

# **“Evolución de los métodos de cálculo de láminas plegadas. Una aportación al análisis de estructuras no prismáticas”**

**José R. González de Cangas  
Avelino Samartín Quiroga  
Jesús Martínez González  
Drs. Ingenieros de Caminos,  
Canales y Puertos**

## **RESUMEN**

Se describen someramente las más importantes técnicas de cálculo de estructuras láminas plegadas, y se realiza una comparación entre los métodos analíticos –en particular los procedimientos armónicos– y los numéricos.

Entre estos últimos, que hacen posible el tratamiento de situaciones reales que se encuentran en la práctica profesional, se expone uno original que permite englobar dentro de un mismo análisis matricial –y, por tanto, dentro de un mismo programa de computador– estructuras muy diversas: no prismáticas, con sección transversal múltiple, con apoyos intermedios y con diversos tipos de continuidad transversal.

En los ejemplos estudiados se comprueba la bondad de los resultados obtenidos y la excelente eficiencia computacional, en comparación con otros métodos numéricos más universales, que se muestran inadecuados para estos tipos particulares de estructuras.

## **1. INTRODUCCION**

Las estructuras láminas plegadas han constituido y siguen constituyendo actualmente uno de los modelos estructurales más poderosos, al permitir simular, con gran aproximación, numerosos casos de construcciones reales, tales como cubiertas de tipo muy diferente, grandes depósitos, silos, etc...

Por otra parte, el hecho de que las láminas plegadas estén formadas por planos, como se verá más adelante, comporta, en cualquier caso, una serie de ventajas de índole constructiva que hacen recomendable su utilización práctica en la Ingeniería Civil. En particular, cuando el material estructural es el hormigón, la posibilidad de emplear encofrados sencillos repercute favorablemente en el coste final de la obra.

En los últimos años, el interés de este tipo de estructuras se ha debido, principalmente, a su aplicación al análisis de los tableros de puentes, preferentemente de sección cajón, ya que la utilización de métodos de cálculo que consideren las peculiaridades estructurales de las láminas plegadas permite un tratamiento más adecuado de las mismas, sin exigir los recursos computacionales, a veces excesivos, de otros métodos más generales de análisis de estructuras.

## 2. DEFINICIONES BASICAS Y CLASIFICACION DE LAS LAMINAS PLEGADAS

### 2.1 Concepto de lámina plegada

Una estructura lámina plegada puede ser definida como un caso particular de un tipo más general de estructuras laminares, que son las láminas poliédricas.

Se define por lámina poliédrica (figura 1) una lámina cuya superficie media está formada por polígonos. Cabe, por lo tanto, distinguir en ella tres elementos fundamentales: el plano, la arista y el nudo.

Si la superficie media es desarrollable, la estructura recibe entonces el nombre de lámina plegada (figura 2). Aunque las láminas plegadas con nudos intermedios, como la representada en la figura anterior, y conocidas también como “estructuras diamante”, tienen un enorme interés práctico —han sido utilizadas en el estudio de los modos de pandeo de estructuras laminares—, aquí solamente será tratado un caso particular de las mismas: las láminas plegadas canónicas (figura 3), entendiéndose por tales aquellas que no presentan nudos intermedios, es decir, solamente tienen nudos a lo largo de los soportes de apoyo. En el caso de que el número de dichos soportes sea igual a dos, la lámina se denomina simple, y continua en caso contrario.

En lo que sigue, y cuando se haga referencia a las láminas plegadas, se sobreentiende que se considera únicamente el caso de estructuras canónicas.

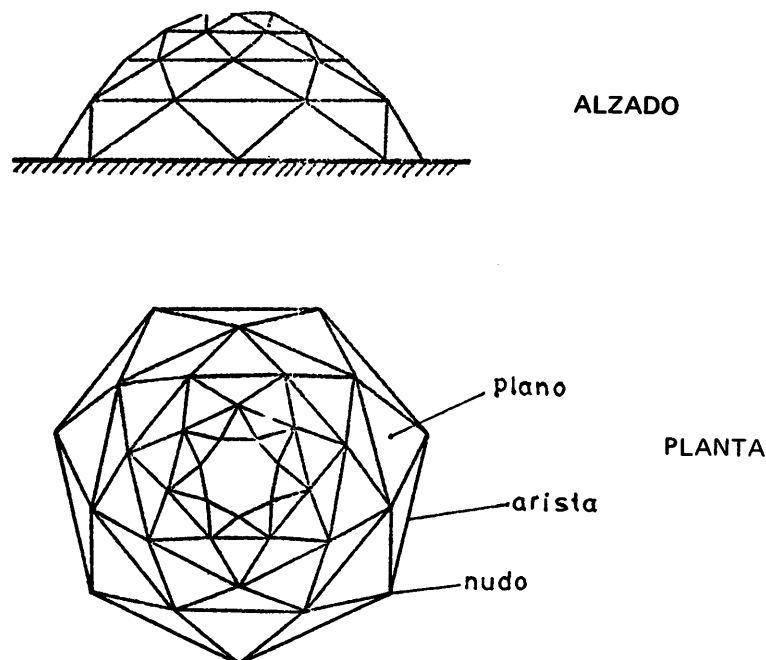


Fig. 1. Lámina poliédrica

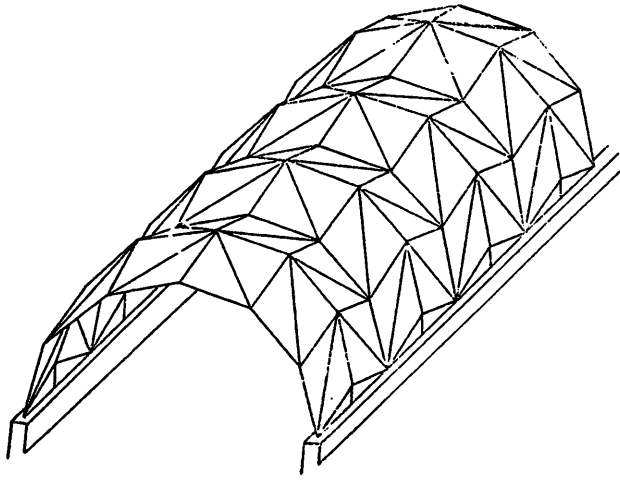


Fig. 2. Lámina plegada

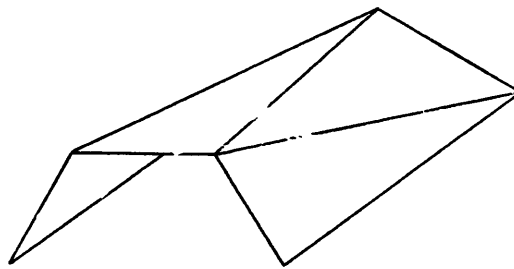


Fig. 3. Lámina plegada canónica.

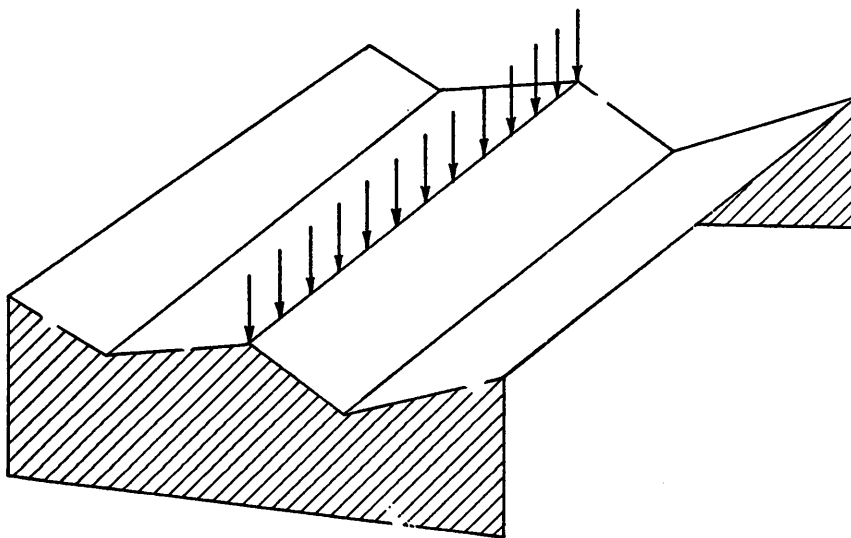


Fig. 4. Cargas actuantes sobre la estructura.

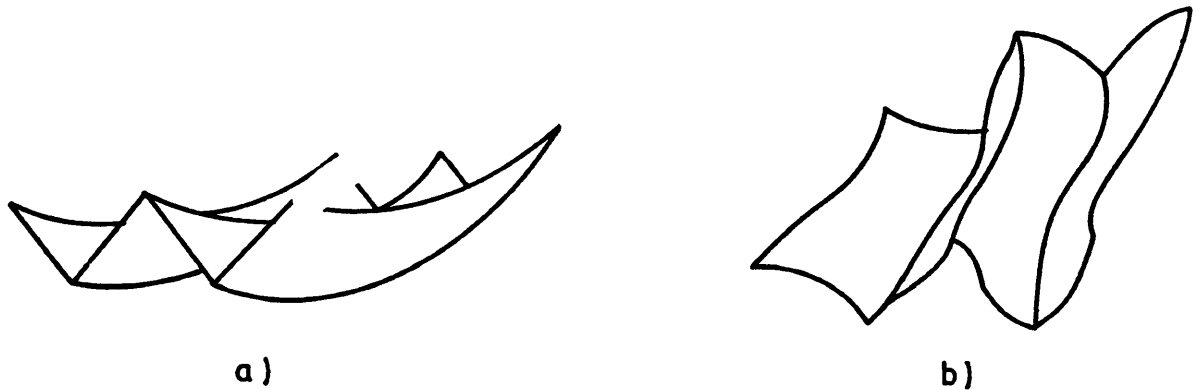


Fig. 5. Esquema resistente: doble mecanismo de trabajo

## 2.2 Comportamiento estructural de la lámina plegada

En el esquema resistente de una lámina plegada se puede considerar un doble mecanismo de trabajo: acción de laja o membrana y acción de flexión o placa. Según dicho esquema, se supone que las cargas actuantes sobre la estructura (figura 4) se transmiten a los apoyos extremos, mediante una flexión longitudinal de la lámina como una viga de sección transversal indeformable, dando lugar a los esfuerzos de membrana (figura 5-a), es decir, esfuerzos axiales y cortantes en el plano de cada una de las losas que conforman la estructura.

Al considerar la deformación de la sección transversal, manteniendo el monolitismo a lo largo de las aristas, surgen, de un modo natural, los esfuerzos de flexión (figura 5-b).

## 2.3 Clasificación de las láminas plegadas

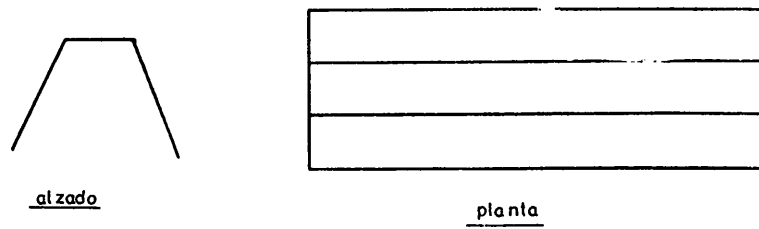
Las láminas plegadas se pueden clasificar atendiendo a diferentes conceptos.

Según su geometría en planta, cabe distinguir entre láminas rectas o curvas (figura 6).

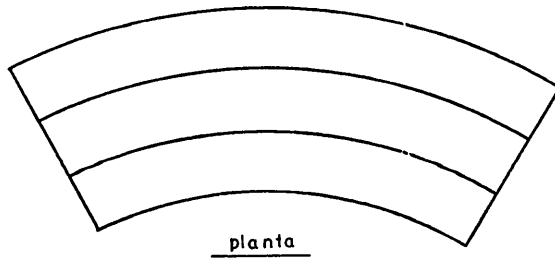
Por su perfil longitudinal, se pueden dividir en láminas de perfil recto o curvo (figura 7). En rigor, estas últimas no pueden ser tratadas como láminas plegadas propiamente dichas, al existir elementos estructurales no planos. Sin embargo, si la variación del perfil longitudinal es suave, puede generalizarse el tratamiento, de modo análogo al caso de elementos monodimensionales de directriz curva, en los que se desprecia el efecto arco, asimilándolos a vigas rectas (figura 8). Sobre este aspecto se insistirá más adelante.

En lo que respecta a la sección transversal, se distingue entre láminas de sección abierta (figura 9), cerrada (figura 10), múltiple (figura 11) o simple (figura 12). La sección es simple cuando en una arista concurren a lo sumo dos losas y múltiple en caso contrario.

Esta última clasificación adquiere una significativa importancia, ya que la evolución histórica de los procedimientos de análisis de láminas plegadas ha seguido un orden creciente de complejidad de la sección transversal, desde los casos más sencillos (sección abierta y simple) hasta los más complicados (sección cerrada y múltiple). Actualmente, y en lo que se refiere a láminas plegadas prismáticas, cuya definición se verá más adelante, no existe ningún tipo de limitación en el análisis, cualquiera que sea la sección transversal de la estructura. Sin embargo, los métodos numéricos específicos de cálculo de láminas plegadas no prismáticas existentes hoy en día ven restringido su rango de aplicación a los casos más sencillos de sección transversal, es decir, cuando ésta es abierta y simple. Aquí se desarrolla un nuevo procedi-

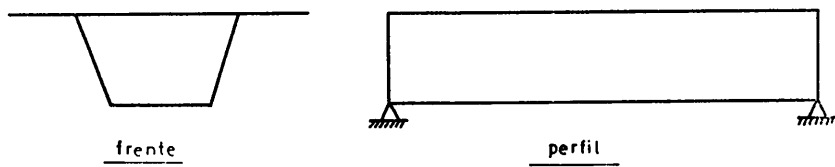


a) Lámina plegada recta

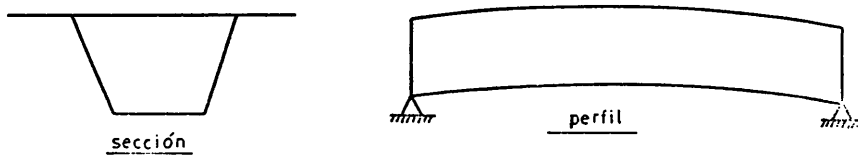


b) Lámina plegada curva

Fig. 6. Clasificación por la geometría en planta.



a) Lámina plegada de alzado recto



b) Lámina plegada de alzado curvo

Fig. 7. Clasificación por el perfil longitudinal.

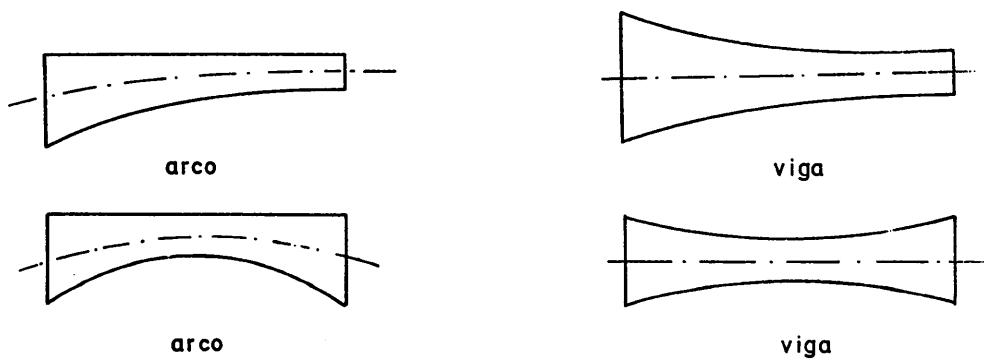


Fig. 8. Asimilación a viga recta de elementos monodimensionales curvos.

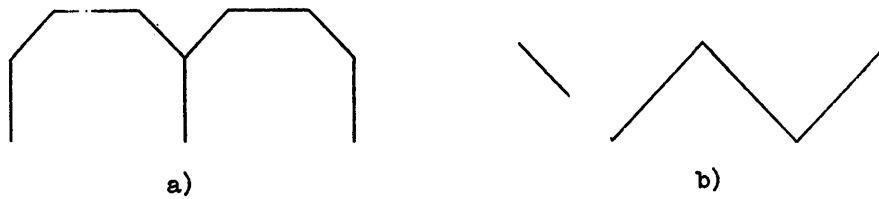


Fig. 9. Lámina plegada de sección abierta

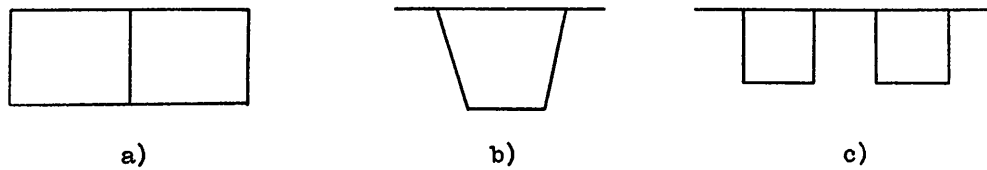


Fig. 10. Lámina plegada de sección cerrada



Fig. 11. Lámina plegada de sección múltiple

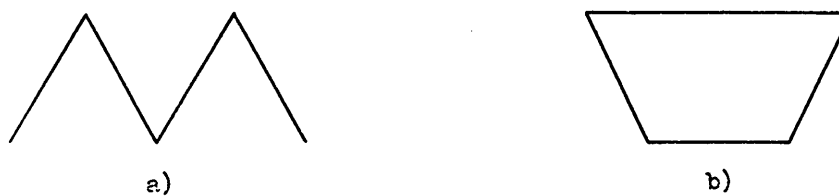


Fig. 12. Lámina plegada de sección simple

miento de análisis de láminas plegadas no prismáticas, uno de cuyos objetivos consiste en eliminar las actuales limitaciones referentes a la geometría de la sección transversal, de modo que permite el estudio de estructuras no prismáticas de sección arbitraria.

Una última clasificación consiste en dividir a las láminas plegadas en prismáticas (figura 13), cuando las secciones de apoyo son iguales entre sí; cónicas (figura 14), si son homotéticas y no prismáticas (figura 15), en el caso de que no guarden ninguna relación de semejanza.

Existen otras posibles divisiones, atendiendo a tipologías especiales (prismoidales, piramidales,...) o a la relación luz/ancho de las losas que constituyen la estructura (largas, intermedias o cortas).

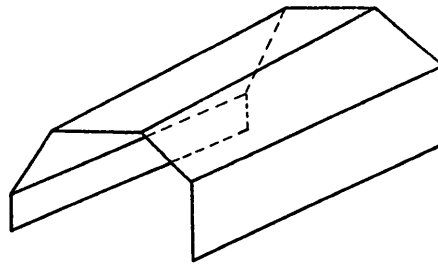


Fig. 13. Lámina plegada prismática

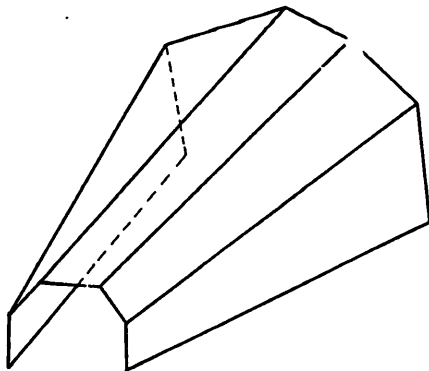


Fig. 14. Lámina plegada cónica

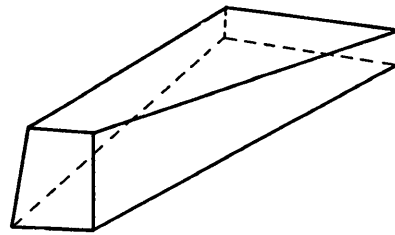


Fig. 15. Lámina plegada no prismática

### 3. METODOS DE CALCULO Y SU CLASIFICACION

#### 3.1 Conceptos generales

Los procedimientos de análisis de láminas plegadas se pueden clasificar, de un modo muy general, en específicos y no específicos.

Los primeros consideran las peculiaridades geométricas de la estructura, teniendo en cuenta el esquema resistente de la misma: acciones de laja y placa.

Los segundos constituyen técnicas generales de cálculo de estructuras que, en particular, pueden ser aplicadas al estudio de las láminas plegadas.

Dentro de los procedimientos específicos, cabe realizar una subclasificación en métodos manuales y por computador. Ambos, a su vez, se pueden dividir en analíticos y numéricos.

Los procedimientos manuales tuvieron su importancia en una época pre-computador y actualmente su utilización se restringe al estudio de casos muy sencillos o a comprobaciones relativamente rápidas.

Los métodos analíticos consideran que las magnitudes de interés en el cálculo son desarrollables en serie, bien mediante desarrollos de Fourier, con lo cual las condiciones de apoyo han de corresponder al tipo tímpano, bien a través de funciones de Rayleigh, que permiten el tratamiento de situaciones más generales de sustentación.

Los procedimientos numéricos utilizan, tanto en el desarrollo teórico, como en la obtención de resultados, técnicas numéricas de análisis.

Sin embargo, la subdivisión anterior no es tajante, pues, de hecho, existen numerosos métodos semianalíticos, es decir, que consideran desarrollos teóricos analíticos, aplicando posteriormente técnicas numéricas para la obtención de los resultados.

Por último, y entre los métodos no específicos, cabe destacar los de diferencias finitas, bandas finitas, segmentos finitos y, sobre todo, el método de los elementos finitos.

### **3.2 Criterios de elección de los procedimientos de cálculo**

En la elección de un método adecuado al estudio de las láminas plegadas, existe una serie de ventajas a favor de los específicos, que hace su utilización más recomendable. Entre dichas ventajas se pueden citar las siguientes:

- a) La entrada de datos en el computador es, generalmente, más simple.
- b) Debido al carácter de estructuras alargadas, que normalmente presentan las láminas plegadas, son posibles simplificaciones en el cálculo longitudinal, pudiendo ser tratadas las losas como vigas apoyadas en sus extremos.
- c) Por la misma razón, el cálculo transversal puede ser reducido al estudio, como entramados planos, de secciones transversales características de la estructura.
- d) La interpretación de los resultados que proporciona el computador es más directa. A este respecto, y en lo que se refiere al método de los elementos finitos, por ejemplo, hay que señalar que se dispone de una superabundancia de información en dichos resultados, información que es preciso seleccionar y reducir a unos niveles de comprensión estructural.
- e) Se puede deducir de lo anteriormente expuesto que, en general, existe una mayor economía en tiempos de hombre y computador en los métodos específicos.
- f) El comportamiento estructural de las láminas es más directo y fácil de seguir en los métodos específicos, aspecto que adquiere especial relevancia en estructuras complejas.

Sin embargo, los métodos no específicos presentan unas ventajas indudables, que estriban en su mayor generalidad, en su aplicación a situaciones arbitrarias de tipología y geometría estructurales, con condiciones de sustentación cualesquiera y actuación de cargas totalmente genéricas.

Además, la realización del programa de computador basado en métodos no específicos es menos compleja, aunque no así su utilización posterior.

### **3.3 Evolución histórica de los métodos de cálculo**

Las láminas plegadas fueron utilizadas por vez primera en Alemania, en 1924, siendo empleadas por Ehlers en la construcción de grandes depósitos de carbón. Ehlers publicó su primer trabajo sobre láminas plegadas [1] en el año 1930. Sin embargo, este tipo de estructuras alcanzó su mayor importancia y desarrollo a partir de 1947, cuando los ingenieros americanos se interesaron en el tema y aplicaron posteriormente los ordenadores electrónicos a los métodos de análisis, tanto a los ya existentes, como a los que posteriormente fueron apareciendo.

Desde entonces, hasta la actualidad, las contribuciones referentes a láminas plegadas han sido muy numerosas, de tal modo que la bibliografía de que se dispone hoy en día es extensísima. A este respecto, cabe señalar que la Sociedad Americana de Ingenieros Civiles



(ASCE) ha creado un Comité para el estudio exclusivo de estas estructuras. Entre las numerosas publicaciones de dicho Comité es preciso destacar la llevada a cabo en el "Journal of Structural Division (ASCE)" en el año 1963 {2}.

Asimismo, la Asociación Internacional de Estructuras Laminadas y Espaciales (IASS) ha dedicado un congreso monográfico {3} al estudio de los diferentes aspectos (Diseño, Cálculo y Construcción) referentes a las láminas plegadas.

Entre las numerosas contribuciones dedicadas al análisis de láminas plegadas prismáticas, es preciso citar el método de rigidez de Scordelis y De-Fries Skene {4}, que permite el estudio de estructuras apoyadas en diafragmas en los soportes extremos, así como la tesis doctoral de M. Pultar {5}.

En España, A. Samartín {6} llevó a cabo un procedimiento matricial que generaliza las condiciones de apoyo en los soportes extremos, a la vez que permite el tratamiento de láminas que incluyen elementos viga, los cuales son tratados como nudos de dimensión finita, mediante técnicas convencionales de cálculo matricial de estructuras.

J. Manterola {7} ha realizado una exposición detallada sobre los diferentes procedimientos armónicos de análisis de tableros de puentes, en donde se incluyen los métodos específicos de cálculo de láminas plegadas prismáticas.

En lo que se refiere a las láminas plegadas no prismáticas, las contribuciones son menos numerosas, debido a las propias características geométricas de este tipo de estructuras, que exigen recurrir a métodos numéricos de análisis.

Se han hecho estudios aproximados, considerando las láminas como vigas {8}, así como análisis experimentales {9}. Los procedimientos numéricos más importantes son debidos a Raue {10} y Johnson y Ti-ta Lee {11}. Sin embargo, estos métodos presentan severas limitaciones, tanto en lo que se refiere a la tipología y geometría estructurales, cuanto a las condiciones de sustentación y cargas actuantes.

Una reciente y bastante completa recopilación de las diferentes técnicas específicas de análisis de láminas plegadas ha sido llevada a cabo por J. Iffland y publicada en la revista ASCE {12}.

#### 4. METODOS ANALITICOS DE CALCULO DE LAMINAS PLEGADAS PRISMATICAS

##### 4.1 Estructuras de un solo vano

Los procedimientos analíticos, en general armónicos, aplicables únicamente a estructuras prismáticas, están basados preferentemente en técnicas matriciales de cálculo de estructuras, mediante las cuales la matriz de rigidez elemental de la lámina plegada ( $\underline{K}_e^{LP}$ ) se obtiene a través de las matrices elementales de cada losa, en su doble trabajo como placa ( $\underline{K}_e^P$ ) y como membrana o laja ( $\underline{K}_e^m$ ):

$$\underline{K}_e^{LP} = \begin{bmatrix} \underline{K}_e^P & \underline{O} \\ \underline{O} & \underline{K}_e^m \end{bmatrix}$$

En estos métodos se supone que las magnitudes del cálculo son desarrollables en serie (Fourier o Fourier generalizada) en una dirección (figura 16), es decir:

$$W = \sum W_0^n \cdot \text{sen} \frac{n \pi x}{L}$$

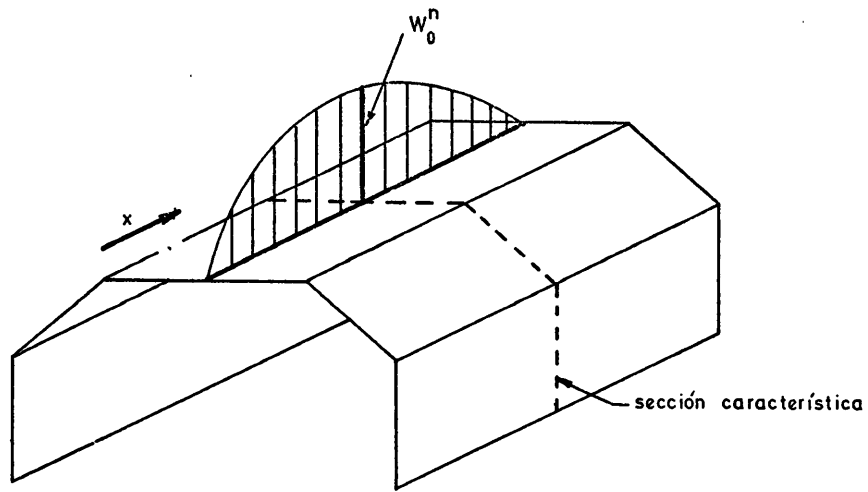


Fig. 16. Métodos armónicos de cálculo: Sección característica.

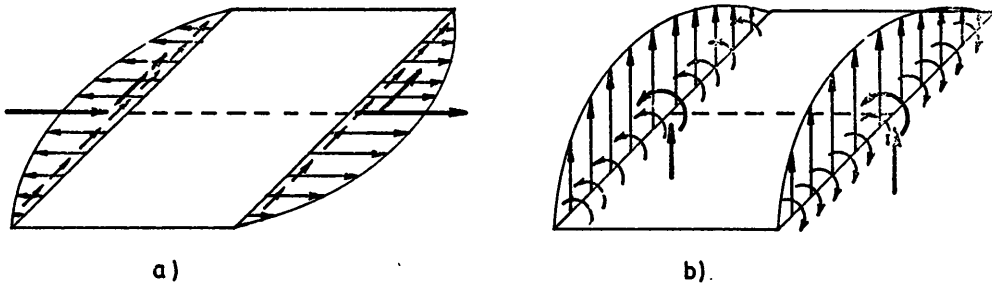


Fig. 17. Métodos armónicos: Grados de libertad en la sección característica.

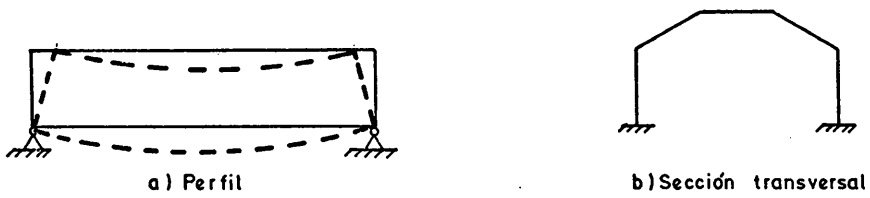


Fig. 18. Métodos armónicos: Teoría ordinaria.

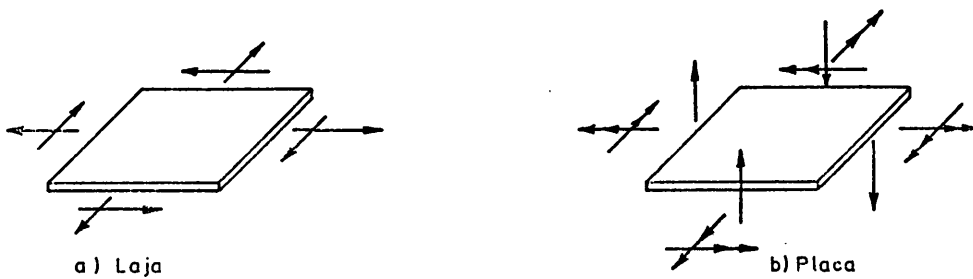


Fig. 19. Métodos armónicos: Teoría de la elasticidad.

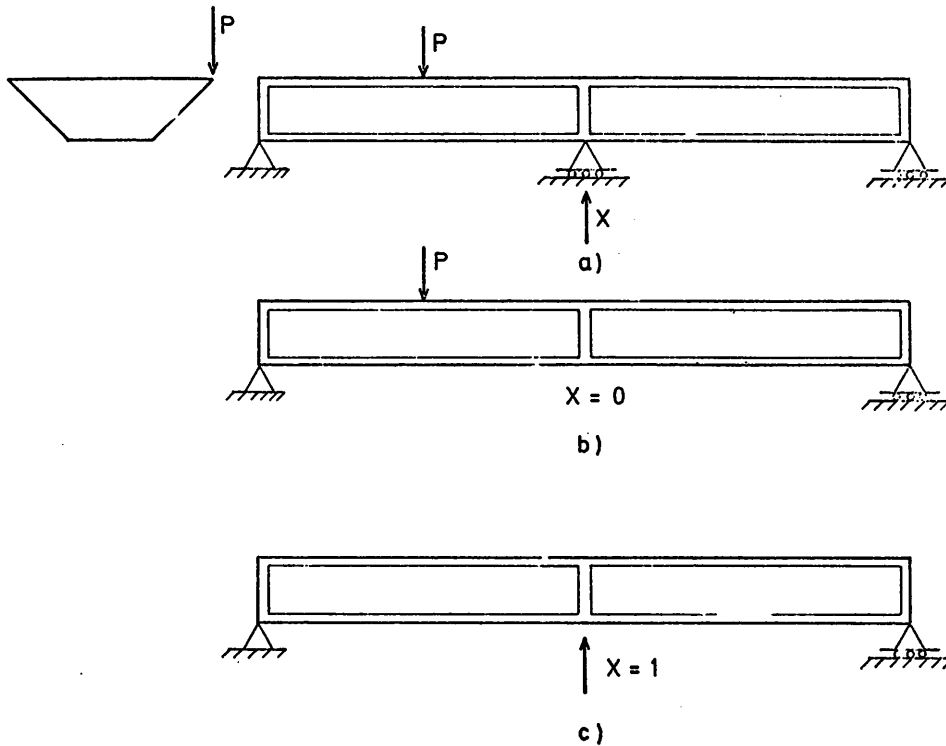


Fig. 20. Lámina plegada prismática de varios vanos. Método de las hiperestáticas

de forma que dichas magnitudes pueden ser representadas por un valor característico, correspondiente a su amplitud:  $W_0^n$ . Esto permite el tratamiento de las aristas como si fuesen puntos nodales, reduciendo el problema bidimensional a un problema plano.

Así, al hallar la matriz de rigidez del estado laja, los únicos grados de libertad a considerar corresponden a los desplazamientos horizontal y longitudinal en los puntos nodales de la sección característica (figura 17-a), y en el estado placa, los grados de libertad corresponden al desplazamiento vertical y giro en los mismos puntos (figura 17-b).

Para la obtención de los términos de la matriz de rigidez, se pueden seguir dos caminos:

- a) La teoría elemental u ordinaria, mediante la cual el análisis del sistema laja puede ser reducido al estudio, como vigas apoyadas en sus extremos, de las losas que forman la estructura (figura 18-a). Por su parte, el cálculo del sistema placa se asimila al tratamiento de la lámina plegada como un entramado plano ("one-way slab action"), correspondiente a la sección característica de la misma (figura 18-b).
- b) La teoría de la elasticidad deduce los términos de las matrices de rigidez elementales a través de las ecuaciones diferenciales de la laja ( $\nabla^4 \phi = 0$ ) y de la placa a flexión ( $\nabla^4 w = \frac{7}{D}$ ) (figura 19), siendo  $\phi$  y  $w$  la función de tensión de Airy y la flecha normal de cada losa, respectivamente.

## 4.2 Estructuras de varios vanos

Los procedimientos descritos someramente en el apartado anterior permiten el tratamiento, mediante una sencilla extensión, de láminas plegadas de varios vanos, siguiendo un método de flexibilidad (método de las hiperestáticas), análogo al utilizado en el cálculo de vigas continuas (figura 20). Una exposición detallada de este procedimiento puede verse en {13}.

## 5. LAMINAS PLEGADAS NO PRISMATICAS: PROCEDIMIENTOS NUMERICOS

### 5.1 Método de Johnson y Ti-ta Lee

El método desarrollado por Johnson y Ti-ta Lee [11] es válido únicamente para estructuras de un solo vano, de sección transversal abierta y simple, y se puede resumir esquemáticamente como sigue:

- 1) La lámina plegada se divide en un cierto número de secciones transversales (secciones nodales), igualmente separadas entre sí (figura 21).
- 2) El tramo de lámina correspondiente a cada sección nodal se analiza como un entramado plano, sometido a las cargas que actúan directamente sobre él, para lo cual se introduce una serie de apoyos ficticios en los nudos interiores de dicho entramado (figura 22-a). Efectuado el cálculo transversal de cada entramado (análisis primario), se deducen los esfuerzos transversales (figura 22-b) y las reacciones ( $R_i$ ) en los apoyos ficticios.
- 3) Dado que los apoyos anteriores no existen en la realidad, se hace necesario anular las reacciones  $R_i$  obtenidas. Para ello, se cambian de signo y se descomponen estáticamente en fuerzas ( $P_i$ ) en el plano de cada una de las losas (acciones de laja) adyacentes al apoyo en el que se pretende anular la citada reacción (figura 23). Esta descomposición es posible, al ser simple la sección transversal de la lámina.
- 4) El proceso anterior se repite para todas las secciones nodales, deduciéndose, de este modo, en cada losa, unas acciones,  $P_i$  (acciones de laja), en el plano de la misma, actuando concentradas en cada sección nodal y en los diafragmas de apoyo (figura 24-a). Dichas fuerzas se sustituyen por una acción repartida (figura 24-b), mediante interpolación parabólica.
- 5) A continuación, se procede al cálculo longitudinal de cada losa aislada, considerada como una viga simplemente apoyada en sus extremos, y sometida a la distribución parabólica de cargas en su plano deducida en el paso anterior. Se calculan, así, las leyes de esfuerzos longitudinales (momentos flectores, esfuerzos cortantes y esfuerzos axiales), y, por lo tanto, las tensiones normales longitudinales, paralelas a los bordes de cada losa.
- 6) Como la estructura es monolítica, los desplazamientos longitudinales a lo largo de una arista común a dos losas han de ser iguales en los bordes de ambas o, lo que es igual, ha de verificarse la igualdad de tensiones normales longitudinales, ya que el material es linealmente elástico. Sin embargo, dicha igualdad no se cumple, en general, para las tensiones calculadas en el paso 5). Se hace necesario, por tanto, introducir unas tensiones cortantes (fuerzas rasantes unitarias) en los bordes de cada losa (figura 25), a fin de conseguir el monolitismo estructural.

Las anteriores tensiones,  $q_j$ , se pueden sustituir por unas fuerzas concentradas equivalentes,  $T_{aj}$ , actuando en cada sección nodal (figura 25), estando ambas relacionadas mediante la ecuación  $q = \frac{dT}{dx}$ , o lo que es igual,  $q = \frac{\Delta T}{\Delta L}$ , dado el carácter discreto del procedimiento utilizado.

Las fuerzas  $T_{aj}$  modifican las leyes de esfuerzos longitudinales obtenidas en 5), de modo que: a) el esfuerzo axial se incrementa en la componente de dichas fuerzas

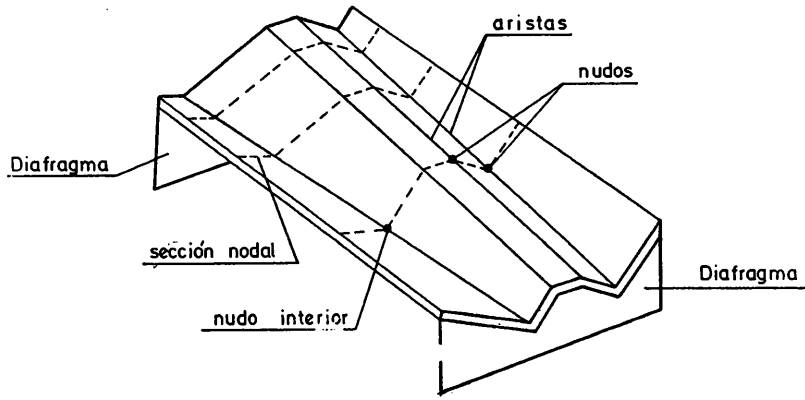


Fig. 21. Lámina plegada no prismática: Secciones nodales.

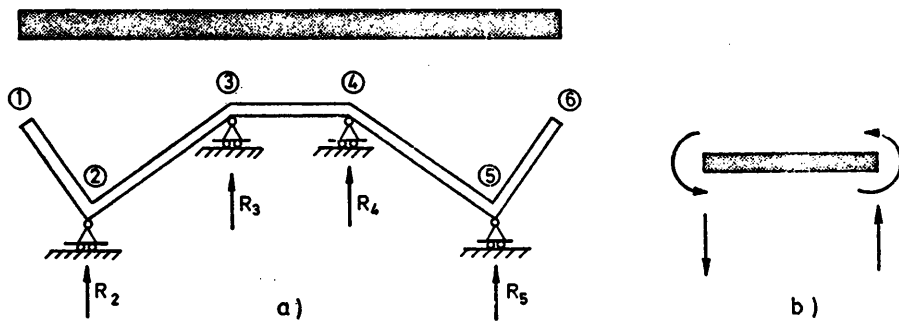


Fig. 22. Análisis primario.

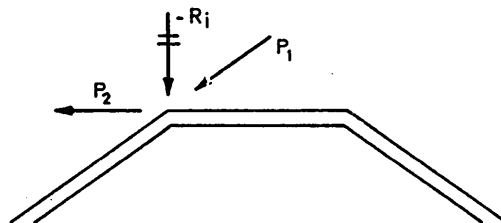


Fig. 23. Acciones de laja.

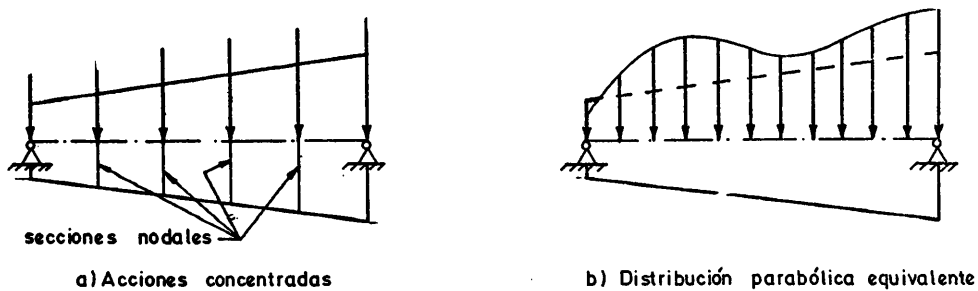


Fig. 24. Acciones consideradas en el cálculo longitudinal.

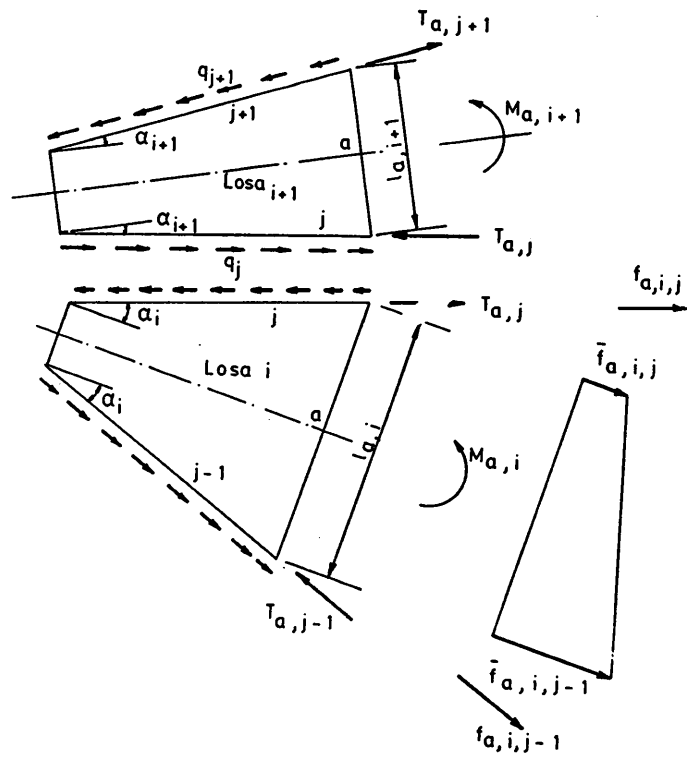


Fig. 25. Monolitismo estructural: Fuerzas rasantes unitarias.

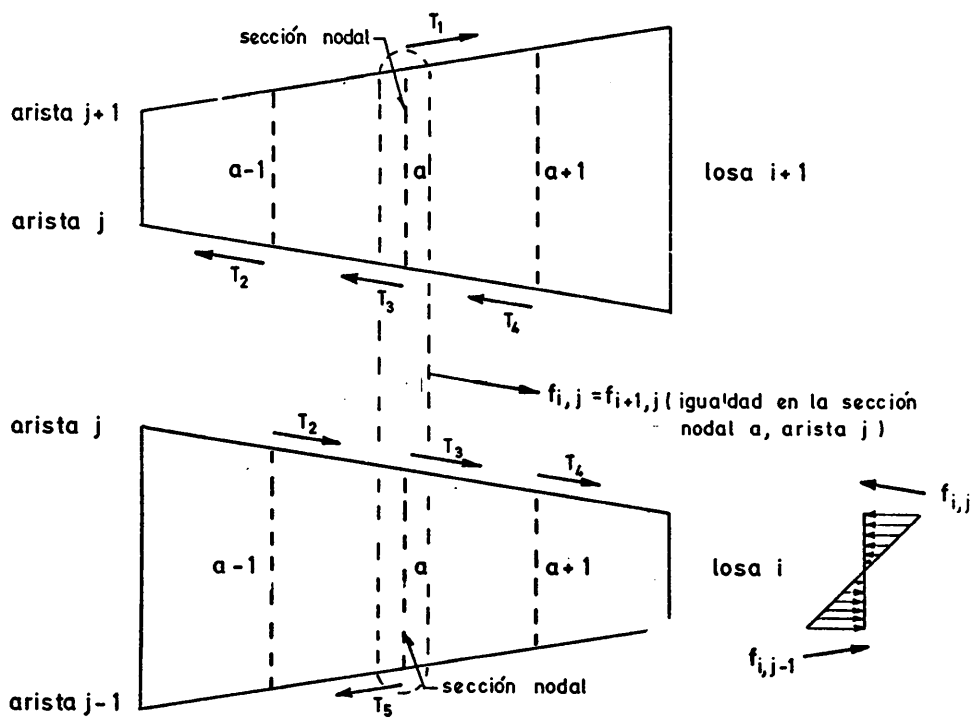


Fig. 26. Monolitismo estructural: Ecuación de los cinco cortantes.

paralela a la directriz de la losa; b) el esfuerzo cortante aumenta en la componente normal a dicha directriz, y, c) el momento flector se modifica al considerar el incremento debido al producto de esas fuerzas por el brazo correspondiente (figura 25). Se hace, por lo tanto, necesario, deducir el valor de cada una de las  $T_{aj}$ , a fin de calcular las leyes de esfuerzos longitudinales reales de cada losa.

- 7) Se plantea, en cada arista y cada sección nodal, la igualdad de tensiones normales longitudinales,  $f_{ij} = f_{i+1,j}$  (figura 26). Se llega así a una ecuación que relaciona las cinco fuerzas  $T_{aj}$ , como se indica en la figura 26, y que se conoce como ecuación de los cinco cortantes.

Repetido el proceso en todas las secciones nodales y todas las aristas, es posible plantear una relación matricial del tipo

$$\underline{AA} \times \underline{T} = \underline{B}$$

en la cual  $\underline{T}$  representa un vector que incluye todas las fuerzas  $T_{aj}$  de la lámina plegada;  $\underline{AA}$  es una matriz cuadrada regular, que depende de las características geométricas de la estructura y  $\underline{B}$  es un vector dependiente de las acciones exteriores.

La ecuación matricial anterior permite la obtención de las incógnitas  $T_{aj}$  y, por tanto, las leyes de esfuerzos longitudinales reales definidas en 6).

- 8) A partir de los esfuerzos anteriores, se conoce, en cada losa, el diagrama de curvaturas y, por integración del mismo, la ley de flechas en el plano de aquella (figura 27).
- 9) Dichas flechas no definen, en cada sección nodal, un único punto para una arista común a dos losas. La compatibilidad geométrica transversal se lleva a cabo mediante un sencillo diagrama de Williot (figura 28), apareciendo unos asientos diferenciales entre las aristas, que obligan a un nuevo cálculo transversal (análisis secundario) de la sección nodal, en el que los esfuerzos de empotramiento rígido se deben a los anteriores asientos diferenciales.

Se obtienen, de este modo, unas nuevas reacciones ( $R_i^s$ ) en los apoyos ficticios —que se mantienen en los nodos interiores—, que es preciso anular a fin de conservar el equilibrio estructural.

- 10) La técnica seguida por Johnson y Ti-ta Lee para la anulación de las reacciones secundarias ( $R_i^s$ ) ya fue utilizada por Yitzhaki, en sus trabajos pioneros {14} sobre láminas prismáticas, y se conoce con el nombre de “Método de las cargas particulares”. Este procedimiento se describe a continuación (figura 29):

- a) Se aplica en cada uno de los nodos interiores de la lámina plegada una fuerza nodal conocida  $K^t$ , y, bajo esta carga, se analiza la estructura, siguiendo los pasos descritos hasta ahora, es decir:
- b) Análisis primario de cada sección nodal; obtención de las reacciones primarias,  $R_i$ , en los apoyos ficticios; descomposición de las mismas en acciones de laja,  $P_i$ ; cálculo longitudinal de cada losa y deducción de las leyes de flechas; compatibilización de los desplazamientos transversales en las aristas y obtención de los asientos diferenciales y, por último, análisis secundario y cálculo de las reacciones nodales correspondientes,  $FC_i^t$ , en equilibrio con la fuerza nodal,  $K^t$ .
- c) La combinación de la fuerza nodal,  $K^t$ , y las reacciones nodales,  $FC_i^t$ , constituye un sistema de fuerzas en autoequilibrio que se conoce con el nombre de “sistema de cargas particulares”.

El proceso anterior se repite, mediante la aplicación de sucesivas fuerzas nodales, hasta obtener N sistemas de cargas particulares, linealmente independientes, siendo N el número de nodos interiores de toda la estructura.

- 11) Las reacciones  $R_i^s$ , deducidas en el paso 9), pueden ser anuladas ahora, combinando adecuadamente los N sistemas de cargas particulares, previamente multiplicados por unos parámetros,  $\beta_i$  —que es preciso determinar—, tal como se indica en la expresión matricial siguiente:

$$\{FC\} \cdot \{\beta\} + \{R^s\} = 0$$

La resolución de la ecuación matricial anterior permite deducir el valor de los parámetros  $\beta_i$ , que son las incógnitas básicas del método.

- 12) Los resultados finales de interés en el cálculo se obtienen por suma de los hallados en el análisis primario (paso 2), más los deducidos en el análisis secundario (paso 9) y más los debidos a cada uno de los N sistemas de cargas particulares, previamente multiplicados por los parámetros  $\beta_i$  correspondientes.

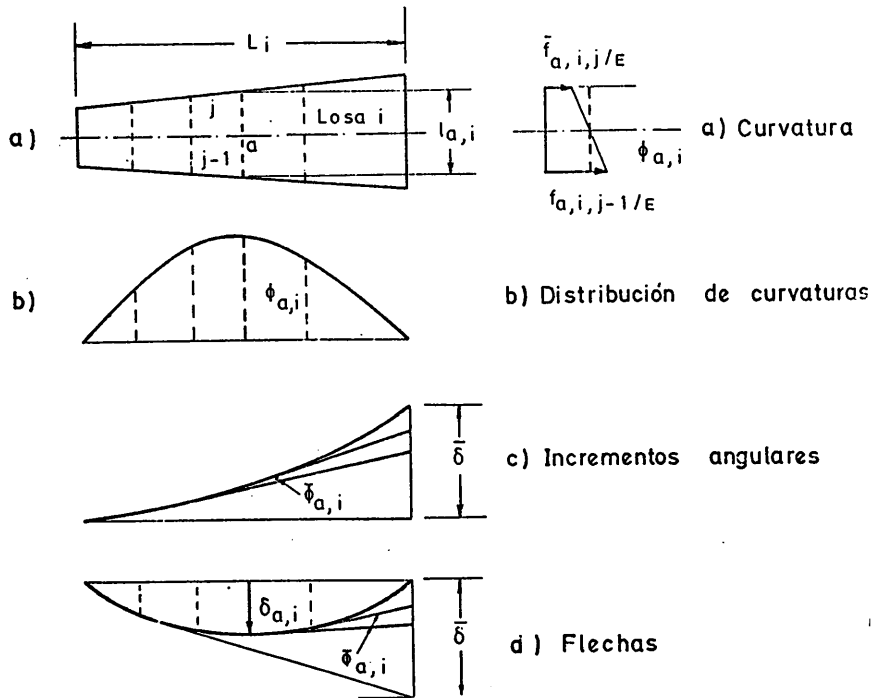


Fig. 27. Flexión longitudinal: Movimientos

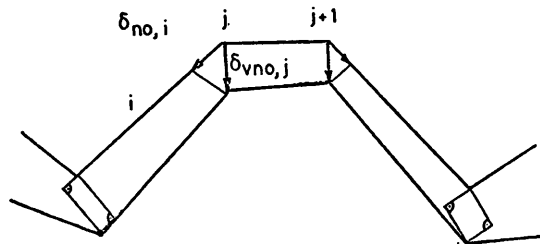


Fig. 28. Desplazamientos relativos entre las aristas



## 5.2 Limitaciones del método de Johnson y Ti-ta Lee

El procedimiento de análisis de láminas plegadas no prismáticas descrito en el apartado anterior presenta una serie de limitaciones que a continuación se indican:

- 1) Es válido únicamente para el análisis de láminas de un solo vano, con condiciones de sustentación tipo tímpano en los extremos.
- 2) No están incluidas condiciones arbitrarias de apoyo.
- 3) Solamente permite el tratamiento de estructuras de sección abierta y simple.
- 4) Implícitamente sólo admite la consideración de cargas verticales.
- 5) La lámina plegada ha de estar formada por losas rectangulares, triángulos isósceles o trapecios isósceles, de espesor constante.

Evidentemente, las anteriores limitaciones restringen, de modo considerable, las posibilidades de aplicación del método de Johnson y Ti-ta Lee a diversas situaciones prácticas reales, como, por citar un ejemplo, los tableros de puentes de sección cajón.

Dichas limitaciones han sido eliminadas en el procedimiento numérico que a continuación se describe.

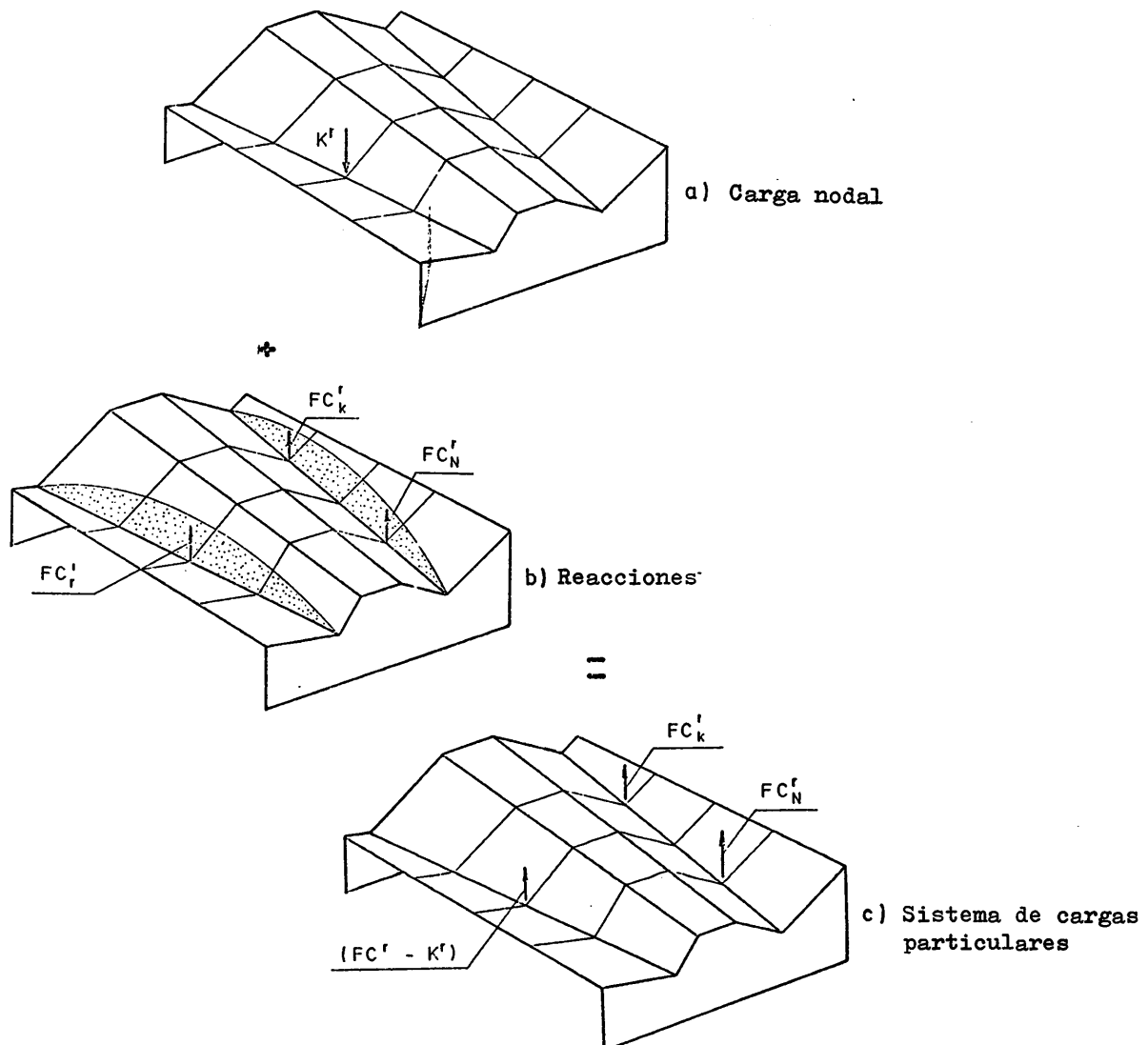


Fig. 29. Formulación de un sistema de cargas particulares

## **6. CALCULO MATRICIAL DE LAMINAS PLEGADAS CONTINUAS, NO PRISMATICAS, DE SECCION TRANSVERSAL ARBITRARIA**

### **6.1 Introducción e hipótesis**

Los fundamentos teóricos del presente método, así como su desarrollo matemático, han sido expuestos, de forma resumida, en la publicación {15}. La descripción detallada del procedimiento y su aplicación a diferentes casos prácticos puede verse en {16}.

Aquí únicamente se indican los principales aspectos del análisis, sin entrar en los detalles del mismo.

Las hipótesis fundamentales del método corresponden a las usuales del cálculo lineal de estructuras, es decir, se supone:

1) Material linealmente elástico, homogéneo e isótropo.

2) Pequeñas deformaciones, o, equivalentemente, se desprecian los desplazamientos al cuadrado frente a la unidad:  $|u|^2 \ll 1$ .

3) Pequeños movimientos, de modo que las ecuaciones de equilibrio se plantean sobre la geometría no deformada de la estructura.

Se tienen en cuenta, además, las siguientes hipótesis adicionales:

4) Monolitismo estructural, que equivale a que exista continuidad de movimientos a lo largo de las aristas.

5) La estructura es alargada, lo cual permite introducir las simplificaciones que, en teoría de láminas, se conocen con el nombre de "segunda aproximación" o de Schörrer {17}.

### **6.2 Esquema del método de cálculo**

Se puede exponer, esquemáticamente, el proceso de cálculo de acuerdo con los siguientes apartados fundamentales:

1) Se divide la lámina plegada, mediante secciones transversales, en un cierto número de dovelas de igual longitud (esta restricción, no necesaria en la realidad, se hace con el objeto de facilitar la realización del programa de computador). Se entiende aquí por dovela el tramo de lámina comprendido entre dos secciones transversales (figura 30).

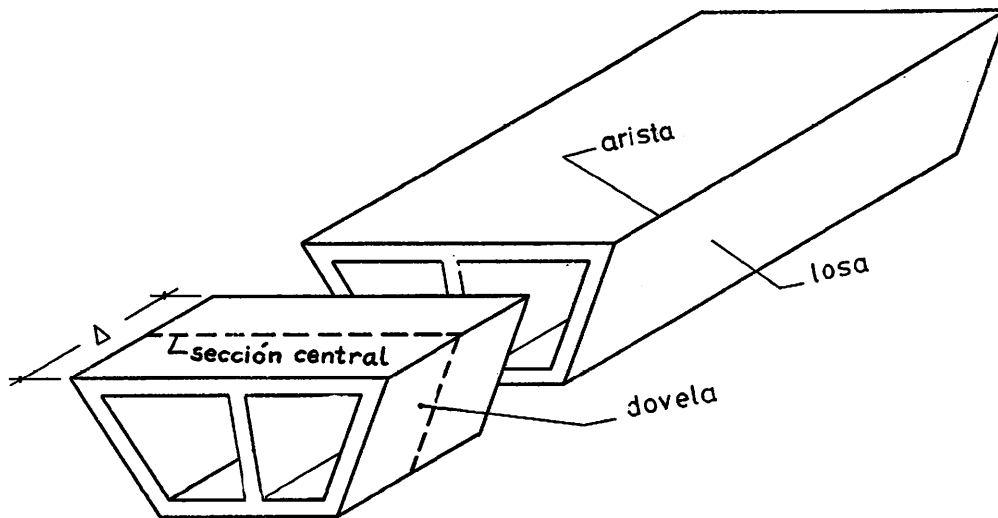


Fig. 30. Partición en dovelas de la estructura lámina plegada

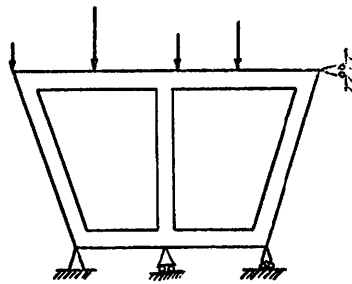


Fig. 31. Cálculo transversal primario de una dovela: Entramado equivalente.

2) Se realiza el cálculo transversal de cada dovela, sometida únicamente a las acciones que directamente gravitan sobre ella (cálculo transversal primario), considerada dicha dovela como un entramado plano, correspondiente a la sección central de la misma, es decir, la sección transversal que pasa por su centro de gravedad (figura 31). A tal fin, se introduce en los nudos de la citada sección central el número de apoyos ficticios estrictamente necesario, de modo que el entramado constituya una estructura intraslacional. Dichos apoyos pueden ser incluidos, de un modo automático, en el computador, mediante consideraciones matemáticas elementales de rango de matrices  $\{16\}$ .

Los resultados del cálculo anterior se denominan primarios; por ejemplo, momentos transversales primarios en los bordes de cada losa, en una dovela genérica,  $\mu^P$ . En particular, se deducen en los apoyos ficticios las reacciones primarias correspondientes,  $R_f^P$ .

3) Si la sección transversal de la estructura fuese simple, sería posible la descomposición estática de las reacciones,  $-R_f^P$ , anteriores en fuerzas actuando en el plano de cada una de las losas concurrentes en la arista coaccionada (acciones de laja,  $p_a^i$ ), tal como hacen Johnson y Ti-ta Lee (figura 32).

Sin embargo, en el caso general de sección múltiple (figura 33), no es posible la descomposición estática anteriormente citada, con lo cual se desconoce el valor de las acciones de laja,  $p_a^i$ .

El método aquí seguido consiste en tomar dichas fuerzas,  $p_a^i$ , como incógnitas básicas, que se mantienen a lo largo de todo el proceso de cálculo, y que son determinadas al final del mismo. Teóricamente, el valor de una acción genérica,  $p_a^i$ , correspondiente a una losa,  $i$ , y dovela,  $a$ , arbitrarias, se obtiene como suma de las acciones de laja,  $p_a^{i1}$  y  $p_a^{i2}$ , que actúan en los bordes de la losa (figura 33):

$$p_a^i = p_a^{i1} + p_a^{i2}$$

4) Se lleva a cabo el cálculo longitudinal de cada losa, independientemente de las demás, considerada como una viga simplemente apoyada en sus extremos y cargada en su plano con las fuerzas  $p_a^i$  ya citadas (figura 34), supuestas distribuidas parabólicamente. Es preciso tener en cuenta, además, dos acciones suplementarias,  $G_1^i$  y  $G_2^i$ , consideradas también como incógnitas básicas, y que corresponden a los momentos de continuidad en los extremos de la losa, en el caso de estructuras de varios vanos.

Mediante la teoría elemental de vigas a flexión, se deducen las leyes de esfuerzos longitudinales (momentos flectores, esfuerzos cortantes y esfuerzos axiales) en cada una de las losas. Dichas leyes, dado el carácter discreto del tratamiento seguido, tienen la estructura que a continuación se indica, en función de las incógnitas básicas de la losa:

$$\underline{E}^i = \underline{E}_0^i + \underline{E}_p^i \cdot \underline{p}^i + \underline{E}_G^i \cdot \underline{G}^i \quad (1)$$

La matriz  $\underline{E}^i$  representa la ley de esfuerzos longitudinales (flectores, cortantes o axiales, según el caso) de la losa  $i$ , en forma discreta. Su dimensión es  $(A \times 1)$ , siendo  $A$  el número de dovelas en que se ha dividido la lámina plegada.

El vector  $\underline{p}^i$ , de dimensión  $(A \times 1)$ , incluye las incógnitas básicas  $p_a^i$  de la losa  $i$ , y el vector  $\underline{G}^i$ , de dimensión  $(2 \times 1)$ , comprende los momentos de continuidad,  $G_1^i$  y  $G_2^i$ .

La matriz de términos independientes,  $\underline{E}_0^i$ , corresponde a posibles esfuerzos iniciales en la losa, debidos por ejemplo, al pretensado, efectos de temperatura, etc., que pueden ser considerados mediante este método de análisis.

5) Si a partir de las leyes de esfuerzos anteriores se calculan los desplazamientos longitudinales a lo largo de una arista común a varias losas, se observa que dichos desplazamientos son diferentes en los bordes de cada una de las losas que concurren en dicha arista.

Sin embargo, el monolitismo estructural obliga a que los anteriores desplazamientos sean iguales o, lo que es equivalente, dado el carácter lineal y elástico del material, se ha de verificar la igualdad de tensiones normales longitudinales en la arista común. Ello obliga a considerar en los bordes de las losas unas tensiones tangenciales longitudinales (fuerzas rasantas unitarias),  $q^i$  (figura 35). En una sección determinada, estas tensiones tangenciales producen una resultante,  $T^i$ , en principio desconocida (figura 36), cuya expresión es:

$$q^i = \frac{dT^i}{dx}$$

o lo que es igual

$$q^i = \frac{\Delta T^i}{D}$$

siendo  $D$  la longitud de la dovela según el borde correspondiente (figura 36-a).

Las fuerzas  $T^i$  anteriores modifican las leyes de esfuerzos longitudinales de la losa (figu-

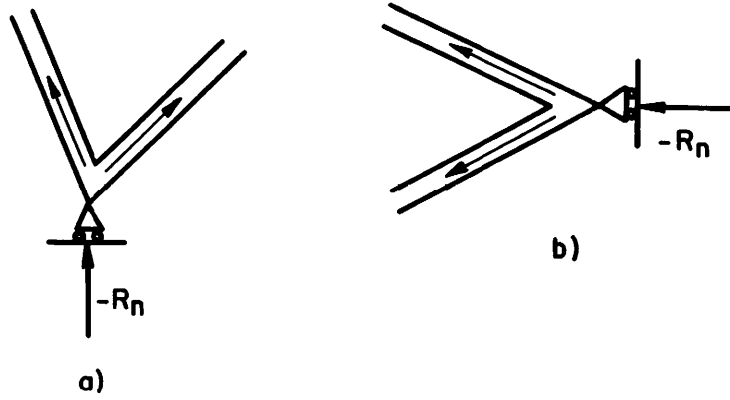


Fig. 32. Reacciones en las coacciones debidas al cálculo transversal primario

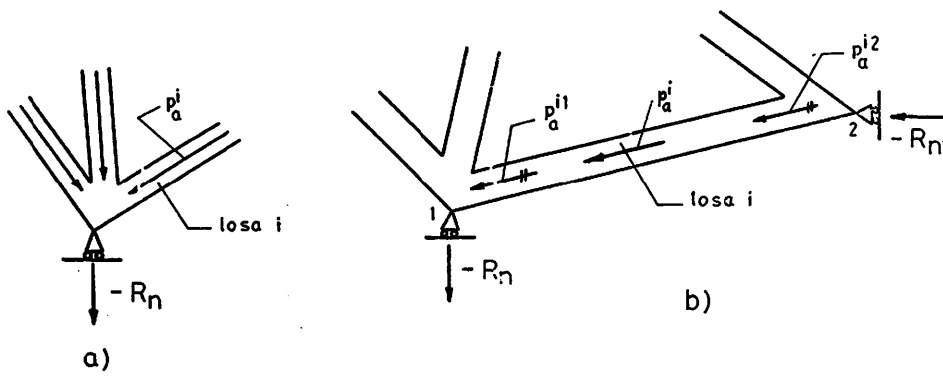


Fig. 33. Descomposición de las reacciones, cambiadas de signo, correspondientes solamente a las coacciones impuestas

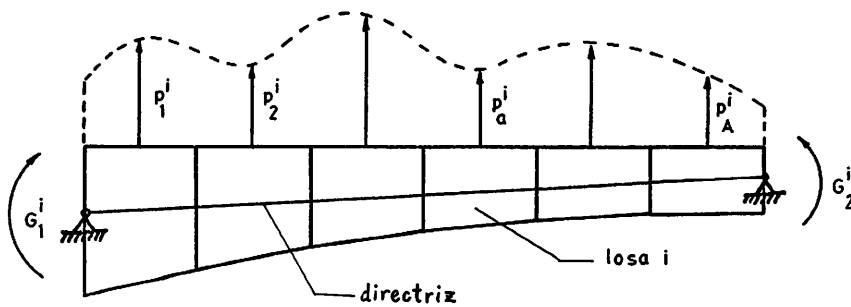


Fig. 34. Acciones consideradas en el cálculo longitudinal de una losa genérica

ra 36-b), tal como se explicó en el método de Johnson y Ti-ta Lee, de modo que la fórmula (1) se transforma en:

$$\underline{E}^i = \underline{E}_0^i + \underline{E}_p^i \cdot \underline{p}^i + \underline{E}_G^i \cdot \underline{G}^i + \underline{E}_T^i \cdot \underline{T}^i \quad (2)$$

en donde el vector  $\underline{T}^i$ , de dimensión  $(2A \times 1)$ , incluye todas las fuerzas concentradas,  $T^i$ , de la losa. (\*)

6) Para calcular las fuerzas  $T^i$ , desconocidas, se plantea, por una parte, el equilibrio de las fuerzas  $q^i$  y, por otra, la igualdad de tensiones normales longitudinales en cada arista y cada dovela. Es preciso señalar que, en este caso, no es válida la ecuación de los cinco cortantes, ya que la sección transversal no es abierta y simple.

Sin embargo, la ecuación final a la que se llega tiene la estructura ya reseñada, es decir:

$$\underline{AA} \cdot \underline{T} = \underline{B} \quad (3)$$

en donde el vector  $\underline{T}$  incluye las fuerzas  $T^i$  de toda la lámina y es de dimensión  $(2AI \times 1)$ , siendo I el número de losas y A el número de dovelas, como ya se ha explicado.

La matriz  $\underline{AA}$ , no singular, depende de las características geométricas de la estructura, y su dimensión es  $(2AI \times 2AI)$ .

La matriz  $\underline{B}$  depende de las cargas exteriores que actúan sobre la lámina plegada. Su expresión es del tipo

$$\underline{B} = \underline{B}_0 + \underline{B}_p \cdot \underline{p} + \underline{B}_G \cdot \underline{G} \quad (4)$$

en la cual  $\underline{p}$  es un vector de dimensión  $(AI \times 1)$ , que incluye todas las fuerzas  $p_a^i$  de la estructura y  $\underline{G}$ , vector de dimensión  $(2I \times 1)$ , comprende todos los momentos  $G_1^i$  y  $G_2^i$  debidos a la continuidad.

La resolución de la ecuación matricial (3) permite calcular el valor de las fuerzas  $T^i$ :

$$\underline{T} = \underline{AA}^{-1} \cdot \underline{B}$$

que, substituidas en la expresión (2), la modifican como se indica a continuación, si se considera la relación (4):

$$\underline{E}^i = \tilde{\underline{E}}^i = \tilde{\underline{E}}_0^i + \tilde{\underline{E}}_p^i \cdot \underline{p} + \tilde{\underline{E}}_G^i \cdot \underline{G} \quad (5)$$

en donde  $\underline{p}$  y  $\underline{G}$  ya han sido definidos.

La ecuación (5) representa cualquier ley de esfuerzos longitudinales reales de la losa i. Obsérvese la diferencia de la ecuación (2) con la (5). En ésta, todas las incógnitas  $\underline{p}$  y  $\underline{G}$  de la lámina intervienen, en lugar de las incluidas en la losa i:  $\underline{p}^i$  y  $\underline{G}^i$ .

7) A través de la teoría de la viga conjugada, y mediante un algoritmo de cálculo semejante al utilizado para hallar la ley de momentos flectores representada por (1), se calcula la ley de flechas en el plano de cada losa (figura 37), cuya expresión es del tipo:

$$\underline{u}^i = \underline{u}_0^i + \underline{u}_p^i \cdot \underline{p} + \underline{u}_G^i \cdot \underline{G} \quad (6)$$

(\*) Las fuerzas  $T_{10}^i$  y  $T_{20}^i$  (figura 36-a) son conocidas, y su valor depende del tipo de sustentación en el apoyo. En el caso de tímpanos,

$$T_{10}^i = T_{20}^i = 0$$

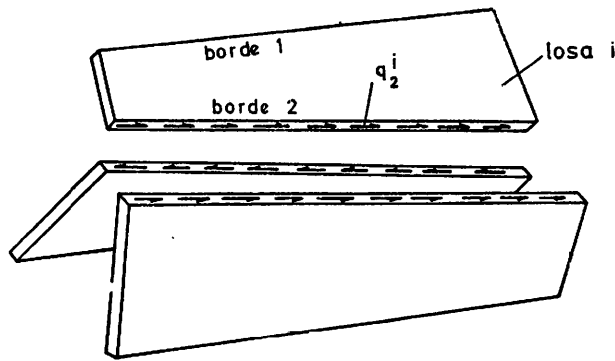


Fig. 35. Fuerzas rasantes unitarias.

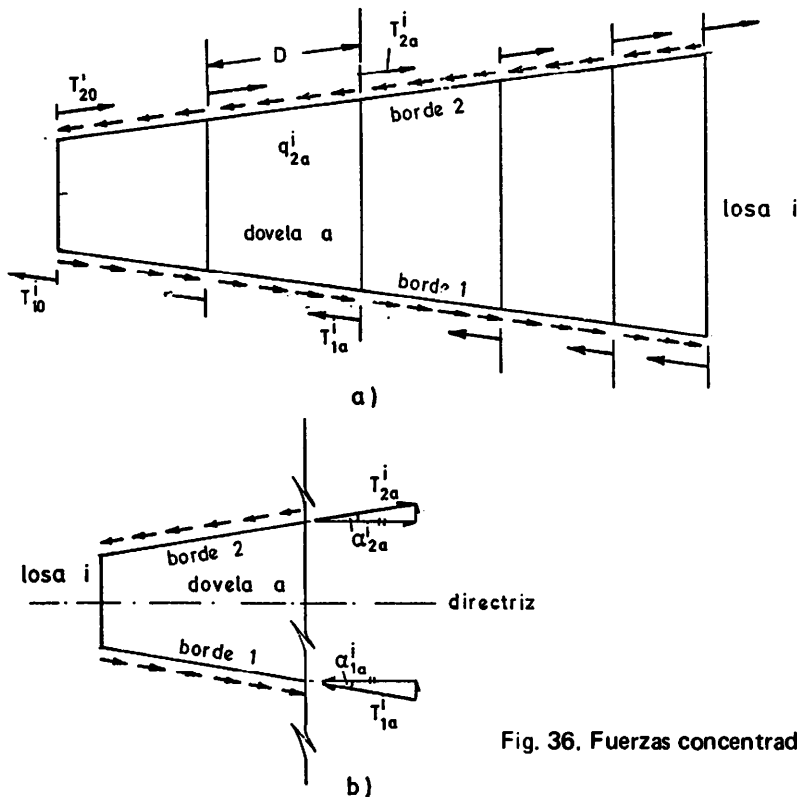


Fig. 36. Fuerzas concentradas equivalentes.

8) En la sección central de una dovela genérica, a, las flechas anteriores no definen un único movimiento para cada arista (figura 38-a). La compatibilidad de los desplazamientos transversales se lleva a cabo mediante un diagrama de Williot, lo que da lugar a unos asientos diferenciales entre los nudos de la sección central (figura 39), que obligan a realizar un nuevo cálculo transversal en cada dovela (análisis secundario). Además, si en una arista concurren  $n$  losas, se dispone en ella de  $n-2$  ecuaciones de compatibilidad transversal (figura 38-b).

En el análisis secundario se supone que se siguen manteniendo las coacciones ficticias introducidas. Los resultados de dicho cálculo se denominan secundarios (momentos transversales secundarios,  $\mu^s$ , por ejemplo). En particular, las reacciones ficticias secundarias dependen, obviamente, de las incógnitas básicas  $\underline{p}$  y  $\underline{G}$ :

$$\underline{R}_f^s = \underline{R}_{f0}^s + \underline{R}_{fp}^s \cdot \underline{p} + \underline{R}_{fG}^s \cdot \underline{G}$$

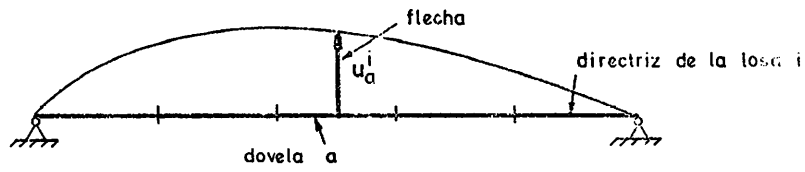


Fig. 37. Movimientos longitudinales: Flechas.

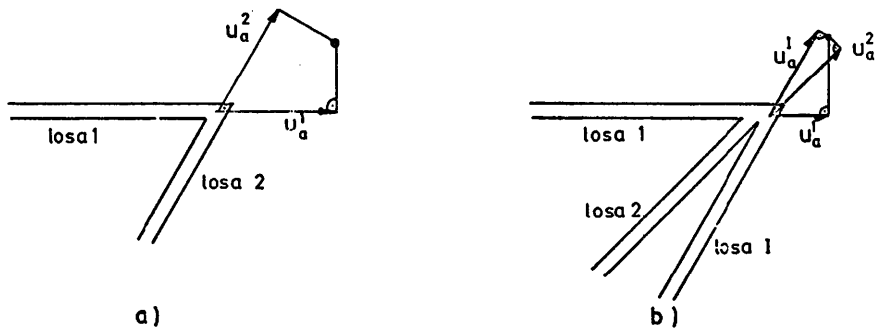


Fig. 38. Monolitismo estructural: Compatibilidad de desplazamientos transversales.

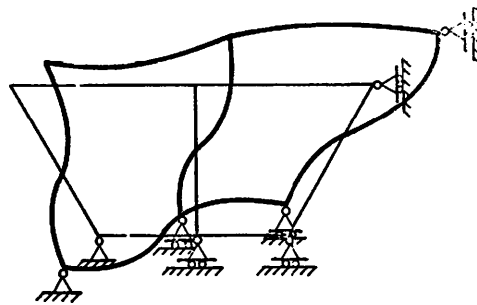


Fig. 39. Monolitismo estructural: Asientos diferenciales transversales.

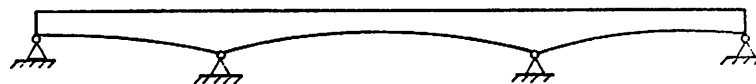


Fig. 40. Lámina plegada continua.



9) Por último, se plantea el sistema final de ecuaciones, que permite obtener las incógnitas básicas  $p$  y  $G$  del cálculo. El problema así planteado está totalmente determinado; en efecto, para una lámina plegada continua, por ejemplo, de tres vanos (figura 40), el número total de incógnitas es el siguiente:

$$\begin{aligned} & - \text{Fuerzas } p: 3A \cdot I \\ & \qquad \qquad \qquad \text{Total: } (3A + 2) I \end{aligned}$$

$$- \text{Momentos } G: 2I$$

Por otra parte, las ecuaciones disponibles son: a) las de compatibilidad de giros longitudinales (continuidad estructural, en el caso de varios vanos), en número de  $2I$ ; b) las de equilibrio transversal, en cada dovela, que implican la anulación de las reacciones en los apoyos ficticios (suma de las primarias, obtenidas en 2), más las secundarias), es decir,  $R_f^p + R_f^s = 0$ ; y, por último, c) las ecuaciones de compatibilidad transversal, en cada dovela, citadas en 8).

El número total de ecuaciones es también  $(3A + 2) I$ , igual al de incógnitas del problema.

10) Conocidas las incógnitas básicas, su sustitución en las fórmulas pertinentes  $-(5)$ , por ejemplo— permite deducir los resultados finales que se deseen.

## 7. EJEMPLOS DE APLICACION

### 7.1 Introducción

Basado en el modelo teórico descrito sucintamente en el párrafo 6, se ha desarrollado un programa de computador, en lenguaje FORTRAN IV, cuyas características, listado, descripción de entrada de datos, etc., se pueden ver detalladamente en la publicación {16} ya citada. El diagrama de flujo se muestra en las páginas siguientes.

Dicho programa se ha aplicado al estudio de diferentes casos prácticos que a continuación se comentan.

### 7.2 Análisis de la exactitud de los resultados

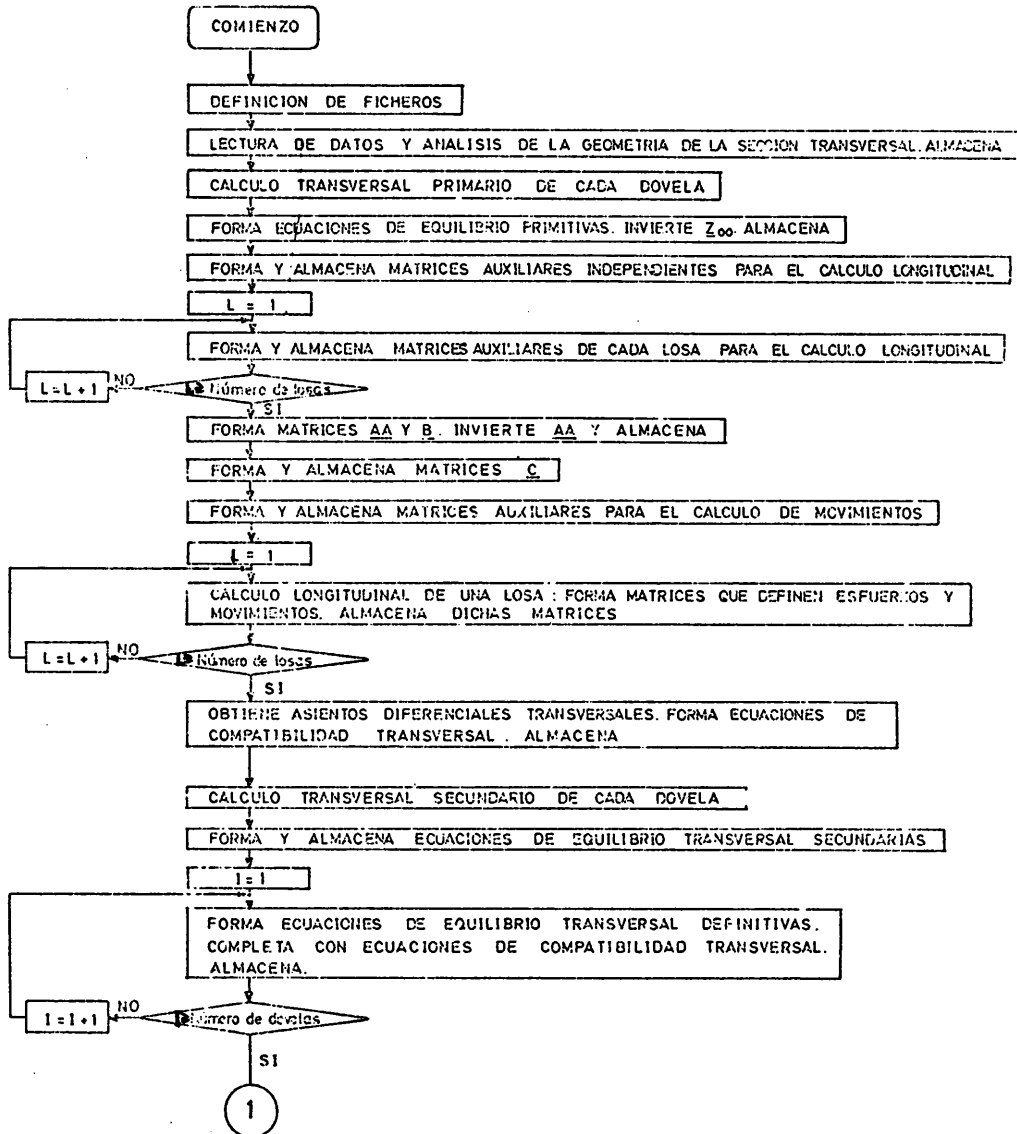
Se ha procedido, en primer lugar, a un análisis de la exactitud de los resultados que se obtienen mediante la aplicación del programa de computador anteriormente citado.

Para ello, se ha calculado la lámina plegada prismática, simplemente apoyada en sus extremos, cuya geometría se indica en la figura 41, y que corresponde a un tablero de puente de sección cajón, sometida a una carga de 1 t/m extendida a toda luz y repartida transversalmente según se representa en la figura 42.

La estructura se ha dividido en 10 dovelas de 3.00 m de longitud y los resultados obtenidos se han comparado con los deducidos mediante un cálculo armónico, basado en la teoría ordinaria, en el que se han tomado 5 armónicos significativos (\*). Los resultados del análisis armónico se han dado en secciones correspondientes a cuartos de la semiluz (0.000L, 0.125L, 0.250L, 0.375L y 0.500L). En particular, la sección 0.250L del cálculo analítico coincide con la sección central de la dovela 3 del cálculo numérico, y en ella pueden ser comparados directamente los valores de los resultados deducidos por ambos métodos, sin necesidad de interpolaciones.

(\*) NOTA: Véase la publicación (18), donde se describe el programa de láminas plegadas prismáticas utilizado en este análisis comparativo.

## DIAGRAMA DE FLUJO

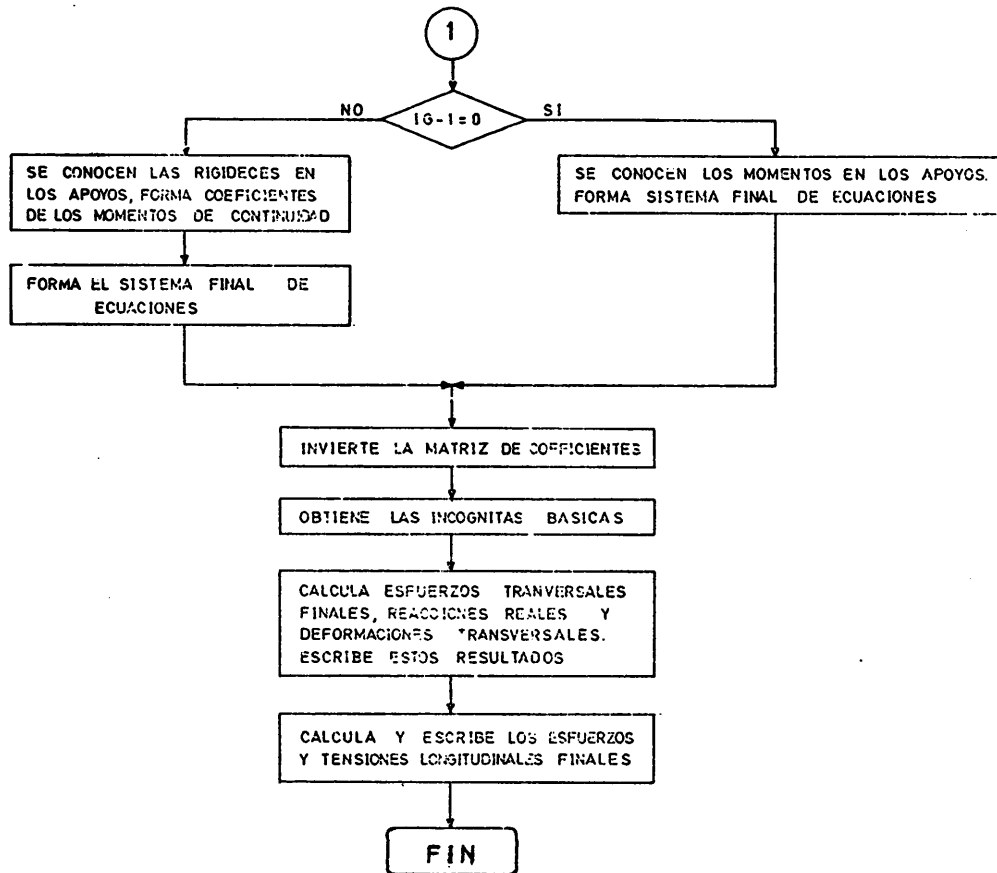


En las figuras 43 a 47, ambas inclusive, se representan las leyes de variación longitudinal de diferentes resultados del cálculo, hallados tanto por el método armónico como por el numérico, y puede observarse la gran correlación entre ambos, lo cual da una idea de la validez del modelo teórico descrito en el párrafo 6.

Sin embargo, la comparación directa se puede llevar a cabo en la sección central de la dovela 3, tal como se muestra en la figura 48 y, de un modo más detallado, en la tabla 1. En ella se observa que las dispersiones, para los esfuerzos transversales, son del orden del 2 por 100, a excepción de una diferencia aislada del 8,7 por 100 para el axil transversal en el extremo 2 de la losa 2, que no es representativa, al tratarse de valores absolutos muy pequeños.

La comparación de las tensiones rasantes y tensiones normales longitudinales proporciona mayores porcentajes de diferencia. Sin embargo, a este respecto, es preciso hacer algunas precisiones:

En la figura 49 se comparan las tensiones normales longitudinales en la sección central de la estructura. Por una parte, se observa que la igualdad de tensiones en una arista común a



varias losas se verifica más satisfactoriamente en el cálculo numérico. Por otro lado, se puede comprobar el equilibrio global; para ello se calcula el momento externo en la sección central de la lámina plegada, considerada como una viga cargada en su plano; dicho momento es:

$$\frac{pL^2}{8} = 652,5 \text{ m.t}$$

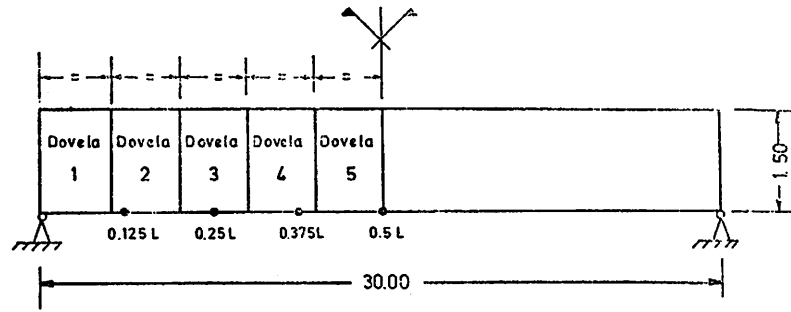
y ha de ser igual al momento interno obtenido por integración de los diagramas de tensiones representados en la figura 49.

Para el análisis armónico, se deduce:

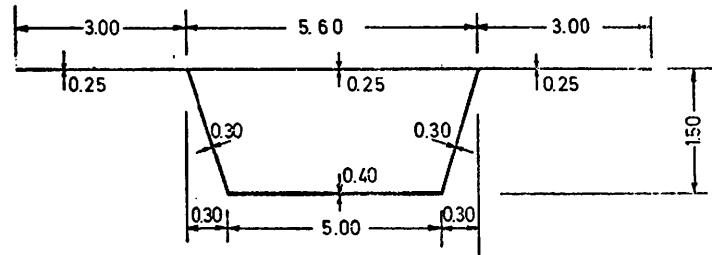
- Volumen de tracciones = 449,82 t.
  - Volumen de compresiones = 458,91 t.
- (no se cumple la igualdad)
- Momento interno = 667 m.t (diferencia del 2 por 100 respecto a  $\frac{pL^2}{8}$ ).

En el cálculo numérico, se tiene:

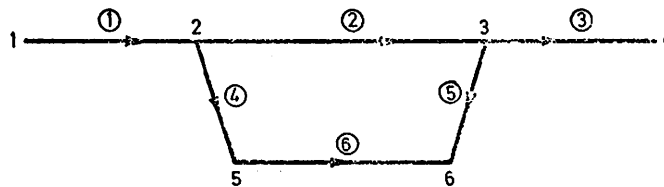
- Volumen de tracciones = 444,5 t.
- Volumen de compresiones = 444,5 t.
- Momento interno = 647 m.t. (diferencia: 0,8 por 100).



a) Sección longitudinal



b) Sección transversal



c) Numeración de aristas y losas y ejes locales de cada losa

Fig. 41. Lámina plegada prismática. Geometría

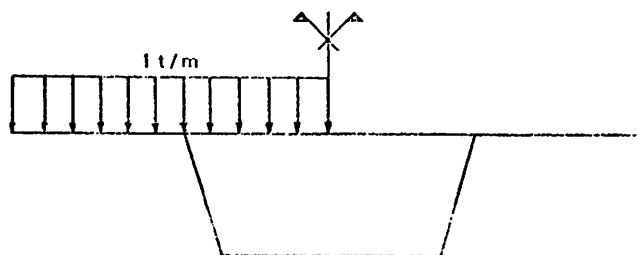


Fig. 42. Lámina plegada prismática. Acciones exteriores

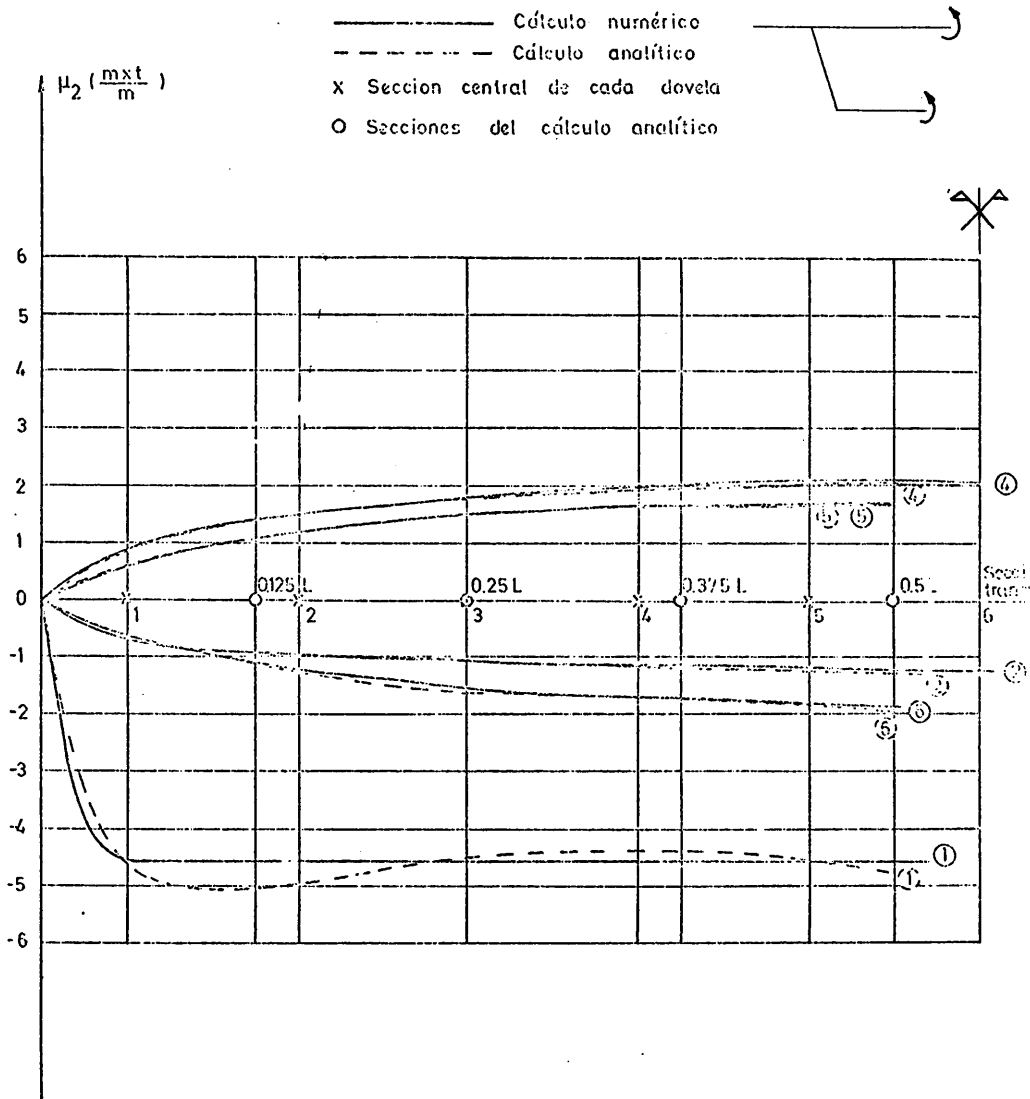


Fig. 43. Ley de variación longitudinal de los momentos transversales, en m.t/m, en el extremo dos de las distintas losas.

Es decir, la aproximación, en el equilibrio global, es mejor en el método numérico. Obviamente, la consideración de un mayor número de armónicos conduciría a diferencias menores entre ambos procedimientos.

Por último, cabe señalar que la mayor disparidad entre los valores de las tensiones normales longitudinales en el extremo del voladizo de la izquierda (figura 49) es debida a que en el análisis armónico se ha considerado la deformación por cortante (\*).

(\*) NOTA: En el cálculo numérico, la extensión del método, de modo que incluya la deformación por cortante, exigiría la introducción de los esfuerzos de torsión entre dovelas, en virtud de la consistencia propuesta por Goldenveizer {19} es decir, debido a la analogía estático-cinemática. La observancia de esta analogía es necesaria si se desea conservar la simetría de la formulación, o teorema de reciprocidad.

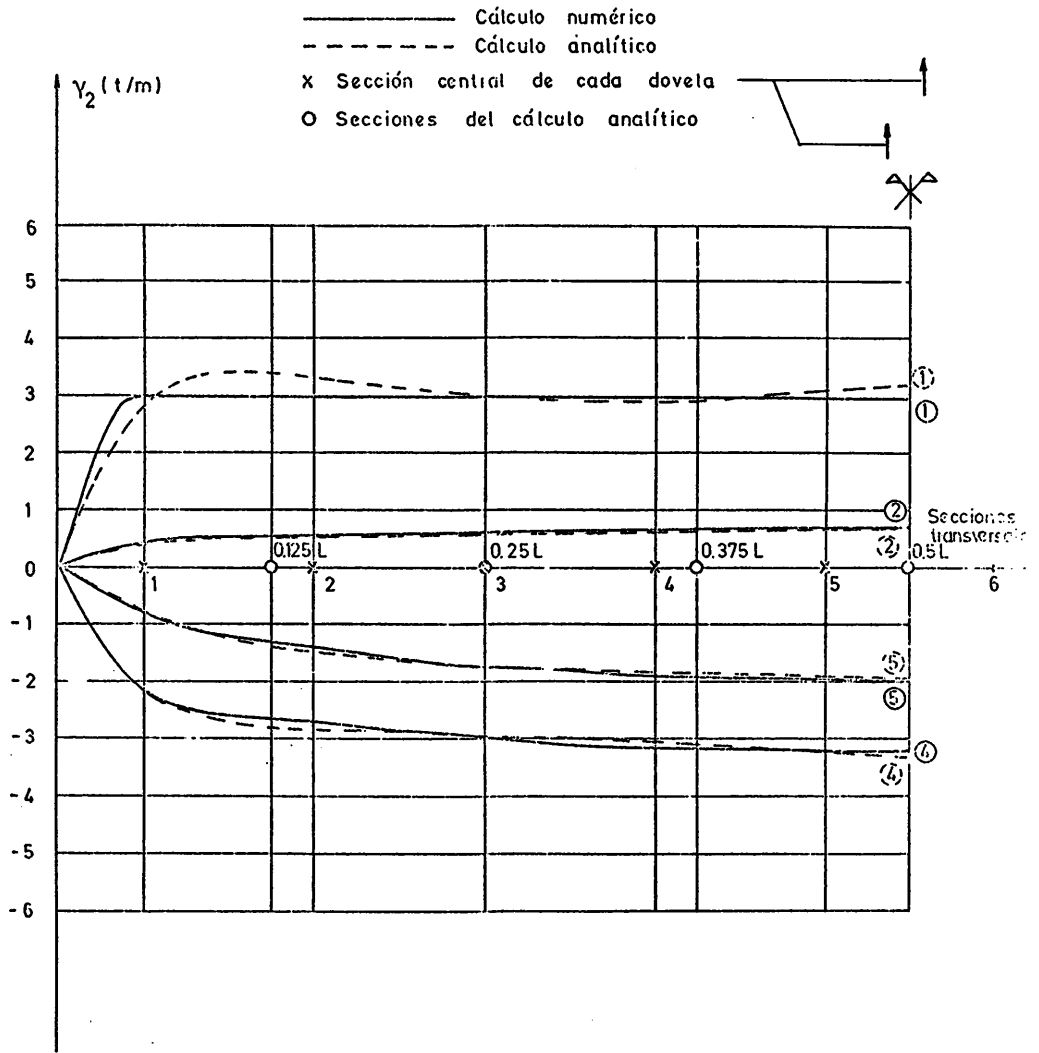


Fig. 44. Ley de variación longitudinal de los cortantes transversales, en t/m, en el extremo 2 de las distintas losas

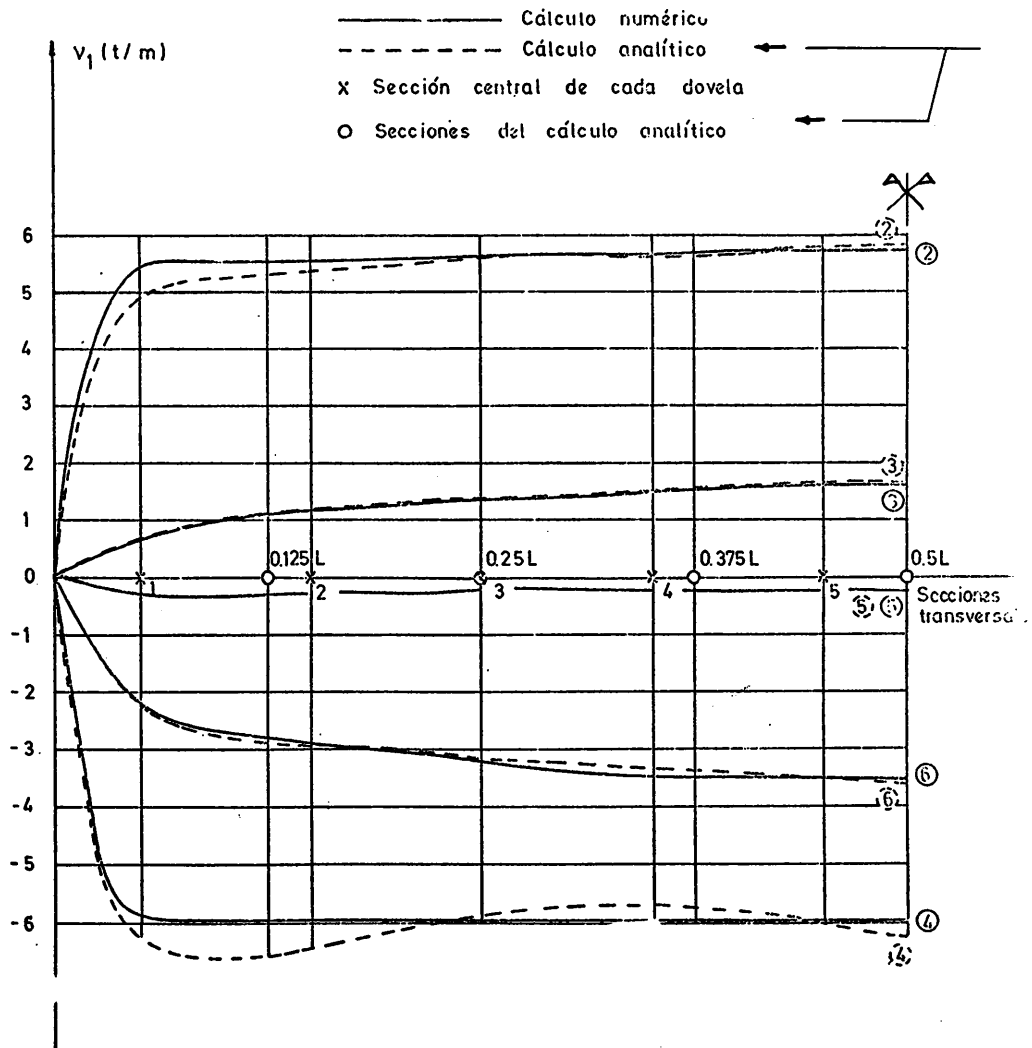


Fig. 45. Ley de variación longitudinal de los axiles transversales, en t/m, en el extremo 1 de las distintas losas

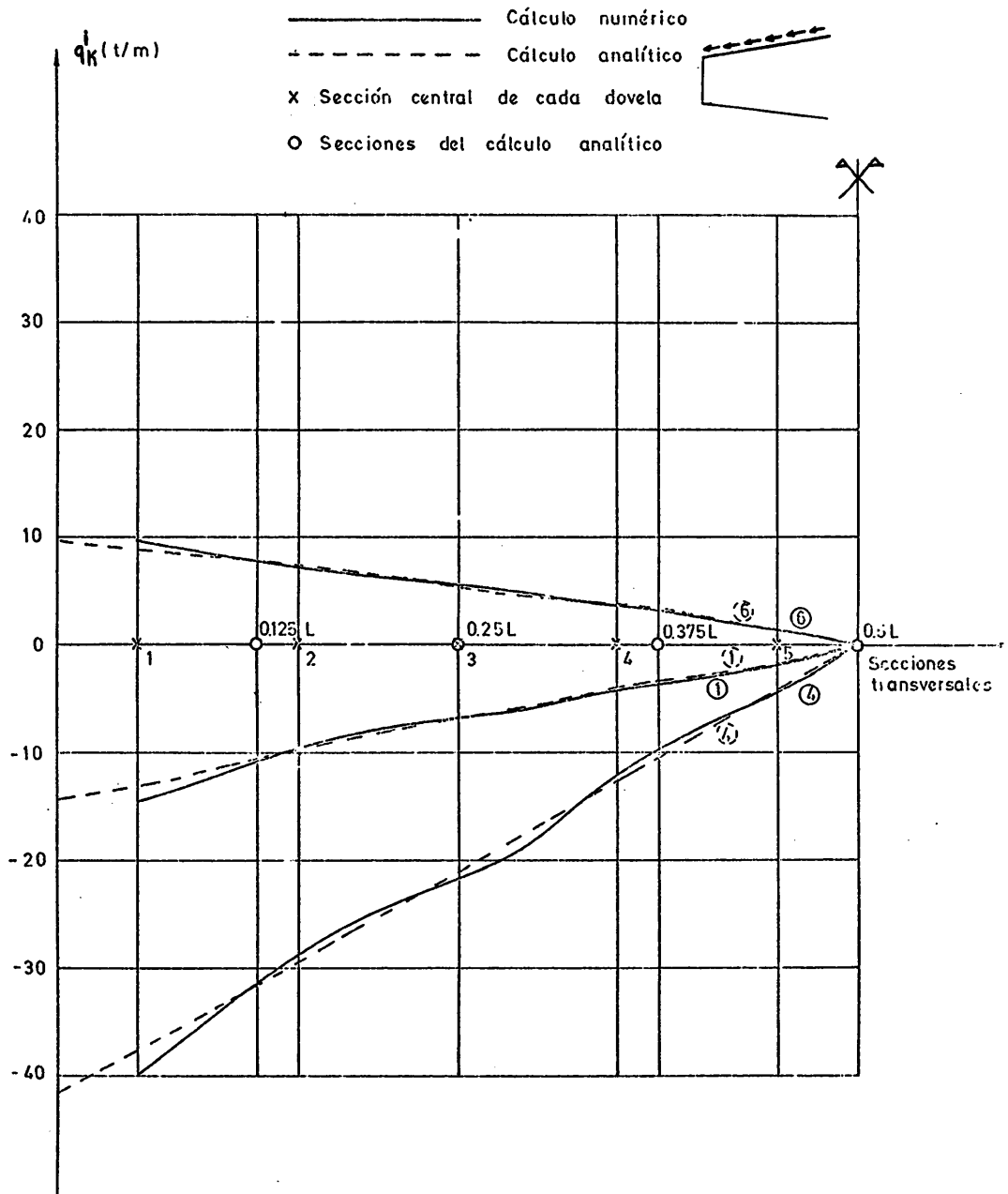


Fig. 46. Ley de variación longitudinal de las fuerzas rasantes unitarias, en t/m, en el extremo 2 de las distintas losas



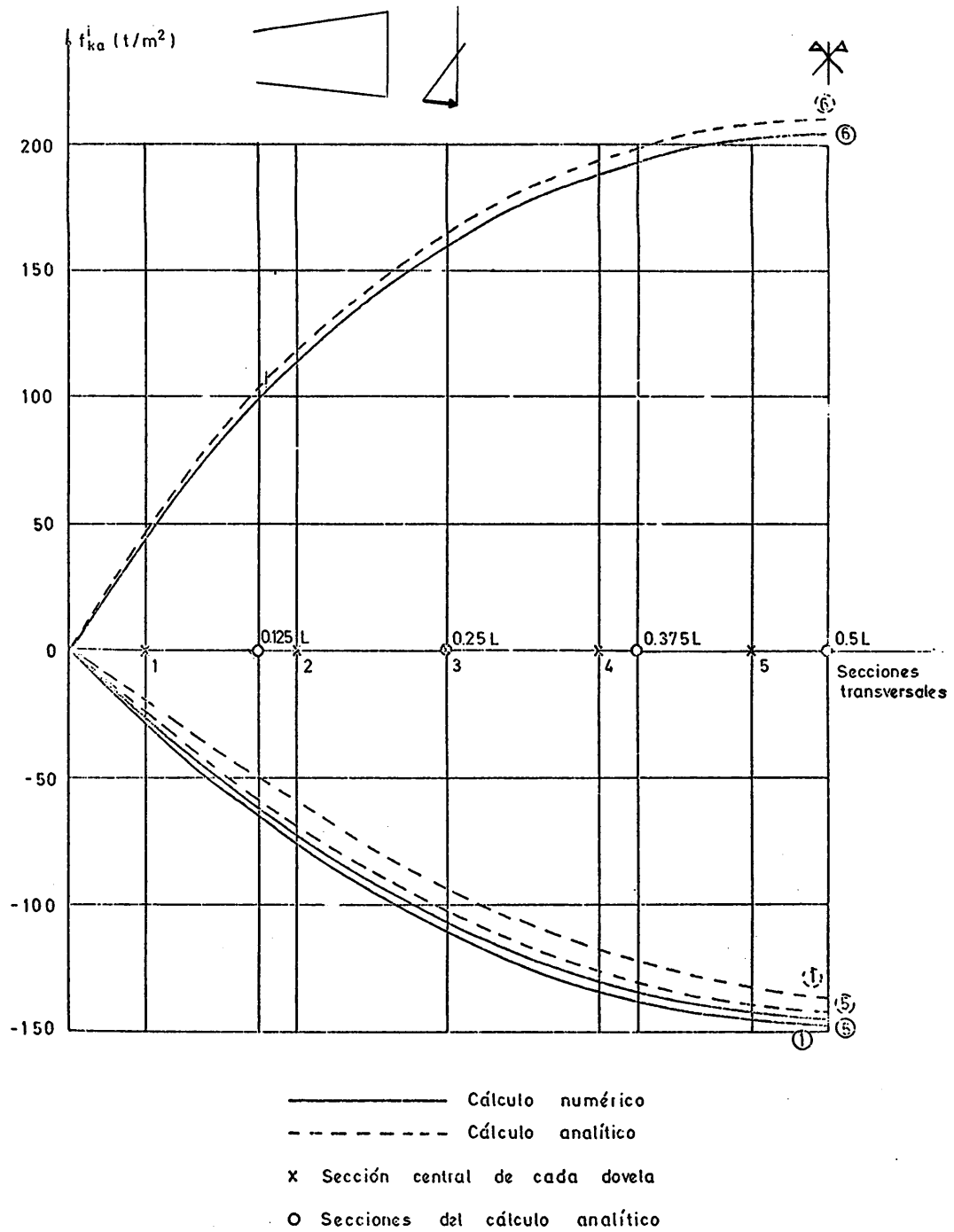
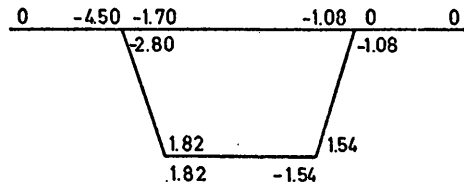
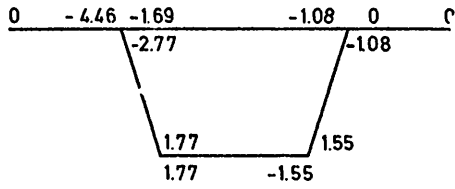


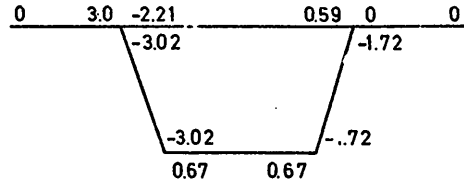
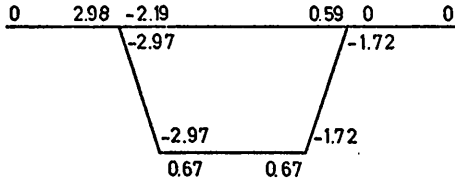
Fig. 47. Ley de variación longitudinal de las tensiones normales longitudinales, en  $\text{t.m}^{-2}$ , en el extremo 1 de las diferentes losas

ANALISIS ARMONICO

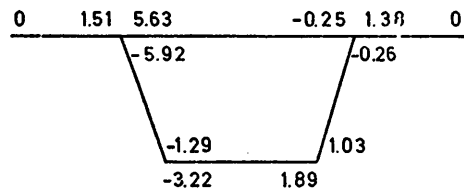
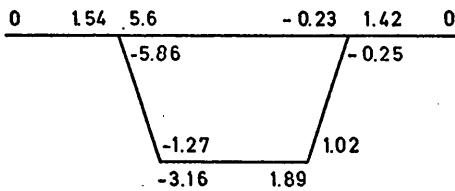
CALCULO NUMERICO



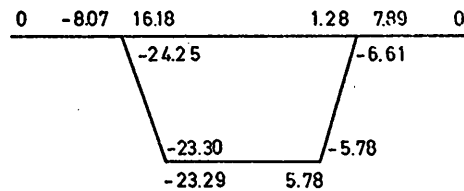
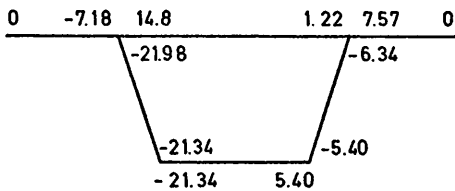
a) Momentos transversales (mxt/m)



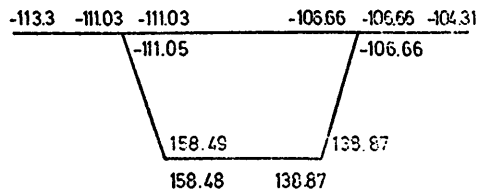
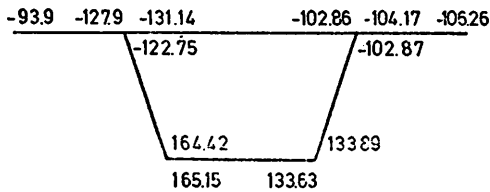
b) Cortantes transversales (t/m)



c) Axiles transversales (t/m)



d) Fuerzas rasantes longitudinales (t/m)



e) Tensiones normales longitudinales (t/m<sup>2</sup>)

Fig. 48. Comparación de resultados en la sección 0.250L

**TABLA 1**  
**Estudio comparativo entre los resultados obtenidos por los métodos analítico y numérico**

EXTREMO 1				EXTREMO 2			
Losa	$\mu_{armónico}$	$\mu_{numérico}$	% diferencia	Losa	$\mu_{armónico}$	$\mu_{numérico}$	% diferencia
1	0	0	0	1	- 4,46	- 4,50	+ 0,90
2	- 1,69	- 1,70	+ 0,59	2	- 1,08	- 1,08	0
3	0	0	0	3	0	0	0
4	- 2,77	- 2,80	+ 1,08	4	1,77	1,82	+ 2,82
5	- 1,08	- 1,08	0	5	1,55	1,54	- 0,65
6	1,77	1,82	+ 2,82	6	- 1,55	- 1,54	- 0,65

Resultados de los momentos transversales, en mxt/m, correspondientes a la sección central de la dodela 3 (0,25 L), para cada losa.

EXTREMO 1				EXTREMO 2			
Losa	$\gamma_{armónico}$	$\gamma_{numérico}$	% diferencia	Losa	$\gamma_{armónico}$	$\gamma_{numérico}$	% diferencia
1	0,0	0,0	0	1	2,98	3,00	+ 0,67
2	- 2,19	- 2,21	+ 0,91	2	0,59	0,59	0
3	0,0	0,0	0	3	0,0	0,0	0
4	- 2,97	- 3,02	+ 1,68	4	- 2,97	- 3,02	+ 1,68
5	- 1,72	- 1,72	0	5	- 1,72	- 1,72	0
6	0,67	0,67	0	6	0,67	0,67	0

Resultados de los cortantes transversales, en t/m, correspondientes a la sección central de la dodela 3 (0,25 L), para cada losa

EXTREMO 1				EXTREMO 2			
Losa	$\nu_{armónico}$	$\nu_{numérico}$	% diferencia	Losa	$\nu_{armónico}$	$\nu_{numérico}$	% diferencia
1	0,0	0,0	0	1	1,54	1,51	- 1,95
2	5,60	5,63	+ 0,54	2	- 0,23	- 0,25	+ 8,7
3	1,42	1,38	- 2,82	3	0,0	0,0	0
4	- 5,86	- 5,92	+ 1,02	4	- 1,27	- 1,29	+ 1,57
5	- 0,25	- 0,26	+ 4	5	1,02	1,03	+ 0,98
6	- 3,16	- 3,22	+ 1,9	6	1,89	1,89	0

Resultados de los axiles transversales, en t/m, correspondientes a la sección central de la dodela 3 (0,25 L), para cada losa.

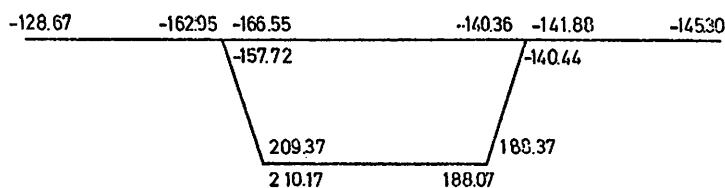
**TABLA 1 (Continuación)**

EXTREMO 1				EXTREMO 2			
Losa	Q <sub>armónico</sub>	Q <sub>numérico</sub>	% diferencia	Losa	Q <sub>armónico</sub>	Q <sub>numérico</sub>	% diferencia
1	0,0	0,0	0	1	- 7,18	- 8,07	+ 12,40
2	14,80	16,18	+ 9,32	2	1,22	1,28	+ 4,92
3	7,57	7,89	+ 4,23	3	0,0	0,0	0
4	-21,98	-24,25	+10,33	4	-21,34	-23,30	+ 9,18
5	- 6,34	- 6,61	+ 4,26	5	- 5,40	- 5,78	+ 7,04
6	-21,34	-23,29	+ 9,14	6	5,40	5,78	+ 7,04

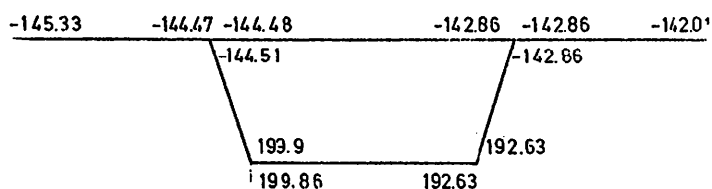
Resultados de las fuerzas rasantes longitudinales, en t/m correspondientes a la sección central de la dovela 3 (0,25 L), para cada losa

EXTREMO 1				EXTREMO 2			
Losa	f <sub>armónico</sub>	f <sub>numérico</sub>	% diferencia	Losa	f <sub>armónico</sub>	f <sub>numérico</sub>	% diferencia
1	- 93,90	- 113,33	+ 20	1	- 127,89	- 111,03	- 12,6
2	- 131,14	- 111,03	- 15,3	2	- 102,86	- 106,66	+ 3,7
3	- 104,17	- 106,66	+ 2,39	3	- 106,26	- 104,31	- 1,84
4	- 122,75	- 111,05	- 9	4	+ 164,42	+ 158,49	- 3,4
5	- 102,87	- 106,66	+ 3,68	5	+ 133,89	+ 138,87	+ 3,72
6	+ 165,15	+ 158,48	- 3,96	6	+ 133,63	+ 138,87	+ 3,92

Resultados de las tensiones normales longitudinales, en t/m<sup>2</sup>, correspondientes a la sección central de la dovela 3 (0,25 L), para cada losa



a) Análisis armónico



b) Análisis numérico

Fig. 49. Resultados correspondientes a las tensiones normales longitudinales en la sección central de la estructura

### 7.3 Sensibilidad al número de dovelas

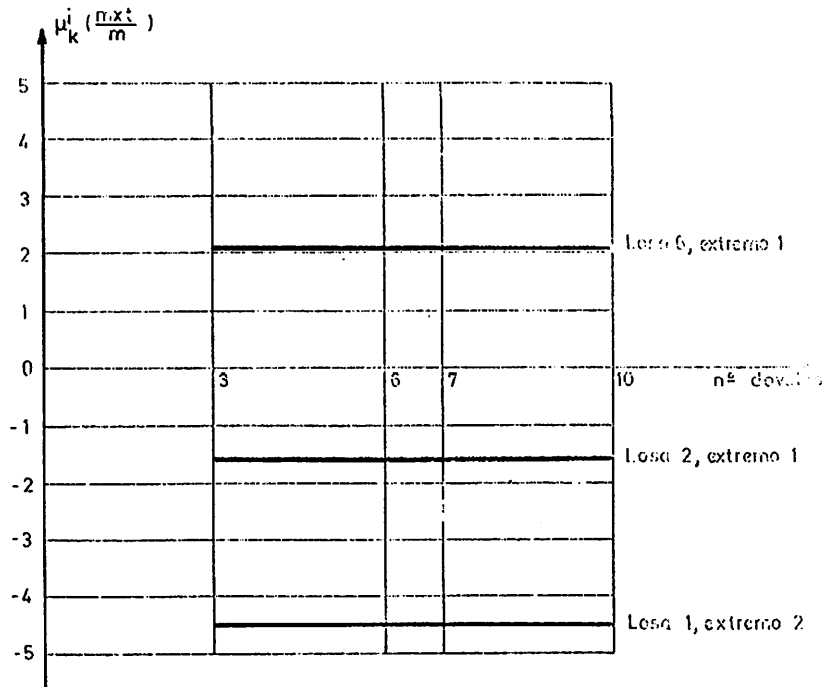
El siguiente ejemplo ha consistido en estudiar la sensibilidad del método al número de dovelas en que se divide la lámina plegada.

Para ello se ha analizado idéntica estructura a la del ejemplo anterior (figura 41), bajo las mismas cargas (figura 42), considerando un número creciente de dovelas (tres, seis, siete, diez, etc.).

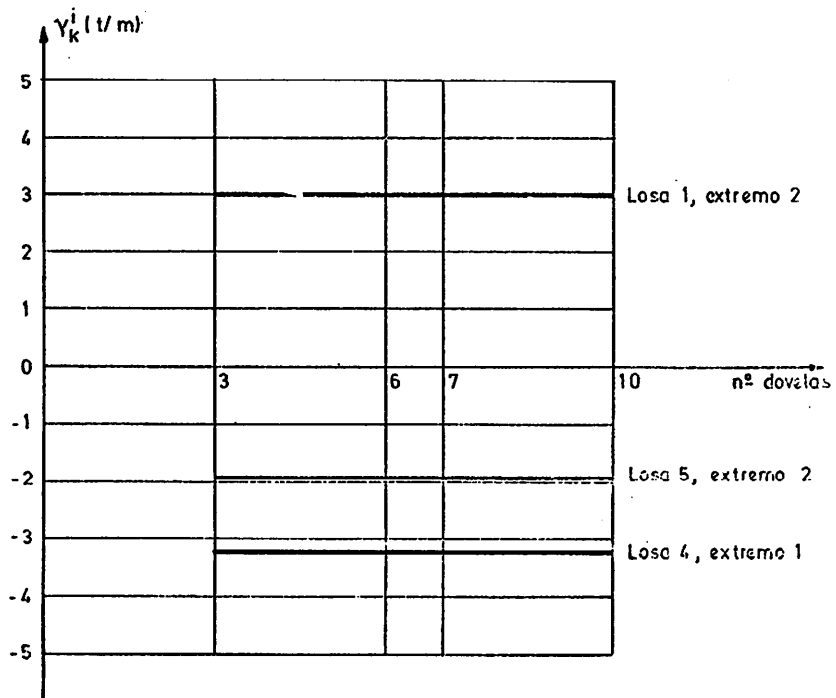
En la figura 50 se muestra la variación, según el número de dovelas, de los distintos resultados del cálculo, en la sección central y secciones de apoyo de la lámina plegada. La variación de cualquiera de los resultados es tan pequeña que no puede ser captada gráficamente con la escala elegida. Es decir, con tres dovelas se obtienen prácticamente los mismos resultados que con diez, en la sección central de la estructura. En cuanto a la mayor diferencia que se produce en las tensiones cortantes en apoyos (figura 50-d), hay que señalar que se están asimilando dichas secciones a la central de la primera y última dovelas. Si se consideran tres dovelas, la distancia del apoyo a la sección central de la primera es de cinco metros, mientras que con diez dovelas es únicamente 1,5 metros. Para que los resultados pudieran ser comparados adecuadamente, se haría necesaria una extrapolación de los mismos, lo cual conduciría a una modificación de las curvas de la figura 50-d. Sin embargo, en dicha figura, se puede intuir que los resultados con tres dovelas son sensiblemente iguales a los deducidos con diez.

Este hecho es de una gran importancia, pues permite analizar estructuras reales, mediante un número mínimo de dovelas, con el ahorro consiguiente de tiempo de computación, dentro de unos límites de error aceptables en los resultados.

A este respecto, es preciso señalar que, utilizando el método de Johnson y Ti-ta Lee, son necesarias del orden de diez secciones nodales para obtener resultados adecuados, según se ha comprobado calculando diferentes estructuras mediante dicho método, y comparando los resultados deducidos con estudios experimentales {9}. Esta circunstancia puede ser expli-

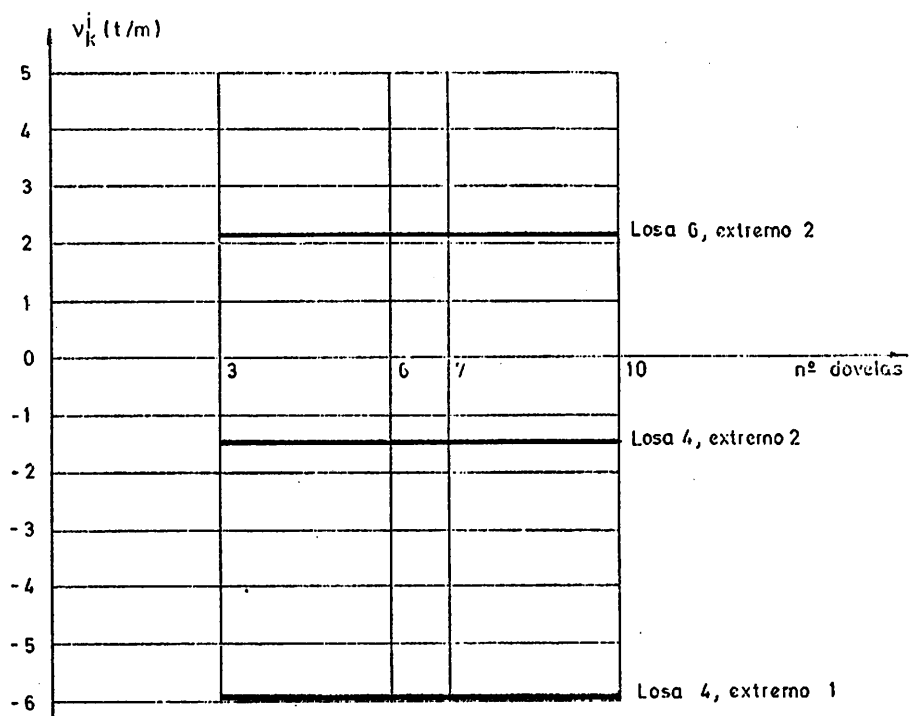


a) Variación, según el  $n^\circ$  de dovelas, de los momentos transversales en la sección central de la lámina plegada.

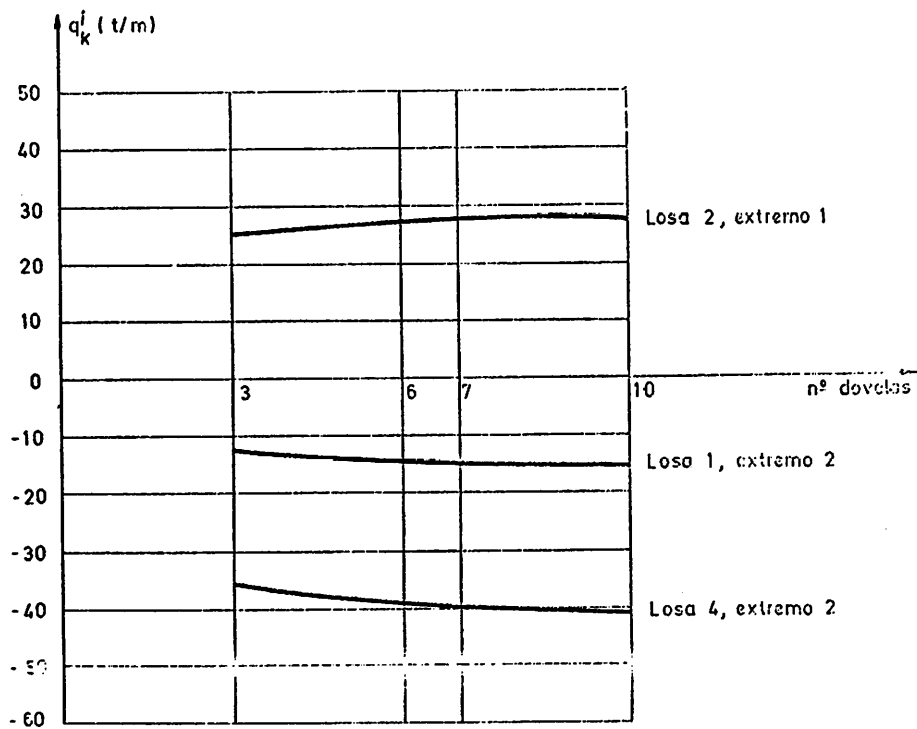


b) Variación, según el  $n^\circ$  de dovelas, de los cortantes transversales, en la sección central de la lámina plegada

Fig. 50.

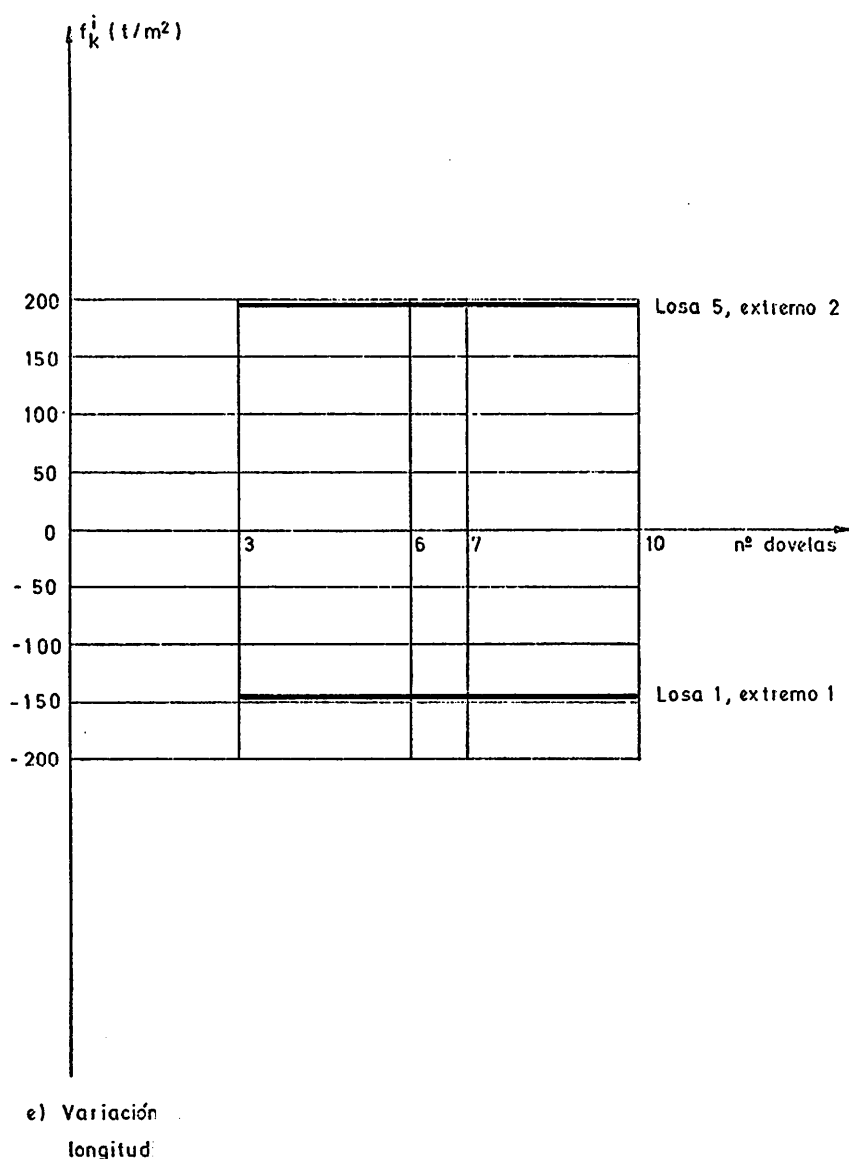


c) Variación, según el  $n^0$  de dovelas, de los axiles transversales, en la sección central de la lámina plegada.



d) Variación, según el  $n^0$  de dovelas, de las fuerzas rasantes unitarias en apoyos.

Fig. 50.



e) Variación, según el n.º de dovelas, de las tensiones normales longitudinales en la sección central de la lámina plegada

Fig. 50. Influencia del número de dovelas en los resultados del cálculo numérico

cada por una elección más adecuada de las incógnitas básicas en el procedimiento aquí desarrollado (como ya se ha dicho, fuerzas  $p_a^i$  y momentos  $G_1^i$  y  $G_2^i$ ).

Por otra parte, si se pretendiese analizar la lámina plegada prismática indicada en la figura 51 (tablero de puente de sección cajón), utilizando el método de los elementos finitos, las propias características del método, junto con el hecho de que no se disponga de una gran variedad de elementos adecuados, y la necesidad de que exista una cierta relación entre los lados de cada elemento, obligarían a una división del continuo aproximadamente igual a la indicada en la figura 51. En ese caso, el número de nudos sería del orden de  $24 \times 15 = 360$ . El ancho de banda real sería  $2 \times (24 + 1) \times 6 - 1 = 299$  y el número total de grados de libertad  $360 \times 6 = 2.160$ . Estas cantidades dan una idea de la magnitud del problema a resolver.



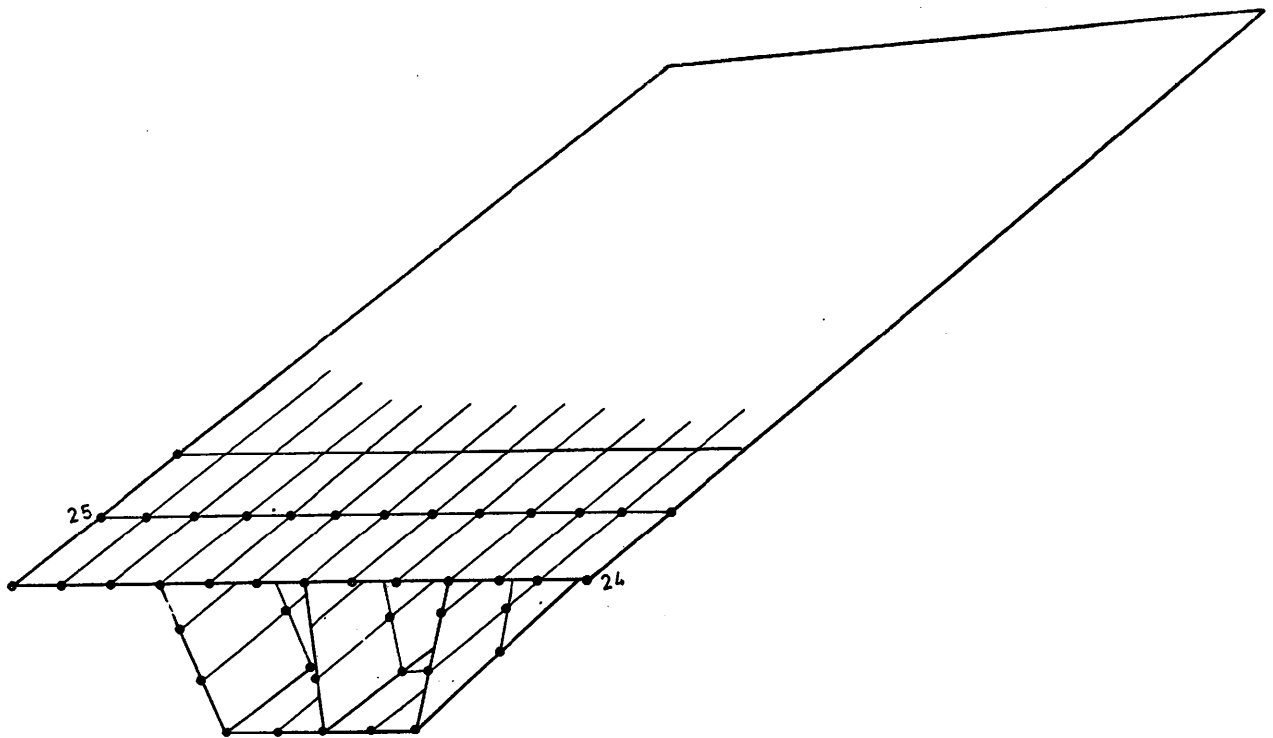


Fig. 51. Discretización en elementos finitos.

Si se utiliza el procedimiento específico aquí desarrollado, y con una división en tres dovelas, el número total de incógnitas básicas es  $9 \times 3 = 27$ .

Las repercusiones en tiempos de computador en ambos métodos se intuyen fácilmente, y no es difícil imaginar las ventajas que supone la utilización del método específico.

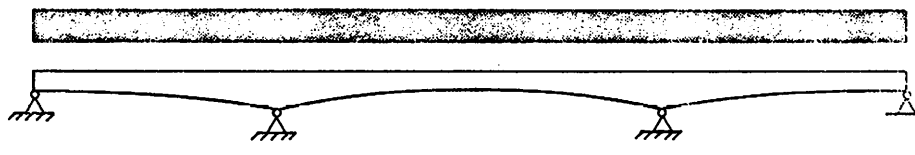
Sin embargo, es obvio que el método de los elementos finitos permite una mayor generalidad en el tratamiento de cualquier problema, tal como se comentó en el apartado 3.2.

#### 7.4 Efecto de la continuidad

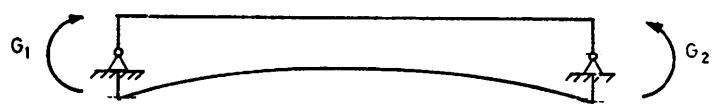
El modelo teórico descrito en el párrafo 6 posibilita el análisis exacto (dentro de las hipótesis consideradas) de cualquier lámina plegada continua (figura 52-a) de varios vanos.

Sin embargo, una posible solución aproximada del problema estriba en considerar cada vano de la estructura aisladamente, por ejemplo el vano central de la figura anterior, y sustituir, en cada losa, el efecto de los vanos adyacentes por unos momentos (figura 52-b), que se determinan mediante una sencilla generalización del teorema de los tres momentos de vigas continuas.

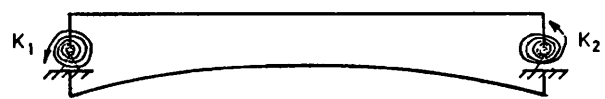
Otra posibilidad consiste en sustituir el efecto de los vanos adyacentes por unos muelles (figura 52-c) cuya rigidez a flexión es un valor conocido "a priori" y que equivale a la parte proporcional, que se lleva cada losa, de la rigidez total del vano adyacente. En la figura 52-a dicha rigidez total sería el conocido valor  $\frac{3EI}{L}$ , correspondiente a la viga empotrada-articulada. En el caso de viga biempotrada, el valor de esta rigidez sería  $\frac{4EI}{L}$ , lo que implica



a)



b)



c)

Fig. 52. Modelos posibles para el cálculo de estructuras continuas.

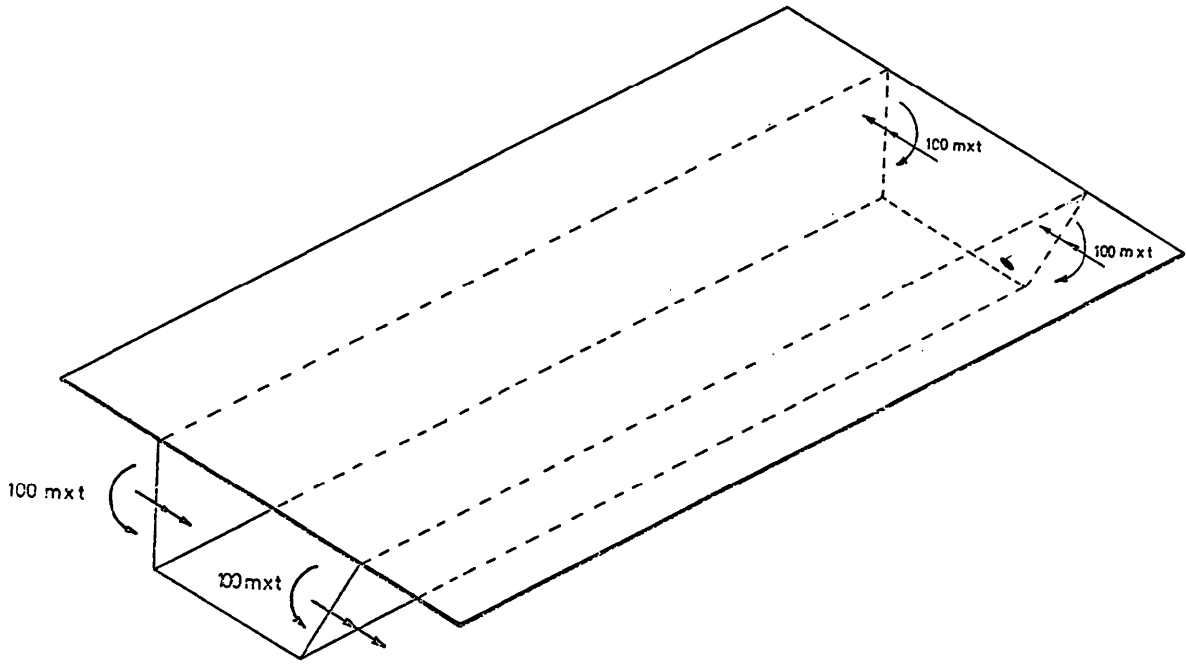


Fig. 53. Efecto de la continuidad. Acciones exteriores

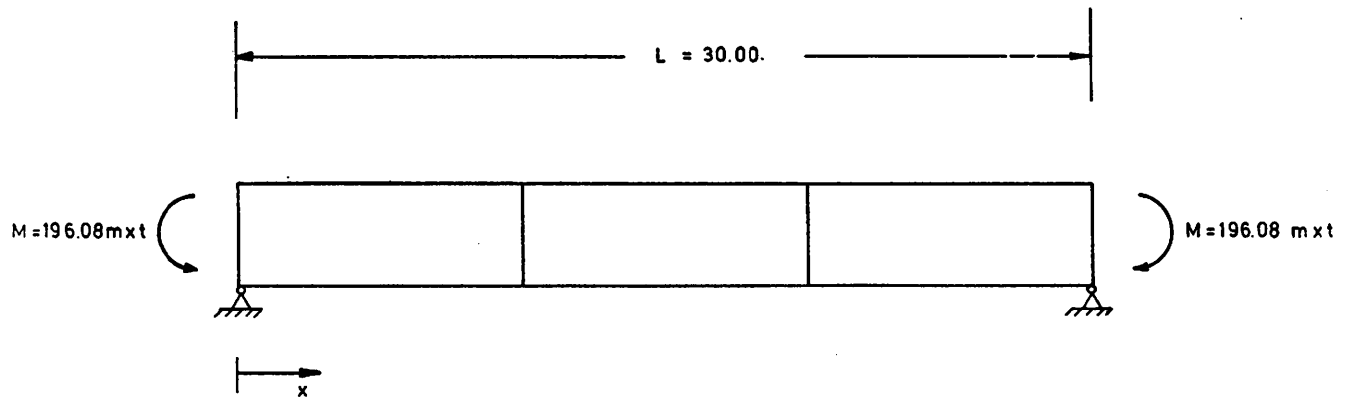


Fig. 54. Efecto de la continuidad: Viga equivalente para comprobación de flechas.

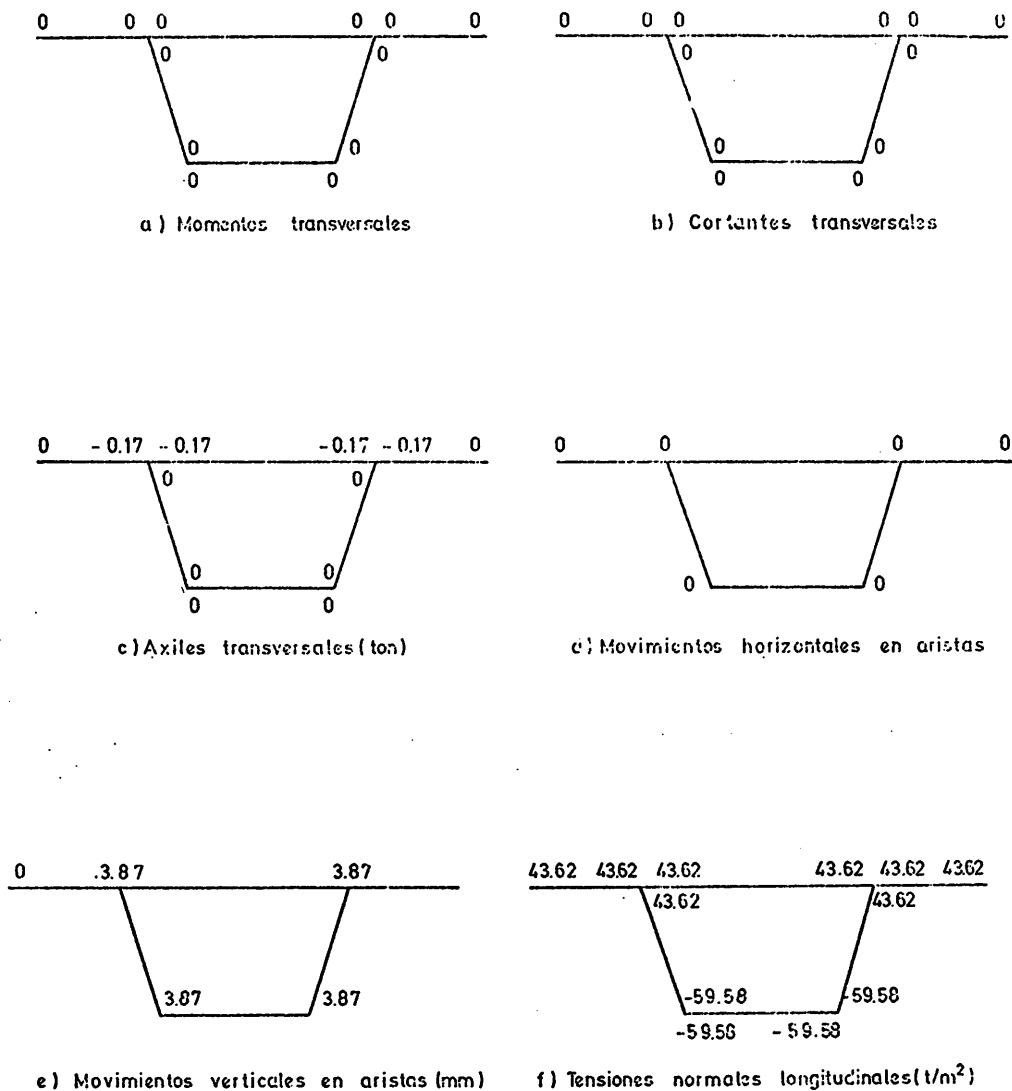


Fig. 55. Momentos externos actuantes. Resultados en la sección central de la lámina plegada

que en una viga de un vano intermedio se podría introducir el valor  $k EI/L$ , con  $k$  comprendida entre 3 y 4. (\*)

El programa de computador basado en el modelo aquí desarrollado considera ambas alternativas y permite, en cualquier caso, el análisis de láminas plegadas continuas.

Con fines puramente ilustrativos de las posibilidades del método, se incluye aquí únicamente el caso de actuación de momentos en los extremos.

Para ello, se ha calculado la lámina plegada del apartado 7.1, sometida en las almas a la actuación de momentos iguales, de valor 100 m.t, tal como se indica en la figura 53. Se ha considerado una división en tres dovelas solamente.

Para ello, se ha calculado la lámina plegada del apartado 7.1, sometida en las almas a la actuación de momentos iguales, de valor 100 m.t, tal como se indica en la figura 53. Se ha considerado una división en tres dovelas solamente.

La bondad de los resultados obtenidos en el computador no puede ser valorada, en este caso, por comparación con un método armónico, pues éste no es capaz de captar el tipo de carga actuante, al tratarse de una estructura continua (momentos en sus extremos).

Sin embargo, la lámina puede ser analizada como una viga a flexión simple (figura 54). La ley de flechas se deduce aplicando la conocida fórmula:

$$f = M \frac{x(L-x)}{EI}$$

Los valores en la sección central de la primera (y última) dovelas, y en la sección central de la estructura son:

$$\begin{aligned} x = 5: & \quad f = 2.15 \text{ mm} \\ x = 15: & \quad f = 3.87 \text{ mm} \end{aligned}$$

Dichos valores coinciden exactamente con los obtenidos en el computador (figura 55-e).

Por otra parte, de los resultados de las tensiones normales longitudinales, hallados mediante el computador, en la sección central de la estructura (figura 55-f), se observa, en primer lugar, que se satisface totalmente la igualdad de tensiones en una arista común a varias losas.

Además, por integración de dichas tensiones, se deduce:

- Volumen de tracciones = 134,96 t.
- Volumen de compresiones = 134,94 t.
- Momento interno = 196,10 m.t.

Es decir, se cumple la igualdad de ambos volúmenes y el momento interno es prácticamente igual al momento externo, 196,08 m.t.

De las comprobaciones anteriores, se puede concluir, por lo tanto, que el método aquí desarrollado permite el tratamiento de láminas plegadas continuas con resultados totalmente aceptables.

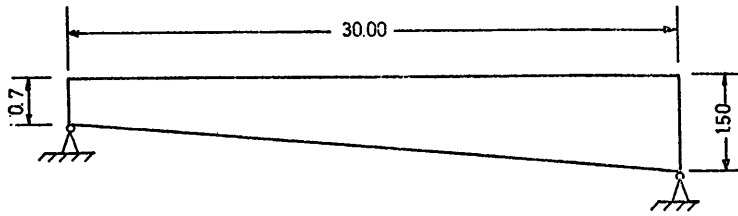
Resulta, por otra parte, sorprendente el elevado grado de aproximación alcanzado, con un mínimo número de dovelas, aunque este hecho puede ser debido a la suavidad del tipo de carga considerado: momentos iguales en los extremos.

## 7.5 Ejemplo de aplicación: Lámina plegada no prismática

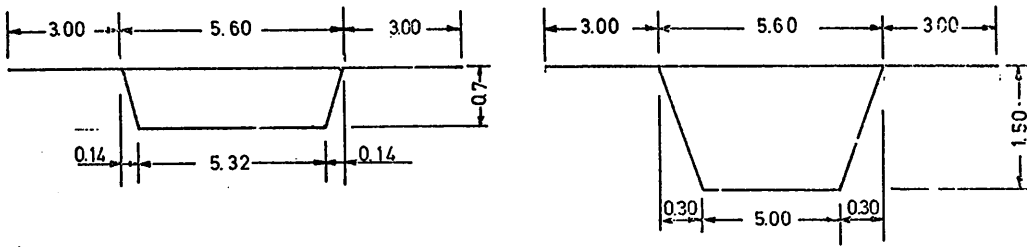
Como ejemplo de aplicación práctica del método al estudio de una lámina plegada no prismática, se analiza la estructura cuya geometría y acciones exteriores, así como la división en cinco dovelas, se muestran en la figura 56.

En las figuras 57, 58 y 59, se representan las leyes de variación longitudinal de los esfuerzos transversales, dibujadas a partir de los resultados obtenidos mediante el computador. En ellas se observa cómo dichos esfuerzos son mayores en la zona cercana al apoyo de menor canto, circunstancia lógica, dado que, en dicho apoyo, la rigidez es mayor, al ser menores las longitudes de las almas.

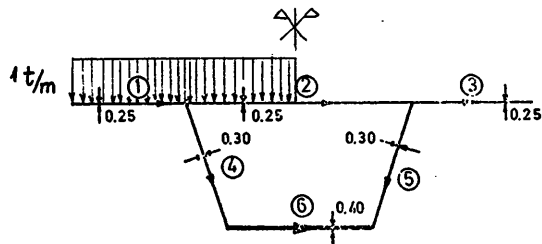
Por último, las figuras 60 y 61 corresponden, respectivamente, a la ley de movimientos verticales (flechas) en las aristas y a la ley de variación longitudinal de las tensiones normales longitudinales. En ambas, los valores máximos no se producen en la sección central de la



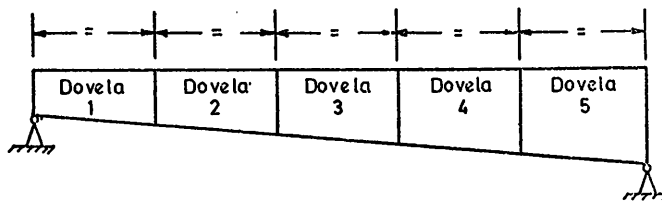
a) Perfil longitudinal



b) Secciones de apoyo



c) Espesores y ejes locales en cualquier sección transversal



d) División en dovelas

Fig. 56. Lámina plegada no prismática. Geometría

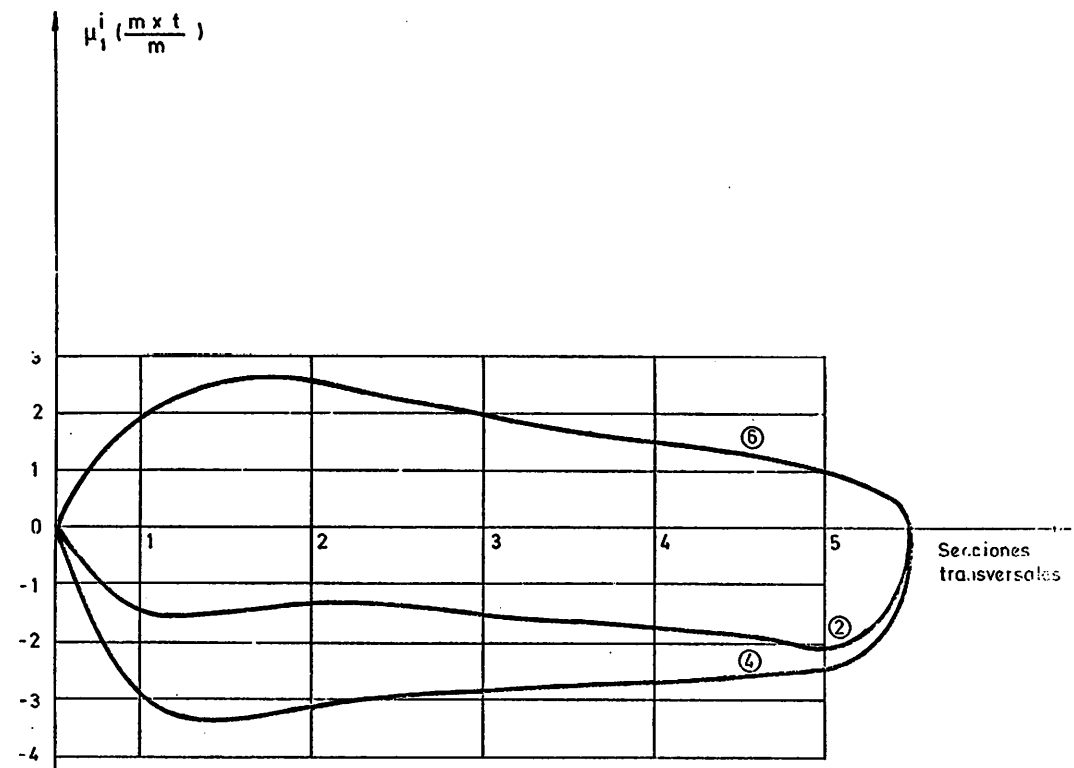


Fig. 57. Lámina plegada no prismática. Variación longitudinal de los momentos transversales en el extremo 1 de las distintas losas

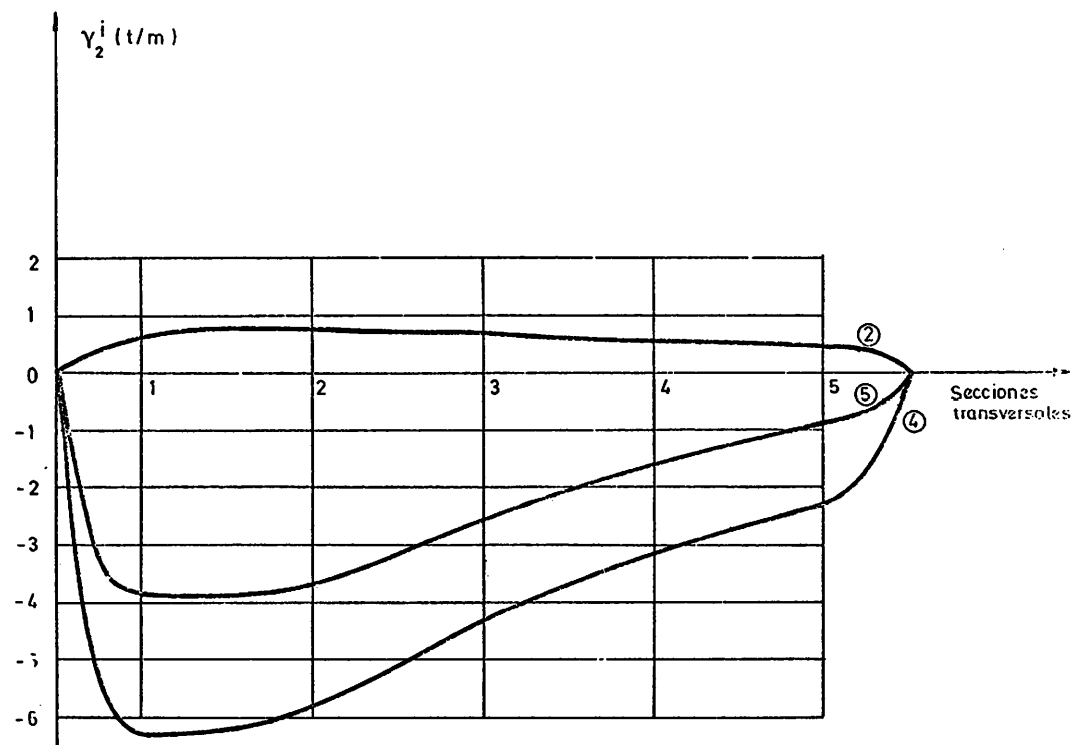


Fig. 58. Lámina plegada no prismática. Variación longitudinal de los cortantes transversales en el extremo 2 de las distintas losas

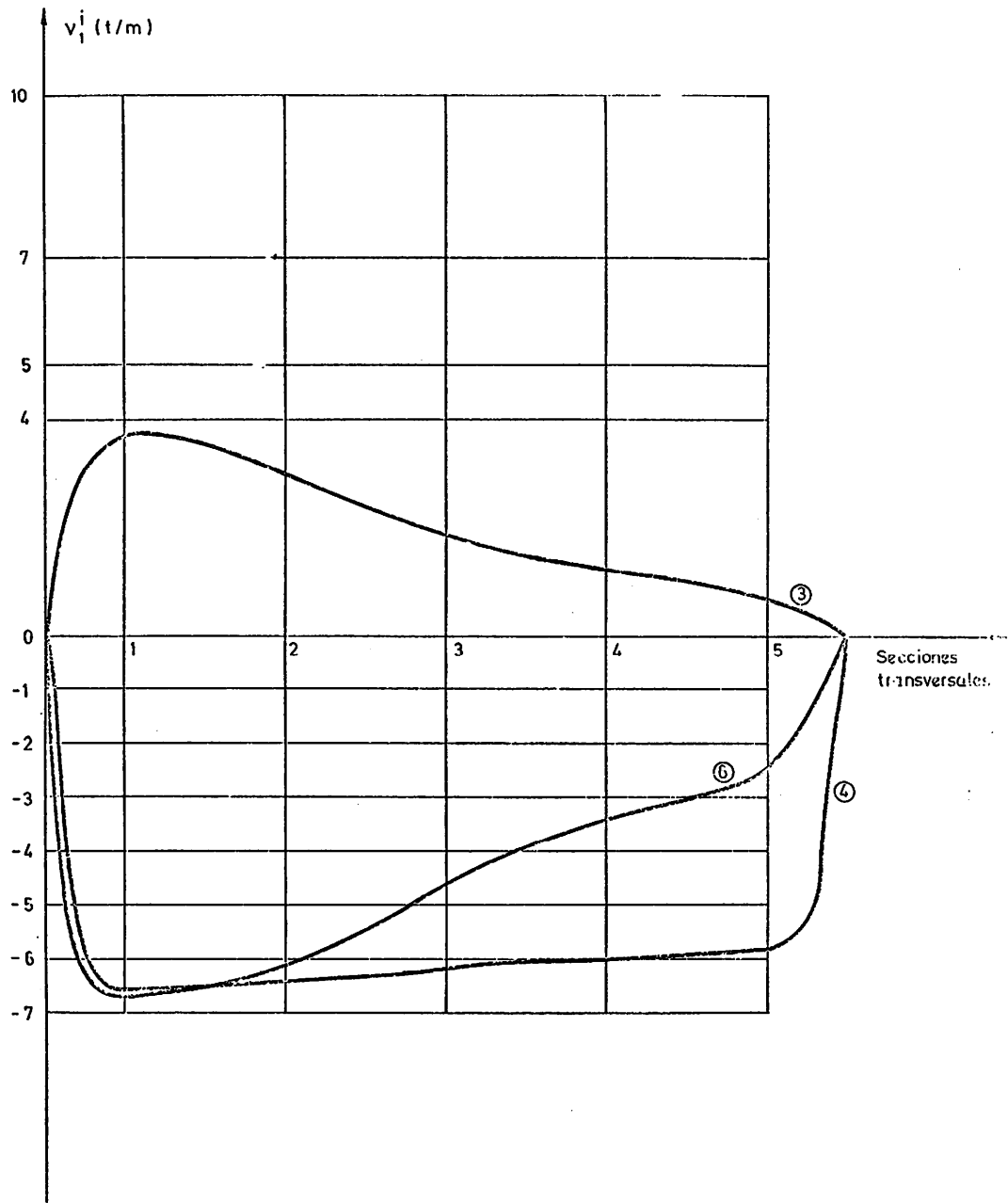


Fig. 59. Lámina plegada no prismática. Variación longitudinal de los ejes transversales en el extremo 1 de las diferentes losas

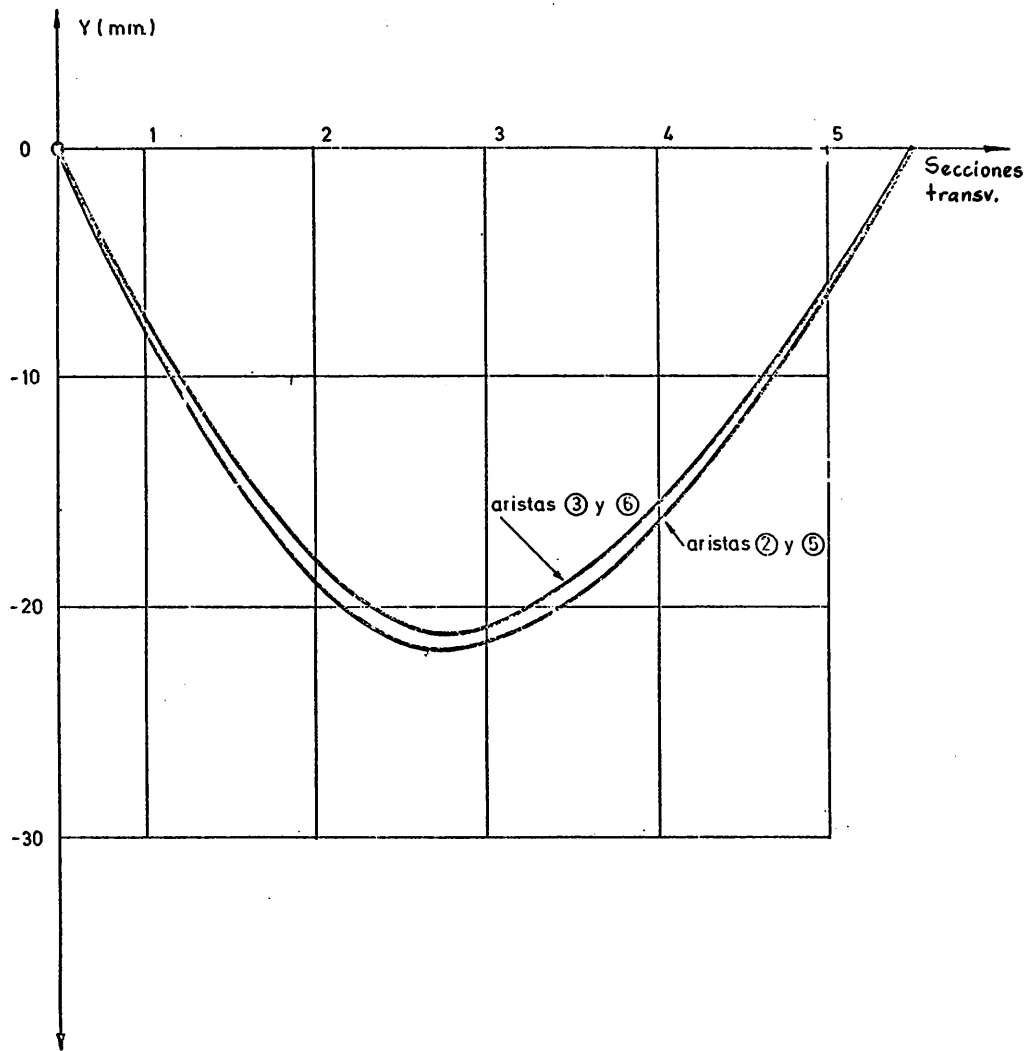


Fig. 60. Lámina plegada no prismática. Variación longitudinal de los movimientos verticales de las aristas



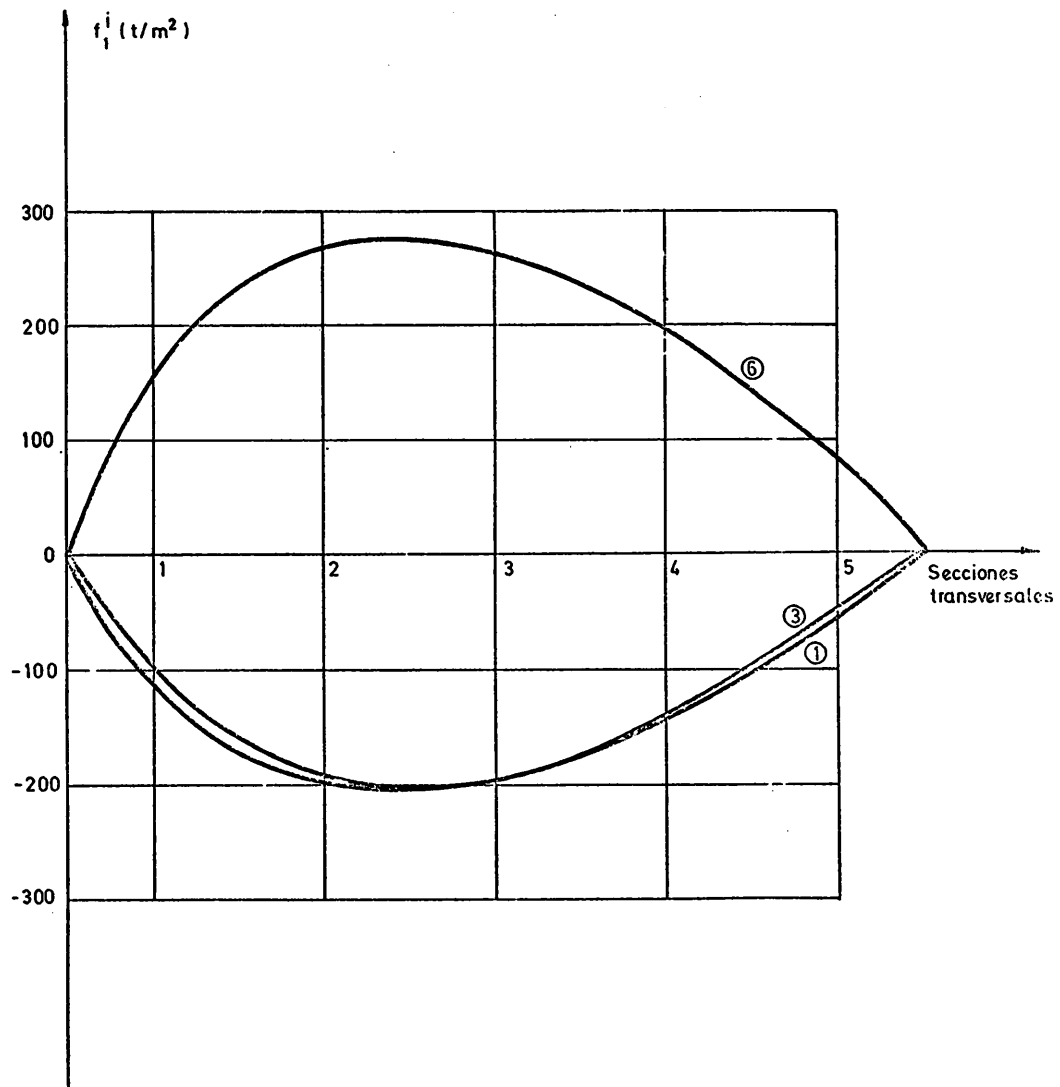


Fig. 61. Lámina plegada no prismática. Variación longitudinal de las tensiones normales longitudinales en el extremo 1 de las distintas losas

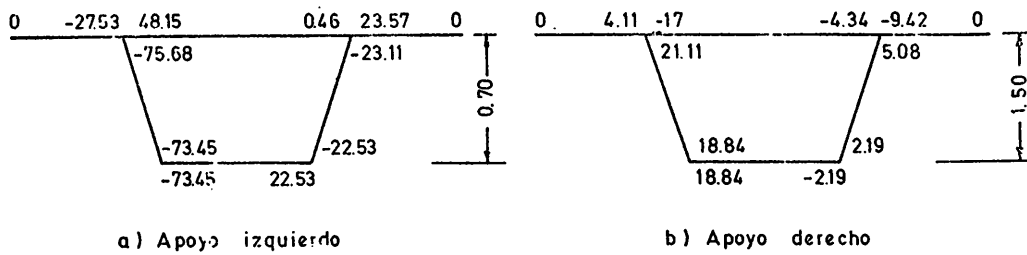


Fig. 62. Lámina plegada no prismática. Fuerzas rasantes unitarias (t/m) en las secciones de apoyos

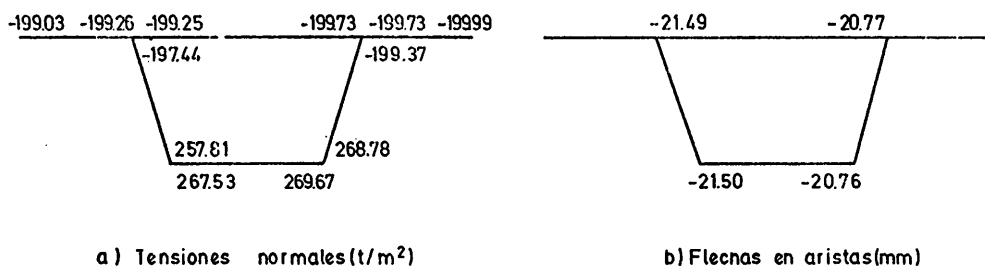


Fig. 63. Lámina plegada no prismática. Valores de las tensiones normales y movimientos verticales en la sección central de la estructura

estructura, sino sensiblemente a la izquierda de la misma (aproximadamente  $0,4L$ ), de modo análogo al caso de vigas de canto variable.

A fin de analizar la validez de los resultados anteriores, se ha procedido a comprobaciones de equilibrios locales y equilibrio global de la lámina.

En la figura 62, se puede observar que el equilibrio de tensiones tangenciales en aristas —en dicha figura se representan únicamente las secciones de apoyos— se satisface plenamente.

La igualdad de tensiones normales longitudinales en las aristas en que concurren dos o más losas también se verifica de forma muy aceptable (figura 63-a).

Por integración de dichas tensiones, se deduce, para la sección central de la estructura:

- Volumen de tracciones = 600,2 t. } (sensiblemente
- Volumen de compresiones = 605,9 t. } iguales)
- Momento interno = 651,6 m.t

El momento externo en dicha sección es  $\frac{pL^2}{8} = 652,5$  m.t. lo que da un porcentaje de diferencia, respecto al interno, del 0.14 por 100.

Con el objeto de comprobar las flechas en las aristas (figura 63-b), se han calculado éstas de forma aproximada, considerando la lámina plegada como una viga de sección variable cargada en su plano, hallándose, en la sección central de la misma, un desplazamiento vertical del orden de 2 cm, valor que concuerda perfectamente con los obtenidos en el computador (figura 63-b).

De todo lo anterior, se concluye que las láminas plegadas no prismáticas pueden ser analizadas con un número relativamente bajo de dovelas —cinco han sido utilizadas en este caso— mediante el presente método numérico, alcanzándose resultados plenamente satisfactorios.

## 7.6 Extensión del método: Aplicación a un tablero de puente

Por último, cabe decir que este procedimiento resulta adecuado para el tratamiento de situaciones reales, tales como tableros de puente de sección cajón, de perfil longitudinal variable (figura 64).

Como ya se ha explicado en el apartado 2.3, las anteriores estructuras no pueden ser consideradas, en rigor, como láminas plegadas, pues existen elementos no planos en las mismas (en este caso las soleras). Para tener en cuenta esta circunstancia, sería necesario realizar

el cálculo longitudinal de los elementos no planos tratándolos como vigas balcón y no como vigas rectas cargadas en su plano.

Sin embargo, si la variación del perfil longitudinal es suave —que es la situación frecuente en las estructuras reales—, es posible despreciar las torsiones que aparecen en la viga balcón, y tratar la estructura como una lámina plegada no prismática.

A efectos ilustrativos, se ha procedido a calcular el tablero de puente representado en la figura 65, simplemente apoyado en sus extremos, y sometido a la carga longitudinal de 1 t/m que, en sección transversal, se muestra en la figura 67. Se ha realizado una división en 10 dovelas iguales.

Es obvio que, en la práctica, perfiles como el anterior son utilizados en estructuras continuas. Sin embargo, y dado que el efecto de la continuidad ya ha sido estudiado en el ejemplo 7.4, se ha considerado aquí el caso de simple apoyo, con el fin de poder realizar las comprobaciones pertinentes, sobre los resultados deducidos, de la forma más simple posible.

Con objeto de mostrar las posibilidades reales del programa de computador, se ha introducido una variación longitudinal de los espesores en almas y forjado inferior, según leyes que se indican en la figura 66.

En las figuras 68, 69 y 70 se han representado las leyes de variación longitudinal de los esfuerzos transversales, en las diferentes losas de la lámina plegada.

Las tensiones tangenciales y tensiones normales longitudinales se muestran en las figuras 71 y 72, respectivamente.

Se ha obtenido, en todos los casos, una simetría casi total —respecto a la sección central del tablero— en los resultados deducidos mediante el programa de computador, como era de esperar, dadas las simetrías, geométrica y de cargas, existentes respecto a la anterior sección.

En la figura 72 se observa, por comparación con la lámina prismática del ejemplo 7.2, la inflexión en las curvas, motivada por la variación del perfil longitudinal y los espesores en almas y forjado inferior.

La verificación de la validez de los resultados que ha proporcionado el computador se ha llevado a cabo, también en este caso, mediante comprobaciones de equilibrios locales y global de la estructura.

En la figura 73-a se indican las tensiones normales longitudinales en la sección central del tablero. La igualdad de dichas tensiones en una arista común a varias losas se cumple de forma muy aceptable.

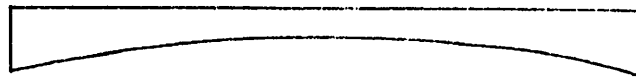
Por otra parte, y por integración de las tensiones anteriores, se deduce:

– Volumen de tracciones	= 817,15 ton.	} (Prácticamente iguales)
– Volumen de compresiones	= 817,67 ton.	
– Momento interno	= 643,10 m.t.	

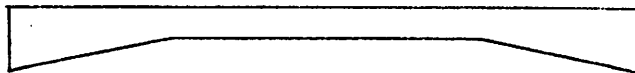
El momento externo es, en la sección central,  $\frac{PL^2}{8} = 652,5$  m.t., que representa una diferencia del 1,4 por 100.

Finalmente, los movimientos verticales en las aristas (figura 73-b) obtenidos en el computador han sido comparados con las flechas que, de forma aproximada, se han calculado considerando la lámina como una viga de sección variable cargada en su plano.

La flecha aproximada, en la sección central, es del orden de 3,4 cm, valor que concuerda con los resultados del computador.

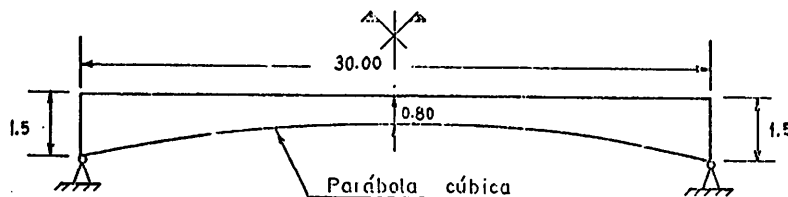


a)

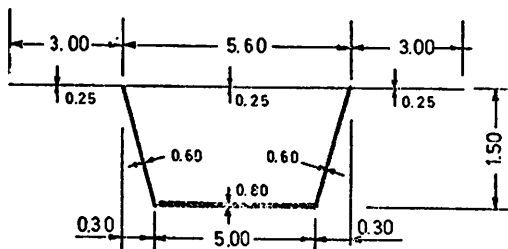


b)

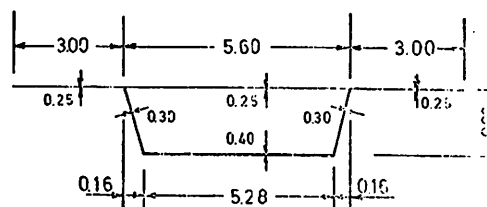
Fig. 64. Casos reales de perfiles longitudinales de tableros de puente de sección cajón



a) Perfil longitudinal

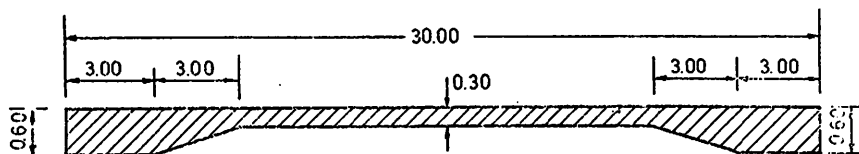


b) Sección apoyos

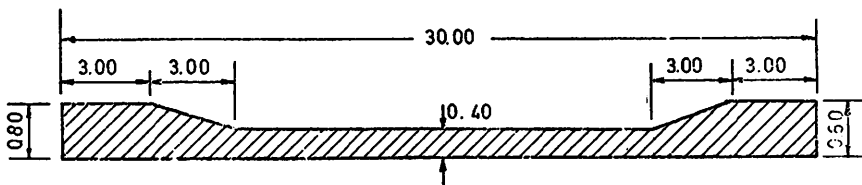


b) Sección centro vano

Fig. 65. Caso práctico de tablero de puente. Geometría



a) Almas



b) Forjado inferior

Fig. 66. Caso práctico de tablero de puente. Leyes de variación longitudinal de los espesores en almas y forjado inferior

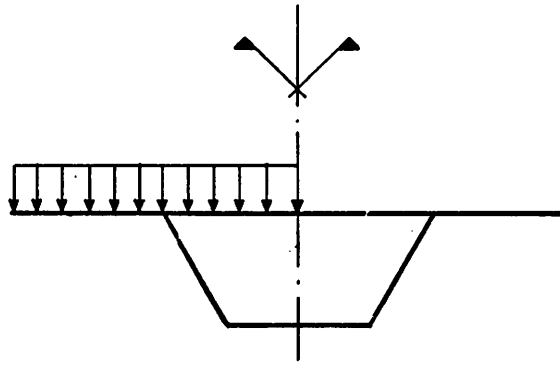


Fig. 67. Caso práctico de tablero de puente: Acciones consideradas

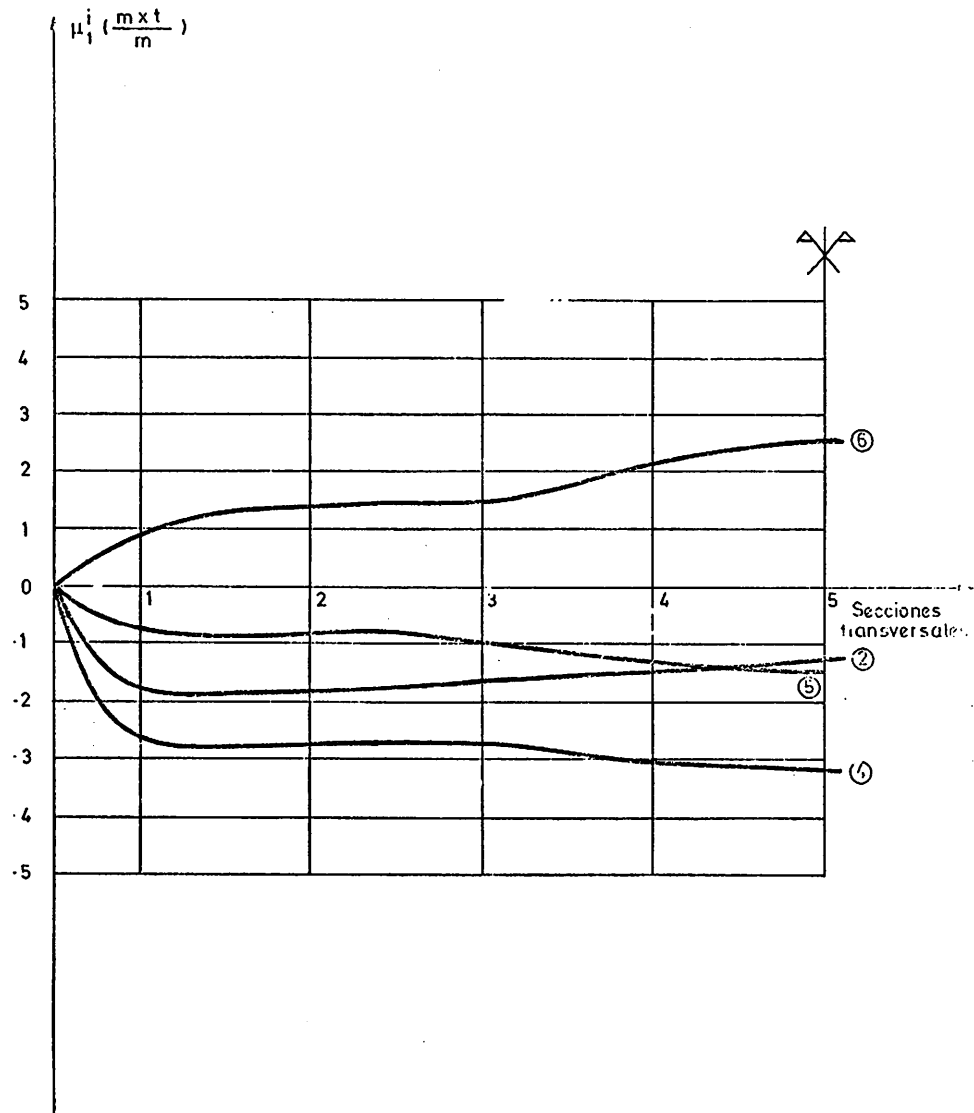


Fig. 68. Caso práctico de tablero de puente. Variación longitudinal de los momentos transversales en el extremo 1 de las distintas losas

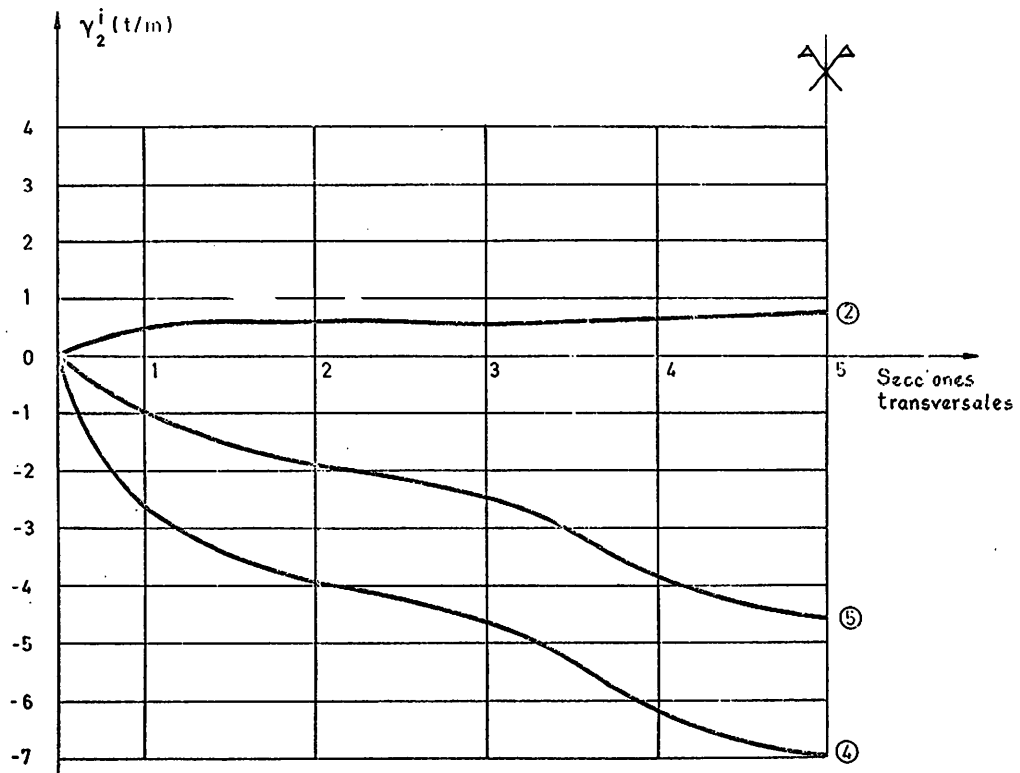


Fig. 69. Caso práctico de tablero de puente. Variación longitudinal de los cortantes transversales en el extremo 2 de las diferentes losas

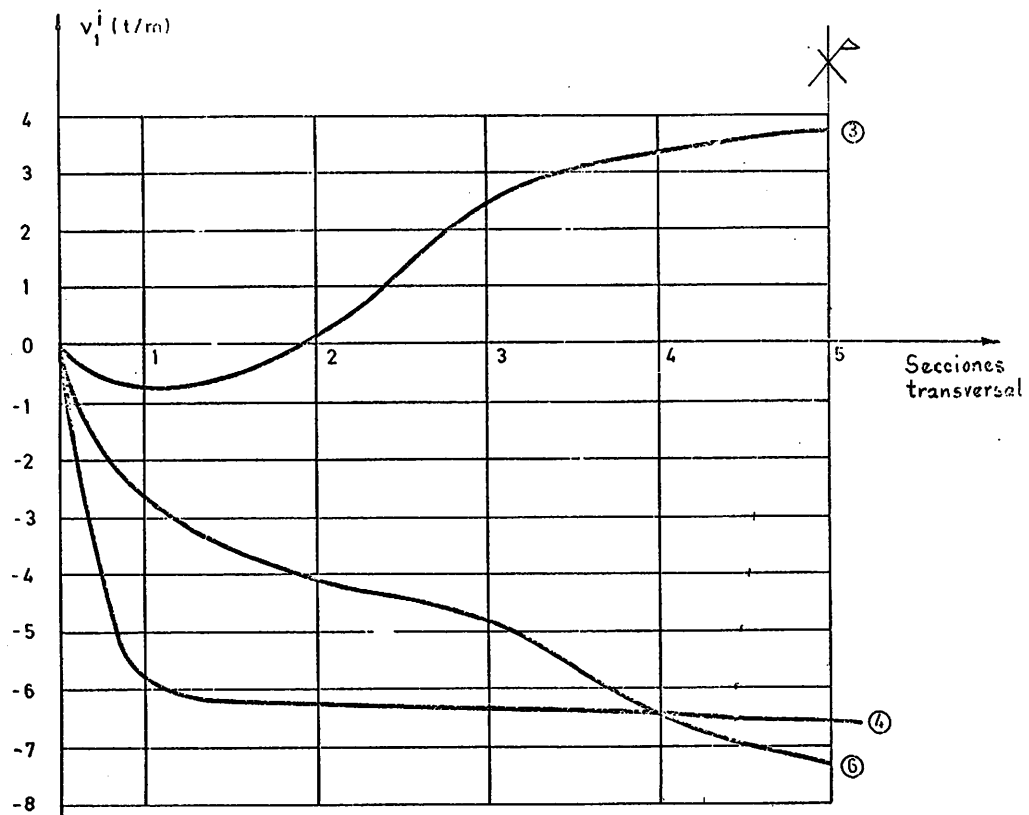
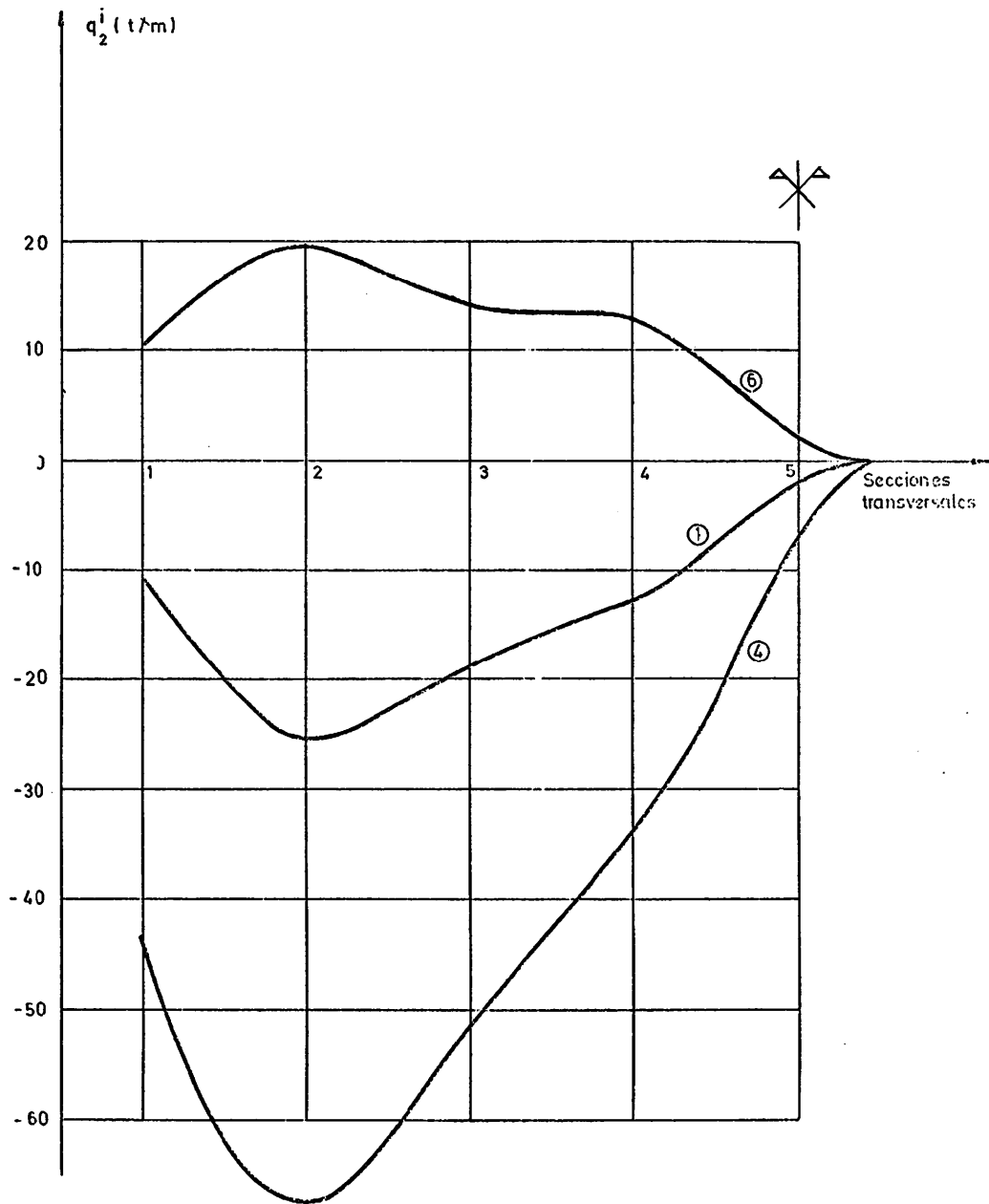


Fig. 70. Caso práctico de tablero de puente. Variación longitudinal de los axiles transversales en el extremo 1 de las distintas losas



**Fig. 71. Caso práctico de tablero de puente. Variación longitudinal de las fuerzas rasantes unitarias en el extremo 2 de las distintas losas**

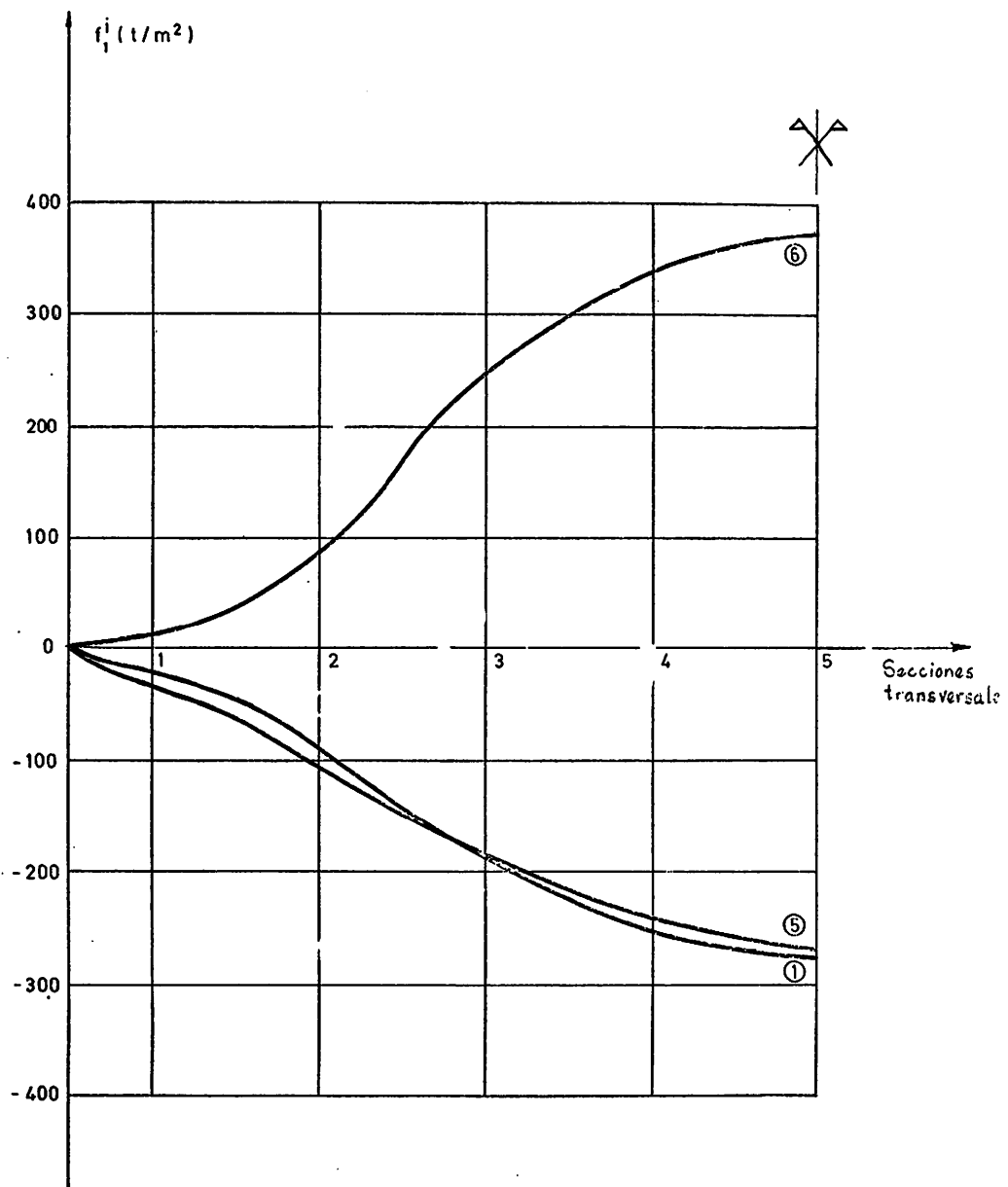
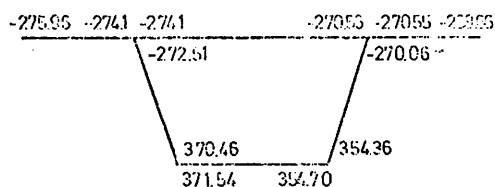
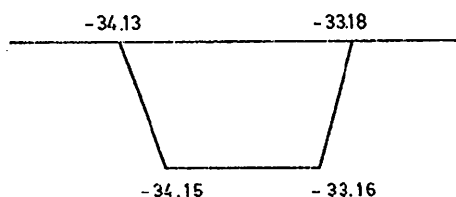


Fig. 72. Caso práctico de tablero de puente. Variación longitudinal de las tensiones normales en el extremo 1 de las diferentes losas





a) Tensiones normales longitudinales (t/m<sup>2</sup>)



b) Flechas (mm.)

Fig. 73. Caso práctico de tablero de puente. Tensiones normales y movimientos verticales en la sección central de la estructura

Así pues, se puede concluir provisionalmente que la extensión del presente procedimiento al tratamiento de situaciones reales, como la aquí analizada, conduce a resultados plenamente válidos, y resulta, en general, más adecuada que las técnicas seguidas actualmente —por ejemplo, en el caso concreto de tableros de puentes de sección cajón—, que sustituyen la lámina plegada no prismática por una prismática equivalente.

## 8. CONSIDERACIONES FINALES

De los estudios anteriores, se pueden extraer las conclusiones siguientes:

1) Las láminas plegadas constituyen un tipo estructural de amplio rango de aplicación. Actualmente no existe una clasificación sistemática de las mismas, ya que los métodos generales de cálculo no consideran específicamente ninguna de las características de este tipo de estructuras.

2) De acuerdo con las características de cálculo de láminas plegadas, se ha procedido a un intento de clasificación de las mismas.

3) Se han revisado los métodos específicos de cálculo actuales y se ha comprobado su limitado rango de aplicación a casos reales.

4) Frente a la abundancia de métodos analíticos, se ha constatado el escaso número de procedimientos numéricos existentes, aplicables únicamente a casos muy sencillos.

5) Se ha desarrollado un nuevo procedimiento numérico que elimina las limitaciones de los métodos específicos actuales.

6) Mediante el citado método se ha obtenido una excelente aproximación, incluso con un mínimo número de dovelas, en los ejemplos analizados, lo cual se debe, probablemente, a una adecuada elección de las incógnitas básicas.

7) Los resultados obtenidos han revelado, en comparación con un análisis armónico, una mayor aproximación expresada en menores errores en el equilibrio de tensiones alrededor de una arista y en el equilibrio global.

8) Con carácter provisional y tentativo parece deducirse que la técnica utilizada actualmente, por ejemplo en el caso de tableros de puentes, de sustituir las láminas plegadas no prismáticas por una prismática equivalente, no conduce a diferencias excesivas en los resultados. Sin embargo este punto debería ser objeto de una posterior investigación.

El método de cálculo de láminas plegadas no prismáticas de sección transversal arbitraria aquí estudiado puede ser ampliado en diferentes direcciones, algunas de ellas de evidente interés práctico, entre las que se pueden citar las que siguen:

1) Extensión del procedimiento teórico, considerando los efectos de la torsión en el caso de láminas plegadas constituidas por losas alabeadas.

2) Estudio sistemático de la influencia de la variación de cantos, espesores, luces, etc., en la distribución transversal de resultados. De este modo podrían ser dadas normativas de proyecto, por ejemplo, en el caso de tableros de puentes.

3) Análogo estudio al anterior, teniendo en cuenta el efecto de la continuidad, calculando diferentes casos de rigideces en los apoyos extremos.

4) Ampliación del método, mediante un proceso de iteración, al estudio de situaciones de no linealidad estructural: pandeo elástico o inelástico, fluencia, relación tensión – deformación no lineal, etc.

## **APENDICE: DESARROLLO DE ALGUNAS FORMULAS FUNDAMENTALES**

### **A.1. Introducción**

En este apéndice se desarrollan algunas de las fórmulas incluidas en el párrafo 6, correspondientes al método aquí propuesto sobre el cálculo de láminas plegadas no prismáticas. Con ello se intenta presentar una idea de la formulación utilizada, y no se entra en los detalles de la obtención de dichas fórmulas, que pueden verse en la referencia {16}.

### **A.2. Leyes de esfuerzos longitudinales**

En lo que sigue se deducen las fórmulas (1), (2) y (5) incluidas en el apartado 6.2., que representan las leyes de esfuerzos longitudinales de cada losa, a saber: considerada aislada de las restantes –fórmula (1)– y teniendo en cuenta el monolitismo estructural (esfuerzos reales) –fórmulas (2) y (5)–.

Dado que la estructura de dichas fórmulas es análoga para los tres tipos de esfuerzos –momentos flectores, esfuerzos cortantes y esfuerzos axiales–, únicamente se calculan las leyes de momentos flectores en una losa genérica,  $i$ .

Tal como se expuso en el apartado 6.2., en el cálculo longitudinal de cada losa aislada se trata ésta como una viga apoyada en sus extremos, y sometida a las acciones  $p_a^i$ ,  $G_1^i$  y  $G_2^i$  (incógnitas básicas), como se muestra en la figura 34.

En el cálculo se supone una distribución parabólica de cargas equivalente a las fuerzas concentradas  $p_a^i$ , es decir, en cada dovela (figura 74) se considera una ley de cargas del tipo:

$$P(u) = a_1 u^2 + b_1 u + c_1$$

determinándose los parámetros  $a_1$ ,  $b_1$  y  $c_1$  al establecer las condiciones siguientes:

$$\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} P(u) du = p_a^i; \int_{-\frac{3\Delta}{2}}^{-\Delta/2} P(u) du = p_{a-1}^i; \int_{\Delta/2}^{3\Delta/2} P(u) du = p_{a+1}^i$$

habiendo representado por los índices (i) y (a) una losa y una dovela genéricas, respectivamente.

Los esfuerzos (momentos y cortantes) dorsales y frontales en la sección central de una dovela, debidos a las cargas que actúan sobre ésta (figura 75), se deducen como sigue:

$$\text{– Momento frontal: } M_a^{i+} = \int_0^{\Delta/2} P(u) u du$$

$$\text{– Momento dorsal: } M_a^{i-} = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^0 P(u) u du$$

$$\text{– Cortante frontal: } P_a^{i+} = \int_0^{\Delta/2} P(u) du$$

$$\text{– Cortante dorsal: } P_a^{i-} = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^0 P(u) du$$

Si se repiten las operaciones anteriores para todas las dovelas de la losa i ( $a = 1, 2, \dots, A$ ), se deducen fácilmente las siguientes expresiones matriciales:

$$\begin{aligned} \underline{P}^{i+} &= \underline{S}_1 \cdot \underline{p}^i \\ \underline{P}^{i-} &= \underline{S}_2 \cdot \underline{p}^i \\ \underline{M}^{i+} &= \underline{S}_3 \cdot \underline{p}^i \\ \underline{M}^{i-} &= \underline{S}_4 \cdot \underline{p}^i \end{aligned} \quad (7)$$

En donde:

$$\underline{p}^i = \{p_1^i, p_2^i, \dots, p_a^i, \dots, p_A^i\} \text{ (dimensión } A \times 1)$$

siendo A el número de dovelas

$$\underline{P}^{i+} = \{P_1^{i+}, P_2^{i+}, \dots, P_a^{i+}, \dots, P_A^{i+}\}^T \text{ (dimensión } A \times 1)$$

y análogamente para los demás ( $\underline{P}^{i-}$ ,  $\underline{M}^{i+}$  y  $\underline{M}^{i-}$ ).

Las matrices  $\underline{S}_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) son cuadradas, de dimensión  $A \times A$ , y poseen todas una estructura similar.

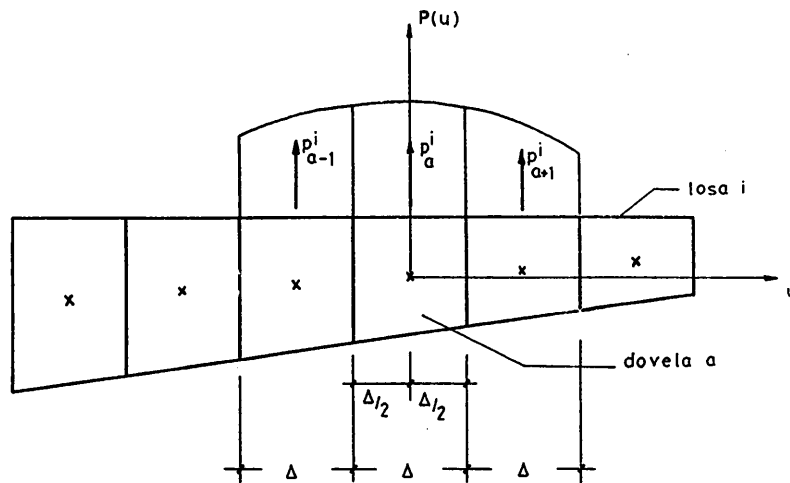


Fig. 74. Distribución parabólica de las cargas consideradas en el cálculo longitudinal de una losa genérica

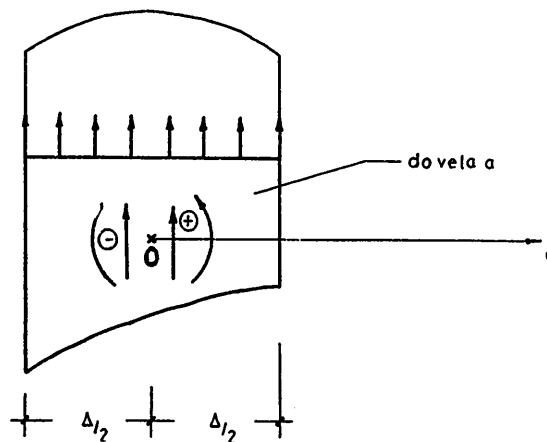


Fig. 75. Esfuerzos frontales y dorsales en una dovela genérica, debidos solamente a las cargas actuantes sobre dicha dovela

Así, por ejemplo, la matriz  $\underline{S}_1$  es la siguiente:

$$\underline{S}_1 = \frac{1}{16} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 4 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 4 & -11 \end{bmatrix}$$

Las reacciones en los apoyos extremos de la losa,  $R_1^i$  y  $R_2^i$ , (figura 76), debidas a las acciones anteriores, se obtienen mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} R_1^i &= -(\underline{e}^T - \underline{x}^T) (\underline{P}^{i+} + \underline{P}^{i-}) + \frac{1}{L} \underline{e}^T (\underline{M}^{i+} + \underline{M}^{i-}) \\ R_2^i &= -\underline{x}^T (\underline{P}^{i+} + \underline{P}^{i-}) - \frac{1}{L} \underline{e}^T (\underline{M}^{i+} + \underline{M}^{i-}) \end{aligned} \quad (8)$$

En donde:

$$\underline{x} = \left( \frac{\Delta}{2L}, \frac{3\Delta}{2L}, \dots, \frac{(2a-1)\Delta}{2L}, \dots, \frac{(2A-1)\Delta}{2L} \right)^T \text{ (dimensión } A \times 1)$$

$$\underline{e} = (1, 1, \dots, 1, \dots, 1)^T \text{ (dimensión } A \times 1)$$

y L es la longitud de la directriz de la losa considerada como viga.

Si se sustituyen las ecuaciones (7) en las fórmulas (8), se deducen las expresiones:

$$\begin{aligned} R_2^i &= \underline{S}_5 \cdot p^i \\ R_1^i &= \underline{S}_6 \cdot p^i \end{aligned} \quad (9)$$

Siendo:

$$\begin{aligned} \underline{S}_5 &= - \{ \underline{x}^T (\underline{S}_1 + \underline{S}_2) + \frac{1}{L} \underline{e}^T (\underline{S}_3 + \underline{S}_4) \} \\ \underline{S}_6 &= - \{ \underline{e}^T (\underline{S}_1 + \underline{S}_2) + \underline{S}_5 \} \end{aligned}$$

ambas de dimensión  $1 \times A$ .

Conocidas las reacciones dadas por (9), es inmediato el cálculo de los esfuerzos longitudinales a partir del esquema discretizado que se representa en la figura 77. En particular, para los momentos flectores se llega a la fórmula que se indica a continuación:

$$\underline{ML}^i = \underline{S}_9 \cdot p^i \quad (10)$$

Siendo:

$$\underline{ML}^i = \{ ML_1^i, ML_2^i, \dots, ML_a^i, \dots, ML_A^i \}^T \text{ (dimensión } A \times 1)$$

y representando por  $ML_a^i$  el momento flector longitudinal en la sección central de la dovela a, debido a las acciones  $p_a^i$ .

La matriz  $\underline{S}_9$  es de dimensión  $A \times A$  y su expresión es:

$$\underline{S}_9 = L (\underline{e} - \underline{x}) \underline{S}_5 + \underline{S}_7 (\underline{S}_1 + \underline{S}_2) + \underline{S}_8 (\underline{S}_3 + \underline{S}_4) + \underline{S}_3$$

En donde:

$$\underline{S}_7 = \begin{bmatrix} 0 & \Delta & 2\Delta & 3\Delta & \dots & (A-1)\Delta \\ 0 & 0 & \Delta & 2\Delta & \dots & (A-2)\Delta \\ 0 & 0 & 0 & \Delta & \dots & (A-3)\Delta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2\Delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \Delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \text{ (dimensión } A \times A)$$

$$\underline{S}_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (dimensión } A \times A)$$

La ecuación (10) representa, en forma discreta, la ley de momentos flectores longitudinales en una losa genérica, i, debidos a las incógnitas básicas,  $p_a^i$ .

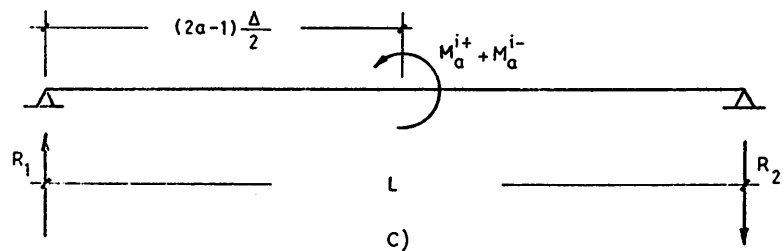
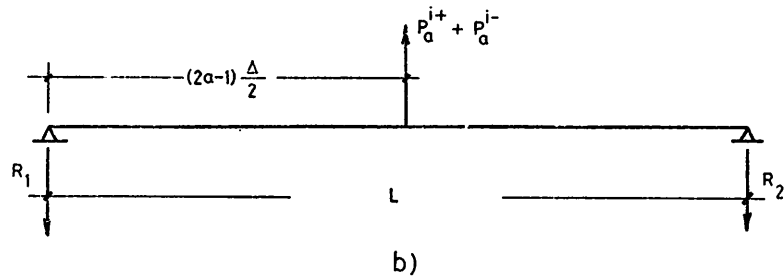
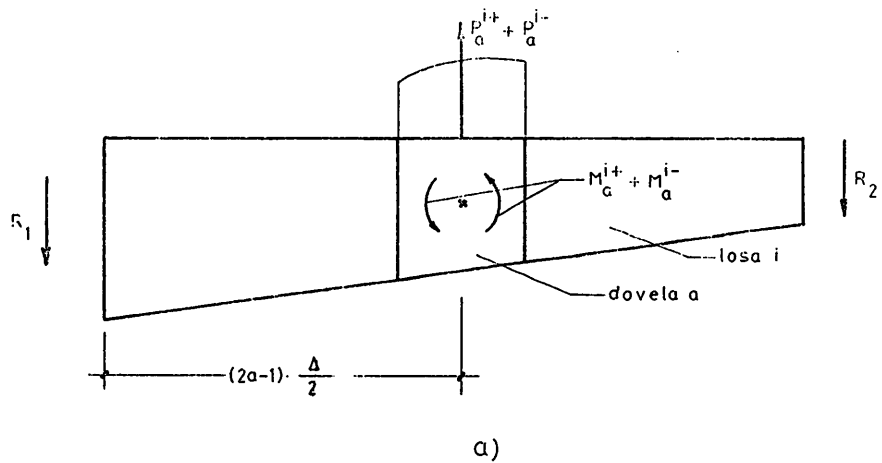


Fig. 76. Reacciones en los extremos longitudinales de una losa arbitraria, debidas a las cargas actuantes en una dovela genérica

La consideración de los momentos de continuidad,  $G_1^i$  y  $G_2^i$  (figura 78), es inmediata, y, de modo análogo, se llega a la expresión:

$$\underline{ML}^i = G_1^i (e - \underline{x}) + G_2^i \underline{x} \quad (11)$$

Sumando las ecuaciones (10) y (11), e indicando por  $\underline{ML}_0^i$  la ley de momentos flectores debidos al pretensado, resulta la fórmula final:

$$\underline{ML}_E^i = \underline{ML}_0^i + \underline{S}_9 \cdot \underline{p}^i + \{(e - \underline{x}), \underline{x}\} \underline{G}^i \quad (12)$$

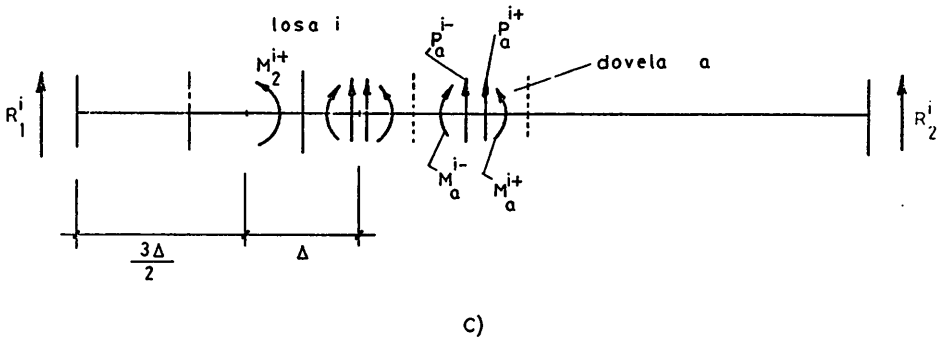
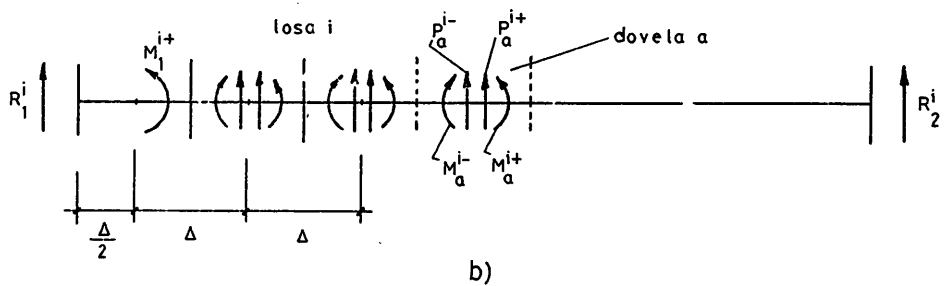
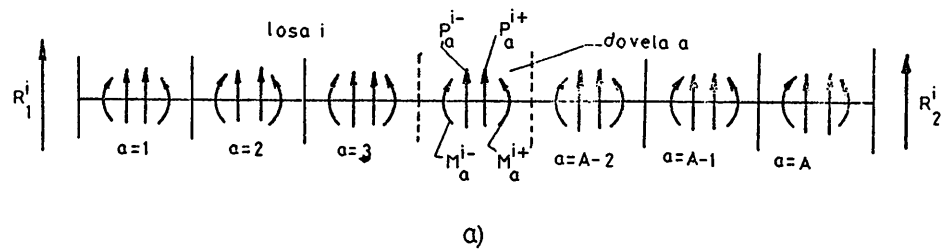


Fig. 77. Discretización de una losa genérica, para el cálculo longitudinal de los esfuerzos debidos únicamente a las cargas de la losa

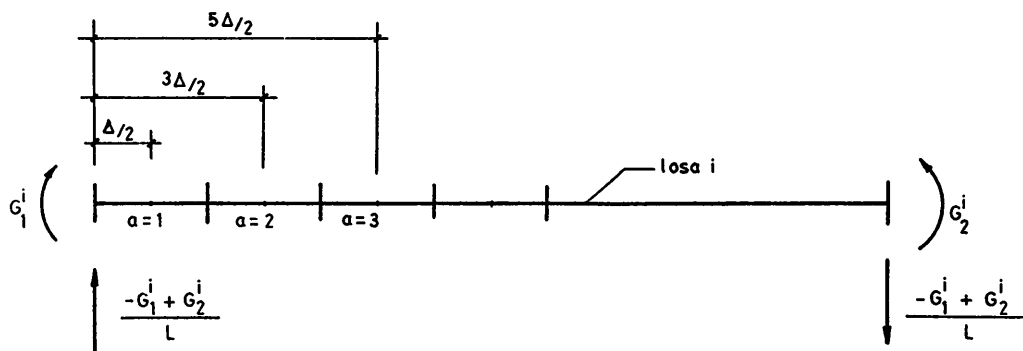


Fig. 78. Discretización de una losa genérica, para el cálculo de los esfuerzos longitudinales debidos a los momentos de continuidad.

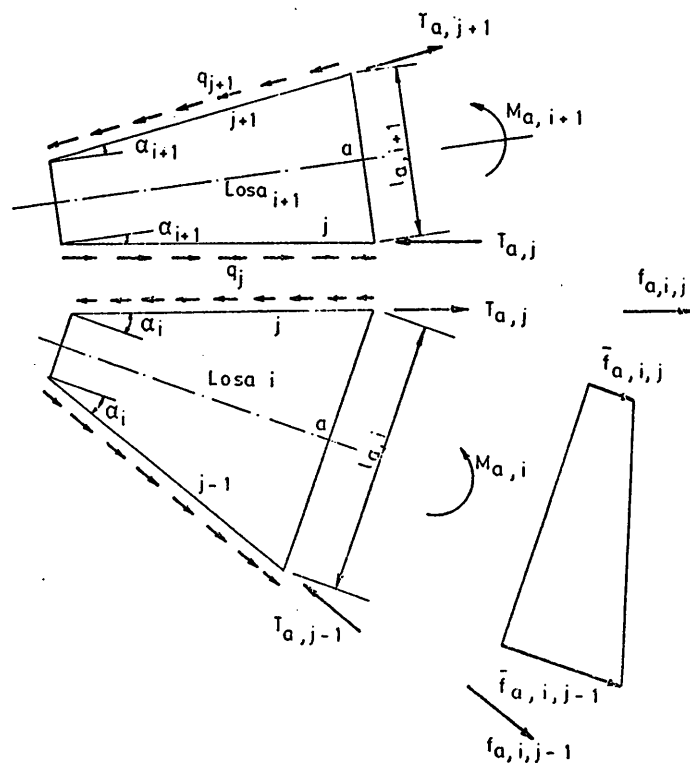


Fig. 79. Cálculo longitudinal de una losa genérica: Acciones totales.

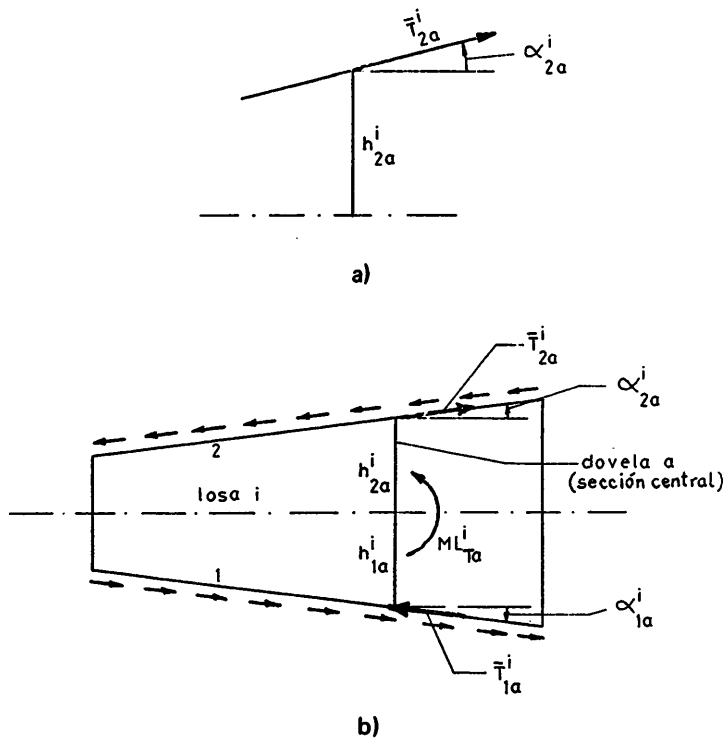


Fig. 80. Sentidos positivos de las fuerzas rasantes y de los ángulos de forma de una losa



Con:

$$\underline{G}^i = \begin{bmatrix} G_1^i \\ G_2^i \end{bmatrix}$$

La expresión anterior es la ley de momentos longitudinales de una losa genérica considerada aislada de las demás, y se identifica fácilmente con la ecuación (1) del apartado 6.2, es decir:

$$\underline{E}^i = \underline{E}_0^i + \underline{E}_p^i \cdot \underline{p}^i + \underline{E}_G^i \cdot \underline{G}^i \quad (1)$$

Los esfuerzos axiales y cortantes se obtendrían a partir de análogas consideraciones, deduciéndose fórmulas que pueden ser incluidas dentro del esquema dado por la expresión (1).

Tal como se ha explicado en el apartado 6.2, el monolitismo estructural obliga a que los desplazamientos longitudinales a lo largo de una arista común a varias losas sean iguales en los bordes de éstas, y, dada la hipótesis de material linealmente elástico que se ha considerado, la anterior condición equivale a que se verifique la igualdad de tensiones normales longitudinales en la citada arista común.

Si dichas tensiones se calculan a partir de las leyes de esfuerzos definidas por (1) (figura 79), no se satisface la igualdad requerida, siendo preciso introducir, por lo tanto, las tensiones rasantes  $q_{ka}^i$  ( $k = 1,2$ ) mencionadas en el párrafo 6, o bien, equivalentemente, las fuerzas concentradas  $T_{ka}^i$  (figuras 35 y 36).

Así pues, las fuerzas anteriores (figura 80) incrementan los esfuerzos longitudinales, es decir: el incremento del momento flector de una dovela genérica es:

$$ML_{Ta}^i = -\bar{T}_{1a}^i \cdot h_{1a}^i \cdot \cos \alpha_{1a}^i - \bar{T}_{2a}^i \cdot h_{2a}^i \cdot \cos \alpha_{2a}^i \quad (13)$$

y análogamente para los demás esfuerzos.

Se ha supuesto la relación:

$$\bar{T}_{ka}^i = \frac{T_{ka}^i + T_{ka-1}^i}{2} \quad (k = 1,2)$$

El significado de  $\alpha_{ka}^i$  y  $h_{ka}^i$  se deduce de la figura 80.

La generalización de la ecuación (13) para todas las dovelas conduce a la siguiente expresión matricial:

$$\underline{ML}_T^i = \underline{ML}_{T0}^i + \underline{D}_1^i \cdot \underline{T}_1^i + \underline{D}_2^i \cdot \underline{T}_2^i \quad (14)$$

Siendo:

$$ML_{T0}^i = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} (h_{11}^i \cos \alpha_{11}^i \cdot T_{10}^i + h_{21}^i \cos \alpha_{21}^i \cdot T_{20}^i) \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{dimensión } A \times 1)$$

$$\underline{D}_m^i = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} h_{m1}^i \cos \alpha_{m1}^i & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_{m2}^i \cos \alpha_{m2}^i & h_{m2}^i \cos \alpha_{m2}^i & 0 \dots 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & h_{mA}^i \cos \alpha_{mA}^i & h_{mA}^i \cos \alpha_{mA}^i & \dots \end{bmatrix}$$

(m = 1, 2)

de dimensión A x A.

y  $\underline{ML}_T^i = \{ML_{T1}^i, ML_{T2}^i, \dots, ML_{Ta}^i, \dots, ML_{TA}^i\}^T$  (dimensión A x 1)

$\underline{T}_k^i = \{T_{k1}^i, T_{k2}^i, \dots, T_{ka}^i, \dots, T_{kA}^i\}^T$  (k = 1,2) (dimensión A x 1)

Para los incrementos de los esfuerzos axiales y cortantes, se deducen fórmulas análogas a (14).

Si se suman las relaciones (12) y (14) se alcanza la siguiente expresión:

$$\underline{ML}^i = (\underline{ML}_0^i + \underline{ML}_{T0}^i) + \underline{S}_9 \cdot \underline{p}^i + \{(\underline{e} - \underline{x}), \underline{x}\} \underline{G}^i + \underline{D}_{12}^i \underline{T}^i \quad (15)$$

Con:

$$\underline{D}_{12}^i = (\underline{D}_1^i, \underline{D}_2^i) \text{ y } \underline{T}^i = \begin{bmatrix} \underline{T}_1^i \\ \underline{T}_2^i \end{bmatrix}$$

La ecuación (15) se identifica fácilmente con la (2) del texto, es decir:

$$\underline{E}^i = \underline{E}_0^i + \underline{E}_p^i \cdot \underline{p}^i + \underline{E}_G \cdot \underline{G}^i + \underline{E}_T \cdot \underline{T}^i \quad (2)$$

que representa la ley de esfuerzos reales de la losa i, en función de las incógnitas básicas de la losa y de las nuevas incógnitas  $T_{ka}^i$ .

Para determinar estas últimas se plantean, en cada arista, las pertinentes ecuaciones de equilibrio y compatibilidad que se indican a continuación:

a) Equilibrio longitudinal

$$\sum_{i \in N_1} q_{1a}^i - \sum_{i \in N_2} q_{2a}^i = L_{na} \quad (16)$$

(a = 1, 2, ..., A)

en donde  $L_{na}$  representa la fuerza unitaria longitudinal, en la dirección de la arista en estudio, actuando en la dovela a.

$q_{ka}^i$  son las tensiones rasantes ya definidas.

$N_k$  (k = 1,2) representa el conjunto de losas que tienen su borde k coincidente con la arista en estudio.

b) Compatibilidad de desplazamientos longitudinales.

Si i y j son dos losas con bordes k y k' concurrentes en una arista, se ha de verificar la igualdad de tensiones normales longitudinales

$$f_{ka}^i = f_{k'a}^j \quad (17)$$

(a = 1, 2, ..., A)

estando definida la tensión normal a través de la fórmula siguiente:

$$f_{ka}^i = \frac{(-1)^{k+1}}{Z_{ka}^i} ML_a^i \frac{1}{\cos^2 \alpha_{ka}^i} + \frac{1}{A_a^i} NL_a^i \frac{1}{\cos^2 \alpha_{ka}^i} + (-1)^{k+1} \frac{2q_{ka}^i}{t_{ka}^i} \operatorname{tg} \alpha_{ka}^i \quad (k = 1,2)$$

en donde  $ML_a^i$  y  $NL_a^i$  son el momento flector y esfuerzo axil reales en la sección central de la dovela a, correspondientes a la losa i, definidos por (2).

$Z_{ka}^i$  es el módulo resistente de la anterior sección central, en el borde correspondiente.

$A_a^i$  es el área de la sección.

$t_{ka}^i$  el espesor del borde k.

Si se plantean las ecuaciones (16) y (17) para todas las dovelas y en todas las aristas, se llega a la siguiente relación matricial:

$$\underline{AA} \cdot \underline{T} = \underline{B} \quad (18)$$

que es una generalización de la ecuación de los cinco cortantes definida en el párrafo 5.

El significado de las matrices que intervienen en la fórmula anterior se ha comentado en el apartado 6.2. Cabe añadir que el vector  $\underline{T}$  tiene la siguiente estructura:

$$\underline{T} = (\underline{T}_1^1, \underline{T}_2^1, \underline{T}_1^2, \underline{T}_2^2, \dots, \underline{T}_1^i, \underline{T}_2^i, \dots, \underline{T}_1^I, \underline{T}_2^I)^T$$

y su dimensión es  $(2AI \times 1)$ , siendo I el número de losas de la sección transversal de la lámina.

Si se resuelve la ecuación (18):

$$\underline{T} = \underline{AA}^{-1} \cdot \underline{B}$$

se deducen las incógnitas  $T_{ka}^i$ , mediante una expresión del tipo:

$$\underline{T}^i = \begin{bmatrix} T_1^i \\ T_2^i \end{bmatrix} = \underline{C}_0^i + \underline{C}_p^i \cdot \underline{p} + \underline{C}_G^i \cdot \underline{G} \quad (19)$$

Siendo:

$$\underline{p} = \{p_1^1 \dots p_A^1, p_1^2 \dots p_A^2, \dots, p_1^i \dots p_A^i, \dots, p_1^I \dots p_A^I\}^T$$

de dimensión  $(AI \times 1)$ .

$$\underline{G} = (G_1^1, G_2^1 \dots G_1^i \dots G_2^i, G_1^2, G_2^2 \dots G_2^i, \dots G_2^I)^T$$

de dimensión  $(2I \times 1)$ .

Por sustitución de la relación (19) en (2), se obtiene la ecuación (5) del texto, o sea:

$$\tilde{\underline{E}}^i = \tilde{\underline{E}}_0^i + \tilde{\underline{E}}_p^i \cdot \underline{p} + \tilde{\underline{E}}_G^i \cdot \underline{G} \quad (5)$$

que representa la ley de esfuerzos longitudinales reales de una losa genérica, en función únicamente de las incógnitas básicas del problema:  $\underline{p}$  y  $\underline{G}$ .

### A.3 Ley de flechas en el plano de cada losa

Para la obtención de las flechas en el plano de una losa genérica (figura 37), se aplica la teoría de la viga conjugada, siguiendo un algoritmo de cálculo análogo al utilizado para la deducción de (10).

Las cargas a considerar en este caso son:

$$p_{ca}^i = \frac{ML_a^i}{E \cdot I_a^i} \quad (20)$$

en donde E es el módulo de elasticidad del material,  $I_a^i$  la inercia de la sección central de la dovela, a, y  $ML_a^i$  el momento flector longitudinal real.

La ley de flechas, que coincide con la ley de momentos flectores de la viga conjugada, es del tipo

$$\underline{u}^i = \underline{S}_{c9} \cdot \underline{p}_c^i \quad (21)$$

en donde la matriz  $\underline{S}_{c9}$ , de dimensión  $(AxA)$ , tiene una estructura análoga a la de  $\underline{S}_9$  (ya comentada).

$$\underline{p}_c^i = \{p_{c1}^i, p_{c2}^i, \dots, p_{ca}^i, \dots, p_{cA}^i\}^T \quad (\text{dimensión } Ax1)$$

$$\underline{u}^i = \{u_1^i, u_2^i, \dots, u_a^i, \dots, u_A^i\}^T \quad (\text{dimensión } Ax1)$$

y  $u_a^i$  representa la flecha en la sección central de la dovela  $a$ , en la losa  $i$ .

Por sustitución de (5) en (20) y de (20) en (21), se llega a la fórmula (6) del apartado 6.2:

$$\underline{u}^i = \underline{u}_0^i + \underline{u}_p^i \cdot \underline{p} + \underline{u}_G^i \cdot \underline{G} \quad (6)$$

que constituye la ley de flechas en función de las incógnitas básicas.

Por último, cabe añadir aquí que los giros en los extremos longitudinales (cortantes de la viga conjugada) se deducen según fórmulas análogas a (9) y su estructura formal es semejante a la de (6):

$$\theta_k^i = \theta_{k0}^i + \theta_{kp}^i \cdot \underline{p} + \theta_{kG}^i \cdot \underline{G} \quad (22)$$

(k = 1,2)

El conocimiento de dichos giros es necesario en el planteamiento de las ecuaciones de compatibilidad longitudinal, como ya ha sido explicado en el apartado 6.2.

## REFERENCIAS

1. EHLERS, G. "Ein neues konstruktions prinzip". Bauingenieur, Vol. II, n° 8. Berlín, 1930.
2. PHASE I REPORT ON FOLDED PLATE CONSTRUCTION, REPORT OF THE TASK COMMITTEE ON FOLDED PLATE CONSTRUCTION. Journ. of the Struct. Div. ASCE. Vols. 60 y 89 ST6. Diciembre 1963.
3. I.A.S.S. SYMPOSIUM, Vols. 1 y 2. Viena, 1970.
4. DE FRIES-SKENE, A. y A.C. SCORDELIS. "Direct Stiffness Solution of Folded Plates", Journ. of the Struct. Div. ASCE. Vol 90, ST4. Agosto, 1964.
5. PULTAR, M. "Analysis of Continuous Folded Plate Structures". Tesis doctoral presentada al Departamento de Ingeniería Civil. Princeton University, N. Jersey. Octubre, 1964.
6. SAMARTIN, A. "Una aplicación de los métodos matriciales al cálculo de puentes". Laboratorio Central de Ensayos de Materiales de Construcción, publicación n° 197. Madrid, 1968.
7. MANTEROLA, J. "Análisis de tableros de puentes por métodos armónicos". Instituto Eduardo Torroja. Monografía n° 343. Julio, 1977.
8. DEL POZO, F., J.A. TORROJA y R. LOPEZ PALANCO. "Tribune for the Dog Racing Stadium of Madrid". Proceedings, Octubre, 1962. World Conference on Shell Structures. San Francisco, National Academy of Science Publication, 1964.
9. DEL POZO, F. y A. SAMARTIN. "Nonprismatic Folded Roof Structure". IASS Symposium. Udine (Italia), 1974.

10. RAUE, E. "The Calculation of Prismatic and Nonprismatic Folded Structures". IASS Symposium, Viena, 1970.
11. JOHNSON, C.D. y TI-TA LEE. "Long Nonprismatic Folded Plate Structures". Journ. of the Struct. Div. ASCE, n° ST6. Junio, 1968.
12. IFFLAND, J. "Folded Plate Structures". Journ. of the Structur. Div. ASCE, Vol. 105, n° ST1. Enero 1979.
13. SCORDELIS, A.C. "Analysis of Continuous Box Girder Bridges". College of Engineering. Office of Research Services. University of California, Berkeley. Noviembre, 1967.
14. YITZHAKI, D. "Prismatic and Cylindrical Shell Roofs". Haifa Science Publishers. Haifa, Israel, 1958.
15. SAMARTIN, A., J.R. GONZALEZ DE CANGAS y J. MARTINEZ. "A Computer Formulation for the Analysis on Continuous Nonprismatic Folded Plate Structures of Arbitrary Cross-Section". Vol. 2. I.A.S.S. World Congress on Shell and Spatial Structures. Madrid, Setiembre 1979.
16. GONZALEZ DE CANGAS, J.R. y A. SAMARTIN "Cálculo matricial de láminas plegadas continuas, no prismáticas, de sección transversal arbitraria". Publicación n° AE80-7. Dep. de Anál. de las Estruct. Escuela de Ingenieros de Caminos, Santander. Septiembre de 1980.
17. SCHÖRER, H. "Line Load Action on Thin Cylindrical Shells". Proceedings of the American Society of Civil Engineers. Vol. 61, 1935.
18. SAMARTIN, A. y J. MARTINEZ. "Reparto transversal de la sobrecarga en tableros de puentes". Hormigón y Acero, n° 113. 4° trimestre, 1974.
19. GOLDENVEIZER, A.L. "Theory of Elastic Thin Shells". Pergamon Press, New York, 1961.

\* \* \*

## **Jornadas sobre "Técnica del hormigón armado y pretensado en centrales nucleares"**

A la vista de la importante experiencia que existe ya en España en la realización de centrales nucleares, y teniendo en cuenta los desacuerdos que, en diferentes casos, han surgido ante la aplicación de las normas americanas, las vigentes en Europa y las propias de nuestro país, varios de los Miembros de esta Asociación Técnica Española del Pretensado (A. T. E.P.) han propuesto que se organicen unas Jornadas para contrastar y divulgar las experiencias nacionales, realizar un estudio comparativo de las distintas normas y estudiar y discutir la aplicación de las técnicas del hormigón armado y pretensado en la construcción de centrales nucleares.

La Junta de Gobierno de la A.T.E.P. ha considerado de gran interés dicha propuesta y, de acuerdo con ella, ha decidido celebrar unas Jornadas Nacionales en abril del próximo año 1982.

Para dichas Jornadas han sido seleccionados, en principio, los siguientes temas:

- |  |                               |
|--|-------------------------------|
| – Requisitos básicos del proyecto.     | – Materiales.                 |
| – Proyecto.                            | – Ejecución.                  |
| – Materiales y sistemas de pretensado. | – Recepción de la obra.       |
| – Control de calidad respecto a:       | – Vigilancia y mantenimiento. |
| – Proyecto.                            | – Garantía de calidad.        |

En futuras comunicaciones se continuará informando de cuantos acuerdos se vayan adoptando en relación con estas Jornadas.

Los interesados en el tema, que estimen necesaria alguna aclaración, pueden dirigirse a la Secretaría de la A.T.E.P., Apartado 19.002, Madrid-33, teléfono 202 04 40.