expresarse como combinación de un número reducido de funciones del ángulo central φ . Es posible, asimismo, separar los cofactores de las rigideces de barra $\frac{G J}{R}$, $\frac{E \Omega}{R}$, $\frac{E I_1}{R}$ y $\frac{E I_1}{R^3}$.

La utilización de las fórmulas [5] y [9], es directa, para su programación e inclusión dentro de un programa de cálculo matricial en desplazamientos, de estructuras de barras. No es, por lo tanto, precisa la inversión de la matriz de flexibilidad, con el consiguiente ahorro de programación y cálculo posterior.

REFERENCIAS

- 1 – Da Cunha, F. y Matesanz, P. “Reparto transversal de sobrecarga en puentes curvos” Hormigón y Acero, Núm. 126. 1^{er} trimestre 1978.
- 2 – IBM. Application Program. “Structural Engineering System Solver (STRESS)”. Versión 2 User’s Manual.
- 3 – Livesley R. K. “Matrix Methods of Structural Analysis”. 2nd Edition. Pergamon Press. Oxford 1975.
- 4 – Yamada Y. y Ezawa Y. “On curved finite elements for the analysis of circular arches”. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 11. Noviembre (1977).