

# UN MÉTODO DE COMPROBACIÓN DE SECCIONES EN LOSAS DE HORMIGÓN ARMADO CON FAMILIAS DE ARMADURAS EN DIRECCIONES ARBITRARIAS. PARTE II. PLACAS Y LÁMINAS

(AN APPROACH TO VERIFY THE REINFORCEMENT IN TWO DIMENSIONAL CONCRETE STRUCTURES REINFORCED BY FAMILIES OF BARS DISPOSED IN ARBITRARY DIRECTIONS. PART II. PLATES AND SHELLS)

Jaime G<sup>o</sup> Palacios, Ingeniero de Caminos, C. y P. UPM  
Avelino Samartín, Dr. Ingeniero de Caminos, C. y P. UPM

Fecha de recepción: 23-IX-02

ESPAÑA

445-20

## RESUMEN

*Este artículo corresponde a la extensión de uno anterior dedicado al estudio del problema de la comprobación y el dimensionamiento de las armaduras de acero en estructuras bidimensionales de hormigón armado tipo laja, cuyos esfuerzos están contenidos en su plano medio. Aquí se consideran las estructuras con cargas normales a su plano medio (placas y láminas), es decir, sometidas a esfuerzos de flexión.*

*El procedimiento de comprobación y dimensionamiento que se propone, permite tratar situaciones importantes como el armado en las esquinas de placa, la combinación de tensiones axiales, rasantes y de flexión que aparecen en los arranques de los voladizos en las estructuras de los tableros continuos de puentes, particularmente en las zonas sobre apoyos. En estos casos las alternativas actuales son procedimientos heurísticos o fórmulas empíricas como la de Wood.*

*El cálculo, que se lleva a cabo mediante un simple programa de computador, permite obtener en pocos segundos la curva de las tensiones y las deformaciones en cada una de las familias de barras y de las principales en el hormigón en función del factor de amplificación de los esfuerzos. De esta forma se deduce el nivel de seguridad que se alcanza en un punto de la estructura, de hormigón armado.*

## SUMMARY

*This paper is an extension of a previous one, what was dedicated to the study of the problem of design/verification of reinforcement in two-dimensional concrete structures subjected to in plane forces. Here, the verification of the reinforcement of two-dimensional concrete structures subjected to out-of-plan actions (plates and shells) is reviewed.*

*The presented verification procedure allow us to handle important situations that often appear in reinforced concrete structures, such as reinforcement at plate cornes, combination of in-plane forces and bending stresses occurring at junction of cantilever and webs in continuous bridge box sections. The usual alternatives to treat these cases are based on heuristic procedures or semi-empirical formulae as the Wood.*

*The analysis can be carried out by the use of a simple computer program. The output of this program includes the diagrams of stresses and strains for each of the bar reinforcement families and the principal stresses in the as function of the load amplification factor. In this way it is possible to find the safety factor at a point of the reinforced concrete structure.*

## 1. Armaduras en losas y láminas en flexo-extensión

### 1.1. Planteamiento del problema

En este apartado se estudia el caso más general de la losa de hormigón que se supone sometida a unos esfuerzos de flexión y de extensión. En este caso general se consideran, en la comprobación de las tensiones del hormigón y del acero en una sección de la losa, los momentos flectores y torsores así como los axiles y rasantes, aplicados todos ellos en un punto del plano medio de la placa, y que se recogen respectivamente en sendos tensores  $\mathbf{M} = (M_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2$ , y  $\mathbf{N} = (N_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2$ . En esta comprobación de tensiones no se tienen en cuenta los esfuerzos cortantes  $\mathbf{Q} = (Q_i)$ ,  $i = 1, 2$ , normales al plano de la losa. Las situaciones particulares de laja (y membrana) y (placa (y lámina sin extensión) están incluidos dentro de este caso general si se adoptan respectivamente los valores nulos de los esfuerzos  $\mathbf{N} = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ . La notación y sentidos positivos de estos esfuerzos sigue las reglas indicadas en la primera parte de este trabajo: Lajas y Membranas.

Las relaciones entre los esfuerzos actuantes en la losa y las tensiones que generan se expresan en la forma:

$$M_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 \sigma_{ij} dx_3, \quad N_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij} dx_3 \quad (1)$$

Para resistir los esfuerzos de flexión y compresión simultáneos en la placa de hormigón armado se dispone una armadura compuesta por un número determinado de familias de barras rectas igualmente espaciadas. Las barras de cada familia se sitúan y distribuyen en el espesor de forma homogénea, entre las dos caras de la placa, superior e inferior, evidentemente protegidas con unos recubrimientos. En planta las barras se disponen inclinadas según un ángulo arbitrario. Por consiguiente, el armado se define por los siguientes datos:

1. Número de familias de armaduras:  $N$
2. Para cada familia  $i = 1, 2, \dots, N$  se conocen los datos:
  - Área de las armaduras por unidad de separación:  $A_i$
  - Ángulo respecto al eje  $Ox_1$  de inclinación en planta:  $\alpha_i$
  - Ordenada  $x_3$  que mide la distancia del plano de las armaduras al plano medio de la placa:  $h_i$ .

Por otra parte se conocen los parámetros que definen las leyes del comportamiento de los dos materiales, hormigón y acero. Estas leyes se escriben de forma idéntica a las expresadas en la primera parte de este trabajo referente a Lajas y Membranas.

Un planteamiento adecuado del problema debe considerar las ecuaciones constitutivas de ambos materiales así como las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad en todas las secciones normales a la losa que pasen por el punto del plano medio que se estudia. Para ello se utiliza un método en rigidez y se adoptan, por lo tanto, seis incógnitas básicas representadas por las deformaciones en el hormigón y su posición. Las tres primeras incógnitas corresponden a las deformaciones de extensión o laja, es decir, a las deformaciones longitudinales principales  $\varepsilon_1^0$ ,  $\varepsilon_2^0$  con  $\varepsilon_1^0 \geq \varepsilon_2^0$  y al ángulo  $\theta^0$  que forma la dirección principal  $\varepsilon_1^0$  con el eje positivo  $x_1$ . Las otras tres incógnitas básicas se refieren a las deformaciones de flexión de las cuales las dos primeras son las curvaturas principales de flexión  $\kappa_1^0$  y  $\kappa_2^0$  con valor positivo si corresponden a curvaturas eficaces con el momento flector principal positivo, es decir, que producen alargamientos en la región positiva  $x_3 > 0$  de la sección normal de la placa. Se utiliza la notación tal que  $\kappa_1^0 \geq \kappa_2^0$ . La tercera incógnita básica es el ángulo  $\varphi^0$  que forma con el eje  $Ox_1$  la dirección de la normal al plano principal sobre el que actúa la deformación  $\kappa_1$ . Los ángulos  $\theta^0$  y  $\varphi^0$  se miden, con el sentido antihorario positivo, a partir del eje  $Ox_1$  y su rango de variación es de

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

A partir de estas incógnitas se obtienen como sigue las deformaciones longitudinales principales en el hormigón  $\varepsilon_i(x_3)$  con  $i = 1, 2$ , que aparecen en la capa a nivel  $x_3$ :

- Componentes de las deformaciones de laja o membrana según los ejes generales.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^m(x_3) &= \varepsilon_1^0 \cos^2 \theta^0 + \varepsilon_2^0 \sin^2 \theta^0 \\ \varepsilon_{22}^m(x_3) &= \varepsilon_1^0 \sin^2 \theta^0 + \varepsilon_2^0 \cos^2 \theta^0 \\ \varepsilon_{12}^m(x_3) &= (\varepsilon_1^0 - \varepsilon_2^0) \sin \theta^0 \cos \theta^0\end{aligned}\tag{2}$$

- Componentes de las deformaciones de placa o lámina según los ejes generales.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^p(x_3) &= x_3 \kappa_1^0 \cos^2 \varphi^0 + x_3 \kappa_2^0 \sin^2 \varphi^0 \\ \varepsilon_{22}^p(x_3) &= x_3 \kappa_1^0 \sin^2 \varphi^0 + x_3 \kappa_2^0 \cos^2 \varphi^0 \\ \varepsilon_{12}^l(x_3) &= x_3 (\kappa_1^0 - \kappa_2^0) \sin \varphi^0 \cos \varphi^0\end{aligned}\tag{3}$$

- Las deformaciones resultantes suma de las dos deformaciones anteriores son:

$$\varepsilon_{ij}(x_3) = \varepsilon_{ij}^m(x_3) + \varepsilon_{ij}^p(x_3), \quad i, j = 1, 2\tag{4}$$

- Las deformaciones principales  $\varepsilon_i(x_3)$ ,  $i = 1, 2$  y el ángulo  $\theta$  de la dirección de  $\varepsilon_1(x_3)$  se calculan de acuerdo con las fórmulas de la elasticidad:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(x_3) &= \frac{\varepsilon_{11}(x_3) + \varepsilon_{22}(x_3)}{2} + \sqrt{\left[\frac{\varepsilon_{11}(x_3) - \varepsilon_{22}(x_3)}{2}\right]^2 + \varepsilon_{12}(x_3)^2} \\ \varepsilon_2(x_3) &= \frac{\varepsilon_{11}(x_3) + \varepsilon_{22}(x_3)}{2} - \sqrt{\left[\frac{\varepsilon_{11}(x_3) - \varepsilon_{22}(x_3)}{2}\right]^2 + \varepsilon_{12}(x_3)^2} \\ \tan 2\theta(x_3) &= \frac{2\varepsilon_{12}(x_3)}{\varepsilon_{11}(x_3) - \varepsilon_{22}(x_3)}\end{aligned}\tag{5}$$

Las tensiones principales en el hormigón en la capa  $x_3$  se deducen con la aplicación de las ecuaciones constitutivas del material presentadas en la primera parte de este trabajo referentes a Lajas y Membranas. y resulta<sup>1</sup>:

$$\sigma_{c1}(x_3) = \sigma_c[-\varepsilon_1(x_3)], \quad \sigma_{c2}(x_3) = \sigma_c[-\varepsilon_2(x_3)]\tag{6}$$

Las componentes del tensor de tensiones según los ejes generales se expresan en la forma siguiente, en la que se ha escrito por simplicidad  $\theta = \theta(x_3)$ :

$$\begin{aligned}\sigma_{c11}(x_3) &= \sigma_{c1}(x_3) \cos^2 \theta + \sigma_{c2}(x_3) \sin^2 \theta = \\ &= \sigma_c[-\varepsilon_1(x_3)] \cos^2 \theta + \sigma_c[-\varepsilon_2(x_3)] \sin^2 \theta \\ \sigma_{c22}(x_3) &= \sigma_{c1}(x_3) \sin^2 \theta + \sigma_{c2}(x_3) \cos^2 \theta = \\ &= \sigma_c[-\varepsilon_1(x_3)] \sin^2 \theta + \sigma_c[-\varepsilon_2(x_3)] \cos^2 \theta \\ \sigma_{c12}(x_3) &= [\sigma_{c1}(x_3) - \sigma_{c2}(x_3)] \sin \theta \cos \theta = \\ &= \{\sigma_c[-\varepsilon_1(x_3)] - \sigma_c[-\varepsilon_2(x_3)]\} \sin \theta \cos \theta\end{aligned}\tag{7}$$

Las componentes según los ejes de los momentos flectores y torsores así como las de los esfuerzos axiales y rasantes resistentes en el hormigón, que miden la capacidad resistente de este material en la sección, se obtienen de la resultante y el momento de las tensiones de todas las capas  $x_3$ , dados por las ecuaciones anteriores (7) como sigue

$$N_{cij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{cij}(x_3) dx_3, \quad M_{cij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{cij}(x_3) x_3 dx_3 \quad i, j = 1, 2\tag{8}$$

<sup>1</sup>No se ha considerado por simplicidad, como en el caso de laja, la dependencia existente entre cada tensión principal  $\sigma_{ci}$ , ( $i = 1, 2$ ) y las dos deformaciones  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  conjuntas.

Las ecuaciones (8) se escriben de forma explícita:

$$\begin{aligned} N_{c11} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_c[-\varepsilon_1(x_3)] \cos^2 \theta dx_3 + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_c[-\varepsilon_2(x_3)] \sin^2 \theta dx_3 \\ N_{c22} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_c[-\varepsilon_1(x_3)] \sin^2 \theta dx_3 + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_c[-\varepsilon_2(x_3)] \cos^2 \theta dx_3 \\ N_{c12} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma_c[-\varepsilon_1(x_3)] - \sigma_c[-\varepsilon_2(x_3)]\} \sin \theta \cos \theta dx_3 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} M_{c11} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 \sigma_c[-\varepsilon_1(x_3)] \cos^2 \theta dx_3 + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 \sigma_c[-\varepsilon_2(x_3)] \sin^2 \theta dx_3 \\ M_{c22} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 \sigma_c[-\varepsilon_1(x_3)] \sin^2 \theta dx_3 + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 \sigma_c[-\varepsilon_2(x_3)] \cos^2 \theta dx_3 \\ M_{c12} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 \{\sigma_c[-\varepsilon_1(x_3)] - \sigma_c[-\varepsilon_2(x_3)]\} \sin \theta \cos \theta dx_3 \end{aligned} \quad (10)$$

En relación con el acero la deformación longitudinal  $\varepsilon_{si}$  en las barras de la familia  $i$  de armaduras se obtiene de acuerdo con las ecuaciones de la elasticidad como sigue:

$$\varepsilon_{si} = \varepsilon_1(h_i) \cos^2[\theta(h_i) - \alpha_i] + \varepsilon_2(h_i) \sin^2[\theta(h_i) - \alpha_i] \quad (11)$$

con  $\varepsilon_i(h_i)$  y  $\theta(h_i)$  los valores de  $\varepsilon_i(x_3)$  y  $\theta(x_3)$  dados por (5) particularizados para  $x_3 = h_i$ .

El esfuerzo axial,  $S_i$ , de tracción o compresión, en una barra de la familia  $i$  se deduce mediante las ecuaciones constitutivas del acero presentadas en la primera parte de este trabajo, por lo que su expresión es:

$$S_i = S_i(\mathbf{r}) = A_i \sigma_s(\varepsilon_{si}) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (12)$$

en la cual

$$S_i(\mathbf{r}) = A_i \sigma_s \{ \varepsilon_1(h_i) \cos^2[\theta(h_i) - \alpha_i] + \varepsilon_2(h_i) \sin^2[\theta(h_i) - \alpha_i] \} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Se observa que el esfuerzo  $S_i = S_i(\mathbf{r})$  es función del vector de incógnitas  $\mathbf{r}$  definido como sigue:

$$\mathbf{r} = (\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \theta^0, \kappa_1^0, \kappa_2^0, \varphi^0)^T \quad (13)$$

El esfuerzo  $S_i(\mathbf{r})$  de la barra produce, en la capa del plano en la que está situada, las siguientes componentes de tensión referidas a los ejes de coordenadas (figura 1):

$$\begin{aligned} \sigma_{s11}^i &= S_i(\mathbf{r}) \cos^2 \alpha_i \\ \sigma_{s22}^i &= S_i(\mathbf{r}) \sin^2 \alpha_i \\ \sigma_{s12}^i &= \sigma_{s21}^i = S_i(\mathbf{r}) \sin \alpha_i \cos \alpha_i \end{aligned} \quad (14)$$

La capacidad resistente que proporciona esta armadura  $i$ , medida en el tensor de esfuerzos resistentes de laja (axiles y rasantes) y el de los resistentes de placa (momentos flectores y torsores) se calcula, por lo tanto, como la resultante y el momento de los esfuerzos  $S_i$ . Las componentes de los esfuerzos resistentes de esta armadura son:

$$N_{sjk} = \sigma_{sjk}^i, \quad M_{sjk} = h_i \sigma_{sjk}^i \quad j, k = 1, 2 \quad (15)$$

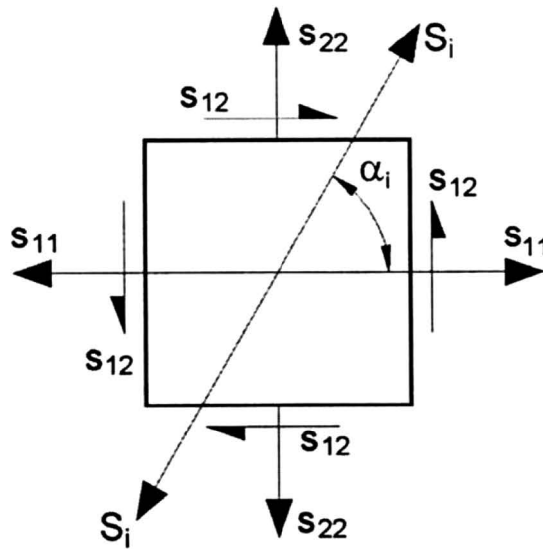


Figura 1.- Componentes de los esfuerzos resistentes de una barra.

Al considerar el total de las armaduras, que está compuesta por  $N$  familias de barras, las ecuaciones (15) se transforman en las siguientes que permiten obtener las componentes de los esfuerzos resistentes debidos al acero:

$$\begin{aligned}
 N_{s11} &= \sum_{i=1}^N \sigma_{11}^i = \sum_{i=1}^N S_i(r) \cos^2 \alpha_i \\
 N_{s22} &= \sum_{i=1}^N \sigma_{22}^i = \sum_{i=1}^N S_i(r) \operatorname{sen}^2 \alpha_i \\
 N_{s12} &= N_{s21} = \sum_{i=1}^N \sigma_{12}^i = \sum_{i=1}^N S_i(r) \operatorname{sen} \alpha_i \cos \alpha_i
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 M_{s11} &= \sum_{i=1}^N h_i \sigma_{11}^i = \sum_{i=1}^N h_i S_i(r) \cos^2 \alpha_i \\
 M_{s22} &= \sum_{i=1}^N h_i \sigma_{22}^i = \sum_{i=1}^N h_i S_i(r) \operatorname{sen}^2 \alpha_i \\
 M_{s12} &= M_{s21} = \sum_{i=1}^N h_i \sigma_{12}^i = \sum_{i=1}^N h_i S_i(r) \operatorname{sen} \alpha_i \cos \alpha_i
 \end{aligned} \tag{17}$$

Las ecuaciones de equilibrio en un punto de la losa de las fuerzas y de los momentos actuantes sobre el elemento diferencial de ésta son:

$$-N_{cij} + N_{sij} = \lambda N_{ij} \quad -M_{cij} + M_{sij} = \lambda M_{ij} \quad i, j = 1, 2 \tag{18}$$

en las cuales el signo negativo a las fuerzas y a los momentos resistentes del hormigón aparece al proyectar sobre los ejes y tener en cuenta el sentido adoptado para las tensiones en este material. Las expresiones (18) constituyen un sistema de ecuaciones no lineales en las incógnitas básicas  $r$ , las cuales se pueden expresar de

un modo explícito como sigue:

$$\begin{aligned}
 & - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{ \sigma_c[-\varepsilon_1(x_3)] \cos^2 \theta + \sigma_c[-\varepsilon_2(x_3)] \operatorname{sen}^2 \theta \} dx_3 + \\
 & + \sum_{i=1}^N S_i(\mathbf{r}) \cos^2 \alpha_i = \lambda N_{11} \\
 & - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{ \sigma_c[-\varepsilon_1(x_3)] \operatorname{sen}^2 \theta + \sigma_c[\varepsilon_2(-x_3)] \cos^2 \theta \} dx_3 + \\
 & + \sum_{i=1}^N S_i(\mathbf{r}) \operatorname{sen}^2 \alpha_i = \lambda N_{22} \tag{19}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{ \sigma_c[-\varepsilon_1(x_3)] - \sigma_c[-\varepsilon_2(x_3)] \} \operatorname{sen} \theta \cos \theta dx_3 + \\
 & + \sum_{i=1}^N S_i(\mathbf{r}) \operatorname{sen} \alpha_i \cos \alpha_i = \lambda N_{12} \\
 & - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 \{ \sigma_c[-\varepsilon_1(x_3)] \cos^2 \theta + \sigma_c[-\varepsilon_2(x_3)] \operatorname{sen}^2 \theta \} dx_3 + \\
 & + \sum_{i=1}^N h_i S_i(\mathbf{r}) \cos^2 \alpha_i = \lambda M_{11} \\
 & - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 \{ \sigma_c[-\varepsilon_1(x_3)] \operatorname{sen}^2 \theta + \sigma_c[-\varepsilon_2(x_3)] \cos^2 \theta \} dx_3 + \\
 & + \sum_{i=1}^N h_i S_i(\mathbf{r}) \operatorname{sen}^2 \alpha_i = \lambda M_{22} \tag{20}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 \{ \sigma_c[-\varepsilon_1(x_3)] - \sigma_c[-\varepsilon_2(x_3)] \} dx_3 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + \\
 & \sum_{i=1}^N h_i S_i(\mathbf{r}) \operatorname{sen} \alpha_i \cos \alpha_i = \lambda M_{12}
 \end{aligned}$$

Conviene tener en cuenta al evaluar las integrales sobre el área de hormigón, que aparecen en las ecuaciones anteriores (19) y (20), el hecho de que el ángulo  $\theta$  no es constante, sino que  $\theta = \theta(x_3)$  es una función continua de la ordenada  $x_3$  que define la capa dentro del espesor de la lámina sobre la que actúan las deformaciones principales  $\varepsilon_i$ , ( $i = 1, 2$ ). La determinación del ángulo  $\theta(x_3)$  para cada capa  $x_3$  se lleva a cabo de acuerdo con la tercera ecuación de la fórmula (5). En el cálculo de las integrales citadas pueden aparecer discontinuidades en el valor del ángulo  $\theta$  si el tensor de deformaciones en una capa  $x_3$  dentro del espesor  $-\frac{h}{2} \leq x_3 \leq \frac{h}{2}$  es crítico, es decir, si se tiene que  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22}$  y  $\varepsilon_{12} = 0$ . En ese caso se recupera la continuidad de esa función en el punto  $x_3$  si se permutan las direcciones principales, es decir, se incrementa el valor del ángulo  $\theta$  en  $\frac{\pi}{2}$  y se cambian las deformaciones  $\varepsilon_i$  por  $\varepsilon_j$  con  $i, j = 1, 2$  e  $i \neq j$ .

## 1.2. Solución

El sistema de ecuaciones (19) y (20), que ha sido deducido en el apartado anterior, representa un planteamiento del problema en movimientos. En estas ecuaciones de equilibrio del elemento diferencial de losa intervienen los esfuerzos, y al expresar éstos en términos de los movimientos o en este caso de las deformaciones se llega al sistema citado de ecuaciones (19) y (20). Utilizando esta metodología, el conjunto de ecuaciones de equilibrio se reducen a seis en las incógnitas básicas siguientes: Las dos deformaciones longitudinales principales en el plano medio de la losa  $\varepsilon_1^0$  y  $\varepsilon_2^0$  y el ángulo de la deformación principal máxima  $\theta^0$  y las tres incógnitas referentes a la flexión de la losa, es decir, las dos curvaturas principales  $\kappa_1^0$  y  $\kappa_2^0$  y el ángulo  $\varphi^0$  que define la posición de estas curvaturas.

Con objeto de simplificar la notación se describe el sistema no lineal (19) y (19a) en forma matricial como sigue:

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = \lambda \mathbf{p}_0 \quad (21)$$

en el cual la matriz del sistema

$$\mathbf{k} = [k_i], \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

se deduce inmediatamente de las expresiones (19) y (20). El vector independiente es:

$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_0 \\ \mathbf{M}_0 \end{bmatrix} = (N_{11}, N_{22}, N_{12}, M_{11}, M_{22}, M_{12})^T$$

y el de incógnitas se escribe:

$$\mathbf{r} = (\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \theta^0, \kappa_1^0, \kappa_2^0, \varphi^0)^T$$

Se observa que todos los términos  $k_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ , del vector  $\mathbf{k}$  de dimensión  $6 \times 1$ , dependen de las incógnitas básicas y que el vector independiente de dimensión  $6 \times 1$  es simplemente el vector columna de dimensión 6, que contiene los esfuerzos de servicio, multiplicado por el coeficiente de amplificación  $\lambda$ .

El carácter no lineal de este sistema de seis ecuaciones (21) exige en general un método de solución numérico. Un procedimiento simple de resolución del sistema de ecuaciones (21) es el de carácter iterativo, análogo a el que se ha descrito en el apartado de Lajas y Membranas. A pesar de que éste es un método válido se aplica en este caso el de Newton-Raphson siguiendo las pautas indicadas en el citado apartado por su mayor facilidad de programación en un computador y permitir alcanzar resultados muy precisos en el cálculo. Sólo se presentan los resultados de la matriz de rigidez tangente o jacobiano del sistema (21), que evidentemente difiere de la matriz de rigidez tangente de los dos casos anteriores de placa y laja<sup>2</sup>.

El sistema incremental en rigidez se expresa como sigue:

$$\mathbf{K}_t d\mathbf{r} = d\mathbf{p}_0 \quad (22)$$

en el que se ha utilizado la notación:

$$\mathbf{K}_t = [k_t(i, j)], \quad d\mathbf{r} = \begin{bmatrix} d\varepsilon_1^0 \\ d\varepsilon_2^0 \\ d\theta^0 \\ d\kappa_1^0 \\ d\kappa_2^0 \\ d\varphi^0 \end{bmatrix}, \quad d\mathbf{p}_0 = d\lambda \mathbf{p}_0 = d\lambda \begin{bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{bmatrix}$$

La expresión de la matriz tangente se obtiene a partir de las ecuaciones de equilibrio del elemento losa de hormigón armado que se deducen de acuerdo con los siguientes pasos, como se muestra a continuación:

<sup>2</sup>Es posible obtener directamente la matriz de rigidez tangente mediante la aplicación de un procedimiento de derivación numérica a la matriz del sistema (21). Sin embargo este procedimiento puede conllevar pérdidas de la exactitud en los resultados del cálculo y en algunos casos, debido a la existencia de distintos ordenes de magnitud entre las incógnitas básicas, se debe prestar una atención especial en la programación con objeto de evitar la aparición de enmascaramientos numéricos causantes de problemas de un mal condicionamiento del problema.

1. Se introduce una variación infinitesimal en el vector de incógnitas  $\mathbf{r}$ , es decir, se considera el nuevo vector  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ .
2. Se calculan las variaciones en las deformaciones en la capa del elemento de la losa definida por la ordenada  $x_3$  al modificarse las incógnitas básicas en  $d\mathbf{r}$  y sus valores se representan en forma matricial como sigue:

- Deformaciones de membrana  $d\varepsilon_{ij}^m(x_3)$ , ( $i, j = 1, 2$ )

$$d\varepsilon^m(x_3) = \begin{bmatrix} d\varepsilon_{11}^m(x_3) \\ d\varepsilon_{22}^m(x_3) \\ d\varepsilon_{12}^m(x_3) \end{bmatrix} = [ \mathbf{C}_{\varepsilon m} \quad \mathbf{0} ] d\mathbf{r}$$

con  $\mathbf{0}$  la matriz nula de dimensión  $3 \times 3$  y

$$\mathbf{C}_{\varepsilon m} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta^0 & \sin^2 \theta^0 & -(\varepsilon_1^0 - \varepsilon_2^0) \sin 2\theta^0 \\ \sin^2 \theta^0 & \cos^2 \theta^0 & (\varepsilon_1^0 - \varepsilon_2^0) \sin 2\theta^0 \\ \sin \theta^0 \cos \theta^0 & -\sin \theta^0 \cos \theta^0 & (\varepsilon_1^0 - \varepsilon_2^0) \cos 2\theta^0 \end{bmatrix}$$

- Deformaciones de placa  $d\varepsilon_{ij}^p(x_3)$ , ( $i, j = 1, 2$ ).

$$d\varepsilon^p(x_3) = \begin{bmatrix} d\varepsilon_{11}^p(x_3) \\ d\varepsilon_{22}^p(x_3) \\ d\varepsilon_{12}^p(x_3) \end{bmatrix} = x_3 [ \mathbf{0} \quad \mathbf{C}_{\varepsilon p} ] d\mathbf{r}$$

con

$$\mathbf{C}_{\varepsilon p} = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi^0 & \sin^2 \varphi^0 & -(\kappa_1^0 - \kappa_2^0) \sin 2\varphi^0 \\ \sin^2 \varphi^0 & \cos^2 \varphi^0 & (\kappa_1^0 - \kappa_2^0) \sin 2\varphi^0 \\ \sin \varphi^0 \cos \varphi^0 & -\sin \varphi^0 \cos \varphi^0 & (\kappa_1^0 - \kappa_2^0) \cos 2\varphi^0 \end{bmatrix}$$

- Deformaciones totales o suma de las anteriores  $d\varepsilon_{ij}(x_3) = d\varepsilon_{ij}^m(x_3) + d\varepsilon_{ij}^p(x_3)$ , ( $i, j = 1, 2$ )

$$d\varepsilon(x_3) = \begin{bmatrix} d\varepsilon_{11}(x_3) \\ d\varepsilon_{22}(x_3) \\ d\varepsilon_{12}(x_3) \end{bmatrix} = \mathbf{C}_\varepsilon(x_3) d\mathbf{r} = [ \mathbf{C}_{\varepsilon m} \quad x_3 \mathbf{C}_{\varepsilon p} ] d\mathbf{r}$$

- Deformaciones principales y su dirección  $d\varepsilon_1(x_3)$ ,  $d\varepsilon_2(x_3)$ ,  $d\theta(x_3)$ .

$$d\varepsilon^\pi(x_3) = \begin{bmatrix} d\varepsilon_1(x_3) \\ d\varepsilon_2(x_3) \\ d\theta(x_3) \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{\varepsilon\pi}(x_3) d\mathbf{r} = \mathbf{C}_{\varepsilon 0}(x_3) \mathbf{C}_\varepsilon(x_3) d\mathbf{r}$$

con

$$\mathbf{C}_{\varepsilon 0}(x_3) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{A}{2}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) & \frac{1}{2} - \frac{A}{2}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) & 2A\varepsilon_{12} \\ \frac{1}{2} - \frac{A}{2}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) & \frac{1}{2} + \frac{A}{2}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) & -2A\varepsilon_{12} \\ -A^2\varepsilon_{12} & A^2\varepsilon_{12} & A^2(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) \end{bmatrix}$$

con

$$A = [\varepsilon^T \mathbf{A}_0 \varepsilon]^{-\frac{1}{2}}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

3. Variaciones de las tensiones en el hormigón  $d\sigma_{cij}(x_3)$ , ( $i, j = 1, 2$ ).

$$d\sigma_c(x_3) = \begin{bmatrix} d\sigma_{c11}(x_3) \\ d\sigma_{c22}(x_3) \\ d\sigma_{c12}(x_3) \end{bmatrix} = -\mathbf{C}_\sigma(x_3) d\mathbf{r} = -\mathbf{C}_{\sigma 0}(x_3) \mathbf{C}_{\varepsilon\pi}(x_3) d\mathbf{r}$$



con

$$C_{\sigma 0}(x_3) = \begin{bmatrix} E_{tc1} \cos^2 \theta & E_{tc2} \sin^2 \theta & (\sigma_{c1} - \sigma_{c2}) \sin 2\theta \\ E_{tc1} \sin^2 \theta & E_{tc2} \cos^2 \theta & -(\sigma_{c1} - \sigma_{c2}) \sin 2\theta \\ E_{tc1} \sin \theta \cos \theta & -E_{tc2} \sin \theta \cos \theta & -(\sigma_{c1} - \sigma_{c2}) \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

$$E_{tci} = E_{tc}(-\varepsilon_i) \text{ y } \sigma_{ci} = \sigma_c(-\varepsilon_i), (i = 1, 2)$$

4. Las variaciones de los esfuerzos resistentes del hormigón en la sección son:

$$dN_c = \begin{bmatrix} dN_{c11} \\ dN_{c22} \\ dN_{c12} \end{bmatrix} = C_N dr, \quad dM_c = \begin{bmatrix} dM_{c11} \\ dM_{c22} \\ dM_{c12} \end{bmatrix} = C_M dr \quad (23)$$

con

$$C_N = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} C_{\sigma}(x_3) dx_3, \quad C_M = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 C_{\sigma}(x_3) dx_3$$

5. Las deformaciones longitudinales en el acero de las armaduras de la familia  $i$  varían de acuerdo con las expresiones:

$$d\varepsilon_{si} = S_{\varepsilon i} C_{\varepsilon \pi}(h_i) dr \quad (24)$$

siendo

$$S_{\varepsilon i} = [\cos^2(\theta_i - \alpha_i), \sin^2(\theta_i - \alpha_i), (-\varepsilon_{1i} + \varepsilon_{2i}) \sin 2(\theta_i - \alpha_i)]$$

$$\text{con } \varepsilon_{1i} = \varepsilon_1(h_i), \varepsilon_{2i} = \varepsilon_2(h_i), \theta_i = \theta(h_i) \text{ y } C_{\varepsilon \pi}(h_i) = C_{\varepsilon \pi}(x_3 = h_i)$$

6. Los esfuerzos axiles de las barras de la familia  $i$  se modifican con  $dr$  de acuerdo con la expresión:

$$dS_i = A_i E_{ts}(\varepsilon_{si}) d\varepsilon_{si} \quad (25)$$

7. Las componentes de los esfuerzos axiles y momentos resistentes de todas las armaduras se calculan según las expresiones siguientes:

$$dN_s = \begin{bmatrix} dN_{s11} \\ dN_{s22} \\ dN_{s12} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} dS_i \cos^2 \alpha_i \\ dS_i \sin^2 \alpha_i \\ dS_i \sin \alpha_i \cos \alpha_i \end{bmatrix} = S_N dr \quad (26)$$

$$dM_s = \begin{bmatrix} dM_{s11} \\ dM_{s22} \\ dM_{s12} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} h_i dS_i \cos^2 \alpha_i \\ h_i dS_i \sin^2 \alpha_i \\ h_i dS_i \sin \alpha_i \cos \alpha_i \end{bmatrix} = S_M dr \quad (27)$$

siendo

$$S_N = \sum_{i=1}^N S_{Ni} C_{\varepsilon \pi}(h_i)$$

$$S_M = \sum_{i=1}^N S_{Mi} C_{\varepsilon \pi}(h_i)$$

y cada una de las  $N$  matrices parciales  $S_{Ni}$  y  $S_{Mi}$  se expresan como sigue:

$$S_{Ni} = \begin{bmatrix} A_{1i} \cos^2(\theta_i - \alpha_i) & A_{1i} \sin^2(\theta_i - \alpha_i) & A_{1i}(-\varepsilon_{1i} + \varepsilon_{2i}) \sin 2(\theta_i - \alpha_i) \\ A_{2i} \cos^2(\theta_i - \alpha_i) & A_{2i} \sin^2(\theta_i - \alpha_i) & -A_{2i}(-\varepsilon_{1i} + \varepsilon_{2i}) \sin 2(\theta_i - \alpha_i) \\ A_{3i} \cos^2(\theta_i - \alpha_i) & A_{3i} \sin^2(\theta_i - \alpha_i) & A_{3i}(-\varepsilon_{1i} + \varepsilon_{2i}) \sin 2(\theta_i - \alpha_i) \end{bmatrix}$$

$$S_{Mi} = \begin{bmatrix} B_{1i} \cos^2(\theta_i - \alpha_i) & B_{1i} \sin^2(\theta_i - \alpha_i) & B_{1i}(-\varepsilon_{1i} + \varepsilon_{2i}) \sin 2(\theta_i - \alpha_i) \\ B_{2i} \cos^2(\theta_i - \alpha_i) & B_{2i} \sin^2(\theta_i - \alpha_i) & -B_{2i}(-\varepsilon_{1i} + \varepsilon_{2i}) \sin 2(\theta_i - \alpha_i) \\ B_{3i} \cos^2(\theta_i - \alpha_i) & B_{3i} \sin^2(\theta_i - \alpha_i) & B_{3i}(-\varepsilon_{1i} + \varepsilon_{2i}) \sin 2(\theta_i - \alpha_i) \end{bmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} A_{1i} &= A_i E_{ts}(\varepsilon_i) \cos^2 \alpha_i, & B_{1i} &= h_i A_{1i} \\ A_{2i} &= A_i E_{ts}(\varepsilon_i) \sin^2 \alpha_i, & B_{2i} &= h_i A_{2i} \\ A_{3i} &= A_i E_{ts}(\varepsilon_i) \sin \alpha_i \cos \alpha_i, & B_{3i} &= h_i A_{3i} \end{aligned}$$

8. La ecuación incremental o en la matriz de rigidez tangente se deduce fácilmente de las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos en el elemento diferencial de losa:

$$-dN_c + dN_s = d\lambda N_0 \rightarrow (C_N + S_N)dr = d\lambda N_0 \tag{28}$$

$$-dM_c + dM_s = d\lambda M_0 \rightarrow (C_M + S_M)dr = d\lambda M_0 \tag{29}$$

es decir, al agrupar las seis ecuaciones anteriores en una única matricial se escribe:

$$\begin{bmatrix} C_N & S_N \\ C_M & S_M \end{bmatrix} dr = d\lambda \begin{bmatrix} N_0 \\ M_0 \end{bmatrix}$$

y la matriz de rigidez tangente es entonces:

$$K_t = \begin{bmatrix} C_N & S_N \\ C_M & S_M \end{bmatrix}$$

La resolución del sistema (21) se lleva a cabo como se ha indicado en la primera parte de este trabajo referente a Lajas y Membranas.

### 1.3. Ejemplo de aplicación

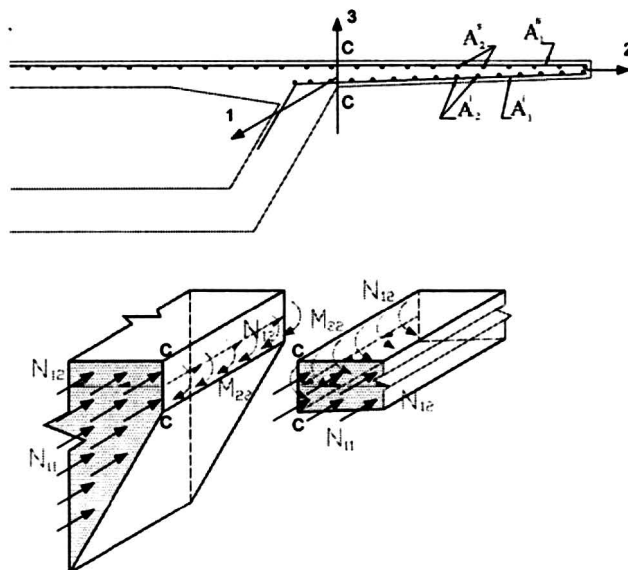


Figura 2.- Esfuerzos en una sección de arranque del voladizo de un tablero de puente.

El ejemplo que se estudia en este apartado corresponde a una situación frecuente en la comprobación de la armadura de la sección de arranque de los voladizos transversales de la sección de un puente. Esta sección de arranque se suele encontrar sometida a los esfuerzos momentos flectores de la flexión transversal del voladizo, así como a los esfuerzos rasantes generados por la transferencia de las tensiones longitudinales de la flexión

general del tablero desde estos voladizos al núcleo de la sección. Existe asimismo la compresión o tracción longitudinal, según los casos, en el ala de la sección que debe considerarse en el dimensionamiento de esta sección de arranque de voladizos. La figura 2 muestra de forma esquemática esta situación. Para detalles ver la referencia [2]. Aparece en estos casos una cierta controversia acerca de cómo debe combinarse las áreas de las armaduras transversales. En efecto, la armadura superior  $A_2^s$  de la figura 2 debe resistir en tracción la flexión del voladizo y además colaborar, mediante tensiones de corte, con la inferior  $A_1^i$  en la resistencia de los rasantes. Este doble trabajo de la armadura superior y su colaboración con la inferior, plantea algunas condiciones acerca de la distribución del área total precisa entre ambas armaduras para las que no existe unanimidad. Ver por ejemplo el capítulo 14 de [1].

**Disposición de armaduras en losas**

**Entrada de datos**

Unidad fundamental de longitud		mm	Unidad fundamental de fuerza		kN
<b>Datos del hormigón (incluidos los coeficientes de minoración)</b>					
Espesor de la placa	h		300.0	mm	
Módulo de elasticidad tangente inicial	$E_{c1}$		31.072	kN/mm <sup>2</sup>	
Tensión máxima de compresión	$f_c^*$		0.015	kN/mm <sup>2</sup>	
Deformación de rotura por compresión	$\epsilon_{cu}$		0.0038	-	
Fracción de la tensión correspondiente a $\epsilon_{cu}$ respecto $f_c^*$	$\beta$		0.850	-	
<b>Datos del acero (incluidos los coeficientes de minoración)</b>					
Módulo de elasticidad inicial	$E_{s1}$		200	kN/mm <sup>2</sup>	
Módulo de elasticidad con endurecimiento por deformación inicial	$E_{s2}$		0	kN/mm <sup>2</sup>	
Tensión de plastificación	$f_{sy}$		0.4435	kN/mm <sup>2</sup>	
Deformación de rotura	$\epsilon_{su}$		0.02	-	
<b>Esfuerzos de axiles y momentos flectores producidos por las acciones de servicio</b>					
En la dirección 1	$N_{11}$	-0.30	kN/mm	$M_{11}$	0.00 kN mm
En la dirección 2	$N_{22}$	0.00	kN/mm	$M_{22}$	120.00 kN mm
En la dirección tangencial de 1 a 2	$N_{12}$	0.22	kN/mm	$M_{12}$	0.00 kN mm
<b>Armaduras superiores</b>					
Dirección en planta	$\alpha_i$	90	0		° sexag.
Arca x unidad de longitud	$A_i$	1.0900	0.2725		mm <sup>2</sup> /mm
Recubrimiento	$r_i$	40	40		mm
<b>Armaduras inferiores</b>					
Dirección de disposición	$\alpha_i$	90	0		° sexag.
Arca en esa dirección	$A_i$	0.2750	0.0688		mm <sup>2</sup> /mm
Recubrimiento	$r_i$	40	40		mm
Nº de familias de armaduras superiores				Ndir1	2
Nº de familias de armaduras inferiores				Ndir2	2
Coeficiente multiplicador de los esfuerzos de servicio				$\lambda$	1.1 -
Número de pasos en los que dividimos $\lambda$				$\Delta\lambda$	1500 -

Figura 3.- Datos del ejemplo de aplicación.

Se supone que la losa en voladizo tiene un espesor de 300 mm. Las armaduras se disponen en forma ortogonal, es decir, paralelas a la luz del puente (eje  $Ox_1$ ) o armaduras longitudinales y las normales a éstas o armaduras transversales. Las densidades de las transversales superior e inferior, que resisten la flexión transversal del

voladizo y el rasante <sup>3</sup> son respectivamente  $1.09 \text{ mm}^2/\text{mm}$  y  $0.275 \text{ mm}^2/\text{mm}$ . Las armaduras longitudinales no se han proyectado pero se dispone, como es usual, un 25 % de las transversales. Por consiguiente, se tiene dos familias de armaduras en la cara superior de la losa de intensidades  $A_i = (1,09, 0,28) \text{ mm}^2/\text{mm}$  y otras dos en la cara inferior de densidades  $(0,275, 0,069) \text{ mm}^2/\text{mm}$ . Los ángulos de cada una de las dos familias de cada cara de la losa con el eje  $Ox_1$  son de  $0^\circ$  y de  $90^\circ$  respectivamente. El recubrimiento de todas las armaduras se supone es de 40 mm. Los materiales presentan unas propiedades de resistencia y coeficientes de seguridad típicos en estas estructuras. El hormigón está caracterizado por  $f_{cy} = 30 \text{ N/mm}^2$ , y por consiguiente  $f_c^* = 17 \text{ N/mm}^2$  y  $E_{ci} = 31072 \text{ N/mm}^2$ . En relación con el acero se supone que  $f_{yk} = 510 \text{ N/mm}^2$  por lo que  $E_{s1} = 200,000 \text{ N/mm}^2$ ,  $E_{s2} = 0$ ,  $f_{sy} = 443,5 \text{ N/mm}^2$  y  $\varepsilon_u = 0,02$ . Se han utilizado, por consiguiente, en el cálculo los valores de los coeficientes de seguridad para el hormigón y el acero de 1,5 y 1,15 respectivamente.

Los esfuerzos mayorados por un coeficiente  $\lambda = 1,55$  son  $p_0^T = (N_0^T, M_0^T)$  con  $N_0 = (-0,30, 0, 0,22) \text{ kN/mm}$  y  $M_0 = (0, 120, 0) \text{ mmkN/mm}$ .

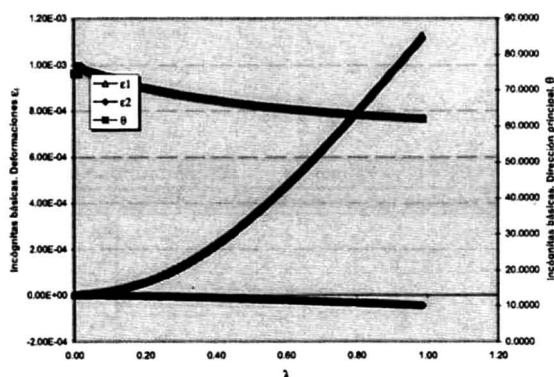


Figura 4.- Valores de las incógnitas básicas de extensión en función de  $\lambda$ .

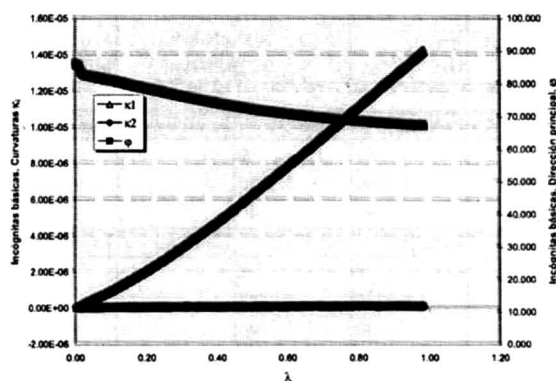


Figura 5.- Valores de las incógnitas básicas de flexión en función de  $\lambda$ .

La solución se determina mediante el programa de computador LOSA, que se basa en el procedimiento incremental-iterativo descrito. La entrada de datos de este programa se muestra en la figura 3. El programa permite comprobar el estado de las tensiones en el hormigón y en las armaduras a 1500 intervalos de carga en un punto de la losa. El cálculo se llevó a cabo en un PC Pentium III en un tiempo, mayor que el usado en el programa LAJA anterior, aproximadamente un minuto. Los resultados de este ejemplo, se presentan en forma gráfica

<sup>3</sup>Es usual en la práctica profesional disponer la mitad de la armadura precisa por el esfuerzo rasante en la parte inferior de la losa y en la superior sólo la armadura necesaria para resistir la flexión transversal o flexión del cantilever. Esta regla se ha utilizado para el proyecto de la armadura de este ejemplo.

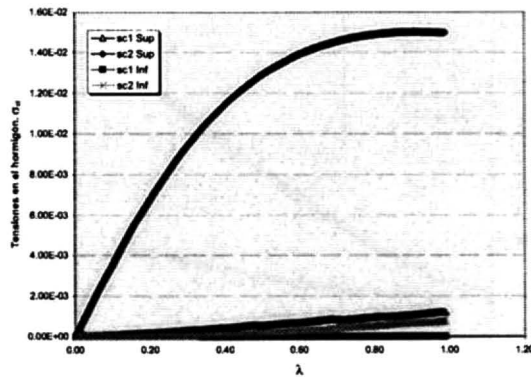


Figura 6.- Valores de los esfuerzos en el hormigón en función de  $\lambda$ .

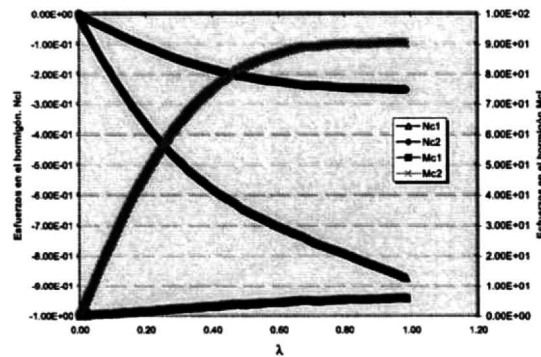


Figura 7.- Valores de las tensiones principales en el hormigón en función de  $\lambda$ .

en las figuras 4 a 9. Con objeto de reducir la salida numérica sólo se presentan los valores correspondientes a los últimos pasos de carga. A continuación se resumen algunos de estos resultados correspondientes a los valores del parámetro de mayoración  $\lambda = 0,986$  para el cual se produce el ELU, es decir, para los valores de las acciones de servicio multiplicadas por un coeficiente de seguridad igual 1.50.

Para el valor del coeficiente de mayoración  $\lambda = 0,986$  se obtienen los siguientes resultados:

- Valores de las incógnitas básicas:

$$\begin{aligned} \theta &= 62,068^0 & \varepsilon_1 &= 1,126 \times 10^{-3}, & \varepsilon_2 &= -4,471 \times 10^5 \\ \varphi &= 67,051^0 & \kappa_1 &= 1,417 \times 10^{-5}, & \kappa_2 &= 9,200 \times 10^{-8} \end{aligned}$$

- Las tensiones principales en las caras superior e inferior del hormigón expresadas en  $\text{kN/mm}^2$  son:

Cara superior	$\sigma_{c1} = 1,190 \times 10^3,$	$\sigma_{c2} = 1,496 \times 10^{-2}$
Cara inferior	$\sigma_{c1} = 0,$	$\sigma_{c2} = -7,732 \times 10^{-4}$

- Los esfuerzos principales en el hormigón, axiles en  $\text{kN/mm}$  y momentos flectores en  $\text{mmkN/mm}$  son:

Axiles	$N_{c1} = -0,873, \quad N_{c2} = -0,252$
Flectores	$M_{c1} = 5,780, \quad M_{c2} = 90,049$

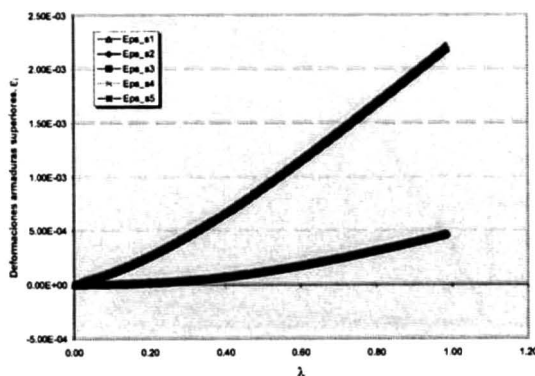


Figura 8.- Valores de los axiles en las armaduras superiores en función de  $\lambda$ .

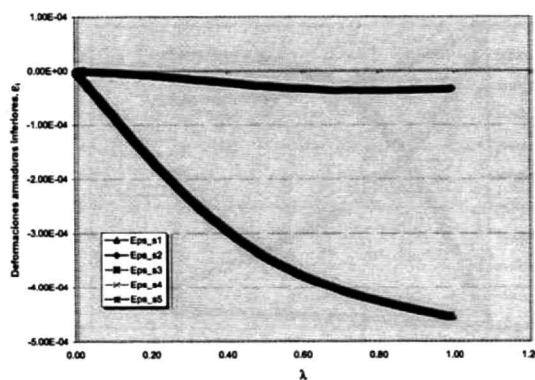


Figura 9.- Valores de los axiles en las armaduras inferiores en función de  $\lambda$ .

- Las deformaciones en las distintas familias de armaduras son:

Cara superior	$\epsilon_1 = 2,193 \times 10^{-3},$	$\epsilon_2 = 4,579 \times 10^{-4}$
Cara inferior	$\epsilon_1 = -4,541 \times 10^{-4},$	$\epsilon_2 = -3,334 \times 10^{-5}$

- Los axiles que se producen en las distintas familias de armaduras en kN/mm son:

Cara superior	$S_1 = 0,478$	$S_2 = 2,495 \times 10^{-2}$
Cara inferior	$S_1 = -2,497 \times 10^{-2},$	$S_2 = -4,585 \times 10^{-4}$

## 2. Conclusiones

Con el presente trabajo se ha pretendido mostrar la validez de las siguientes conclusiones:

- La comprobación del estado de tensiones del hormigón y del acero de las armaduras distribuidas en una estructura bidimensional de hormigón armado se puede llevar a cabo de forma unificada mediante la aplicación sistemática de las condiciones de equilibrio, compatibilidad y constitutivas que se desarrollan dentro de la teoría de la elasticidad lineal.
- El método que se presenta permite obtener, dentro de la filosofía y formato usuales en la práctica profesional del proyecto de estructuras de hormigón armado, la evolución de las características de la respuesta en un punto de la estructura, en función del coeficiente de amplificación de las cargas. En particular se

puede deducir los comportamientos en servicio y en el estado último de agotamiento de la sección en el punto de estudio.

- El método propuesto exige un mínimo de recursos de computación y el esfuerzo de cálculo es pequeño. Mediante un computador personal Pentium III es posible analizar, en unos pocos segundos, la historia del comportamiento de una estructura bidimensional en un punto en función del valor incrementado de la carga.
- La extensión del método propuesto a las situaciones de estructuras armadas con acero activo es inmediata. Las dificultades que pueden aparecer residen en la filosofía y formato inherentes a la comprobación de secciones por medio de una amplificación de los esfuerzos y a la no consideración del comportamiento no lineal de la estructura al acercarse las acciones a las de rotura. Esta situación puede exigir un replanteamiento de los conceptos de seguridad de una estructura que debe ser enmarcada dentro de una teoría de la fiabilidad estructural.
- El método desarrollado permite ser utilizado dentro de una programa general de cálculo de estructuras. Como es conocido, estos programas generales de cálculo de estructuras están normalmente basados en el método de los elementos finitos y orientados a la ingeniería industrial y aeronáutica más que a la civil, es decir, a las estructuras metálicas más que a las de hormigón armado. Con el método de comprobación unificado de estructuras 2-D de hormigón armado propuesto se puede automatizar la comprobación al agotamiento en las distintas secciones de las estructuras tipo losa y lámina. Para ello mediante un simple postprocesador, a partir de los resultados, en tensiones o esfuerzos, obtenidos del programa general en elementos finitos, se puede comprobar de forma automática la seguridad de la estructura. Es posible también para una malla y densidad de armaduras definidas obtener en una estructura bidimensional isolíneas de coeficientes de seguridad en ella.
- La conversión del método de comprobación propuesto en otro de dimensionamiento se puede llevar a cabo mediante técnicas de optimización bien directamente o dentro del programa de postproceso antes citado. En efecto, existen módulos de optimización en algunos programas generales, que permiten definir como variables de control a determinar, ya las áreas de las armaduras y/o sus inclinaciones en planta, de forma que minimicen para los resultados de un cálculo, que puede contener una o varias hipótesis, una función objetivo especificada (cuantía de acero, distribución homogénea de la seguridad etc.) con las pertinentes restricciones del proyecto.

## Referencias

- [1] Leonhardt, F. *Estructuras de Hormigón Armado. Bases para la construcción de puentes monolíticos*, vol. 6, pág. 231. Librería El Ateneo, Buenos Aires, 1987.
- [2] Samartín, A. *Cálculo de Estructuras de Puentes de Hormigón*. Ed. Rueda, Madrid, 1983.

\*\*\*