

# Análisis elasto-plástico de estructuras porticadas con grandes movimientos

A. Samartín

G. Gutiérrez

Drs. Ingenieros de Caminos

E.T.S. de Ingenieros de Caminos de Santander

## 1. INTRODUCCION

La determinación de la carga última o de rotura de una estructura, constituye un problema importante que, en esencia, consiste en conocer su nivel de seguridad respecto al colapso. Se suele simplificar el problema, estudiando el comportamiento de la estructura bajo la acción de una combinación constante de cargas que se incrementan proporcionalmente, mediante un factor ( $\lambda$ ), hasta alcanzar la ruina estructural para un valor  $\lambda_u$ . Se suele suponer que, en la situación de servicio, el factor  $\lambda$  es la unidad.

El cálculo elástico implica, simplemente, la extrapolación de los resultados bajo las cargas de servicio, de modo que se alcance la tensión de rotura en una sección de la estructura. Es bien conocido el hecho de que, en estructuras hiperestáticas, existe una redistribución tensional, que permite resistir valores mayores de las cargas que los predichos por un cálculo elástico. La teoría plástica puede ser utilizada con objeto de obtener, de un modo simple, en entramados planos de edificación [1], la carga de colapso cuando sus elementos (barras) están sometidos principalmente a esfuerzos de flexión. Sin embargo, si las barras soportan importantes esfuerzos axiales (en particular de compresión), la inestabilidad elástica de la estructura puede ser determinante en el cálculo de la carga última de la misma. Se comprende la necesidad de utilizar un análisis elasto-plástico, en grandes movimientos, en una determinación adecuada de la carga última de una estructura. Existen métodos aproximados que, a partir de los resultados de un cálculo plástico sin considerar la inestabilidad, y de otros basados en la teoría de la inestabilidad elástica, permiten deducir el valor de  $\lambda_u$ .

El objetivo de esta comunicación consiste en presentar un modelo elastoplástico de cálculo de estructuras de entramado plano, las características del programa de computador y una comparación entre los resultados obtenidos con este modelo y los deducidos mediante procedimientos aproximados. El estudio realizado constituye una extensión de [2] y su finalidad última reside en la obtención de unos criterios de proyecto que consideren la influencia de los errores de ejecución en la carga última y, de esta forma, estimar de un modo consistente los niveles de tolerancia admisibles en la construcción de una estructura, análogamente a como se ha considerado en [2]. Si bien la formulación que sigue se dirige de un modo específico a las estructuras metálicas de edificación, la extensión al hormigón y otros tipos estructurales es directa.

## 2. HIPOTESIS

Se considera el entramado plano compuesto de nudos y barras, que flectan en el plano bajo cargas aplicadas en los nudos. Esta restricción de la carga no es importante, ya que pueden agregarse nudos adicionales, a los "naturales" del entramado (\*).

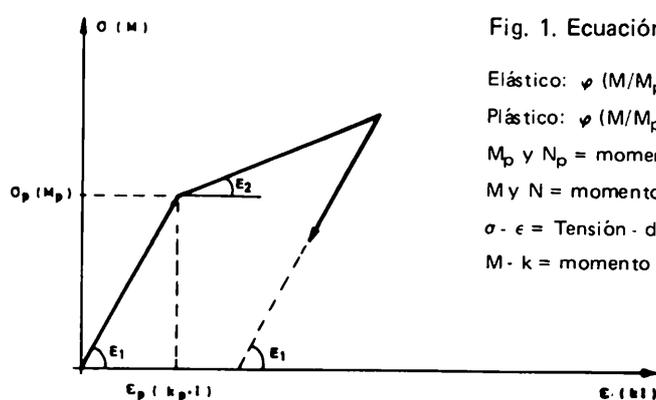
La única hipótesis de cálculo lineal que se considera ahora es la correspondiente a la linealidad cinemática, es decir:

a) Las relaciones entre deformaciones y movimientos son lineales (pequeñas deformaciones).

Las otras dos hipótesis de linealidad, no se mantienen ahora; por lo tanto:

b) La linealidad estática no se satisface; por lo que las ecuaciones de equilibrio deben de plantearse en la geometría de la estructura deformada (grandes movimientos).

c) La no linealidad del material se traduce en la existencia de relaciones funcionales entre las tensiones (o esfuerzos) y las deformaciones, distintas de las lineales y elásticas.



NOTA (\*): La posibilidad de considerar directamente cargas sobre barras, puede estudiarse, como en el análisis lineal de estructuras de barras, mediante el cálculo previo de la solución de empotramiento total en todos los nudos (solución inicial).

En este artículo, se considera una plasticidad del tipo indicado en la figura 1, que puede ser adecuada, en una primera aproximación, para la representación del comportamiento de vigas metálicas (\*).

Se supone, por simplicidad, que el esfuerzo cortante no influye en la plastificación. Por otra parte, se admite que los máximos momentos se producen en los extremos de las barras (nudos de la estructura). Se considera, asimismo, una plasticidad concentrada; es decir, que la rótula se produce en una sección y no se propaga a las inmediatamente próximas (zona de plastificación).

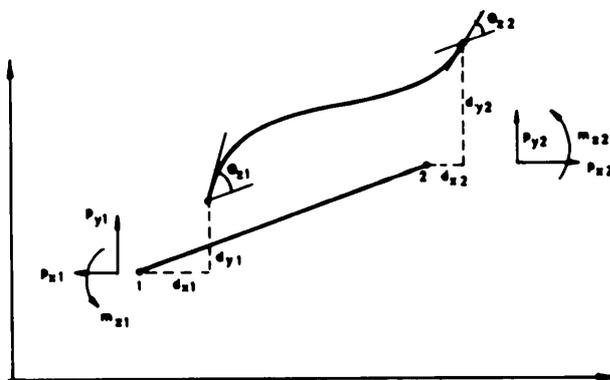


Fig. 2. Grados de libertad en una viga de entramado

Por último, se considera la simplificación de Navier, de la conservación de las secciones planas de la viga, y que la deformación por esfuerzo cortante es nula. Con estas simplificaciones, el conocimiento de los movimientos, tangencial ( $u$ ) y normal ( $v$ ), a la directriz, y el giro ( $\theta$ ), son precisos para deducir el estado de deformación de una viga. En particular, basta obtener los movimientos (grados de libertad) únicamente en los extremos de la viga 1-2 (figura 2), puesto que en los restantes puntos interiores de la viga se deducen de la elástica.

Sean estos movimientos, en el extremo  $i$ , recogidos en un vector  $\underline{d}_i$ . ( $i = 1, 2$ ), con:

$$\underline{d}_i = \begin{bmatrix} d_{xi} \\ d_{yi} \\ \theta_{zi} \end{bmatrix}$$

Las fuerzas eficaces en dichos extremos,  $\underline{p}_i$ , son:

$$\underline{p}_i = \begin{bmatrix} p_{xi} \\ p_{yi} \\ m_{zi} \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez  $\underline{k} = \begin{bmatrix} \underline{k}_{11} & \underline{k}_{12} \\ \underline{k}_{21} & \underline{k}_{22} \end{bmatrix}$  relaciona las fuerzas y los movimientos en los gdl de la barra, es decir:

$$\begin{bmatrix} \underline{p}_1 \\ \underline{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{k}_{11} & \underline{k}_{12} \\ \underline{k}_{21} & \underline{k}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{d}_1 \\ \underline{d}_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

NOTA (\*): En el caso de vigas de hormigón, se puede considerar, aproximadamente, una poligonal, siendo la ley de descarga una recta paralela a la tangente en el origen.

La expresión de la matriz de rigidez  $\underline{k}$ , depende de las características geométricas (longitud) y mecánicas de la sección (área e inercia a flexión), del módulo de elasticidad del material de la viga y de la ley de variación de la sección.

Antes de proceder al desarrollo teórico del cálculo elasto-plástico en grandes movimientos, es conveniente introducir el caso más simple del análisis elástico en grandes movimientos.

### 3. CALCULO ELASTICO NO LINEAL

Si en la deducción de la ecuación (1) se considera la situación final (deformada) de la viga, y que las cargas  $\underline{p}_i$  no varían en magnitud ni dirección (cargas sin seguimientos), se obtiene, según [3], la expresión de la matriz de rigidez de la viga-columna recta, de sección constante, que se indica:

$$\underline{k}_{ii} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{k} s & (-)^{i+1} \bar{k} \frac{1-c}{\alpha} L \\ 0 & (-)^{i+1} \bar{k} \frac{1-c}{\alpha} L & \bar{k} \frac{s-c\alpha}{\alpha^2} L \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2) \quad (2a)$$

$$\underline{k}_{12} = \underline{k}_{21}^T = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{k} s & \bar{k} \frac{1-c}{\alpha} L \\ 0 & -\bar{k} \frac{1-c}{\alpha} L & \bar{k} \frac{s-\alpha}{\alpha} L \end{bmatrix} \quad (2b)$$

siendo:

$$\bar{k} = \frac{EI}{L^3} \frac{\alpha^3}{2(1-c) - s\alpha}$$

$$\alpha = L \sqrt{P/EI}$$

$$s = \text{sen } \alpha$$

$$c = \text{cos } \alpha$$

$$P = p_{x1} = -p_{x2} \quad (P > 0 \text{ compresión})$$

L = longitud de la viga.

E = módulo de elasticidad.

A = área de la sección.

I = inercia de flexión de la sección.

Para el caso  $P < 0$  (tracción), se considera el valor absoluto; y las funciones trigonométricas circulares de las fórmulas (2) se convierten en hiperbólicas (Sh y Ch).

Evidentemente, se comprueba que si  $P = 0$ , se obtiene la matriz de rigidez lineal de la viga, es decir, la que se considera en un análisis en pequeños movimientos, puesto que la influencia del axil en la flexión es nula, al no existir acciones según la directriz de la barra.

Se comprueba que los coeficientes de la matriz de rigidez [2] son funciones del axil P de la barra.

Utilizando técnicas matriciales de cálculo de estructuras es posible obtener las ecuaciones finales de equilibrio (método de los desplazamientos):

$$\underline{K} \underline{D} = \underline{P} \quad (3)$$

en donde:

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \underline{d}_1 \\ \underline{d}_2 \\ \underline{d}_3 \\ \vdots \\ \underline{d}_N \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \underline{P} = \begin{bmatrix} \underline{p}_1 \\ \underline{p}_2 \\ \underline{p}_3 \\ \vdots \\ \underline{p}_N \end{bmatrix}$$

contienen los movimientos y fuerzas, respectivamente, en todos los sucesivos gdl de la estructura completa, compuesta de N nudos.

$\underline{K}$  es la matriz de rigidez general de la estructura, que se deduce mediante suma directa o booleana de las matrices de rigidez de cada barra, obtenidas según las expresiones (2) transformadas en ejes generales o de nudo; y se supone que se han introducido las condiciones de sustentación.

Se comprende que, en general, los elementos de la matriz  $\underline{K}$  dependen de los axiles existentes en las barras (\*), que constituyen incógnitas a determinar por lo que la ecuación (3) es no lineal y debe resolverse mediante procedimientos numéricos específicos. Una técnica iterativa de resolución de la ecuación (3), que ha sido utilizada en (2), se resume en la figura 3. En ella se indica, con el subíndice, NL, el carácter no lineal (elementos función de las incógnitas  $\underline{d}_i$ ) de una matriz o vector; y con L, el caso de coeficientes constantes.

El cálculo elástico, no lineal, permite predecir la respuesta en grandes movimientos de la estructura, supuesto que el material se conserva dentro del régimen elástico, es decir, para un nivel de proporcionalidad de cargas definido por el parámetro  $\lambda$ , se pueden calcular los movimientos en todos los nudos de la estructura y, a partir de ellos, los esfuerzos en los extremos de las distintas barras.

El colapso de la estructura se produce por inestabilidad elástica. El valor de  $\lambda_u$  correspondiente, se obtiene mediante sucesivos tanteos; es decir, estudiando la respuesta no lineal, elástica, de la estructura, para los valores  $\lambda_0$ ,  $\lambda_0 + \Delta\lambda$ ,  $\lambda_0 + 2 \Delta\lambda$ , ... hasta alcanzar una estructura inestable. Se reconoce la aparición del fenómeno inestabilidad en una estructura, por el hecho de que su matriz de rigidez total,  $\underline{K}$ , es singular o, más específicamente, su primer (menor) autovalor es nulo. En la figura 4 se indica el diagrama de flujo lógico de este cálculo, y en él se supone que la estructura, inicialmente (bajo cargas nulas), es estable; es decir, no constituye un mecanismo.

---

NOTA (\*): Si existiesen cargas en una barra, la solución inicial dependería, asimismo, de los axiles actuantes; y el vector de cargas,  $\underline{P}$ , tendría elementos función de las incógnitas.

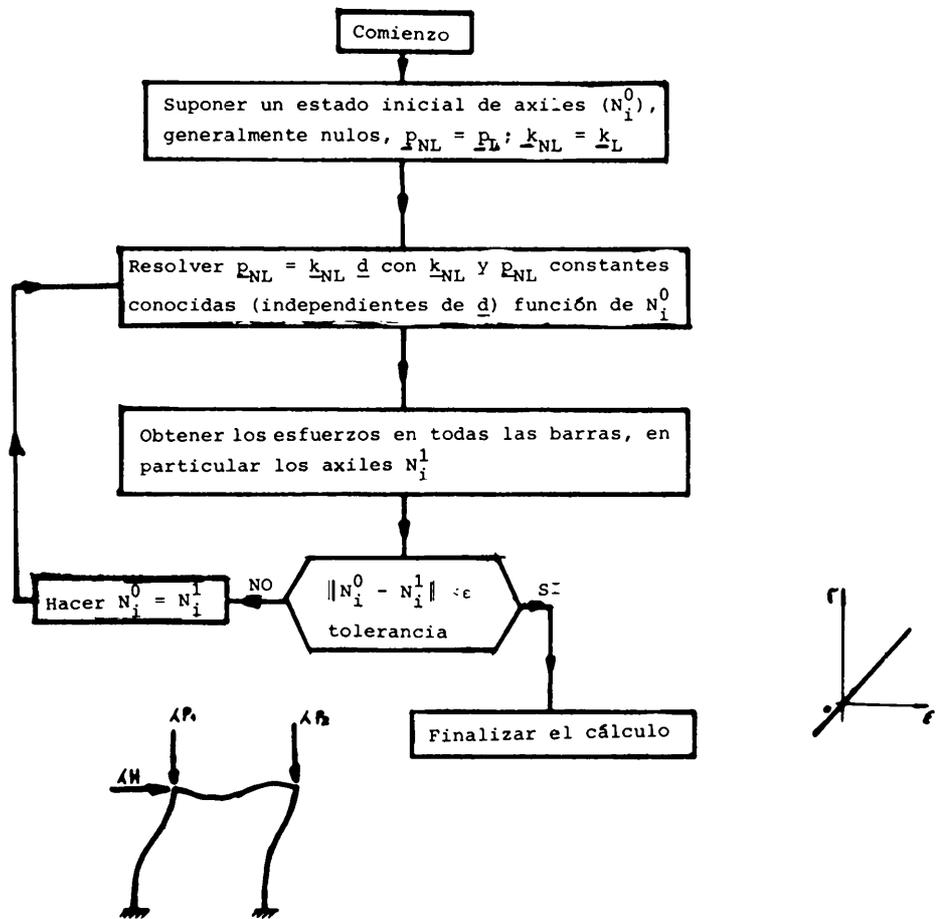


Fig. 3. Cálculo no lineal elástico de la estructura. (El valor  $\lambda$  es conocido).

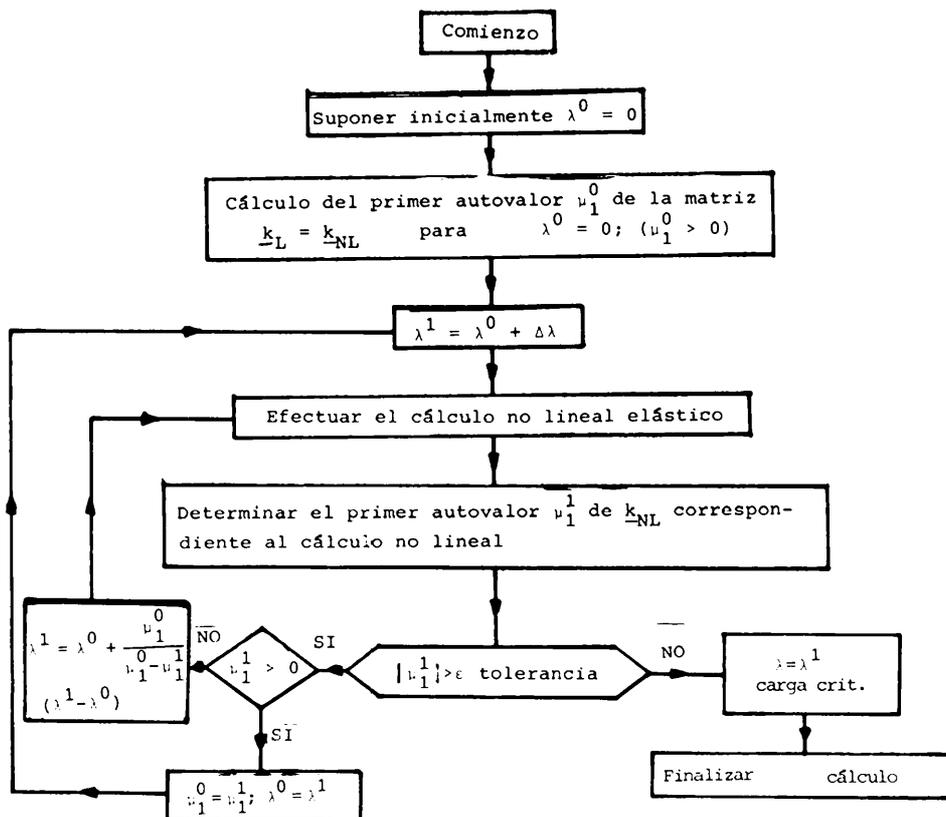


Fig. 4. Cálculo de la carga crítica. Inestabilidad elástica. (Valor de  $\lambda$  a determinar;  $\Delta\lambda$  es dato)

#### 4. CALCULO NO LINEAL ELASTO-PLASTICO

El modelo elástico anterior, no permite captar otras formas de fallo estructurales, distintas de la inestabilidad, en particular el colapso de la estructura por plastificación de un número de secciones. Es preciso, por lo tanto, ampliar el cálculo anterior, de modo que incluya la posibilidad de formación de rótulas plásticas. Un procedimiento se describe en [4], y aquí se generaliza, con objeto de tener en cuenta un posible decrecimiento de la sobrecarga (y cierres de rótulas), de acuerdo con las ideas que se exponen en el diagrama de la figura 5. Se considera en este cálculo, el entramado bajo las cargas que, en principio, se incrementan proporcionalmente. La estructura se comportará elásticamente hasta que se plastifique una sección extremo de barra. Si la carga continua incrementándose, ésta no podrá soportar ningún momento flector adicional. Sin embargo, el parámetro  $\lambda$  de carga para el cual se produce esta primera rótula, no puede obtenerse directamente, puesto

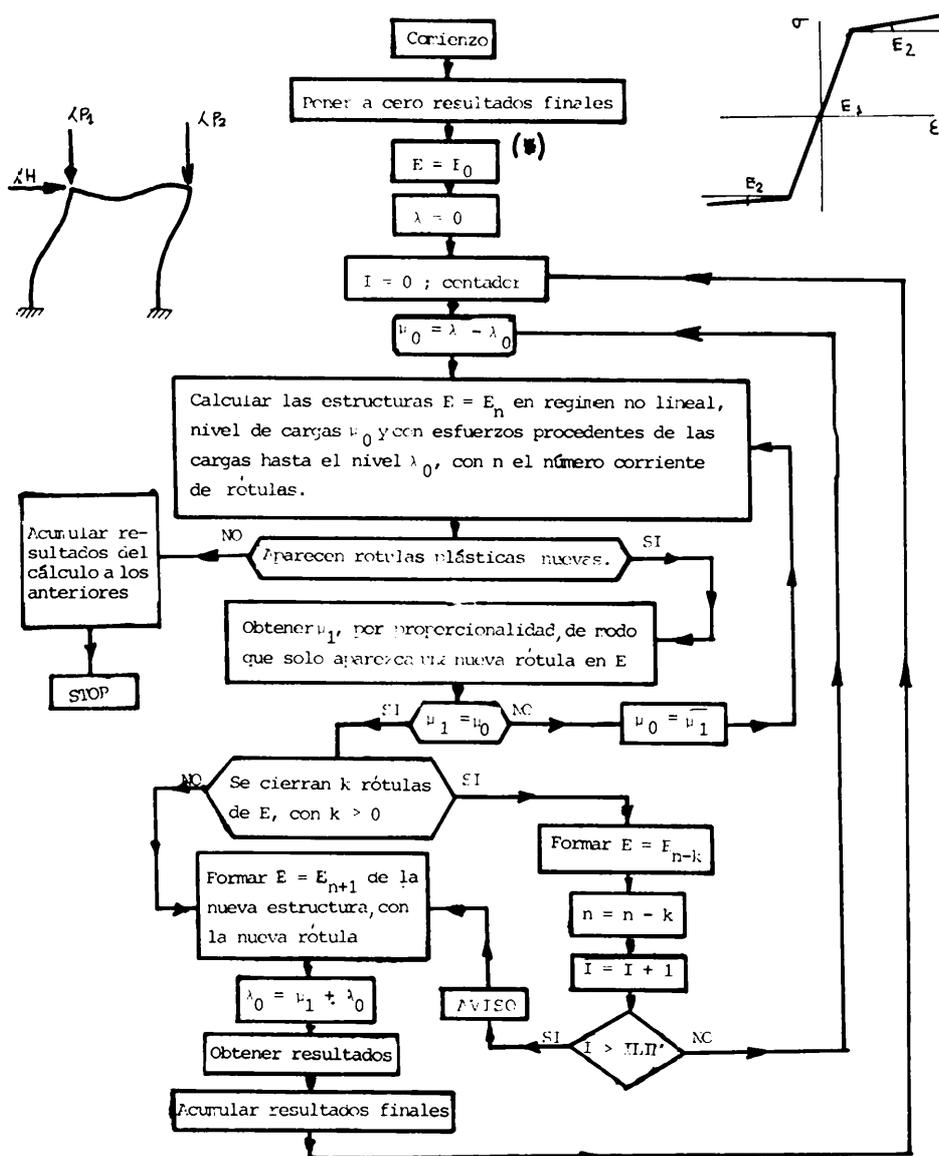


Fig. 5. Cálculo no lineal elasto-plástico ( $\lambda$  valor conocido)

que los esfuerzos axiales modifican la rigidez de la estructura, de acuerdo con el apartado 3 anterior. Se procede, entonces, mediante tanteos, suponiendo inicialmente un valor de  $\lambda$  obtenido sin reducción de las rigideces de las barras; y con los nuevos valores de los axiales se vuelven a actualizar los valores de las rigideces de las barras. Esta iteración continúa hasta que el valor del factor  $\lambda$  varía, respecto a la estimación del paso precedente, en una cantidad insignificante. De este modo se obtiene el valor de  $\lambda_1$  que produce la primera rótula y la posición de ésta.

El resto de la carga se supone que actúa sobre la estructura inicial, pero con una rótula en una sección, y que se comporta elásticamente. Por lo tanto, el procedimiento iterativo anterior puede ser aplicado, con objeto de deducir el nuevo valor (incremento respecto de  $\lambda_1$ ) del parámetro  $\lambda$ , y la posición de la segunda rótula. El proceso de cálculo finaliza cuando aparece inestabilidad en la estructura, o colapso, al convertirse en mecanismo, por la aparición de un número excesivo de rótulas en toda o parte de la estructura. Ambas situaciones se reconocen al comprobar la singularidad de la matriz de rigidez total de la estructura  $\underline{K}$ . Es importante, desde un punto de vista numérico, separar las situaciones de aparición simultánea de varias rótulas y de la posibilidad de cierres de rótula. Esta última situación se identifica por aparecer un momento flector adicional, debido al incremento de la carga para producir una nueva rótula, de signo contrario al existente. En este caso, la rótula desaparece, ya que la sección se comporta elásticamente en descarga (figura 1); y debe de repetirse el análisis con la desaparición de esta rótula. Estas situaciones, que complican la programación, se reflejan en el diagrama de flujo lógico de la figura 5. Conviene observar que el tramo plástico horizontal se ha sustituido, en el cálculo, por una recta de pendiente inclinada un décimo del módulo de elasticidad inicial. De un modo análogo a como se ha procedido en el apartado 3 anterior, es posible obtener la carga de colapso,  $\lambda_u$ , de una estructura, mediante la aplicación reiterada del cálculo precedente, a los sucesivos valores  $\lambda_0, \lambda_0 + \Delta\lambda, \lambda_0 + 2 \Delta\lambda, \dots$  hasta alcanzar el valor  $\lambda = \lambda_u$ .

Basado en las anteriores ideas, se escribió un programa en FORTRAN para el computador de los Departamentos de Estructuras de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Santander, PDP-11, de 32 k palabras, de memoria central. Este programa se aplicó a dos ejemplos sencillos, correspondientes a una ménsula bajo carga aislada en su extremo libre (figura 6), y un pórtico de un solo vano (figura 7). Los resultados obtenidos, carga crítica y movimiento horizontal de un nudo, se representan, asimismo, en estas figuras, y se comparan con los deducidos de otros análisis menos refinados: (1) Lineal elástico; (2) Lineal plástico; (3) No lineal elástico, y el aquí considerado, (4) No lineal elasto-plástico.

Sin embargo, se observó que el programa así desarrollado era ineficiente en las cercanías de la situación última, en donde se producían simultáneamente nuevas rótulas, o se cerraban otras, obligando a un paso  $\Delta\lambda$ , muy pequeño, y con problemas de estabilidad numérica.

Con objeto de evitar la situación anterior, se procedió a la realización de un nuevo programa de computador, que tratase el análisis elasto-plástico en grandes movimientos, mediante una técnica por incrementos de carga (no iterativa como la descrita). Es decir, se procede como sigue: para  $\lambda$  fijo, se divide este nivel en un conjunto  $N$  de intervalos,  $\Delta\lambda$ , de modo que en cada uno de ellos se realiza un análisis no lineal, con los axiales procedentes del cálculo del intervalo anterior de carga. Se comprueba la aparición de rótula dentro del intervalo de carga considerado, y se introduce en la estructura. Esta nueva estructura, se analiza en el nuevo cálculo del siguiente intervalo,  $\Delta\lambda$ , de carga. De esta forma se simula el comportamiento del entramado, a medida que se incrementa monótonicamente la carga. La figura 8 muestra un diagrama de flujo lógico de este nuevo programa de computador, denominado PLASTI, basado en la técnica incremental.

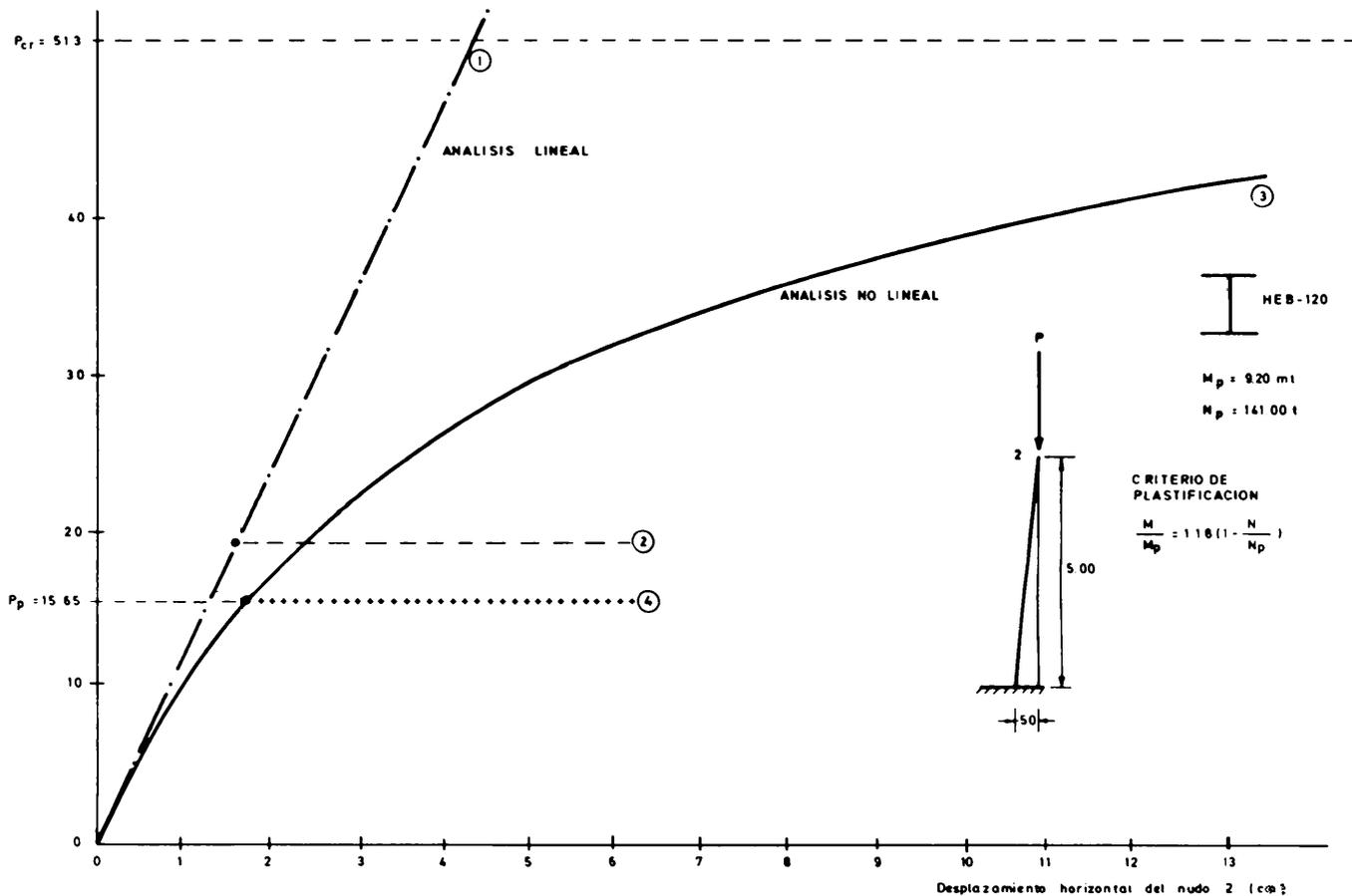


Fig. 6. Desplazamiento horizontal del extremo libre de una ménsula.

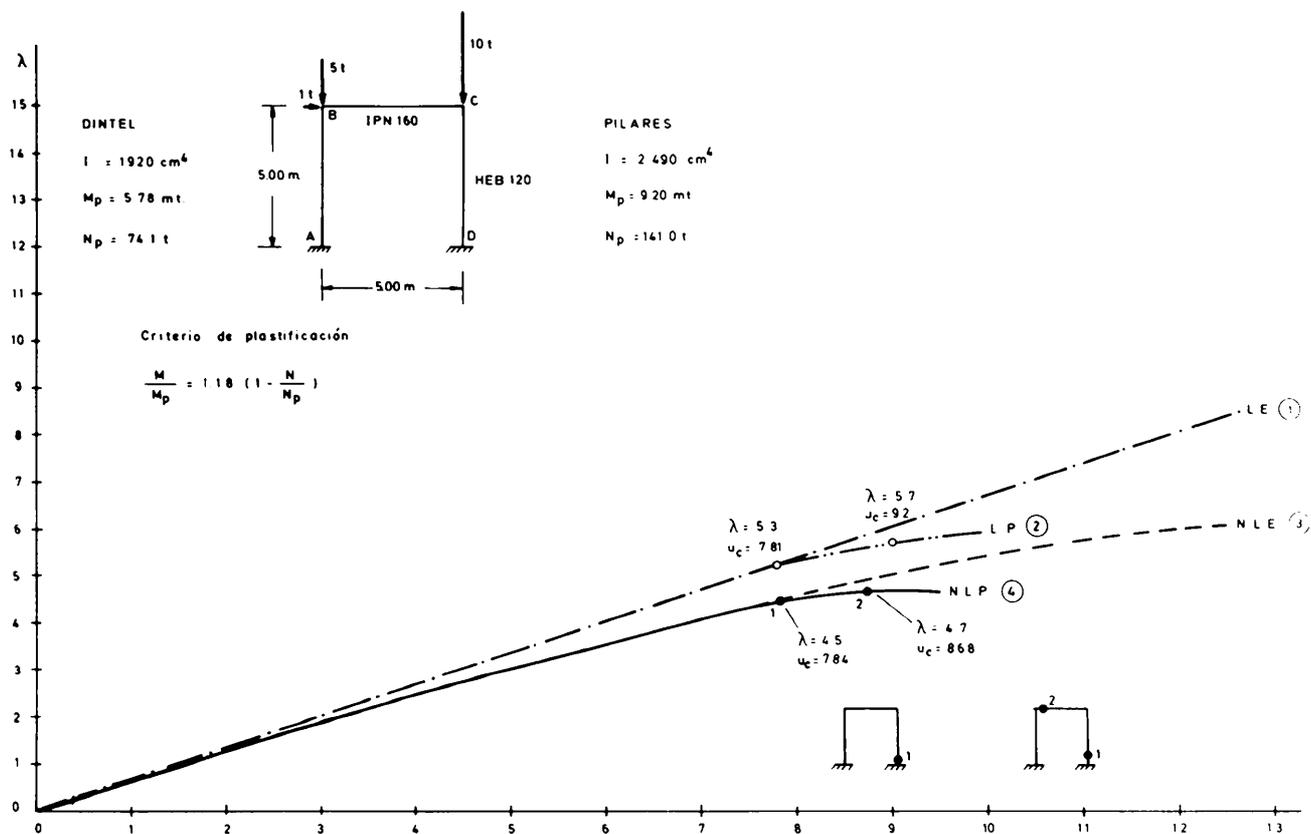


Fig. 7. Desarrollo del movimiento horizontal del dintel de un pórtico simple

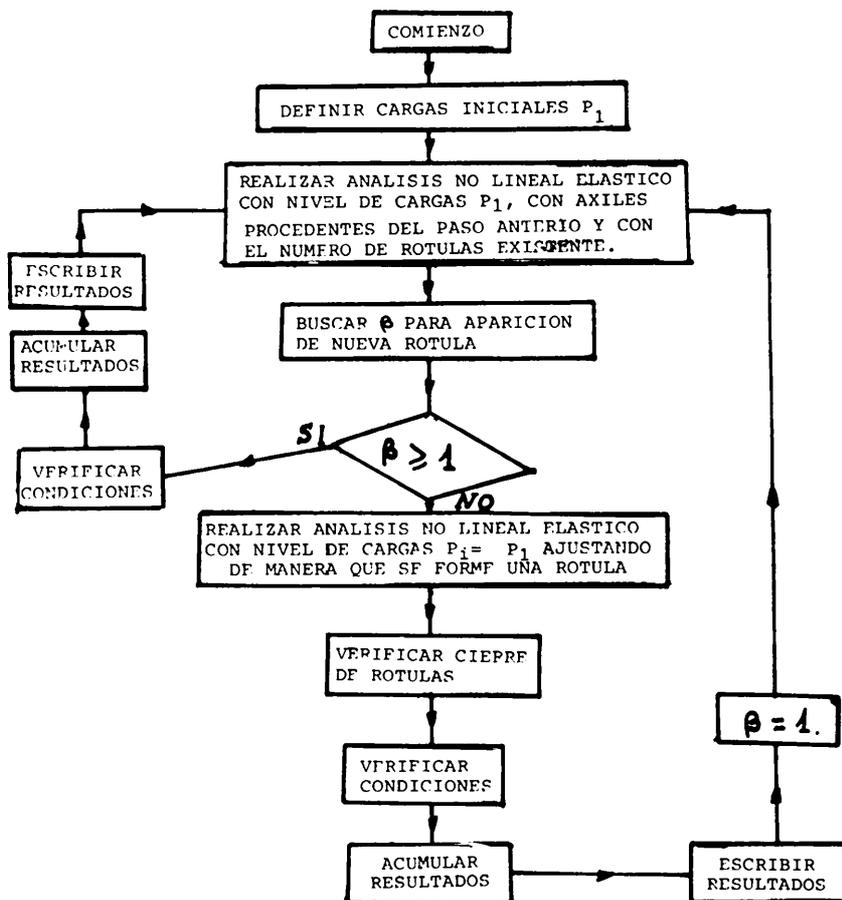


Fig. 8. Cálculo no lineal elasto-plástico (Método incremental)

La deducción de la carga última de colapso,  $\lambda_u$ , no implica modificación alguna del método anterior, simplemente que ahora el número  $N$  no está definido, y se adopta a priori un valor de  $\Delta\lambda$ , de acuerdo con el grado de aproximación requerido por el resultado final de  $\lambda_u$ . Mediante esta técnica de incrementos de la carga, se reduce de un modo notable el esfuerzo computacional por lo que se ha adoptado el programa de computador basado en ella, para la evaluación de los resultados de los siguientes ejemplos.

## 5. EJEMPLOS DE APLICACION

Se estudia, en primer lugar, un entramado de dos pisos, analizado por Horne [5]. Las dimensiones y las cargas de esta estructura, se muestran en la figura 9. El módulo de elasticidad es:  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ tm}^{-2}$ , y la tensión de plastificación es:  $\sigma_p = 2,4 \cdot 10^3 \text{ tm}^{-2}$ . No se considera la influencia del esfuerzo axial en la plastificación y la esbeltez de todas las vigas es  $L/r = 100$ . Se supone que para  $\lambda = 10$  se produce el colapso rígido-plástico de la estructura. Los resultados correspondientes al movimiento horizontal del dintel superior, se representan en la figura 10, en donde se comprueba la adecuada coincidencia con la solución obtenida en [5]. La carga crítica de pandeo elasto-plástico, se produce al alcanzar la tercera rótula, para el valor  $\lambda_u = 0,7778$ .

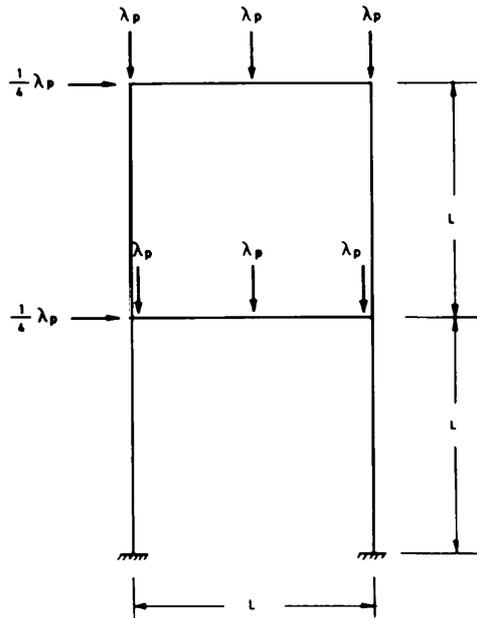


Fig. 9. Pórtico de dos pisos

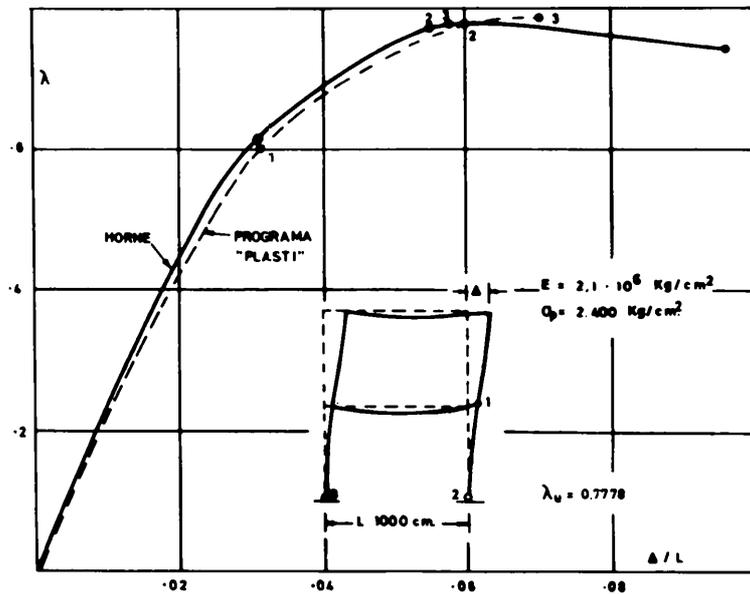


Fig. 10. Curva carga flecha en el pórtico de dos alturas

Por último, un pórtico a dos aguas de la serie experimentada por Majid (6), se analiza mediante el programa de computador. Las características de la estructura se indican en la figura 11. La curva, carga  $P$  actuante-flecha vertical en cumbre, se muestra en la figura 12, en donde se puede comprobar la concordancia con los resultados experimentales. No se han considerado en el cálculo el efecto de la carga axial en el valor del momento de plastificación.

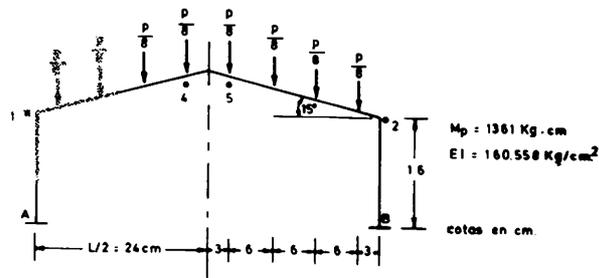


Fig. 11. Pórtico a dos aguas

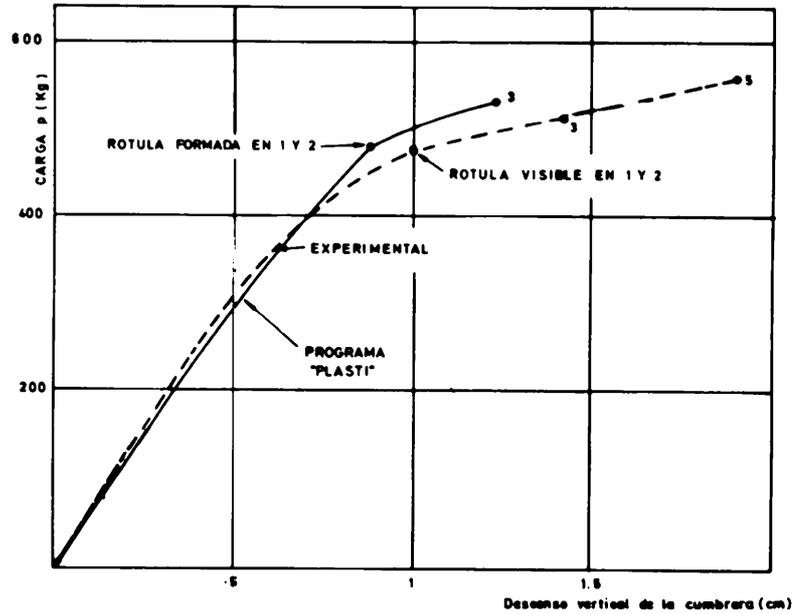


Fig. 12. Curva carga- flecha en el pórtico a dos aguas

## 6. EXTENSIONES DEL PROGRAMA

La técnica incremental descrita, permite analizar sin dificultad la influencia de cambio de las cargas, según una ley programada, que puede incluir la simulación del daño debido al efecto cíclico de las acciones. La extensión a otros tipos de ecuaciones constitutivas, distintas de la lineal, no presenta, evidentemente, ninguna complicación especial; por lo que el programa de cálculo, es aplicable, en principio, a estructuras de hormigón, mediante la adecuación de las relaciones momento-curvatura en las secciones correspondientes.

Se han introducido otras condiciones de colapso, adicionales de las dos anteriormente citadas (inestabilidad y conversión en mecanismo por aparición de rótulas plásticas). En efecto, se han considerado unos valores límites admisibles de movimientos, por condiciones de funcionalidad, así como unos límites superiores de la ductilidad en las distintas secciones plastificadas, como indicativas de la ruina de la estructura. Actualmente, este programa de cálculo se está utilizando en la evaluación de la influencia de los errores de ejecución, en la carga de colapso de la estructura.

La técnica de análisis que se lleva a cabo, corresponde a la descrita en la referencia [2]. Se supone que la carga última, ( $\lambda_u$ ) en la estructura ideal (sin imperfecciones) es función de las características geométricas y elastomecánicas ( $\theta$ ); es decir:

$$\lambda_u = \psi_1(\theta)$$

En el caso de una estructural real, con imperfecciones, se puede escribir:

$$\lambda_u = \psi_2 (\theta, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

siendo  $x_i$  variables aleatorias que definen las imperfecciones consideradas. Por lo tanto, en una estructura real,  $\lambda_u$  es una variable aleatoria, cuya distribución de probabilidad depende de las distribuciones de probabilidad de las distintas  $x_i$ . Dada la complejidad de la función  $\psi_2$ , se recurre en el estudio a una experimentación numérica, tipo simulación de Montecarlo.

## 7. CONCLUSIONES

El programa de cálculo elasto-plástico, de grandes movimientos, de estructuras de entramado plano, conduce a resultados aceptables, en comparación con los obtenidos mediante otros métodos numéricos y experimentales. Su utilización sistemática permitirá evaluar la influencia de las imperfecciones de la carga última de una estructura.

## REFERENCIAS

1. Neal, B.C. "The Plastic Methods of Structural Analysis". Chapman and Hall Ltd. Londres, 1956.
2. Gutiérrez, G. y Samartín, A. "Influencia de los errores de ejecución en la carga crítica de pandeo de estructuras reticuladas planas". Publicación AE-81-1. Departamento de Análisis de las Estructuras. E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Santander, 1981.
3. Samartín, A. "La viga-columna". Publicación AE-79-3. Departamento de Análisis de las Estructuras. E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Santander. 1979.
4. Jennings, A. y Majid, K. "An elastic-plastic analysis by computer for framed structures loaded up to collapse". The Structural Engineer. Diciembre, 1965.
5. Horne, M.R., Proc. Royal Soc. A. Vol. 274, 1963.
6. Majid, K.I. "Elastic-plastic structural analysis". Ph D. Thesis. Manchester University, 1963.