

Cálculo de estructuras espacialmente periódicas. Aplicación a tableros de puente

A. Samartín
Dr. Ing. C.C. y P.
Catedrático de la E.T.S. de
Ing. de Caminos C. y P. de Madrid

1. INTRODUCCION

Consideraciones relacionadas con la eficiencia constructiva, la idealización estructural, la estática o las ventajas mecánicas y resistentes son algunos de los factores que pueden motivar el proyecto o el cálculo de estructuras compuestas de elementos idénticos encadenados entre sí. Se pueden clasificar estas estructuras espacialmente periódicas en dos grupos: estructuras cíclicas y estructuras periódicas abiertas. En el primer grupo el último elemento de la cadena se une al primero, y todos los elementos están situados de tal forma que un observador cíclico permanece sin modificación cuando la estructura gira alrededor de su eje de simetría un ángulo $2\pi/n$, en donde n , es el número de elementos idénticos. En el segundo grupo los elementos se sitúan en serie abierta, de modo que se puede distinguir el primero y el último elemento. Este segundo grupo de estructuras periódicas, se pueden extender de modo que incluya la periodicidad en una, dos o tres dimensiones, denominándose estructuras periódicas lineales, bilineales o trilineales.

El objetivo de este artículo es obtener un procedimiento de cálculo de la estructura completa que tenga en cuenta su naturaleza periódica, sometida, sin embargo, a un conjunto de cargas arbitrarias no necesariamente periódicas. De este modo, se comprueba que es posible efectuar este cálculo como una combinación de cálculos más simples de estructuras de dimensión igual a la del elemento idéntico que se repite y, por consiguiente, reducir de un modo importante el esfuerzo computacional necesario.

A continuación, se exponen algunos procedimientos de cálculo de las características citadas que son aplicables a los dos tipos de estructuras periódicas, cíclicas y abiertas lineales.

2. ESTRUCTURAS CON SIMETRÍA CICLICA

2.1. Definiciones e hipótesis

Una estructura se define como cíclicamente simétrica de orden n con respecto a un eje O de rotación, si el aspecto elasto-estático que presenta respecto a un observador cíclico, permanece invariable por rotación de la estructura, alrededor de O , un ángulo $2\pi/n$. El aspecto elasto-estático comprende todas las propiedades de topología, geometría, elasticidad y coacciones que son esenciales a un cálculo lineal de la estructura [1].

Una estructura con simetría cíclica, no necesariamente posee un plano de simetría; por ejemplo, en la cúpula de Brno que es cíclica simétricamente, de orden 128, no existe un plano de simetría debido a las conexiones de las barras [2].

En esquema, se puede considerar una estructura con simetría cíclica como un conjunto de n elementos idénticos unidos entre sí en forma de cadena circular (Figura 1). Los elementos en sí pueden tener una geometría, propiedades y apoyos arbitrarios, pero la estructura como un todo contiene características periódicas. Ejemplos de este tipo de estructuras son los casos de las torres de refrigeración apoyadas en soportes aislados, cúpulas sobre planta poligonal regular, estructuras espaciales de revolución constituidas por barras, etc. Algunas se muestran en la figura 2. Todas ellas pueden ser calculadas bajo la acción de cargas arbitrarias de un modo sistemático, utilizando las características mecánicas de las subunidades que constituyen el sistema. A continuación se consideran estructuras que pueden ser descritas mediante un número finito de grados de libertad. El número de unidades que componen la estructura es n . Cada unidad se designa por un número j ($j = 0, 1, 2, \dots, n-1$) y está conectada mediante q grados

de libertad comunes, a cada una de las unidades adyacentes. Estos grados de libertad (g d l) de cada interfaz entre los elementos j y $j + 1$ (eventualmente $n-1$ y 0) se denominan con el índice j (eventualmente $n-1$).

Se supone que cada unidad se discretiza en elementos finitos y/o barras, y está caracterizada por la matriz de rigidez k y las cargas equivalentes p_0 en los nudos. Mediante condensación de los grados de libertad interiores, y conservando únicamente los q (g d l) de cada una de las dos interfaces, se obtiene la siguiente relación fuerzas-movimientos para el elemento j :

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1^{0j} \\ p_2^{0j} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Se ha designado por el índice 1 ó 2, respectivamente, a los grados de libertad de la interfaz del elemento j comunes con el anterior o posterior.

p_α y d_α ($\alpha = 1,2$) representan los vectores fuerzas sobre el elemento y los movimientos según los grados de libertad de la interfaz α . La dimensión de estos vectores es $qx1$.

$k_{\alpha\beta}$ es la submatriz de rigidez de dimensión qxq que relaciona p_α y d_β .

p_α^{0j} es el vector de fuerzas equivalentes en los gdl de la interfaz α . Su dimensión es $qx1$ y se conserva el superíndice j , para indicar la dependencia con el elemento j , es decir, las cargas no son en general cíclicamente simétricas.

Se supone que existen fuerzas aplicadas P_j directamente en los gdl externos de la estructura ($j = 0, 1, \dots, n-1$).

Los grados de libertad en las distintas interfaces se describen en coordenadas cilíndricas con eje O y se utilizarán los términos axial, radial y tangencial en el sentido apropiado respecto a estos ejes. Con objeto de eliminar la posibilidad de movimientos de sólido rígido en la estructura, ésta debe de tener al menos una coacción elástica al movimiento axial, al menos en un nudo (y por consiguiente en todos sus homólogos en las distintas unidades). De esta forma se asegura adecuadamente la inexistencia de giros con ejes normales a O . Por otra parte, para eliminar rotaciones respecto al eje O , al menos un punto (y por lo tanto todos sus homólogos) tiene que poseer una coacción elástica al movimiento tangencial.

2.2. Análisis de una estructura cíclica

Existen varios procedimientos de análisis de una estructura cíclica. Así, la utilización del método de la matriz de transferencia, adecuado dado el carácter árbol de la estructura, y el consiguiente análisis espectral de esta matriz [3]. Otra posibilidad consiste en el planteamiento para los gdl de cada interfaz de las ecuaciones matriciales de equilibrio. De esta forma se obtiene un sistema de ecuaciones en diferencias finitas que puede ser resuelto de acuerdo con los métodos usuales en el análisis matemático [4] y [5]. En este artículo, se planteará un procedimiento, conceptualmente

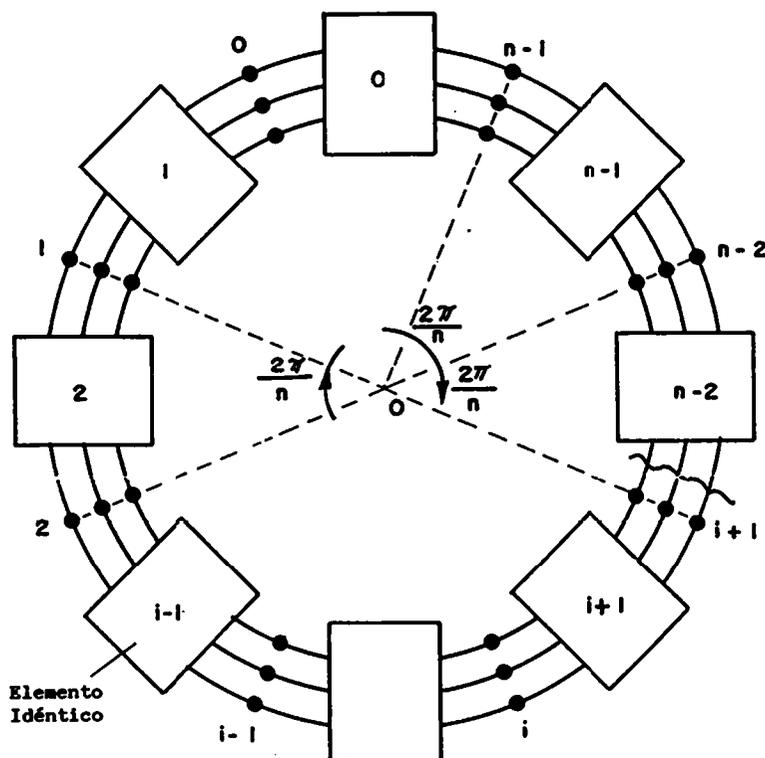
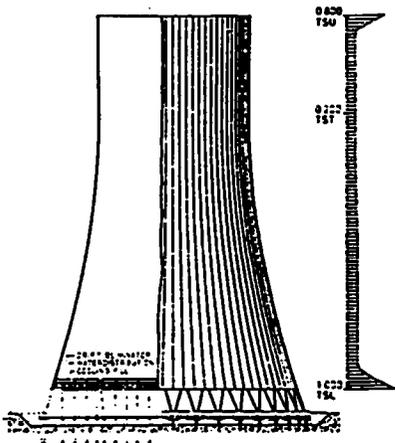
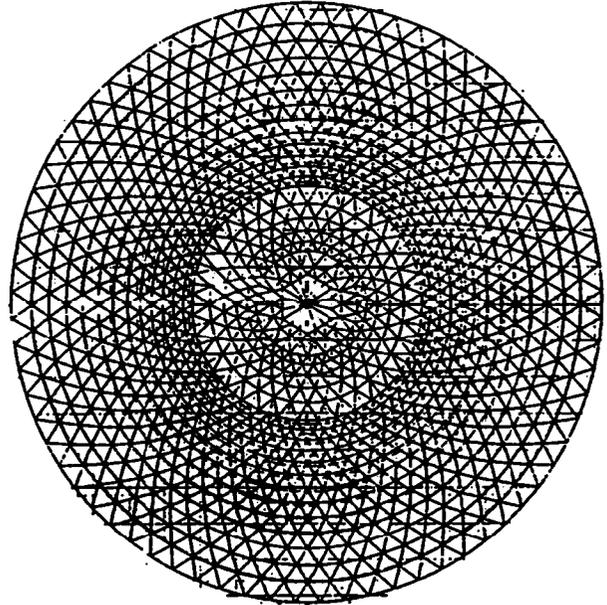
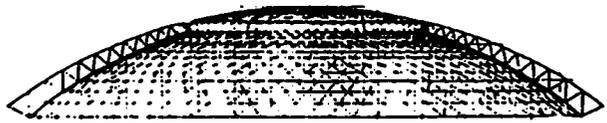


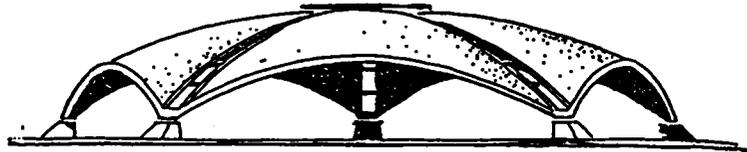
Fig. 1. Estructuras con simetría cíclica. Esquema.



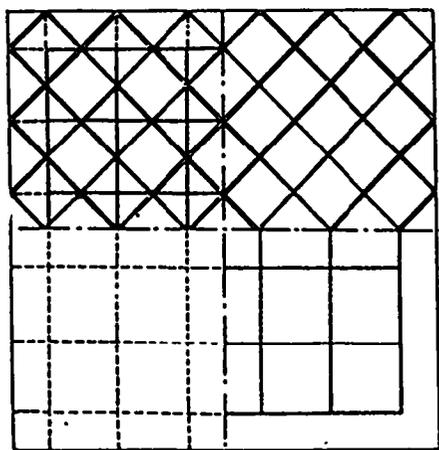
(a) Torre de refrigeración.



(b) Cúpula espacial.



(c) Lámina de cubierta.



— cara inferior
 — cara superior
 - - diagonales

(d) Gelosía espacial.

Fig. 2. Estructuras periódicas. Ejemplos.

simple, basado en la transformada de Fourier de las cargas y características de la estructura. Los datos del problema son las matrices $k_{\alpha\beta}$, las fuerzas iniciales p_{α}^{0j} equivalentes a las acciones sobre el elemento j y las fuerzas P^j actuando directamente en los gdl de la interfaz j .

Con estos datos, a partir de una subestructura, es posible ensamblar la matriz de rigidez global en coordenadas cilíndricas, así como las fuerzas totales, obteniéndose el siguiente sistema de qx_n ecuaciones lineales de equilibrio:

$$k d = p \quad (2.2.a)$$

o bien, en forma desarrollada

$$\begin{bmatrix} k_{11} + k_{22} & k_{12} & 0 & 0 & 0 & k_{21} \\ k_{21} & k_{11} + k_{22} & k_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{21} & k_{11} + k_{22} & k_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{11} + k_{22} & k_{12} \\ k_{12} & 0 & 0 & 0 & k_{21} & k_{11} + k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \dots \\ p_{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.2.b)$$

con

d_j el vector de movimientos en los gdl de la interfaz j

$$(j = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

p_j el vector de fuerzas conocidas en los gdl de la interfaz j

$$(j = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

con

$$p_j = -p_1^{0j-1} - p_2^{0j} + P_j$$

El sistema anterior es quasicircular, por lo que de acuerdo con el Apéndice A, se puede resolver como sigue:

Se descomponen las cargas en serie de Fourier discreta

$$p_k = \sum_{j=0}^{n-1} \bar{p}_j e^{-i \frac{2\pi}{n} j k} \quad \text{con } i = \sqrt{-1} \quad (2.3)$$

en donde \bar{p}_j son los coeficientes de Fourier del vector de cargas p_k que contiene todas las fuerzas a lo largo de la interfaz k . Se observa el signo negativo en el exponente en la transformación de Fourier.

La expresión de estos coeficientes de Fourier es

$$\bar{p}_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} p_k e^{i \frac{2\pi}{n} j k} \quad (2.4)$$

Por consiguiente, el factor de cargas de toda la estructura es:

$$p = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_k \\ \dots \\ p_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & I & \dots & I \\ I & Iz^{-1} & \dots & Iz^{-(n-1)} \\ I & Iz^{-2} & \dots & Iz^{-2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ I & Iz^{-k} & \dots & Iz^{-k(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ I & Iz^{-(n-1)} & \dots & Iz^{-(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}_0 \\ \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \dots \\ \bar{p}_k \\ \dots \\ \bar{p}_{n-1} \end{bmatrix}$$

con $z = e^{i \cdot 2\pi/n}$ e $I =$ matriz unidad de dimensión q , es decir, en forma compacta

$$p = Z \bar{p} \quad (2.5.b)$$

Por otra parte la matriz de rigidez global (2.2.a) que es quasi circular, puede expresarse de la forma siguiente:

$$k = Z B Z^{-1} \quad (2.6)$$

con

$$B = \begin{bmatrix} B_0 & & & 0 \\ & B_1 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & B_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$B_j = \sum_{k=0}^{n-1} A_k z^{-jk}$$

En este caso

$$A_0 = k_{11} + k_{22} = k_0$$

$$A_1 = k_{12} = k_1$$

$$A_2 = A_3 = \dots = A_{n-2} = 0$$

$$A_{n-1} = k_{21} = k_1^T$$

con lo que se deduce

$$B_j = k_0 + (k_1 + k_1^T) \cos \frac{2\pi j}{n} + i (k_1^T - k_1) \sin \frac{2\pi j}{n} = k_s + i k_a \quad (2.7)$$

Las ecuaciones de equilibrio global de la estructura son:

$$k d = p$$

con lo que al sustituir en ellas las expresiones anteriores, se obtiene:

$$Z B Z^{-1} d = Z \bar{p}$$

o bien

$$d = Z B^{-1} \bar{p} = Z \bar{d} \quad (2.8)$$

con

$$\bar{d} = B^{-1} \bar{p}$$

el vector transformado de Fourier del vector movimientos \bar{d} .

Expresando la ecuación anterior en función de los movimientos en cada interfaz, se deduce

$$\bar{d}_j = B_j^{-1} \bar{p}_j \quad (2.9)$$

y por consiguiente

$$d_k = \sum_{j=0}^{n-1} \bar{d}_j e^{-i \frac{2\pi}{n} j k} \quad (2.10)$$

2.3. Método de cálculo

En resumen, el procedimiento de cálculo sigue los siguientes pasos:

(1) Formar las submatrices de rigidez del elemento periódico, es decir:

$$k_0 = k_{11} + k_{22}; \quad k_1 = k_{12} \quad (2.11)$$

(2) Calcular las inversas de las matrices hermíticas, es decir, B_j^{-1} , siendo:

$$B_j = k_0 + (k_1 + k_1^T) \cos \frac{2\pi j}{n} + i (k_1^T - k_1) \sin \frac{2\pi j}{n} \quad (2.12)$$

(j = 0, 1, 2, ..., n-1)

(3) Calcular la transformada de Fourier de las cargas actuantes en cada elemento j:

$$\bar{p}_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} p_k e^{i \frac{2\pi}{n} j k} \quad (2.13)$$

En algunos casos particulares de cargas, como las simétricas radialmente o verticalmente uniformes, pueden ser calculadas estas transformadas de un modo analítico.

(4) Determinar, utilizando las fórmulas anteriores, los movimientos \bar{d}_j (transformada de Fourier) y d_k , de cada interfaz entre elementos:

$$\bar{d}_j = B_j^{-1} \bar{p}_j \quad (2.14)$$

$$d_k = \sum_{j=0}^{n-1} \bar{d}_j e^{-i \frac{2\pi}{n} j k} \quad (2.15)$$

(5) Una vez calculados los valores de los desplazamientos, se deducen las acciones sobre el elemento j, mediante la aplicación de la expresión (2.1), es decir:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_1 \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}_j + \begin{bmatrix} p_1^{0j} \\ p_2^{0j} \end{bmatrix}$$

con

$$d_1 = d_{j-1} \text{ (eventualmente para } j=0; d_1 = d_{n-1})$$

$$d_2 = d_j$$

Respecto al método de cálculo anterior, conviene hacer las siguientes observaciones:

La determinación de B_j^{-1} , representa un esfuerzo de cálculo relativamente importante, ya que debe efectuarse n veces la inversión de una matriz de dimensión 2×2 .

Si

$$B_j = k_s + i k_a \quad (2.16)$$

con

$$k_s = k_0 + (k_1 + k_1^T) \cos \frac{2\pi j}{n};$$

$$k_a = (k_1^T - k_1) \sin \frac{2\pi j}{n}$$

entonces, se deduce

$$B_j^{-1} = \bar{k}_s - i \bar{k}_a \quad (2.17)$$

siendo

$$\bar{k}_s = (k_s + k_a k_s^{-1} k_a)^{-1}$$

$$\bar{k}_a = (k_s + k_a k_s^{-1} k_a)^{-1} k_a k_s^{-1}$$

En el caso de que q sea pequeño, puede ser interesante, proceder a la inversión de la matriz B_j , en lugar de la fórmula (2.17), mediante una matriz simétrica \tilde{B}_j , de dimensión 2×2 , que es equivalente a la hermítica. La expresión de \tilde{B}_j , es

$$\tilde{B}_j = \begin{bmatrix} k_s & k_a \\ k_a^T & k_s \end{bmatrix}$$

La inversa de esta matriz se escribe

$$\tilde{B}_j^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{k}_s & -\bar{k}_a \\ -\bar{k}_a^T & \bar{k}_s \end{bmatrix}$$

Es interesante comprobar que las fórmulas (2.17) representan la inversión de \tilde{B}_j mediante submatrices de orden qxq .

Por otra parte, se observa que para cada valor de j , la matriz k_s , cuya inversa hay que determinar, es distinta. Si el número de orden cíclico n es importante, una alternativa, con objeto de reducir el esfuerzo de cálculo que significa este número elevado de inversiones, consiste en resolver previamente el problema de autovalores y autovectores siguiente.

$$\left| k_0 - \lambda (k_1 + k_1^T) \right| = 0 \quad (2.18)$$

Sean $\Delta = \text{diag} (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ los autovalores y $\psi = (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1})$ los autovectores del problema (2.18), entonces, se escribe:

$$\psi^T k_s \psi = \psi^T [k_0 + (k_1 + k_1^T) \cos \frac{2\pi}{n} j] \psi = k_s^* \quad (2.19)$$

siendo

$$k_s^* = \text{diag} (k_{sh}) \quad \text{con } h=0, 1, \dots, n-1$$

$$k_{sh} = [\lambda_h + \cos \frac{2\pi}{n} j] \psi_h^T (k_1 + k_1^T) \psi_h = (\lambda_h + \cos \frac{2\pi}{n} j) m_h^*$$

con

$$m_h^* = \psi_h^T (k_1 + k_1^T) \psi_h$$

La inversa buscada, de k_s es:

$$k_s^{-1} = \psi (k_s^*)^{-1} \psi^T \quad (2.20)$$

siendo

$$(k_s^*)^{-1} = \text{diag} \left[\frac{1}{(\lambda_h + \cos \frac{2\pi}{n} j) k_h^*} \right]$$

2.4. Casos particulares

Un caso particular del cálculo anterior corresponde a la actuación de cargas cíclicas, es decir, cuando se cumple la igualdad de acciones entre los gdl de cada interfaz:

$$p_0 = p_1 = \dots = p_{n-1} = p \quad (2.21)$$

En estas condiciones, los movimientos también son cíclicos, y por consiguiente

$$d_0 = d_1 = \dots = d_{n-1} = d \quad (2.22)$$

La ecuación (2.2.b) se transforma, en este caso, en una única para cada subunidad:

$$(k_{11} + k_{22} + k_{12} + k_{21}) d = p \quad (2.23)$$

La ecuación (2.23), corresponde a la expresión del principio de periodicidad estructural enunciado y aplicado en [6], que dice: "En el cálculo de un sistema compuesto por una serie de elementos idénticos, tanto en cargas, como en su aspecto

elásto-estático, sólo es preciso considerar un elemento típico, identificando los gdl exteriores, es decir, los de las dos interfaces que lo conectan con los elementos adyacentes. Este principio es aplicable no sólo a estructuras cíclicas, sino a las espacialmente periódicas en general".

La aplicación de este principio, puede efectuarse sobre el elemento típico completo, con sus gdl interiores sin eliminar mediante condensación estática. La figura 3, indica esta aplicación. Sean:

$$d_i, d_1, d_2$$

y

$$p_i, p_1, p_2$$

los movimientos y las fuerzas en los gdl interiores y en las interfaces 1 y 2 del elemento, respectivamente.

Las condiciones de simetría cíclica son:

$$d_{i1} = d_{i2} = d_e$$

y

$$p_1 = p_2 = p_e$$

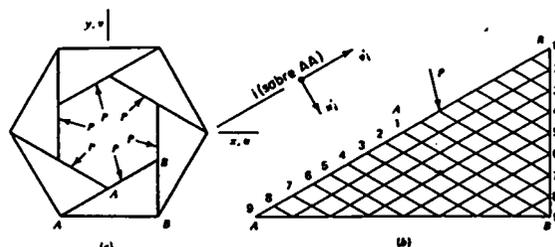
con p_e carga exterior aplicada en los gdl de una interfaz.

Las ecuaciones de equilibrio del elemento se obtienen mediante los métodos standard del cálculo matricial de estructuras; con lo que resulta:

$$\begin{bmatrix} k_{ii} & k_{i1} + k_{i2} \\ k_{ji} + k_{ji} & k_{11} + k_{22} + k_{12} + k_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_i \\ d_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_i \\ p_e \end{bmatrix}$$

con p_i las cargas en los gdl interiores.

Es decir, para el cálculo de la estructura puede utilizarse un programa standard (SAP, ANSYS, etc.), bastando únicamente, a efectos del ensamblaje estructural, numerar de un modo idéntico



D_1, D_A y D_B en gdl interiores, AA y BB respect.
 P_1, P_A y P_B " " " " " " " "

pero $P_A = 0$ ó $P_B = 0$ por simetría

R_A y R_B reacciones ($R_A = -R_B$)

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{1A} & K_{1B} \\ K_{A1} & K_{AA} & K_{AB} \\ K_{B1} & K_{BA} & K_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_A \\ D_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_A \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \\ R_A \\ R_B \end{bmatrix}$$

$D_B = D_A$ y $R_B + R_A = 0$ resulta

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{1A} + K_{1B} \\ K_{1A} + K_{1B} & K_{AA} + K_{AB} + K_{AB} + K_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_A \end{bmatrix}$$

Fig. 3. Ilustración del principio de periodicidad estructural.

los gdl de los bordes (interfaces) del elemento y referirlos a unos ejes locales (coordenadas cilíndricas) adecuados, como se indica en la figura 3.

Una simplificación adicional aparece cuando el elemento típico posee un plano radial de simetría, con lo que se cumple la igualdad

$$k_{11} = k_{22}$$

Las cargas con simetría cíclica que en general se distribuyen de forma arbitraria dentro de cada elemento, se pueden siempre descomponer, dentro de cada uno, como suma de una distribución simétrica más una antisimétrica de cargas, respecto al plano radial de simetría.

Cada uno de estos dos casos anteriores de carga, pueden ser calculados imponiendo condiciones de simetría o antisimetría en los dos bordes del elemento mitad, es decir, en los gdl situados en el plano radial de simetría y en los de una de las interfaces. Estas condiciones, como es bien conocido, son para cada caso las siguientes:

(1) Simetría de cargas.

Los desplazamientos normales al plano de simetría de carga, y los giros con ejes contenidos en el mismo son nulos.

Las acciones contenidas en el plano de simetría (fuerzas en el plano y momentos con eje normal al mismo) se dividen por dos.

(2) Antisimetría de cargas.

Los desplazamientos contenidos en el plano de simetría de cargas y los giros con ejes normal al mismo, son nulas.

Las acciones normales al plano de antisimetría (fuerzas normales y momentos con eje normal al mismo) se dividen por dos.

A veces, la discretización en elementos finitos no coincide con el plano de simetría (figura 4), por lo que se pueden introducir las condiciones de simetría en los nudos de la interfaz, como se ha indicado; pero en los nudos simétricos exteriores a la misma, las de periodicidad deberán introducirse en sus correspondientes ejes locales. Si A y A' son puntos simétricos pertenecientes a un único elemento

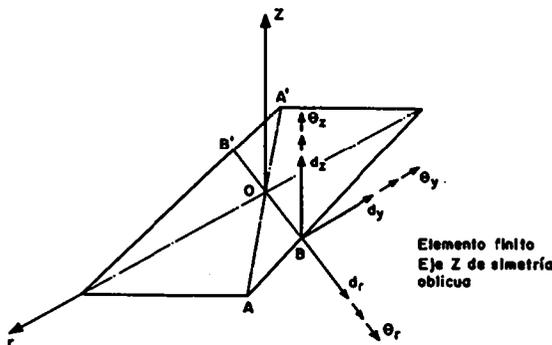


Fig. 4. Introducción de condiciones de simetría.

mento cortado por el plano de simetría, estas condiciones de simetría son en coordenadas cilíndricas.

Desplazamientos	Giros
$d_\psi(A) = d_\psi(A')$	$\theta_\psi(A) = \theta_\psi(A')$
$d_r(A) = d_r(A')$	$\theta_r(A) = \theta_r(A')$
$d_z(A) = d_z(A')$	$\theta_z(A) = \theta_z(A')$

Las condiciones de antisimetría de la carga son las anteriores cambiadas de signo.

Un caso particular muy interesante de simetría cíclica estructural, corresponde a $n = 2$, que se suele denominar simetría oblicua. No será tratado específicamente en el breve espacio de este artículo.

2.5. Ejemplo ilustrativo

Movimientos en la estructura reticulada de la figura 5 correspondiente a un triángulo equilátero.

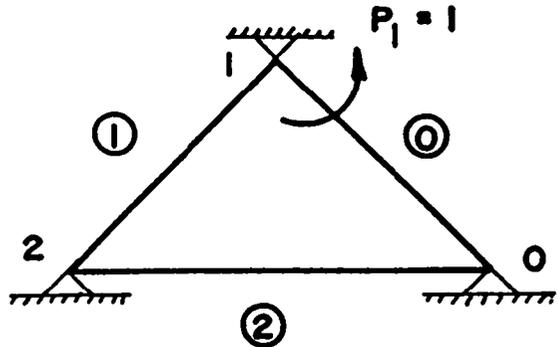


Fig. 5. Estructura cíclica. Ejemplo ilustrativo.

Rigidez de una barra

$$k = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \frac{EI}{L}$$

Por consiguiente, se deduce en este caso:

$$k_0 = \frac{8EI}{L}; \quad k_1 = k_1^T = \frac{2EI}{L}$$

$$n = 3; \quad \alpha = \frac{2\pi}{3}$$

Transformada de las cargas:

$$\bar{p}_j = \frac{1}{3} e^{i\alpha_j} P_1$$

Matriz de impedancia y su inversa:

$$B_j = \frac{4EI}{L} (2 + \cos \alpha_j); \quad B_j^{-1} = \frac{L}{4EI} \frac{1}{2 + \cos \alpha_j}$$

Los movimientos son

$$d_k = \sum_{j=0}^2 \bar{d}_j e^{-i\alpha_j k} =$$

$$= \frac{L}{12 EI} \sum_{j=0}^2 \frac{e^{-i\alpha_j(k-1)}}{2 + \cos \alpha_j} P_1$$

es decir

$$d_0 = \frac{L}{12 EI} \sum_{j=0}^2 \bar{d}_j e^{i\alpha_j} =$$

$$= P_1 \frac{L}{12 EI} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{1,5} \right) = -\frac{L}{36 EI} P_1$$

$$d_1 = \frac{L}{12 EI} \sum_{j=0}^2 \bar{d}_j =$$

$$= P_1 \frac{L}{12 EI} \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{1,5} \right) = -\frac{5L}{36 EI} P_1$$

$$d_2 = \frac{L}{12 EI} \sum_{j=0}^2 \bar{d}_j e^{-i\alpha_j} =$$

$$= P_1 \frac{L}{12 EI} \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{1,5} \right) = -\frac{L}{36 EI} P_1$$

Los esfuerzos en cada extremo de barra son:

Barra 0:

$$\begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} \frac{P_1 L}{36 EI} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} P_1$$

Barra 1:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{P_1 L}{36 EI} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} P_1$$

Barra 2:

$$\begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{P_1 L}{36 EI} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix} P_1$$

3. ESTRUCTURAS ESPACIALMENTE PERIÓDICAS

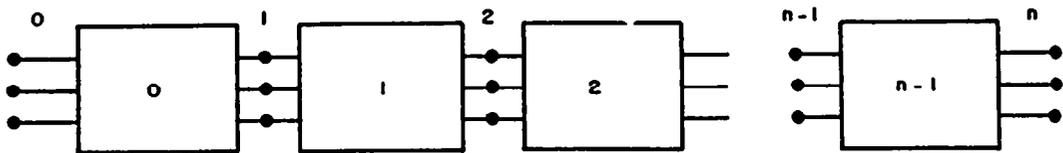
3.1. Definición

Existe otro tipo de estructuras compuestas por múltiples elementos idénticos, unidos en forma de cadena abierta (Figura 6). En contraposición a las estructuras con simetría cíclica de tipo cadena cerrada, aquí en las estructuras se puede distinguir un primer elemento (elemento 0) y un último designado por $n-1$. Cada uno de estos elementos presenta idénticas propiedades y condiciones de contorno, a excepción de las interfaces extremas (designadas por 0 y n) que pueden poseer otro tipo de condiciones de contorno.

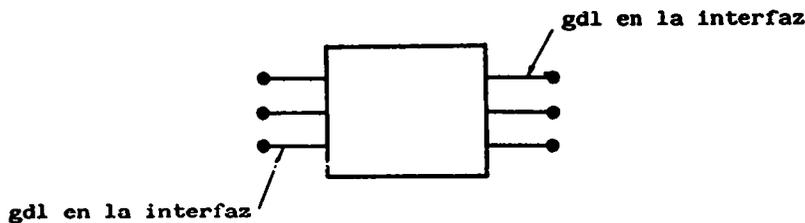
Se observa que si se aplica una traslación a un elemento i , este coincide con el siguiente $i+1$; de ahí el nombre de estructuras espacialmente periódicas. Esta periodicidad, puede referirse a una traslación o bien a una rotación alrededor de un eje 0. Ambas situaciones pueden ser tratadas de forma unificada, considerando bien unos ejes rectangulares cartesianos en el primer caso o unos ejes cilíndricos con origen en 0 en el segundo, para describir los q grados de libertad comunes en cada interfaz entre elementos.

Utilizando idéntica notación que en el apartado 2.1, la relación fuerzas-movimientos para el elemento j es:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}_j + \begin{bmatrix} p_1^{0j} \\ p_2^{0j} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$



a) Estructura.



b) Elemento.

Fig. 6. Estructuras espacialmente periódicas.

3.2. Análisis de una estructura espacialmente periódica

Existen distintos métodos de análisis de estructuras periódicas espacialmente, pero aquí sólo se expone el análogo al utilizado en las estructuras cíclicas, y que está basado en la aplicación de la transformación de Fourier.

Se supone que existen coacciones adecuadas, bien en algunos gdl de las interfaces intermedias de la estructura, o bien en los gdl de las interfaces extremas.

Con esta hipótesis, a partir de la ecuación (3.1) válida para cada elemento, es posible, mediante ensamblaje, obtener la matriz de rigidez global de la estructura, llegando al siguiente sistema de $qx(n+1)$ ecuaciones lineales:

$$k d = p \quad (3.2)$$

en donde las matrices de rigidez k y vectores de movimientos d y fuerzas p , son:

$$k = \begin{bmatrix} k_{11} + \bar{k}_{22} & k_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{11} + k_{12} & k_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_{12} & k_{11} + k_{22} & k_{12} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & k_{11} + k_{22} & k_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & k_{21} & \bar{k}_{11} + k_{22} \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}; \quad p = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} p_1^{0,0} \\ -p_2^{0,0} + p_1^{0,1} \\ -p_2^{0,1} + p_1^{0,2} \\ \vdots \\ p_1^{0,n-1} + p_1^{0,n-1} \\ p_2^{0,n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{n-1} \\ P_n \end{bmatrix}$$

con \bar{k}_{22} y \bar{k}_{11} las submatrices adicionales del primero y último elemento, respectivamente, en las que pueden estar incluidas las condiciones específicas de borde.

Las restantes matrices y vectores se designan como en el apartado 2 anterior. El sistema (3.2) se escribe de forma que presente una estructura matricial circulante, como sigue:

$$\begin{bmatrix} k_0 & k_1 & 0 & \dots & 0 & k_1^T \\ k_1^T & k_0 & k_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_1^T & k_0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_1 & 0 & 0 & \dots & k_1^T & k_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 + k'_0 d_0 + k_1^T d_n \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n + k'_n d_n + k_1 d_0 \end{bmatrix} \quad (3.3.a)$$

con

$$\begin{aligned} k_0 &= k_{11} + k_{22}; & k_1 &= k_{12} \\ k'_0 &= k_{22} - \bar{k}_{22}; & k'_n &= k_{11} - \bar{k}_{11} \end{aligned} \quad (3.3.b)$$

Con objeto de resolver esta estructura, se procede, como es normal en el cálculo de estructuras, en dos fases. En la primera se determina la rigidez de la misma, considerando los gdl en las interfaces extremas 0 y n . En la segunda fase se calcula la estructura supuesta ésta coaccionada totalmente en sus extremos y bajo la actuación de todas las cargas existentes, obteniéndose así la solución inicial. La combinación de los dos cálculos de modo que se satisfaga el equilibrio en los gdl de las interfaces extremas, permite obtener la solución final.

En ambas fases de cálculo, se utilizarán los resultados deducidos en el Apéndice A, en relación con las matrices circulantes.

3.3. Matriz de rigidez

Se puede deducir del sistema (3.2) con cargas

p_0 y p_n únicamente, es decir, $p_j = 0$ en $j = 1, 2, \dots, n-1$. Para la resolución del citado sistema se definen las siguientes matrices hermíticas:

$$\begin{aligned} B_j &= k_0 + (k_1 + k_1^T) \cos \frac{2\pi}{n+1} j + \\ &+ i (k_1^T - k_1) \sin \frac{2\pi}{n+1} j = k_s + i k_a \end{aligned} \quad (3.4)$$

con

$$i = \sqrt{-1} \quad j = 0, 1, 2, \dots, n$$

Se han suprimido en (3.4), por comodidad de escritura, los índices j , en las matrices simétricas k_s y antisimétrica k_a .

La inversa de B_j , es:

$$B_j^{-1} = \bar{k}_s - i \bar{k}_a \quad (3.5)$$

en donde \bar{k}_s y \bar{k}_a pueden determinarse de varias formas. En particular, se pueden calcular mediante las expresiones siguientes:

$$\bar{k}_s = (k_s + k_a k_s^{-1} k_a)^{-1}$$

$$\bar{k}_a = \bar{k}_s k_a k_s^{-1}$$

Las transformadas de Fourier de las fuerzas son

$$\bar{p}_j = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n p_k e^{i \frac{2\pi}{n+1} jk}$$

es decir, si se suponen que no existen fuerzas intermedias, sólo en los bordes $k=0$ y $k=n$, se obtiene

$$\bar{p}_j = \frac{1}{n+1} [(p_0 + k'_0 d_0 + k_1^T d_n) + (p_n + k_1 d_0 + k'_n d_n) e^{-\frac{2\pi j}{n+1} j}]$$

La transformada de Fourier de los desplazamientos es:

$$\bar{d}_j = \frac{1}{n+1} B_j^{-1} [(p_0 + k'_0 d_0 + k_1^T d_n) + (p_n + k_1 d_0 + k'_n d_n) e^{-\frac{2\pi j}{n+1} j}]$$

Los desplazamientos reales se calculan mediante la aplicación de la fórmula de transformación inversa de Fourier, es decir:

$$d_k = \sum_{j=0}^n \bar{d}_j e^{-i \frac{2\pi}{n+1} jk}$$

En particular, los movimientos de las interfaces extremas $k=0$ y $k=n$, son:

$$d_0 = \sum_{j=0}^n \bar{d}_j = S_0 (p_0 + k'_0 d_0 + k_1^T d_n) + S_{-1} (p_n + k_1 d_0 + k'_n d_n) \quad (3.6)$$

$$d_n = \sum_{j=0}^n \bar{d}_j e^{i \frac{2\pi}{n+1} j} = S_1 (p_0 + k'_0 d_0 + k_1^T d_n) +$$

$$+ S_0 (p_n + k_1 d_0 + k'_n d_n)$$

siendo

$$S_0 = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n B_j^{-1}$$

$$S_1 = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n B_j^{-1} e^{i \frac{2\pi}{n+1} j}$$

$$S_{-1} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n B_j^{-1} e^{-i \frac{2\pi}{n+1} j}$$

o bien, de forma única, para h genérico:

$$S_h = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n B_j^{-1} e^{i \frac{2\pi}{n+1} jh}$$

Se observa que se cumple $S_h = S_{h+n+1}$.

A partir de (3.6) se deduce la matriz de rigidez:

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{00} & k_{0n} \\ k_{n0} & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_n \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

con

$$\begin{aligned} k_{00} &= S^{-1} S_0 - k'_0 \\ k_{0n} &= -S^{-1} S_{-1} - k_1^T \\ k_{n0} &= -S^{-1} S_1 - k_1 \\ k_{nn} &= S^{-1} S_0 - k'_n \\ S &= -S_1 S_{-1} + S_0 S_0 \end{aligned}$$

3.4. Solución inicial

Finalmente, la solución inicial, es decir, la carga equivalente en los gdl de las interfaces extremas (0, n) a una aplicada en los gdl de la interfaz interior h , con $d_0 = d_n = 0$ (empotramiento total) se obtiene resolviendo el sistema:

$$\begin{bmatrix} k_0 & k_1 & 0 & \dots & 0 & k_1^T \\ k_1^T & k_0 & k_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & k_0 & \dots & k_0 & k_1 \\ k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & k_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{p}_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hat{p}_n \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

en donde \hat{p}_0 y \hat{p}_n son reacciones desconocidas, por lo que en las ecuaciones correspondientes a los gdl de las interfaces 0 y n, se conocen los movimientos d_0 y d_n (3.8).

Procediendo análogamente con la matriz circulante, se obtiene:

$$\bar{p}_j = \frac{1}{n+1} [\hat{p}_0 + \hat{p}_n e^{-i \frac{2\pi}{n+1} j} + p_h e^{i \frac{2\pi}{n+1} hj}]$$

$$\bar{d}_j = \frac{1}{n+1} B_j^{-1} [\hat{p}_0 + \hat{p}_n e^{-i\frac{2\pi}{n+1}j} + p_h e^{i\frac{2\pi}{n+1}hj}]$$

Los movimientos son:

$$d_k = \sum_{j=0}^n \bar{d}_j e^{-i\frac{2\pi}{n+1}jk} \quad (3.9)$$

Los movimientos en las interfaces 0 y n son, por consiguiente:

$$\begin{aligned} d_0 &= \sum_{j=0}^n \bar{d}_j = 0 \\ d_n &= \sum_{j=0}^n \bar{d}_j e^{-i\frac{2\pi}{n+1}jn} = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

El sistema (3.10) permite obtener los valores de las reacciones incógnitas \hat{p}_0 y \hat{p}_n y se puede escribir como sigue:

$$S_0 \hat{p}_0 + S_{-1} \hat{p}_n + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n B_j^{-1} e^{i\frac{2\pi}{n+1}hj} \cdot p_h = 0 \quad (3.11)$$

$$S_1 \hat{p}_0 + S_0 \hat{p}_n + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n B_j^{-1} e^{i\frac{2\pi}{n+1}(h+1)j} \cdot p_h = 0$$

La solución de (3.11) es:

$$\hat{p}_0 = \frac{S^{-1}}{n+1} \left[\sum_{j=0}^n B_j^{-1} e^{i\frac{2\pi}{n+1}hj} (e^{i\frac{2\pi}{n+1}j} S_{-1} - S_0) \right] p_h \quad (3.12)$$

$$\hat{p}_n = \frac{S^{-1}}{n+1} \left[\sum_{j=0}^n B_j^{-1} e^{i\frac{2\pi}{n+1}hj} (e^{i\frac{2\pi}{n+1}j} S_0 + S_1) \right] p_h$$

que puede escribirse en la siguiente forma:

$$\hat{p}_0 = S^{-1} (S_{h+1} S_{-1} - S_h S_0) \quad (3.12.a)$$

$$\hat{p}_n = S^{-1} (-S_{h+1} S_0 - S_h S_1)$$

con S_h definido anteriormente.

Conocidas las reacciones \hat{p}_0 y \hat{p}_n se deducen los movimientos de la solución inicial mediante (3.9).

3.5. Solución final

La solución final se obtiene como suma de la inicial y la modal producidas por los movimientos en las interfaces extremas, de forma que el equilibrio se satisfaga en las mismas. Se designan con un superíndice F (final), I (inicial) y M (modal) para indicar la correspondiente solución. Por consiguiente, se escribe:

$$d_k^F = d_k^I + d_k^M \quad (3.13)$$

Los movimientos d_k^M se deducen a partir de la ecuación de equilibrio:

$$\begin{bmatrix} k_{00} & k_{0n} \\ k_{n0} & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0^M \\ d_n^M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{p}_0 \\ \hat{p}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_n \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

con \hat{p}_0 y \hat{p}_n definidas en (3.12). Una vez determinados los movimientos d_0^M y d_n^M los restantes se obtienen mediante la expresión:

$$d_k^M = \sum_{j=0}^n \bar{d}_j^M e^{-i\frac{2\pi}{n+1}jk} \quad (3.15)$$

siendo

$$\begin{aligned} \bar{d}_j^M &= \frac{1}{n+1} B_j^{-1} [(k'_{00} d_0^M + k_1^T d_n^M) + \\ &+ (k_1 d_0^M + k'_n d_n^M) e^{-i\frac{2\pi}{n+1}j}] \end{aligned}$$

Los movimientos de d_k^I son:

$$d_k^I = \sum_{j=0}^n \bar{d}_j^I e^{-i\frac{2\pi}{n+1}jk} \quad (3.16)$$

siendo

$$\bar{d}_j^I = \frac{1}{n+1} B_j^{-1} [\hat{p}_0 + \hat{p}_n e^{-i\frac{2\pi}{n+1}j} + p_h e^{i\frac{2\pi}{n+1}hj}]$$

con \hat{p}_0 y \hat{p}_n definidas en (3.12).

Una vez conocidos los movimientos finales d_k^F , se obtienen las acciones sobre el elemento j, mediante las expresiones:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_j \\ d_{j+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1^{0j} \\ p_2^{0j} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$j = 1, 2, \dots, n-2$$

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} \bar{k}_{11} + \bar{k}_{22} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}_{n-1} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & \bar{k}_{11} + \bar{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

Una observación última referente a la posibilidad de obtener la solución final de forma más directa en los casos frecuentes de bordes libres, es decir, con movimientos desconocidos d_0 y d_n . Se supone en estos casos que las condiciones de borde están incluidas en las matrices adicionales \bar{k}_{11} y \bar{k}_{22} .

El procedimiento que se debe seguir, parte de la ecuación (3.3) con $p_j = 0$ para $j \neq h$; $j = 1, 2, \dots$ y p_h fuerzas conocidas, que se escriben ahora:

$$\begin{bmatrix} k_0 & k_1 & 0 & \dots & 0 & k_1^T \\ k_1^T & k_0 & k_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_1^T & k_0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_0 & k_1 \\ k_1 & 0 & 0 & \dots & k_1^T & k_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k'_0 d_0 + k_1^T d_n \\ 0 \\ 0 \\ p_h \\ 0 \\ \vdots \\ k'_n d_n + k_1 d_0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

La transformada de Fourier de las fuerzas de este sistema de ecuaciones es:

$$\bar{p}_j = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n p_k e^{i \frac{2\pi}{n+1} jk} \quad (3.18)$$

es decir

$$\bar{p}_j = \frac{1}{n+1} [(k'_0 d_0 + k_1^T d_n) + (k_1 d_0 + k'_n d_n) e^{-i \frac{2\pi}{n+1} j} + p_h e^{i \frac{2\pi}{n+1} jh}] \quad (3.19)$$

La transformada de Fourier de los desplazamientos es:

$$\bar{d}_j = B_j^{-1} \bar{p}_j \quad (3.20)$$

cuya inversa conduce a los desplazamientos reales

$$d_k = \sum_{j=0}^n \bar{d}_j e^{-i \frac{2\pi}{n+1} jk} \quad (3.21)$$

Particularizando la ecuación anterior para $k=0$ y $k=n$, se deduce

$$d_0 = S_0 (k'_0 d_0 + k_1^T d_n) + S_{-1} (k_1 d_0 + k'_n d_n) + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n B_j^{-1} e^{i \frac{2\pi}{n+1} jh} p_h \quad (3.22)$$

$$d_n = S_1 (k'_0 d_0 + k_1^T d_n) + S_0 (k_1 d_0 + k'_n d_n) +$$

$$+ \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n B_j^{-1} e^{i \frac{2\pi}{n+1} (h+1)j} p_h$$

A partir de las ecuaciones (3.22) se determinan los movimientos incógnitas d_0 y d_n como sigue:

$$\begin{bmatrix} d_0 \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0 & S_n \\ S_1 & S_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k'_0 & k_1^T \\ k_1 & k'_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_h \\ S_{h+1} \end{bmatrix} p_h \quad (3.23)$$

con

$$S_h = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n B_j^{-1} e^{i \frac{2\pi}{n+1} jh}$$

$$S_{h+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n B_j^{-1} e^{i \frac{2\pi}{n+1} j(h+1)}$$

es decir

$$\begin{bmatrix} d_0 \\ d_n \end{bmatrix} = F^{-1} \begin{bmatrix} S_h \\ S_{h+1} \end{bmatrix} p_h$$

siendo

$$F = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S_0 & S_n \\ S_1 & S_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k'_0 & k_1^T \\ k_1 & k'_n \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Si se denomina $S_h = \alpha_h + i \beta_h$, la ecuación (3.23) se transforma en la siguiente:

$$\begin{bmatrix} d_0 \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_n \\ \alpha_n & \alpha_0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_n \\ \beta_n & \beta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k'_0 & k_1^T \\ k_1 & k'_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_h \\ \alpha_{h+1} \end{bmatrix} p_h + i \begin{bmatrix} \beta_h \\ \beta_{h+1} \end{bmatrix} p_h$$

Si se separan las partes reales e imaginarias de la ecuación, se obtiene al observar que d_0 y d_n son reales:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_n \\ \alpha_n & \alpha_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k'_0 & k_1^T \\ k_1 & k'_n \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \alpha_h \\ \alpha_{h+1} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_h \\ \alpha_{h+1} \end{bmatrix} p_h$$

$$\begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_n \\ \beta_1 & \beta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k'_0 & k_1^T \\ k_1 & k'_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \beta_h \\ \beta_{h+1} \end{bmatrix} P_h$$

En la resolución de los sistemas de ecuaciones anteriores, es posible conservar el esquema particionado de las matrices, si se utiliza la igualdad siguiente de la inversión de matrices:

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$$

en donde

$$\begin{aligned} H_{11} &= (F_{11} - F_{22}^{-1} F_{21} F_{12})^{-1} \\ H_{12} &= -H_{11} F_{12} F_{22}^{-1} \\ H_{21} &= -F_{22}^{-1} F_{21} H_{11} \\ H_{22} &= (F_{22}^{-1} - F_{22}^{-1} F_{21} H_{21})^{-1} \end{aligned}$$

Una vez conocidas d_0 y d_n , se obtienen los restantes movimientos mediante la sucesiva aplicación de (3.19), (3.20) y (3.21) con lo que resulta:

$$\begin{aligned} d_k &= \sum_{j=0}^n \bar{d}_j e^{-i \frac{2\pi}{n+1} jk} = \sum_{j=0}^n B_j^{-1} \bar{p}_j e^{-i \frac{2\pi}{n+1} jk} \\ &+ \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n B_j^{-1} [(k'_0 d_0 + k_1^T d_n) + \\ &+ (k_1 d_0 + k'_n d_n) e^{-i \frac{2\pi}{n+1} j} + \\ &+ p_h e^{i \frac{2\pi}{n+1} jh}] e^{-i \frac{2\pi}{n+1} jk} = S_{-k} (k'_0 d_0 + k_1^T d_n) + \\ &+ S_{-(k+1)} (k_1 d_0 + k'_n d_n) + S_{h-k} P_h \end{aligned}$$

o bien en forma matricial:

$$d_k = [S_k \ S_{-(k+1)}] \begin{bmatrix} k'_0 & k_1^T \\ k_1 & k'_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_n \end{bmatrix} + S_{h-k} P_h$$

3.6. Ejemplo ilustrativo

Se considera una viga continua de tres vanos, de sección y luces iguales, (Figura 7). Este ejemplo en cadena abierta (simetría espacial) corresponde a la contrapartida del estudiado anteriormente con simetría cíclica.

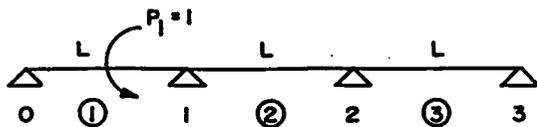


Fig. 7. Estructura periódica abierta. Ejemplo ilustrativo.

En este caso se tiene

$$n=3 ; k_0 = 8 \frac{EI}{L} ; k_1 = k_1^T = 2 \frac{EI}{L}$$

$$\bar{k}_{11} = \bar{k}_{22} = 0 ; k'_0 = k'_n = 4 \frac{EI}{L}$$

La matriz de rigidez se obtiene (para los gdl 0 y 3) de acuerdo con las fórmulas (3.7).

$$B_j = 4 \frac{EI}{L} (2 + \cos j\alpha) \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{2\pi}{n+1} = \frac{\pi}{2}$$

$$B_j^{-1} = \frac{L}{4EI} \frac{1}{2 + \cos j\alpha}$$

$$S_0 = \frac{L}{16EI} \frac{3}{7} ; S_1 = S_{-1} = \frac{L}{16EI} \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$S = S_0 S_0 - S_1 S_{-1} = \left(\frac{L}{16EI}\right)^2 5 ; S^{-1} = \left(\frac{16EI}{L}\right)^2 \frac{1}{5}$$

$$k_{00} = S^{-1} S_0 - k'_0 = \frac{EI}{L} \left[\frac{16}{5} \cdot \frac{7}{3} - 4 \right] = \frac{52}{15} \frac{EI}{L} = k_{33}$$

$$k_{03} = S^{-1} S_{-1} - k_1^T = \frac{EI}{L} \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{16}{5} - 2 \right] = \frac{2}{15} \frac{EI}{L} = k_{30}$$

$$\underline{k} = \frac{EI}{15L} \begin{bmatrix} 52 & 2 \\ 2 & 52 \end{bmatrix}$$

Las cargas equivalentes a una fuerza (momento) en el gdl 1, se deducen de acuerdo con (3.12), resultando ($h=1$):

$$S_{h+1} = S_2 = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n B_j^{-1} e^{i\alpha j 2} = \frac{L}{16EI} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \hat{p}_0 &= S^{-1} [S_2 S_{-1} - S_1 S_0] P_1 = \\ &= \frac{1}{5} \left[\frac{1}{3} \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{3} \right] P_1 = \frac{4}{15} P_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{p}_3 &= S^{-1} [-S_2 S_0 + S_1 S_1] P_1 = \\ &= \frac{1}{5} \left[-\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{3} + \frac{4}{9} \right] P_1 = -\frac{1}{15} P_1 \end{aligned}$$

El resultado final se deduce del sistema

$$\frac{EI}{15L} \begin{bmatrix} 52 & 2 \\ 2 & 52 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_3 \end{bmatrix} + \frac{P}{15} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

cuya solución es:

$$\begin{bmatrix} d_0 \\ d_3 \end{bmatrix} = \frac{L}{EI} \begin{bmatrix} -\frac{7}{90} \\ +\frac{2}{90} \end{bmatrix} P$$

Los restantes movimientos son, de acuerdo con (3.18):

$$d_k = (k'_0 d_0 + k_1^T d_n) S_{-k} + (k_1 d_0 + k_n^T d_n) S_{-(k+1)} + P_h S_{h-k}$$

$$d_0 = \frac{1}{16} \left[\left(-4 \cdot \frac{7}{90} + 2 \cdot \frac{2}{90} \right) \frac{7}{3} + \left(2 - \frac{7}{90} + 4 \cdot \frac{2}{90} \right) \left(-\frac{2}{5} - \frac{2}{3} \right) \right] \frac{PL}{EI} =$$

$$= \frac{1}{16 \times 3 \times 90} [(-24) \cdot 7 + (-1) \cdot (-2) + 90 \cdot (-2)] \frac{PL}{EI} = -\frac{7}{90} \frac{PL}{EI}$$

$$d_1 = \frac{1}{16 \times 3 \times 90} [-24 \cdot (-2) + (-6) \cdot (1) + 90 \cdot 7] \frac{PL}{EI} = -\frac{14}{90} \frac{PL}{EI}$$

$$d_2 = \frac{1}{16 \times 3 \times 90} [-24 \cdot 1 + (-6) \cdot (-2) + 90 \cdot (-2)] \frac{PL}{EI} = -\frac{4}{90} \frac{PL}{EI}$$

$$d_3 = \frac{1}{16 \times 3 \times 90} [-24 \cdot (-2) + (-6) \cdot (7) + 90 \cdot 1] \frac{PL}{EI} = -\frac{2}{90} \frac{PL}{EI}$$

y los momentos sobre cada barra son:

Barra 0

$$\begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \end{bmatrix} \frac{P}{15}$$

Barra 1

$$\begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -2 \end{bmatrix} \frac{P}{15}$$

Barra 2

$$\begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{P}{15}$$

4. APLICACION A TABLEROS DE PUENTES

4.1. Planteamiento del cálculo

Una alternativa al método de la losa ortotropa [9], para análisis de tableros de puentes, es un procedimiento directo de cálculo de estructuras que reconozca la realidad de las vigas y losas que constituyen el tablero del puente.

Se calcula el tablero del tipo que se representa en la figura 8. Los gdl entre interfaces que se consideran son los movimientos (flecha vertical y giro) de cada viga. Los elementos son las losas intermedias y por consiguiente $n = n^\circ$ de vigas -1 .

El cálculo se efectúa mediante un método en movimientos o de equilibrio, por lo que se evalúan las matrices de rigidez transversales de cada elemento —losas y vigas— que componen el tablero. Se considera una solución Levy, que implica simple apoyo en los extremos $x=0$ y $x=2a$ del puente.

En las figura 9 y 10 se presentan las matrices de rigidez de los elementos losa y viga para el armónico n . Es conveniente incluir, en las rigideces de

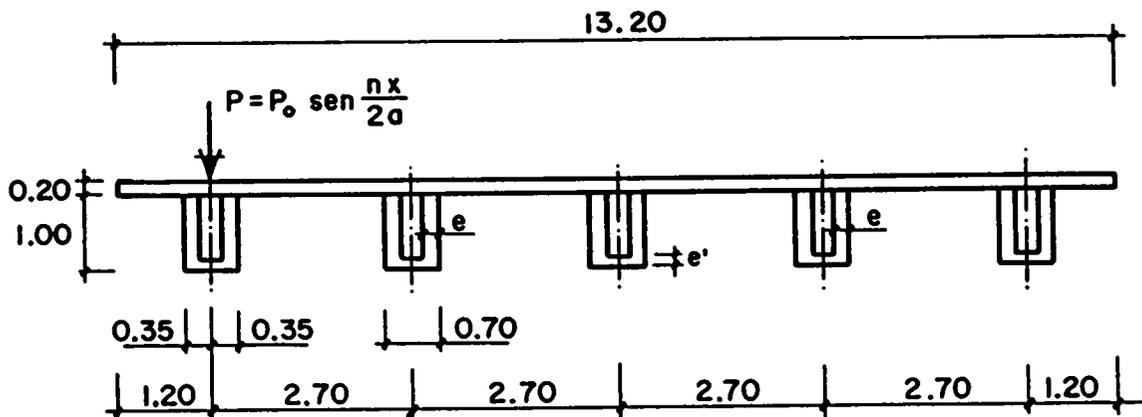


Fig. 8. Tablero de puente. Ejemplo de aplicación. Datos.

flexión y torsión de la viga, la zona correspondiente de losa que colabora a la resistencia de la viga. Por consiguiente, existirán en general dos matrices de rigidez de las vigas de borde K_{v1} y K_{v2} y una matriz de rigidez de la viga intermedia K_v .

Las ecuaciones de equilibrio se plantean en los grados de libertad situados en el cdg de cada viga. Por ello, se trasladan las acciones de cada extremo i de losa al cdg de la viga adyacente.

Las matrices de equilibrio de transformación correspondientes son:

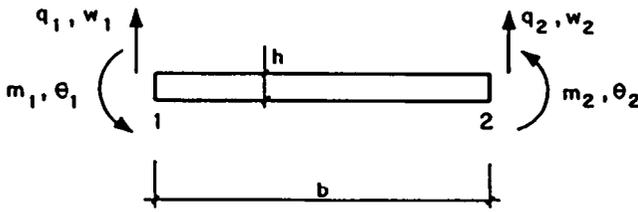
$$P_i = T_i p_i ; \quad d_i = T_i^T D_i \quad (i=1, 2)$$

con

$$T_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (-)^{i+1} b_v & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez de la losa, referida a los centros de gravedad de las vigas contiguas, es:

$$K_{ij} = T_i k_{ij} T_j^T$$



$$\text{con } k_{11} = \begin{pmatrix} k_1 & k_3 \\ k_3 & k_2 \end{pmatrix} ; \quad k_{22} = \begin{pmatrix} k_1 & -k_3 \\ -k_3 & k_2 \end{pmatrix} ;$$

Solución exacta [7]:

$$k_1 = D\lambda^3 k_1 ; \quad k_1 = \frac{s}{\frac{\mu}{s} + c} - \frac{c}{\frac{\mu}{s} - s}$$

$$k_2 = D\lambda k_2 ; \quad k_2 = \frac{c}{\frac{\mu}{c} + s} - \frac{s}{\frac{\mu}{c} - c}$$

$$k_3 = D\lambda^2 k_3 ; \quad k_3 = \frac{c}{\frac{\mu}{s} + c} - \frac{s}{\frac{\mu}{c} - s} - (1 - \nu)$$

$$k_4 = D\lambda^3 k_4 ; \quad k_4 = \frac{s}{\frac{\mu}{s} + c} + \frac{c}{\frac{\mu}{c} - s}$$

$$k_5 = D\lambda^2 k_5 ; \quad k_5 = -\left(\frac{c}{\frac{\mu}{s} + c} + \frac{s}{\frac{\mu}{c} - s}\right)$$

$$k_6 = D\lambda k_6 ; \quad k_6 = -\left(\frac{c}{\frac{\mu}{c} + s} - \frac{s}{\frac{\mu}{s} - c}\right)$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & & & \\ K_3 & K_2 & \text{simétrico} & \\ K_4 & -K_5 & K_1 & \\ K_5 & K_6 & -K_3 & K_2 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = k_1$$

$$K_2 = \beta^2 k_1 + 2\beta k_3 + k_2$$

$$K_3 = \beta k_1 + k_3$$

$$K_4 = k_4$$

$$K_5 = -\beta k_4 + k_5$$

$$K_6 = -\beta^2 k_4 + 2\beta k_5 + k_6$$

con $\beta = b_v \lambda$

Las ecuaciones de equilibrio que resultan son:

Viga $j=0$

$$(K_{11} + K_{v1}) D_0 + K_{12} D_1 = R_0$$

Vigas $j=1, 2, \dots, n-1$

$$K_{21} D_{j-1} + (K_{22} + K_{11} + K_v) D_j + K_{12} D_{j+1} = R_j \quad (4.1)$$

$$p_i = \begin{pmatrix} q_i \\ m_i \end{pmatrix} ; \quad d_i = \begin{pmatrix} w_i \\ \theta_i \end{pmatrix}$$

Matriz de rigidez:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

$$k_{12} = k_{21}^T \begin{pmatrix} k_4 & -k_5 \\ k_5 & k_2 \end{pmatrix}$$

Solución bandas finitas [8]:

$$k_1 = \frac{3}{2\mu^3} + \frac{6}{5} \frac{2-\nu}{\mu} + \frac{36}{35} \mu$$

$$k_2 = \frac{2}{\mu} + \frac{8}{15} (2-\nu)\mu + \frac{8}{105} \mu$$

$$k_3 = \frac{3}{2\mu^2} + \frac{2}{5} (1+2\nu) + \frac{32}{105} \mu$$

$$k_4 = -\frac{3}{2\mu^3} - \frac{6}{5} \frac{2-\nu}{\mu} + \frac{9}{35} \mu$$

$$k_5 = \frac{3}{2\mu^2} + \frac{1}{5} (2-\nu) - \frac{13}{105} \mu^2$$

$$k_6 = \frac{1}{\mu} - \frac{2}{15} (2-\nu)\mu - \frac{2}{35} \mu^3$$

con

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} ; \quad \lambda = \frac{n\pi}{2a} ; \quad \mu = \frac{n\pi b}{4a}$$

$$S = S_h \mu ; \quad c = C_h \mu$$

Fig. 9. Matriz de rigidez de la losa para el armónico n -simo.

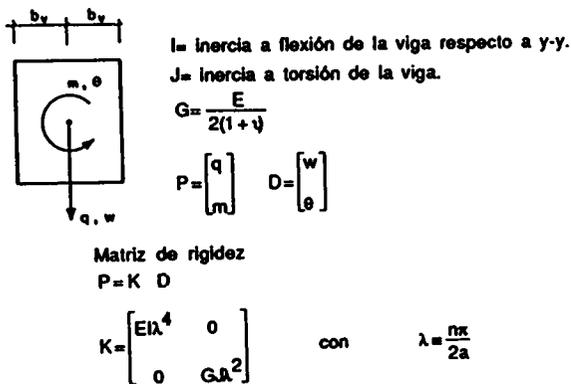


Fig. 10. Matriz de rigidez de la viga para el armónico n-simo.

Viga $j = n$

$$K_{21} D_{n-1} + (K_{22} + K_{V2}) D_n = R_n$$

siendo R_j la fuerza total existente en el cdg de la viga j .

El sistema de ecuaciones (4.1) puede transformarse en circulante, mediante la técnica descrita en el apartado 3 anterior. En este caso, las matrices que hay que considerar son:

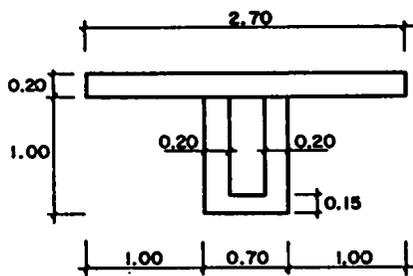
$$k_0 = K_{11} + K_{22} + K_V ; \quad k_1 = K_{12}$$

$$\bar{k}_{11} = k_{V2} ; \quad \bar{k}_{22} = K_{V1} ; \quad k'_0 = K_{22} - K_{V1} ;$$

$$k'_n = K_{11} - K_{V2}$$

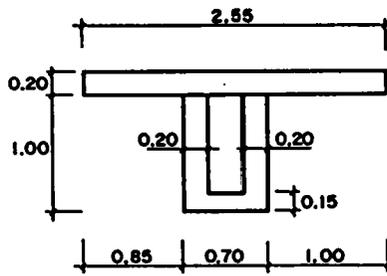
4.2. Ejemplo de aplicación

Se ha estudiado el tablero representado en la figura 8, correspondiente a cinco vigas ($n=4$). Los datos se han indicado en dicha figura, y en la notación de este apartado son:



Viga intermedia

- $A = 0.985 \text{ m}^2$
- $v_0 = 0.391 \text{ m}$
- $v_1 = 0.809 \text{ m}$
- $I = 0.1456 \text{ m}^4$
- $J = 0.09432 \text{ m}^4$



Viga extrema

- $A = 0.995 \text{ m}^2$
- $v_0 = 0.400 \text{ m}$
- $v_1 = 0.800 \text{ m}$
- $I = 0.1399 \text{ m}^4$
- $J = 0.09432 \text{ m}^4$

Fig. 11. Características de las vigas.

$$2a = 20,00 \text{ m} ; \quad b = 2,00 \text{ m} ; \quad E = 3 \times 10^6 \text{ tm}^{-2}$$

$$\nu = 0,20$$

Las características mecánicas de la flexión y torsión de las vigas extremas e intermedias son (figura 11):

Vigas intermedias:

$$I = 0,1456 \text{ m}^4 ; \quad J = 0,09432 \text{ m}^4$$

Vigas extremas:

$$I = 0,1399 \text{ m}^4 ; \quad J = 0,09432 \text{ m}^4$$

La matriz de rigidez de la losa se ha calculado mediante el procedimiento elástico exacto y según el método de las bandas finitas. Los resultados obtenidos son:

Cálculo elástico exacto	Cálculo de bandas finitas
$\bar{k}_1 = 395.53166$	400.93093
$\bar{k}_2 = 12.84089$	12.88349
$\bar{k}_3 = 61.31347$	61.36023
$\bar{k}_4 = -395.37460$	-399.36878
$\bar{k}_5 = 61.10529$	61.14966
$\bar{k}_6 = 6.36974$	6.32828

Se comprueba la excelente aproximación que se alcanza con el método de las bandas finitas en la determinación de los coeficientes de la matriz de rigidez.

Estos coeficientes de la matriz de la losa, al referirlos a los ejes en el cdg de las vigas son ($b_v = 0,25$; $\beta = 0,03927$):

$$\bar{K}_1 = 395.53166$$

$$\bar{K}_2 = 12.84089$$

$$\bar{K}_3 = 61.31347$$

$$\bar{K}_4 = -395.37460$$

$$\bar{K}_5 = 61.10529$$

$$\bar{K}_6 = 6.36974$$

Las constantes del cálculo son (unidades: toneladas y metros):

$$D = 2.083 \times 10^3$$

$$\lambda = 0.1571$$

$$\mu = 0.1571$$

Las matrices de rigidez de la losa y vigas se deducen, por lo tanto, de acuerdo con las fórmulas del apartado anterior.

$$K = \begin{bmatrix} 2759 & 3545 & -2758 & 3535 \\ & 5597 & -3535 & 3571 \\ \text{simétrica} & & 2758 & -3545 \\ & & & 5597 \end{bmatrix}$$

$$K_v = \begin{bmatrix} 244 & 0 \\ 0 & 4114 \end{bmatrix} \quad K_{v1} = K_{v2} = \begin{bmatrix} 218 & 0 \\ 0 & 3688 \end{bmatrix}$$

Los resultados parciales del cálculo se relacionan a continuación:

$$k_0 = K_{11} + K_{22} + K_v = \begin{bmatrix} 5762 & 0 \\ 0 & 15309 \end{bmatrix};$$

$$k_1 = K_{12} = \begin{bmatrix} -2758 & 3535 \\ -3535 & 3571 \end{bmatrix}$$

$$k'_0 = K_{22} - K_{v1} = \begin{bmatrix} 2540 & -3545 \\ -3545 & 1911 \end{bmatrix} = k'_5$$

$$k_1^T + k_1 = \begin{bmatrix} -5516 & 0 \\ 0 & 7142 \end{bmatrix};$$

$$k_1^T - k_1 = \begin{bmatrix} 0 & -7070 \\ 7070 & 0 \end{bmatrix}$$

Las matrices auxiliares B_j son:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 246 & 0 \\ 0 & 22452 \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} 4058 & -6722i \\ 6722i & 17517 \end{bmatrix};$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 10224 & -4154i \\ 4154i & 9530 \end{bmatrix}; \quad B_5 = \begin{bmatrix} 4058 & 6722i \\ -6722i & 17517 \end{bmatrix};$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 10224 & 4154i \\ -4154i & 9530 \end{bmatrix}$$

Las matrices inversas B_j^{-1} son:

$$B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 40.65 & 0 \\ 0 & 0.45 \end{bmatrix} 10^{-4};$$

$$B_2^{-1} = \begin{bmatrix} 676 & 2.60i \\ -2.60i & 157 \end{bmatrix} 10^{-4};$$

$$B_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1.19 & 0.52i \\ -0.52i & 1.28 \end{bmatrix} 10^{-4};$$

$$B_5^{-1} = \begin{bmatrix} 6.76 & -2.60i \\ 2.60i & 1.57 \end{bmatrix} 10^{-4};$$

$$B_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1.19 & -0.52i \\ 0.52i & 1.28 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

Finalmente, las matrices S_j sólo presentan parte real, ya que la imaginaria se anula idénticamente:

$$S_1 = \begin{bmatrix} 11.31 & 0 \\ 0 & 1.23 \end{bmatrix} 10^{-4};$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} 8.58 & -1.11 \\ 1.11 & 0.13 \end{bmatrix} 10^{-4};$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} 6.08 & -0.41 \\ 0.41 & -0.26 \end{bmatrix} 10^{-4};$$

$$S_5 = \begin{bmatrix} 8.58 & 1.11 \\ -1.11 & -0.13 \end{bmatrix} 10^{-4};$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} 6.08 & 0.41 \\ -0.41 & -0.26 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

La matriz F resulta (3.24):

$$F = \begin{bmatrix} 0.88 & 0.58 & 0.55 & 0.74 \\ 0.08 & 1.20 & -0.11 & -0.02 \\ 0.55 & -0.74 & 0.88 & -0.58 \\ 0.11 & -0.02 & -0.08 & 1.20 \end{bmatrix}$$

cuya inversa es.

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} 4.24 & -4.30 & -3.54 & -4.40 \\ -0.61 & 1.52 & 0.62 & 0.70 \\ -3.54 & 4.40 & 4.24 & 4.30 \\ -0.62 & 0.70 & 0.61 & 1.52 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, aplicando la fórmula (3.23) se obtienen los movimientos incógnitas según la posición de la carga P .

Carga aplicada en la viga V-3

$$d_1 = \begin{vmatrix} 5.47 \times 10^{-2} \\ 5.31 \times 10^{-3} \end{vmatrix}; \quad d_5 = \begin{vmatrix} 5.47 \times 10^{-2} \\ -5.31 \times 10^{-3} \end{vmatrix}$$

Carga aplicada en la viga V-2

$$d_1 = \begin{vmatrix} 10.50 \times 10^{-2} \\ 6.80 \times 10^{-3} \end{vmatrix}; \quad d_5 = \begin{vmatrix} 2.66 \times 10^{-2} \\ -2.87 \times 10^{-3} \end{vmatrix}$$

Carga aplicada en la viga V-1

$$d_1 = \begin{vmatrix} 16.18 \times 10^{-2} \\ -9.90 \times 10^{-3} \end{vmatrix}; \quad d_5 = \begin{vmatrix} 1.42 \times 10^{-2} \\ -1.60 \times 10^{-3} \end{vmatrix}$$

5. CONCLUSIONES

Se ha presentado un método de cálculo de estructuras periódicas cíclicas y abiertas, que tiene en cuenta esta característica de periodicidad para reducir de un modo importante el esfuerzo de computación preciso. Dado el carácter general que presenta el procedimiento presentado, este podría ser implementado en una segunda generación de programas generales comerciales de cálculo de estructuras, en los que se consideren los distintos niveles de subestructuración y, por consiguiente, las condiciones de periodicidad estructurales.

6. RECONOCIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por la Dirección General de Carreteras dentro del Convenio entre el MOPU y la Fundación Agustín de Bethancourt (Exp. TP-185.88).

REFERENCIAS

[1] Hussey, M.J.L. "General Theory of Cyclically Symmetric Frames". Proc. ASCE. Journ. Struc. Div. April. (1967).

[2] Makowski, Z.S. "Räumliche Tragwerke aus Stahl". Verlag Stahleisen m.b.H. Düsseldorf. (1963).

[3] Kausel, E. "Dynamic of Spatially Periodic Structures". Private Communication. MIT. (1983).

[4] Samartin, A. and Moreno, L. "Fórmulas explícitas para el cálculo sísmico de entramados planos regulares". Revista de Obras Públicas. Junio, (1986).

[5] Samartin, A. "Cálculo de estructuras espacialmente periódicas. Aplicación del método de las diferencias finitas. Comunicación Privada. ETSICCP. Santander.

[6] Zienkiewicz, O.C. and Scott, F.C. "On the principle of repeatability and its application in analysis of turbine and pump impellers". Intal Journ. for Num. Methods in Eng. Vol. 4 (1972).

[7] Goldberg, J.E. y Leve, H.L. "Theory of Prismatic Folded Plate Structures". IABSE. Publications. Vol. 17 (1957).

[8] Loo, Y. Ch. y Cusens, A.R. "The Finite Strip Method in Bridge Engineering. C.A.C.A. (1978).

[9] Samartin, A. "Cálculo de Estructuras de Puentes de Hormigón". Editorial Rueda, (1983).

APENDICE A. MATRICES CIRCULANTES Y QUASI CIRCULANTES

A.1. Matrices circulantes

Se denomina matriz circulante a la constituida por filas que son permutaciones simples de una de ellas, es decir, presenta la estructura siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{bmatrix} = \{ : a_i : \} \quad (A.1)$$

El problema de autovalores siguiente:

$$A X_j = b_j X_j \quad (A.2)$$

tiene la solución (puede comprobarse por sustitución):

$$X_j = \begin{bmatrix} 1 \\ r^{-j} \\ r^{-2j} \\ \vdots \\ r^{-(n-1)j} \end{bmatrix} \quad y \quad b_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^{-jk}$$

siendo

$$r = \sqrt[n]{1} = e^{\frac{2\pi}{n} \sqrt{-1}}$$

Por consiguiente, los autovectores del problema (A.2) están formados por las sucesivas potencias de la raíz n-sima de la unidad. Los autovalores son iguales a las transformadas discretas de Fourier de la primera fila de la matriz A.

La matriz modal X satisface la condición de ortogonalidad, es decir:

$$X^* X = X X^* = n I$$

con $X = \{X_j\}$ y X^* la conjugada traspuesta de X
I es la matriz unidad.

La descomposición espectral de A es:

$$A = X B X^{-1} = \frac{1}{n} X B X^*$$

con $B = \text{diag} \{b_j\}$.

Por lo tanto, las potencias de A se calculan como sigue:

$$A^h = X B^h X^{-1} = \{ : a_i : \}$$

Se comprueba que la matriz A^h es también circulante y su primera fila $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n-1}$ se obtiene como la transformada inversa de los autovalores b^h_j , es decir:

$$\bar{a}_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} b_j^h r^{jk}$$

En particular, para $h=-1$, se obtienen los elementos de la matriz inversa (que es asimismo circulante) mediante la expresión

$$\bar{a}_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{b_j} r^{jk} \quad (b_j \neq 0)$$

Evidentemente, si alguno de los coeficientes de Fourier se anula, la matriz es singular.

A.2. Matrices quasi-circulantes

Se define como matriz quasi-circulante a la constituida por permutaciones de las submatrices A_j en lugar de los escalares, es decir:

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \dots & A_{n-1} \\ A_{n-1} & A_0 & A_1 & \dots & A_{n-2} \\ A_{n-2} & A_{n-1} & A_0 & \dots & A_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1 & A_2 & A_3 & \dots & A_0 \end{bmatrix}$$

Se pueden mostrar las siguientes propiedades de A

$$A X_j = X_j B_j \quad \text{o bien} \quad A X = X B$$

con

$$B = \begin{bmatrix} B_0 & & & 0 \\ & B_1 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & B_{n-1} \end{bmatrix} \quad (\text{no diagonal})$$

$$X = \begin{bmatrix} I \\ I r^{-j} \\ I r^{-2j} \\ \vdots \\ I r^{-(n-1)j} \end{bmatrix}$$

I es la matriz unidad de igual rango que A_k

$$B_j = \sum_{k=0}^{n-1} A_k r^{-jk}$$

Se supone que las matrices B_j admiten la descomposición espectral siguiente:

$$B_j = \Phi_j \Omega_j \Phi_j^{-1}$$

se deduce entonces

$$A X_j \Phi_j = X_j \Phi_j \Omega_j$$

Si se define $\psi_j = X_j \Phi_j$ se obtiene

$$A \psi_j = \psi_j \Omega_j$$

Por consiguiente, los autovalores de B_j son también un conjunto de los autovalores de A.

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_0 & & \\ & \dots & \\ & & \Omega_{n-1} \end{bmatrix} \quad (\text{matriz diagonal})$$

$$\psi = \{ \psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1} \}$$

$$A \psi = \psi \Omega$$

Se deduce inmediatamente que

$$A^h \psi = \psi \Omega^h$$

i.e.

$$A^h \psi_j = \psi_j \Omega_j^h$$

$$A^h X_j = X_j (\Phi_j \Omega_j^h \Phi_j^{-1})$$

es decir

$$\bar{B}_j = \Phi_j \Omega_j^h \Phi_j^{-1} = B_j^h$$

y

$$\bar{A}_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} B_j^h r^{jk}$$

RESUMEN

Se muestra un procedimiento de cálculo de estructuras constituidas por una más simple, que se repite bien mediante una rotación finita (estructuras cíclicas) o según una traslación (estructuras traslacionales). Es posible, según el método que se expone, obtener el comportamiento de la estructura bajo la acción de cargas arbitrarias, mediante el cálculo repetido de la estructura elemental modificada. De esta forma, estructuras con un número elevado de grados de libertad pueden ser analizadas con un esfuerzo computacional relativamente pequeño, el preciso para el estudio de una estructura de dimensión igual a la de la estructura elemental. Se muestran algunos ejemplos ilustrativos muy simples, así como una aplicación al caso práctico correspondiente a losas de tableros de puentes rectos de vigas.

SUMMARY

Structures with multiple identical elements that are joined in a chain-like fashion are called spatially periodic structures. These systems, either cyclic structures (close chains) or translational structures (open chains), can be analysed by using a simplified procedure. The behaviour of the whole struc-

ture under arbitrary loading can be obtained by a repetitive analysis of elemental structures of the same size as the one of identical elements. In this way structures with a very large number of degrees of freedom can be studied with a relatively small computational effort. Some simple illustrative examples are given and a practical application case is also presented.

Jornadas sobre "La Industrialización Abierta, solución para la modernización de la construcción"

Organizadas por el CERIB (Centre d'Etudes et de Recherches de l'Industrie du Béton Manufacturé) y el GUS (Gesellschaft für Umweltplanung, Stuttgart) y con el patrocinio del BIBM (Bureau International du Béton Manufacturé) y el CIB (Conseil International du Bâtiment pour la recherche, l'étude et la documentation), se van a celebrar en Stuttgart (R.F.A.), durante los días 21, 22 y 23 de febrero del próximo año 1990, unas Jornadas en las cuales se tratarán los siguientes temas:

1.- Procesos de concepción/realización de las obras: Aportaciones de la coordinación dimensional.

2.- Producción: Incidencia de la coordinación dimensional sobre el utillaje industrial.

3.- Situación actual de la coordinación modular en la Comunidad Europea y a nivel internacional.

4.- Procesos informáticos CAO/gestión de obras/GPAO: Necesidad de la coordinación dimensional.

5.- Ejemplos de realizaciones concretas: Bases de datos, coordinación, teletranscripción de datos, etc.

6.- Perspectivas de exportación para las industrias de la Comunidad.

En estas Jornadas, en las que intervendrán dife-

rentes expertos de la Comunidad Europea, se expondrá y discutirá la situación actual de la "Industrialización abierta".

La "Industrialización abierta" es una producción industrial de "Componentes" cuya compatibilidad dimensional y tecnológica esté garantizada. Es la posibilidad de una armonización de los procesos de concepción/realización de las construcciones en la perspectiva del mercado comunitario de 1993.

Organización de las Jornadas

-Se celebrarán una serie de Conferencias, seguidas de coloquio entre los Conferenciantes y los participantes.

-Se expondrán ejemplos de realizaciones concretas.

-Habrá traducción simultánea de las Conferencias, en inglés, francés y alemán.

Los interesados en participar en estas Jornadas deberán dirigirse a:

CERIB BP 59
F-28232 EPERNON CEDEX (Francia).
Tel.: 37 83 52 72.
Telex: 782048.
Fax: 37 83 67 39.