

## Las 27 rectas de una superficie cúbica

por

María Jesús Vázquez Gallo

### INTRODUCCIÓN

Mientras se preparaba para ser abogado, el matemático inglés Arthur Cayley (1821-1895) viajó a Dublín para escuchar una conferencia sobre cuaterniones de Hamilton. Se sentó al lado del también matemático George Salmon (1819-1904) y se inició así una colaboración entre ambos que duraría mucho tiempo. Con otro de sus amigos más cercanos, James Sylvester (1814-1897), abogado en los mismos juzgados de Londres, solía discutir profundas cuestiones matemáticas “entre caso y caso”: durante los 14 años en los que trabajó como abogado, Cayley publicó alrededor de 250 artículos en Matemáticas. ¡No está mal para un no profesional!



Figura 1: A. Cayley

En 1849, Cayley y Salmon publicaron sendos artículos sobre superficies cúbicas. Cayley establecía que cualquier superficie cúbica lisa contiene cierto número de rectas y Salmon probaba que ese número era exactamente<sup>1</sup> 27.

La relevancia de las superficies cúbicas en el siglo XIX queda patente en el siguiente texto de Sylvester:

*“Seguramente, con tan buenas razones como tuvo Arquímedes para hacer grabar en su tumba el cilindro, el cono y la esfera, podrían nuestros distinguidos Cayley y Salmon dejar instrucciones testamentarias para que el icosaheptagrama cúbico fuera grabado en las suyas.”*

Cayley fue uno de los primeros en definir el concepto abstracto de *grupo*, dándose cuenta de que, además de las permutaciones, las matrices (término acuñado por Sylvester en 1850) y los cuaterniones constituyen ejemplos de grupo. Sus trabajos con matrices fueron de gran utilidad en los inicios de la mecánica cuántica. Salmon escribió numerosos trabajos sobre superficies

<sup>1</sup>No 1, ni 2, ni 30, ni infinitas ... ¡tienen que ser 27!

regladas y otros tipos de superficies. De hecho, a él debemos la noción de singularidades normales de una superficie. Son famosos sus cuatro libros de texto sobre la geometría algebraica de curvas y la teoría de invariantes. No en vano, Cayley, Salmon y Sylvester eran conocidos como la “terna invariante”.

La base de una teoría puramente geométrica sobre superficies cúbicas fue establecida por Jacob Steiner (1796-1863) en una corta y sugerente memoria. Steiner no aprendió a leer hasta los 14 años, comenzó a ir a la escuela con 18 y aún así, podemos ver su imagen —con barba ... y ¡sin peluca!— en el cartel del Congreso Internacional de Zurich en 1897 entre la de los mejores matemáticos suizos hasta la fecha, incluyendo, por supuesto, a Euler y a varios Bernoulli<sup>2</sup>. Steiner creía que el mejor medio para concebir construcciones geométricas era la concentración intensa, imaginando las figuras en cuestión; rechazaba el uso del álgebra e incluso de los dibujos y opinaba que el cálculo reemplaza al razonamiento mientras que la geometría lo estimula.

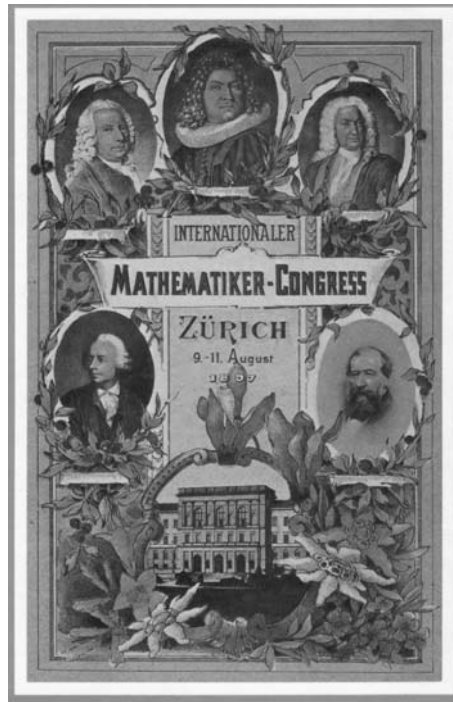


Figura 2: Congreso Internacional de Zurich, 1897

<sup>2</sup>Los tres de arriba: en el centro, Jakob, a su derecha Daniel y a su izquierda Johann.

Hizo grandes contribuciones en Geometría Proyectiva descubriendo, por ejemplo, la *superficie de Steiner* —conocida también como *superficie romana*<sup>3</sup>— que representa el plano proyectivo real como una superficie de  $\mathbb{R}^3$  con autopenetraciones y puntos singulares.

Desde los trabajos de Cayley, Salmon y Steiner, un gran número de matemáticos han estudiado cuestiones relacionadas con la configuración geométrica de las 27 rectas de una superficie cúbica y se han escrito libros enteros dedicados a ella (ver [11], [21]). Como afirmaba Y.U. Manin en la monografía *Cubic Forms* (1972)([17]), “*su elegante simetría embelesa e irrita a la vez*”.

En 1869, Christian Wiener (1826-1896), profesor de geometría descriptiva, consiguió realizar un modelo de superficie cúbica con las 27 rectas visibles en él; Sylvester comentó que este hecho “*hacía merecedor al año 1869 de figurar en los anales de la Ciencia*”. Varios años más tarde, Alfred Clebsch (1833-1872) construyó un modelo de la llamada *superficie diagonal de Clebsch* con 27 rectas reales en ella.

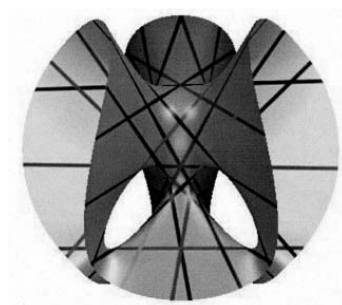


Figura 4: Superficie diagonal de Clebsch

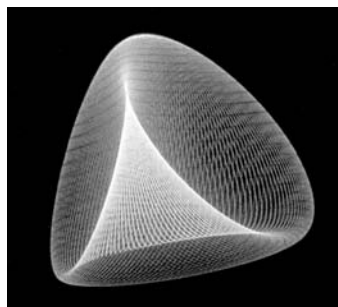


Figura 3: Superficie romana

Si el lector se siente atraído por las ilustraciones de esta página, ya tiene algo en común con los geómetras. En palabras de Clebsch:

*“Es el deleite producido al contemplar ciertas figuras, en el más alto sentido de la palabra, lo que distingue a un geómetra.”*

El enfoque algebraico de los trabajos de Cayley, Sylvester y Salmon condujo a Clebsch a una nueva y brillante interpretación de la Teoría de Funciones de Riemann. Las investigaciones de Clebsch inspiraron a Felix Klein (1849-1925) varios resultados acerca de superficies cúbicas. La visión unificada de

Klein, conocida como el *Programa Erlangen*, según la cual la geometría es el estudio de las propiedades de un espacio invariantes bajo un grupo dado de transformaciones, influyó profundamente en el pensamiento matemático y es el punto de vista actual en este campo.

<sup>3</sup>Cuando Steiner visitó Roma en 1844, descubrió algunas propiedades geométricas de la superficie que había construido. Parece que nunca escribió ningún artículo sobre esta superficie a la que él mismo bautizó como superficie romana.

La configuración de las 27 rectas no sólo tiene interés en sí misma, sino que está estrechamente relacionada con otras configuraciones geométricas destacables. La proyección desde un punto de una superficie cúbica sobre un plano paralelo al plano tangente a la superficie en dicho punto es una curva cuártica plana y ¡toda curva cuártica plana se puede obtener por este procedimiento! ([11]). En 1877, Luigi Cremona (1830-1903) fue el primero en demostrar que la también famosa configuración del *Teorema de Pascal*, a partir de la que B. Pascal (1623-1662) dedujo 400 proposiciones sobre cónicas, se puede derivar de la de las 21 rectas que viven en una superficie cúbica con un punto singular, proyectando desde dicho punto.

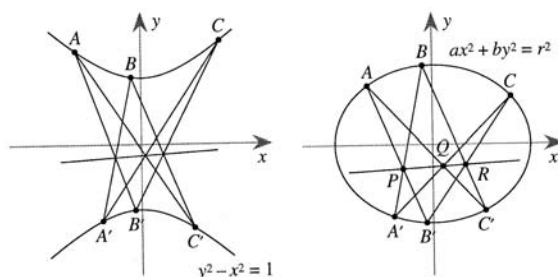


Figura 5: Configuraciones del Teorema de Pascal

El problema de las 27 rectas resulta extremadamente interesante desde el punto de vista de la Teoría de Grupos. En 1869, C. Jordan (1838-1922) demostró que el grupo que aparece en el llamado problema de la trisección de funciones hiperelípticas de primer orden es isomorfo al *grupo de Galois* de la ecuación de grado 27 de la que se derivan las 27 rectas. Tras este resultado, muchos autores han trabajado sobre dicho grupo. Por otro lado, el grupo de automorfismos de la configuración, es decir, el de las permutaciones de 27 elementos que preservan las relaciones entre ellos análogas a las relaciones de incidencia entre las rectas, es isomorfo al *grupo de Weyl*  $E_6$  ([10]). La relación entre este grupo y el de automorfismos de la propia superficie cúbica ha sido objeto de diversos trabajos, varios de ellos muy recientes ([21], [18], [22]).

Hablaremos de algunas de estas cuestiones más adelante en esta exposición, en la que, tras considerar la cuestión de determinar *cuántas rectas contiene una superficie cúbica* como un problema típico de *Geometría Algebraica Enumerativa*; expondremos una demostración —la más elemental en nuestra opinión— de que son efectivamente 27 y, finalmente y de forma breve, relacionaremos este resultado con un tema más general, el estudio de las llamadas *variedades de Fano*, que parametrizan espacios lineales contenidos en una variedad.

## 1. GEOMETRÍA ALGEBRAICA ENUMERATIVA

Trabajaremos en el marco general de la **Geometría Algebraica**, cuyo objeto de estudio son las *variedades (algebraicas)*, es decir, los lugares dados por ceros de polinomios.

**Ejemplo:** Escribimos el polinomio en 2 variables  $f(x, y) = y^2 - (x^2 + x^3)$  y consideramos su lugar de ceros  $C_1 = \{(x, y) : f(x, y) = 0\}$ . Al dibujarlo, obtenemos la *curva* de la figura.

Sobre esta variedad  $C_1$  podríamos preguntarnos: ¿qué puntos de  $C_1$  tienen coordenadas racionales? (una cuestión cercana a la *teoría de números*); ¿qué tipo de *espacio topológico* es  $C_1$  cerca del punto  $P$ ? ¿cuál es el género de la curva  $C_1$ ?, etc.

Lo particular de la Geometría Algebraica es que utiliza sólo funciones polinómicas y cocientes de ellas (funciones racionales) frente a, por ejemplo, la Topología, que considera funciones continuas, la Geometría Diferencial que trabaja con funciones suaves ( $\mathcal{C}^\infty$ ) o la Geometría Analítica, que estudia series de potencias convergentes. Cuantas *menos funciones* se tienen disponibles *más restrictiva* es la geometría resultante.

Al utilizar polinomios, la herramienta natural de la Geometría Algebraica no es el Análisis, sino el Álgebra Conmutativa, que estudia los anillos de polinomios, módulos sobre anillos, ideales primos, etc. Intentaremos evitar aquí cualquier cuestión demasiado técnica a este respecto.

Una particularidad de la Geometría Algebraica es que, cambiando los coeficientes de los polinomios, nos permite trabajar *sobre cualquier cuerpo*, no sólo  $\mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ , sino también cuerpos con característica distinta de 0 o cuerpos no algebraicamente cerrados. Incluso se puede trabajar sobre anillos, usando la teoría más general de *esquemas*.

La **Geometría Enumerativa**, fundada principalmente por H. Schubert (1848-1911), considera problemas de Geometría Algebraica con un número finito de soluciones: se trata, habitualmente, de encontrar el número de figuras geométricas de una familia cumpliendo una serie de condiciones dadas. En nuestro caso, la familia es la de rectas en el espacio de dimensión tres y la condición consiste en que la recta esté contenida en una superficie cúbica dada. Un antecedente de este tipo de cuestiones es el famoso *problema de Apolonio* en el siglo III a.C.: ¿recuerda el lector cuántas circunferencias son tangentes a tres circunferencias dadas en posición general<sup>4</sup>?

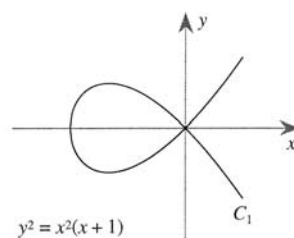


Figura 6: Cúbica plana

<sup>4</sup>En Geometría Algebraica, el término “general” se utiliza en el sentido de “no especial”. Por ejemplo, en este caso significa que las circunferencias no tienen características especiales

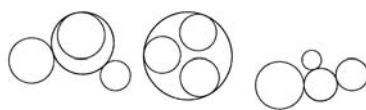


Figura 7: Ejemplos del problema de Apolonio

La pregunta análoga para cónicas, planteada por Steiner en 1848, tuvo una respuesta incorrecta durante casi veinte años<sup>5</sup> (ver [7]).

Utilizando métodos para contar parámetros, no demasiado rigurosos, Schubert estudió, entre otros temas, la dimensión de las llamadas *variedades de Schubert*, constituidas por espacios lineales (rectas, planos, etc.) que poseen intersección de dimensión dada con un sistema “anidado”<sup>6</sup> de espacios lineales fijado (conocido en la actualidad como *variedad bandera*). El décimoquinto problema de Hilbert consiste precisamente en justificar adecuadamente muchos de los resultados obtenidos por Schubert.

Las superficies cúbicas que manejaremos son superficies que viven en un espacio proyectivo de dimensión 3, pero ¿qué es la **Geometría Projectiva**?

Frente a la expuesta en *Los Elementos* de Euclides, es una geometría sin distancias, ni ángulos, ni paralelismo. Como veremos en un momento, en ella, dos rectas coplanares se cortan siempre en un punto de forma dual a cómo dos puntos siempre determinan una recta. Este *principio de dualidad* que, de hecho, es mucho más general, hace que esta geometría sea más simétrica que la euclídea y le confiere parte de su belleza.

La Geometría Projectiva se desarrolló fundamentalmente en el siglo XIX, pero sus antecedentes se remontan al siglo III con Pappus de Alejandría y los primeros teoremas proyectivos. Durante el Renacimiento, los problemas de perspectiva de los pintores al tratar de representar en un lienzo plano una escena del espacio en tres dimensiones, conducen al desarrollo gradual de ciertas nociones proyectivas: lo que pinta el artista corresponde a la intersección del plano del lienzo con los rayos de luz que van del objeto al ojo del pintor. L. B.

---

dentro del espacio de todas las circunferencias, es decir, no son tangentes entre sí, no están contenidas unas en otras, etc. La respuesta es . . . ocho.

<sup>5</sup>Hasta que, en 1864, M. Chasles (1793-1880) calculó el número correcto, 3264, Steiner y otros creían que había 7776 cónicas planas tangentes a cinco cónicas dadas en posición general. Básicamente, el error se debía a que las rectas dobles se contaban como tangentes a cualquier cónica, ya que la intersección de una recta doble y una cónica consiste en un par de puntos. De hecho, Chasles no llegó a demostrar que el número fuera 3264, pero aportó unos 200 ejemplos de este hecho. La demostración rigurosa se debe a S. L. Kleiman, en 1974.

<sup>6</sup>Cada espacio está contenido en el siguiente del sistema.

Alberti, Piero della Francesca, Leonardo da Vinci y Albrecht Dürer escribieron tratados sobre el aspecto matemático y artístico de este asunto<sup>7</sup>.

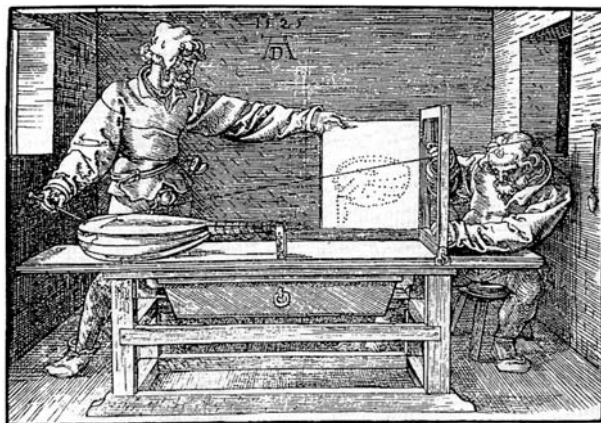


Figura 8: Grabado de A. Dürero

Así, la geometría proyectiva trata de explicar cómo nuestros ojos ven el mundo, estudiando las propiedades que permanecen invariantes por proyección. En los trabajos de Kepler (1571-1630), Newton (1642-1727) y Leibniz (1646-1716) aparecen conceptos proyectivos, pero fueron principalmente Desargues (1591-1661), que era arquitecto, y Pascal los que reinventaron este tipo de geometría, a partir de la geometría descriptiva y en conexión con la perspectiva. Se dice que el estilo matemático de Desargues era poco claro, difícil de entender. Inventaba nuevos términos para conceptos ya conocidos (de los aproximadamente 70 que introdujo, hoy en día sólo pervive el de *involución*) y escribía para su selecto círculo de amigos matemáticos. Tuvo muchos enemigos y se cuenta que por todo París podían verse carteles que ofrecían una recompensa a cualquiera que pudiera probar que los trabajos de Desargues no eran correctos.

Ya en el siglo XIX, la exposición sistemática de los conceptos básicos de geometría proyectiva se debe a J. V. Poncelet (1788-1867), un ingeniero militar francés que tomó parte en la campaña rusa de Napoleón y estuvo prisionero en Saratov durante dos años. En este tiempo, inspirado por las enseñanzas de su maestro G. Monge (1746-1818), comenzó a desarrollar su "*Traité des propriétés projectives des figures*", trabajo del que se deriva, de hecho, el término *geometría proyectiva*.

<sup>7</sup>Para profundizar sobre esta cuestión, se puede consultar el libro de Charles Bouleau "*La geometría secreta de los pintores*", Akal (1996).

El espacio proyectivo  $\mathbb{P}_K^n$ , con  $K$  un cuerpo y  $n$  un número natural, puede verse como el conjunto de rectas del espacio vectorial  $K^{n+1}$  que pasan por el origen. Por ejemplo, si  $K = \mathbb{R}$  y  $n = 1$ , la *recta proyectiva*  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  corresponde a la colección de rectas de  $\mathbb{R}^2$  por el origen y, por tanto, se identifica con el conjunto cociente  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} / \sim$ , siendo  $\sim$  la relación de equivalencia dada por  $(X, Y) \sim (\lambda X, \lambda Y)$ , para todo  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ . Así, la clase de un  $(X, Y)$  con  $X \neq 0$  tiene un único representante con  $X = 1$ , el punto  $(1, \frac{Y}{X})$  de  $\mathbb{R}^2$  (obsérvese que  $\frac{Y}{X}$  es la pendiente de la recta a la que pertenece el punto  $(X, Y)$ ). La recta  $X = 0$ , que no corta a  $X = 1$ , corresponde al *punto del infinito*,  $P_{\infty}$ , de la recta  $X = 1$  (el eje vertical tiene pendiente “infinita”).

Es decir, la recta proyectiva se ve como la unión de la recta afín con un punto en el infinito,  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 = \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1 \cup P_{\infty}$ .

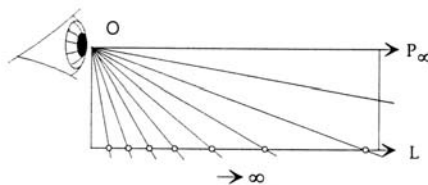


Figura 9: Construcción de la recta proyectiva

Cuando observamos una recta afín  $L$  desde un punto  $O$  externo a ella, la recta por  $O$  paralela a  $L$ , es decir  $P_{\infty}$ , parece estar en el infinito por ser el límite de las rectas que unen a  $O$  con puntos  $P$  de la recta  $L$ , cuando  $P$  se aleja infinitamente de  $O$ .

Un punto de la recta proyectiva real se describe con una cantidad infinita de *coordenadas homogéneas*, que son parejas de números reales  $X$  e  $Y$ , no nulos a la vez, denotadas por  $[X, Y]$  y tales que parejas proporcionales describen el mismo punto, o sea,

$$[X, Y] = [\lambda X, \lambda Y], \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{R} - \{0\},$$

reflejando el hecho de que todos los puntos de la recta por el origen de  $\mathbb{R}^2$  con pendiente  $\frac{Y}{X}$ , corresponden al mismo punto de la recta proyectiva. Lo dicho para  $\mathbb{R}^2$  puede repetirse con cualquier espacio vectorial  $K^{n+1}$  para obtener  $\mathbb{P}_K^n$ , cuyos puntos se describen con colecciones de coordenadas homogéneas  $[X_0, \dots, X_n]$  no todas nulas y de forma que dos colecciones se consideran iguales cuando son proporcionales.

Cada  $\mathbb{P}_K^n$  se puede cubrir por una unión de  $(n+1)$  espacios afines  $\mathbb{A}_K^n$  dados por  $X_i \neq 0$ . Por ejemplo,  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ , con puntos de coordenadas  $[X, Y]$ , se cubre con dos copias de la recta afín  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$ . En una de ellas,  $X \neq 0$  y los puntos tienen



coordenadas homogéneas  $[1, \frac{Y}{X}]$ ; en la otra, ocurre lo análogo para  $Y \neq 0$ ; y las dos se pegan a través del isomorfismo

$$\frac{Y}{X} \longmapsto \frac{X}{Y}.$$

El *plano proyectivo* se ve como el plano afín más una recta del infinito; es decir, se añade al plano afín un punto en el infinito por cada haz de rectas paralelas.

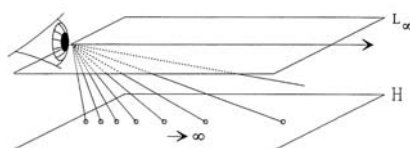


Figura 10: Construcción del plano proyectivo

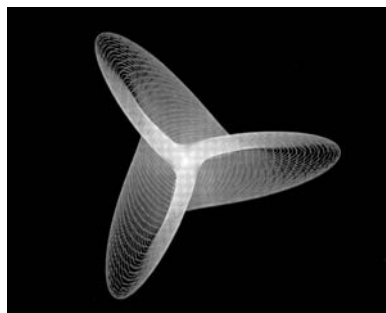


Figura 11: Superficie de Boy

Históricamente, Desargues y Kepler en el siglo XVII y de manera independiente, fueron los primeros en construir el plano proyectivo real  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ . Si queremos ver  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  como una superficie de  $\mathbb{R}^3$  tenemos que contentarnos con una que no sea lisa porque, si lo fuera, al ser cerrada, estaría obligada a ser orientable y Klein demostró que el plano proyectivo real no lo es.

Además de la superficie de Steiner, mencionada en la introducción, otra presentación de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  como una superficie de  $\mathbb{R}^3$  es la *superficie de Boy*, encontrada a principios del siglo XX por el matemático del

mismo nombre, discípulo de Hilbert, en contra de la intuición de su maestro, que consideraba imposible dar una inmersión lisa<sup>8</sup> del plano proyectivo real en  $\mathbb{R}^3$ .

**Observación 1:** Dos rectas del plano proyectivo *siempre* se cortan (como sucede cuando uno mira un par de vías de tren hacia el horizonte), no hay excepciones: no existen rectas paralelas. En general, en cualquier espacio proyectivo dos subespacios de dimensión complementaria siempre se cortan

<sup>8</sup>Por inmersión lisa se entiende una inmersión  $C^\infty$ , es decir, una inmersión topológica  $C^\infty$  de un espacio en otro —en nuestro caso, de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  en  $\mathbb{R}^3$ — con rango constante, igual a la dimensión del espacio inicial. La imagen de esta aplicación puede tener puntos de autointersección, cosa que no ocurre con una superficie lisa de  $\mathbb{R}^3$ .

y esto hace del espacio proyectivo un buen lugar para trabajar en *teoría de intersección*.

**Observación 2:** No todo polinomio  $F \in K[X_0, X_1, \dots, X_n]$  define una función en el espacio proyectivo  $\mathbb{P}_K^n$ . Por ejemplo, si  $n = 2$ , las colecciones  $[3, 4, 7]$  y  $[9, 12, 21]$  describen el mismo punto de  $\mathbb{P}^2$  y sin embargo, en general,  $F(3, 4, 7) \neq F(9, 12, 21)$ ; pero si  $F$  es un polinomio homogéneo de grado  $d$ , entonces se cumple  $F(\lambda X_0, \lambda X_1, \dots, \lambda X_n) = \lambda^d F(X_0, X_1, \dots, X_n)$ , así que su lugar de ceros está bien definido en  $\mathbb{P}^n$  y constituye una hipersuperficie proyectiva.

En lo que sigue, una *variedad proyectiva* en un espacio proyectivo será el lugar de ceros de una colección de polinomios homogéneos, que se puede cubrir por una unión de *variedades afines* (ceros de polinomios no homogéneos), pegadas adecuadamente —de manera análoga a cómo la recta proyectiva se cubre con dos copias de la recta afín—. Supondremos, por simplicidad, que el cuerpo base es el de los complejos, salvo mención explícita de lo contrario.

Concretado el marco, vamos a precisar los términos del problema:

Por *superficie cúbica*, digamos  $S$ , entenderemos el lugar de ceros en el espacio proyectivo<sup>9</sup>  $\mathbb{P}^3$  de un polinomio  $F$  homogéneo de grado 3 en 4 variables, es decir,

$$S = \{[X, Y, Z, T] : F(X, Y, Z, T) = 0\}.$$

Es una cuenta sencilla calcular el número de coeficientes que tiene un tal polinomio<sup>10</sup> (o *forma cúbica*), exactamente  $\binom{6}{3} = 20$ , así que  $F(X, Y, Z, T)$  se escribe como

$$F(X, Y, Z, T) = a_0X^3 + a_1X^2Y + a_2X^2Z + a_3X^2T + \dots + a_{18}Z^2T + a_{19}T^3.$$

En otras palabras,  $S$  es una *superficie proyectiva de  $\mathbb{P}^3$*  de grado 3 (el grado del polinomio que la define).

Supondremos en adelante que nuestras superficies son, además, *irreducibles*<sup>11</sup> y *no singulares*.

Básicamente, un punto  $P$  de una variedad  $V$  es no singular cuando  $V$  es *suave* en  $P$ , es decir, cuando el *espacio tangente* a  $V$  en  $P$ ,  $T_PV$ , está bien definido.

<sup>9</sup>La construcción de un espacio proyectivo de dimensión 3, a partir de un espacio vectorial de dimensión 4, es análoga a la descrita para la recta y el plano proyectivos pero ... ¡cualquiera se atreve a dibujarla!

<sup>10</sup>El lector puede disfrutar comprobando que, en general, el número de coeficientes de un polinomio homogéneo de grado  $d$  en  $n + 1$  variables es  $\binom{n+d}{d}$ .

<sup>11</sup>Una variedad  $X$  es irreducible si, para cada pareja de subvariedades  $Y, Z \subset X$  tales que  $Y \cup Z = X$ , o bien  $Y = X$  o bien  $Z = X$ . Así, una superficie irreducible no se descompone como unión de planos, o de otra superficie más un plano, etc.

Si  $V$  es afín, esto es, está dada por la anulación de un polinomio no homogéneo  $f(x_1, \dots, x_n)$ , y  $P = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  es un punto de  $V$ , entonces el espacio tangente a  $V$  en  $P$ ,  $T_P V$ , está definido por

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) \cdot (x_i - a_i) = 0.$$

Es decir, el que  $P$  sea no singular equivale a que no todas las derivadas parciales de  $f$  se anulen a la vez en  $P$ . (Si  $V$  está dada como el lugar de ceros de más de un polinomio, la definición se generaliza adecuadamente considerando la *matriz jacobiana* de  $f$ ).

Si  $V$  es proyectiva, el que  $P$  sea no singular es equivalente a que  $P$  sea no singular en un espacio afín  $V_0 \subset V$  que lo contenga y no singular en la parte del infinito correspondiente a  $V_0$  (se demuestra que  $T_P V$  no depende de la elección de  $V_0$  usando una definición intrínseca de singularidad en términos de anillos locales (ver [10], Thm. 5.1)).

**Ejemplos:** La curva cúbica plana del comienzo de esta sección, dada por

$$F(X, Y, Z) = Y^2 Z - X^2 Z - X^3 = 0,$$

tiene como único punto singular el  $[0, 0, 1]$ : haciendo  $Z = 1$ , las derivadas parciales de  $Y^2 - X^2 - X^3$  sólo se anulan simultáneamente en  $(0, 0)$ , y en la recta del infinito del plano  $Z = 1$ , cuya ecuación es  $Z = 0$ , no hay singularidades. Sin embargo, la cónica plana dada por  $G(X, Y, Z) = \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - Z^2 = 0$  no tiene puntos singulares.

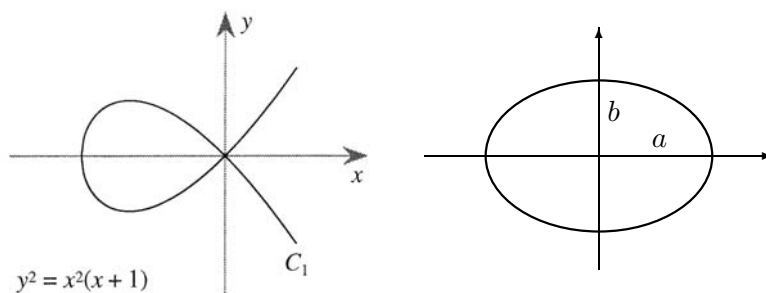


Figura 12: Curva cúbica singular y cónica no singular

## 2. LAS 27 RECTAS DE UNA SUPERFICIE CÚBICA

Volviendo a las superficies cúbicas, emprendemos ya la búsqueda de sus 27 rectas. Queremos demostrar el siguiente resultado:

**Teorema 1** *Toda superficie cúbica no singular de  $\mathbb{P}^3$  contiene 27 rectas.*

Hay varias formas de probar esto<sup>12</sup>, por ejemplo, identificando la superficie con la explosión del plano proyectivo en 6 puntos (ver [10]) o usando resultados sobre clases de Chern de fibrados vectoriales (ver [6]). Aquí elegiremos la más elemental, la que —según nuestro criterio— utiliza menos maquinaria (ver [20]).

Sea  $S$  una superficie cúbica como la del enunciado del teorema 1. Dividiremos la prueba de este teorema en cuatro etapas, demostrando que:

- Toda  $S$  contiene al menos una recta, digamos  $L$  (ver proposición 1).
- Dada  $L \subset S$ , existen *exactamente* otras diez rectas (distintas entre sí y distintas de  $L$ ) de  $S$ <sup>13</sup>, que cortan a  $L$ , distribuidas en cinco parejas, digamos  $(L_i, L'_i)$ , con  $i = 1, \dots, 5$ , tales que:
  - Cada pareja es coplanar con  $L$ .
  - Parejas con  $i \neq j$  son disjuntas, es decir, no intersecan (ver proposición 2).

Observamos que esto implica en particular que toda cúbica  $S$  contiene al menos dos rectas disjuntas.

---

<sup>12</sup>La prueba original de Cayley y Salmon consistía en demostrar que la superficie cúbica general contiene rectas -hecho debido a Cayley- y que el número de tales rectas es 27 -probado por Salmon-.

Para comprobar lo primero, Cayley argumentaba que el número de condiciones independientes que debe satisfacer una recta general para estar contenida en una superficie cúbica general es cuatro y entonces, como la familia de rectas en el espacio tridimensional depende de cuatro parámetros, cada superficie debe contener un número finito de rectas.

El que el número de condiciones que debe cumplir la recta sea cuatro, se obtenía sustituyendo su ecuación en la de la superficie y pidiendo que el resultado -un polinomio de grado tres en una variable- se anulase idénticamente.

Para encontrar las 27 rectas, Salmon utilizaba apropiadamente el hecho de que el número de planos tangentes dobles a una superficie de grado  $d$  que pasan por un punto externo a ella es

$$\frac{d}{2}(d-1)(d-2)(d^3 - d^2 + d - 12),$$

algo que resulta de la teoría general de superficies.

<sup>13</sup>En lo que sigue, por recta de una variedad proyectiva  $V$  entenderemos una recta contenida en  $V$ .

- Dadas  $L, M \subset S$ , dos rectas de  $S$  disjuntas, existen *exactamente* otras quince rectas de  $S$  con una configuración particular (ver proposición 3).
- De la configuración de diecisiete rectas de  $S$  obtenida en la etapa anterior se deduce que existen *exactamente* otras diez rectas de  $S$  que poseen una configuración especial (ver proposición 4).

Cada vez que se dice *exactamente*, significa ni más rectas ni menos<sup>14</sup>, así que, como consecuencia de las cuatro etapas anteriores, tendremos que  $S$  contiene  $2 + 15 + 10 = 27$  rectas.

Empezamos a buscar rectas de  $S$ .

**Proposición 1** *Toda superficie cúbica  $S$  contiene al menos una recta.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el conjunto formado por las rectas de  $\mathbb{P}^3$ ,

$$G := \{L / L \text{ recta de } \mathbb{P}^3\}.$$

Como la *dimensión* de  $\mathbb{P}^3$  es 3 y cada recta queda determinada dando 2 de sus puntos,  $G$  tiene dimensión  $3 + 3 - 2 = 4$  (se resta  $2 = 1 + 1$  porque al variar cada uno de los puntos en la recta, ésta no cambia). Podemos pensar en  $G$ , la llamada *grassmanniana*<sup>15</sup>, como un *espacio que parametriza* las rectas de  $\mathbb{P}^3$ , es decir, tal que sus puntos están en biyección con el conjunto de las rectas de  $\mathbb{P}^3$ , de forma que cuando un punto de  $G$  varía de manera continua, los coeficientes de las ecuaciones que definen la recta correspondiente en  $\mathbb{P}^3$  varían también de forma continua. A  $G$  se le puede dotar de estructura de variedad proyectiva (que, de hecho, es una hipersuperficie cuádrlica de  $\mathbb{P}^5$  cuya ecuación es conocida como *relación de Plücker* (ver [9] y [19], Append. II)).

Al igual que se ha hecho con las rectas, si consideramos la familia de las superficies cúbicas de  $\mathbb{P}^3$ , tendremos un espacio



Figura 13: H. Grassmann

<sup>14</sup>Ya iba siendo hora de ponerse un poco serios...

<sup>15</sup>El nombre de grassmanniana viene de H. Grassmann (1809-1877), recordado principalmente por su desarrollo de un cálculo general para vectores. De hecho, inventó lo que ahora se conoce como Álgebra Exterior, ampliamente utilizada en Geometría Diferencial. A pesar de ello, su trabajo no fue apreciado por los matemáticos de la época, quizá debido a sus poco claros métodos de presentación. Su actividad abarcó desde las matemáticas hasta la lingüística, pasando por la física, la botánica y la edición de un periódico. A los 53 años, decepcionado por la falta de interés en sus ideas matemáticas, se refugió en el estudio del sánscrito y escribió un diccionario que, aún hoy, se sigue utilizando.

proyectivo de dimensión 19 (ya que cada superficie está dada por la anulación de un polinomio homogéneo  $F$  con 20 coeficientes, determinados salvo multiplicación por escalares).

Nos fijamos ahora en la subvariedad, digamos  $I$ , del producto cartesiano  $G \times \mathbb{P}^{19}$  formada por las parejas que parametrizan una recta  $L$  y una superficie cúbica  $S$  tales que  $L \subset S$ . Desde la *variedad de incidencia*<sup>16</sup>  $I$  se tienen proyecciones  $p_1, p_2$ , a los dos factores del producto anterior.

$$\begin{array}{ccc} I & \subset & G \times \mathbb{P}^{19} \\ & \swarrow p_1 & \searrow p_2 \\ & G & \mathbb{P}^{19} \end{array}$$

Lo que vamos a ver es que  $p_2$  es sobreyectiva, con lo cual quedará demostrado que toda superficie cúbica de  $\mathbb{P}^3$  (singular o no en este caso) contiene al menos una recta.

El hecho de que una recta dada  $L$  esté contenida en  $S$  impone cuatro condiciones en el  $\mathbb{P}^{19}$  de superficies cúbicas: si, salvo cambio de coordenadas, las ecuaciones de  $L$  son  $Z = T = 0$ , como la de  $S$  es  $F = 0$  entonces  $L \subset S$  es equivalente a que la restricción de  $F$  a  $L$  sea idénticamente cero; pero  $F|_L$  es un polinomio cúbico homogéneo en dos variables  $(X, Y)$ , y, por tanto, tiene cuatro coeficientes que deben ser nulos. De esta forma, la *fibra* de  $p_1$  en cada  $L \in G$ , es decir,  $p_1^{-1}(L)$ , el espacio de superficies cúbicas que contienen a cada recta  $L$ , tiene dimensión 15 (= 19 - 4). Entonces  $\dim(I) = 4 + 15 = 19$  y la proyección  $p_2$  resulta ser una aplicación entre dos variedades de la misma dimensión.

Si  $\dim(p_2(I)) < 19$ , entonces la dimensión de la fibra de  $p_2$  en los puntos de la imagen  $p_2(I)$  debería ser al menos 1 y así, cada superficie que contuviera rectas, ¡debería contener infinitas! Esto no es verdad porque, con otras técnicas, se puede construir al menos una superficie cúbica con un número finito de rectas (ver [3], Lema IV.14). Se cumple así que  $\dim(p_2(I)) = 19$  y de ello se deduce (usando que la imagen de una variedad proyectiva por un morfismo es cerrada) que  $p_2(I) = \mathbb{P}^{19}$ , como queríamos demostrar.

**Observación:** Este tipo de construcción, en la que a un conjunto de objetos geométricos de tipo dado se le dota de una estructura del mismo tipo y de este modo se tiene un espacio de parámetros para el primer conjunto, es típica de la Geometría Algebraica (ver [9]) y no suele darse en otras geometrías (por ejemplo, el conjunto de las subvariedades de una variedad en Geometría Diferencial no tiene por qué tener mantener la estructura de variedad diferen-

<sup>16</sup>En general, las variedades de incidencia describen parejas de variedades en las que una de ellas está contenida en la otra. Por ejemplo, parejas de punto y recta en las que el punto pertenece a la recta, o nuestro caso de recta y superficie cúbica con la recta contenida en la superficie.

ciable). Quizá el primero en considerar una idea de este estilo fue J. Plücker (1801-1868), responsable, asimismo, de la introducción con toda generalidad de las coordenadas homogéneas en el espacio proyectivo.

Ya tenemos una recta ... de las 27 que buscábamos. Para probar lo siguiente, hace falta un resultado auxiliar, que es *consecuencia de la no singularidad de la superficie*.

**Lema 1** *Por cada punto  $P \in S$  pasan como mucho tres rectas contenidas en  $S$ , que además son coplanares y no están repetidas.*

DEMOSTRACIÓN. Si  $P \in L \subset S$  entonces  $L = T_P L \subset T_P S$ . Es decir,  $L$  está forzada a vivir en el plano tangente  $T_P S$  (que está bien definido en cualquier punto, por ser  $S$  no singular) y la intersección  $S \cap T_P S$ , que será una curva cúbica<sup>17</sup> plana pasando por  $P$ , consiste como mucho en tres rectas (si fueran más tendría grado mayor que 3) que automáticamente son coplanares.

El hecho de que no haya rectas repetidas es consecuencia de la no singularidad de  $S$ . Supongamos que hubiera una recta repetida: si, como arriba, salvo cambio de coordenadas, suponemos que  $L$  está dada por  $Z = T = 0$  y que  $T_P S$  es el plano definido por  $T = 0$ , entonces tenemos las siguientes equivalencias,

$$\begin{aligned} &L \text{ recta múltiple de } S \cap T_P S \\ &\quad \Updownarrow \\ &F|_{T_P S} \text{ tiene un cero doble en } Z = 0 \\ &\quad \Updownarrow \\ &F(X, Y, Z, T) = Z^2 A(X, Y, Z, T) + TB(X, Y, Z, T) \end{aligned}$$

con  $A$  una forma lineal y  $B$  una forma cuadrática. Pero entonces  $S$ , superficie de ecuación  $F = 0$ , sería singular en los puntos para los que  $Z = T = B = 0$ , que constituyen un conjunto no vacío (al ser la intersección en  $\mathbb{P}^3$  de una superficie, la dada por  $B = 0$ , y una recta) y esto contradice la no singularidad de  $S$ .

Completamos ahora la segunda etapa de la demostración:

**Proposición 2** *Dada una recta  $L \subset S$ , existen exactamente otras diez rectas distintas de  $S$ , que cortan a  $L$  y están distribuidas en cinco parejas  $(L_i, L'_i)$ , con  $i = 1, \dots, 5$ , de manera que:*

- a)  $L, L_i, L'_i$  son coplanares para cada  $i = 1, \dots, 5$ .
- b)  $(L_i \cup L'_i) \cap (L_j \cup L'_j) = \emptyset$  si  $i \neq j$ .

<sup>17</sup>En un espacio proyectivo, la intersección de una variedad de grado  $m$  y otra de grado  $n$  tiene grado a lo más  $m \cdot n$  por el Teorema de Bézout ([9]).

DEMOSTRACIÓN. Consideramos un plano  $\Pi$  que contenga a  $L$  (observemos que el espacio de planos cumpliendo esta condición tiene dimensión 1). Como antes, la intersección  $\Pi \cap S$  debe ser una curva cúbica plana y es claro que  $L \subset \Pi \cap S$ , luego dicha curva es la unión de la recta  $L$  y una curva plana de grado 2. Esta cónica puede ser irreducible o degenerar en una pareja de rectas que se cortan (para cónicas, ser irreducible equivale a ser no singular y esto, a su vez, es lo mismo que ser no degenerada).

Lo que queremos comprobar es que, entre todos los posibles planos de la discusión anterior, hay exactamente 5, digamos  $\Pi_i$ , distintos, que, al cortar con  $S$ , producen una cónica degenerada (la pareja de rectas  $L_i \cup L'_i$ ).

Si demostramos esto, el apartado **b)** es automático. Veámoslo: si no ocurriera **b)**, entonces alguna recta de  $\Pi_i \cup S$ , por ejemplo  $L_i$ , cortaría a una recta de  $\Pi_j \cup S$ , con  $i \neq j$ , digamos  $L_j$ , y como consecuencia de ello, el punto de intersección de las dos,  $P = L_i \cap L_j$  pertenecería a  $\Pi_i \cap \Pi_j = L$ , con lo cual, por este punto  $P$  pasarían tres rectas de  $S$  no coplanares, en contradicción con el lema 1.

Para probar lo que queremos, supongamos como siempre que, salvo cambio de coordenadas,  $Z = T = 0$  son las ecuaciones de  $L$  y, de este modo, un plano  $\Pi$  pasando por  $L$  tiene una ecuación de la forma  $\mu Z + \lambda T = 0$ , con  $(\mu, \lambda) \neq (0, 0)$ . Si, por ejemplo,  $\mu \neq 0$ , dividiendo por  $\mu$ , podemos suponer que la ecuación de  $\Pi$  es  $Z = \lambda T$  (renombrando  $\frac{\lambda}{\mu}$  como  $\lambda$ ). Así

$$F|_{\Pi} = T \cdot Q(X, Y, T)$$

donde  $T$  corresponde a la recta  $L$  y  $Q$  a la cónica (observamos que si  $T$  no sale como factor común,  $L \subsetneq S$ ). Si se tiene  $\lambda \neq 0$ , el argumento es análogo. Ahora, agrupando términos, escribimos  $F$  como:

$$F = AX^2 + 2BXY + CY^2 + 2DX + 2EY + H$$

con  $A, B, C$ , formas lineales,  $D, E$ , formas cuadráticas y  $H$  forma cúbica, todas ellas en  $\mathbb{C}[Z, T]$ . Entonces, al restringir al plano  $\Pi$  y usar la homogeneidad de  $A, B, \dots, E, H$ , la ecuación

$$Q(X, Y, T) = A(\lambda, 1)X^2 + 2B(\lambda, 1)XY + \dots + 2E(\lambda, 1)TY + HT^2 = 0$$

define una cónica plana que varía con  $\lambda$  (o sea, con el plano  $\Pi$ ). Por tanto, el plano  $\Pi$  produce una cónica degenerada si y sólo si la matriz simétrica asociada a  $Q$  no tiene rango máximo y esto es equivalente a la condición

$$\Delta(Z, T) = \det \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & H \end{pmatrix} = 0.$$



Pero  $\Delta$  es un polinomio homogéneo de grado 5 en dos variables y, por tanto, el número<sup>18</sup> de sus raíces contadas con multiplicidad es 5 (ver [20], 1.8). Para acabar, faltaría verificar que  $\Delta$  no tiene raíces múltiples, lo cual vuelve a ser una consecuencia de la no singularidad de  $S$ , como en el lema 1.

En la tercera fase de la demostración necesitaremos otro resultado auxiliar:

**Lema 2** *Dada  $L \subset S$  y las cinco parejas de rectas de  $S$  que la cortan, cualquier otra recta de  $S$  corta a una recta de cada pareja y no a la otra.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $N \subset S$  una recta distinta de  $L$  y de las cinco parejas de rectas de  $S$  que cortan a  $L$  (las que denominábamos  $L_i, L'_i \subset \Pi_i$ ). Una recta y un plano tienen dimensión complementaria en  $\mathbb{P}^3$ , así que o bien  $N \subset \Pi_i$ , o bien  $N$  corta a  $\Pi_i$  en un único punto  $P \in S$ .

Si ocurre lo primero, entonces  $\Pi_i \cap S$  consiste en cuatro rectas distintas, lo cual contradice el teorema de Bézout, mencionado en la nota al pie de la demostración del lema 1.

Si ocurre lo segundo, como  $\Pi_i \cap S = L \cup L_i \cup L'_i$ , el punto  $P$  está en alguna de estas tres rectas.  $P$  no está en  $L$  porque, en ese caso,  $N$  debería ser  $L_i$  o  $L'_i$  para algún  $i$  y esto contradice el enunciado del lema. Entonces  $N$  corta a  $L_i$  o a  $L'_i$  en  $P$ . Si cortara a las dos, debería hacerlo en su punto de intersección  $P = L_i \cap L'_i$  (si no,  $P$  no sería único). Pero entonces, la existencia de  $P$  contradice el lema 1 porque por dicho punto pasan tres rectas de  $S$  no coplanares:  $N, L_i, L'_i$ . Luego  $N$  corta a una recta de cada pareja pero no a la otra.

Recordando que la proposición 2 nos garantiza la existencia de dos rectas disjuntas contenidas en cada cúbica  $S$ , completamos la tercera etapa.

**Proposición 3** *Dadas dos rectas  $L, M \subset S$  disjuntas, existen exactamente otras quince rectas distintas de  $S$ ,  $(L_i, L'_i, L''_i), i = 1, \dots, 5$ , con la siguiente configuración:*

- las cinco parejas  $(L_i, L'_i)$  son las diez rectas de  $S$  que cortan a  $L$ ;
- las cinco parejas  $(L_i, L''_i)$  son las diez rectas de  $S$  que cortan a  $M$ ;
- $L'_i \cap L''_i \neq \emptyset$  si  $i \neq j$  y  $L'_j \cap L''_i = \emptyset$  si  $i = j$ .

DEMOSTRACIÓN. Dadas  $L$  y  $M$  rectas disjuntas de  $S$ , como vimos en la proposición 2, a  $L$  le corresponden cinco parejas  $(L_i, L'_i)$  de rectas distintas de  $S$  que la cortan y, además, por el lema 2, la recta  $M$  (distinta de las once anteriores por ser disjunta con  $L$ ) corta a una recta de cada pareja y no a la otra.

<sup>18</sup>Aquí se utiliza que el cuerpo base  $\mathbb{C}$  es algebraicamente cerrado. De hecho, si no lo fuera, el número de rectas contenidas en una cúbica  $S$  podría ser menor que 27 (ver [21], p. 56).

Supongamos que  $M$  corta a todas las  $L_i$  (si no, renombramos las parejas). Aplicando de nuevo la proposición 2, hay exactamente otras cinco rectas, digamos  $L''_i$ , tales que las cinco parejas de rectas de  $S$  que cortan a  $M$  son las  $(L_i, L''_i)$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , con la configuración dada por dicha proposición.

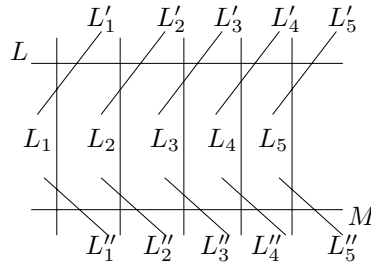


Figura 14: Configuración de diecisiete rectas

Veamos que las rectas  $L''_i$  son distintas de las doce rectas anteriores: son distintas de  $L$  ya que cortan a  $M$  (y, por hipótesis,  $L \cap M = \emptyset$ ); son distintas de  $M$  y de  $L_j$ , con  $j = 1, \dots, 5$ , por la proposición 2; y, finalmente, son distintas de  $L'_j$  para  $j = 1, \dots, 5$ , porque si no,  $M$  cortaría a las dos rectas de alguna pareja  $(L_j, L'_j)$  en contradicción con el lema 2.

En cuanto a la incidencia entre las  $L'_j, L''_i$ : por un lado,  $L'_j \cap L''_i \neq \emptyset$  si  $i \neq j$ , puesto que por el lema 2,  $L''_i$  debe cortar a alguna de la terna  $L, L_j, L'_j$  (corta a  $\Pi_j$  en un punto de  $S$  y  $\Pi_j \cap S = L \cup L_j \cup L'_j$ ) y  $L_j \cap L''_i = \emptyset$  si  $i \neq j$  y  $L \cap L''_i = \emptyset$  (todo ello por la proposición 2); por otro lado,  $L'_i \cap L''_i = \emptyset$  porque  $L''_i$  ya corta a  $L_i$  y no puede cortar al otro miembro de la pareja  $(L_i, L'_i)$ , usando otra vez el lema 2.

Así que, teniendo dos rectas disjuntas contenidas en  $S$ , se tienen otras quince más con la configuración particular descrita en la proposición 3.

¡Sólo nos faltan diez rectas! Para encontrarlas y con ello completar la demostración del teorema 1, necesitamos el último resultado auxiliar.

**Lema 3** Si  $L_1, L_2, L_3, L_4$  son rectas disjuntas de  $\mathbb{P}^3$ , entonces

- o bien las cuatro están contenidas en una cuádrlica lisa de  $\mathbb{P}^3$  y tienen infinitas rectas transversales<sup>19</sup> comunes,
- o bien no hay ninguna cuádrlica que las contenga y entonces poseen una o dos transversales comunes.

<sup>19</sup>Dos rectas son transversales entre sí cuando se cortan (en un punto).

DEMOSTRACIÓN. Dadas tres rectas disjuntas de  $\mathbb{P}^3$ , digamos  $L_1, L_2, L_3$ , veamos que existe una única cuádrica  $Q$  que las contiene y es no singular. Tomamos tres puntos distintos en cada recta  $L_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , en total, nueve puntos. El hecho de contener un punto de  $\mathbb{P}^3$  impone una condición lineal en el espacio de cuádricas de  $\mathbb{P}^3$ , que es un  $\mathbb{P}^9$ . Entonces, si consideramos las cuádricas que contienen a los nueve puntos anteriores, lo que tenemos es la intersección de nueve hiperplanos generales en dicho  $\mathbb{P}^9$  que consiste en un único punto (como la de dos rectas generales de  $\mathbb{P}^2$ , tres de  $\mathbb{P}^3$ , etc.). Por tanto, hay una única cuádrica  $Q$  que contiene tres puntos de cada  $L_i$  y que, automáticamente, contiene a cada  $L_i$  —una cuádrica y una recta intersecan como mucho en dos puntos salvo que la recta esté contenida en la cuádrica<sup>20</sup>—.

No es difícil comprobar que una cuádrica singular de  $\mathbb{P}^3$  no puede contener tres rectas disjuntas (en  $\mathbb{P}^3$ , las cuádricas singulares son el cono cuádrico, una pareja de planos o un plano doble), así que  $Q$  es lisa. Y es conocido que una cuádrica lisa de  $\mathbb{P}^3$  es una superficie reglada, con dos familias infinitas de rectas contenidas en ella, tales que las rectas de cada familia son disjuntas dos a dos y cada miembro de una familia corta a un miembro de la otra en un único punto (ver [9]).

Ahora, o bien  $L_4 \subset Q$  y entonces  $L_4$  pertenece a la misma familia que  $L_1, L_2, L_3$  (por ser disjunta con ellas) y cualquier recta de la otra colección es transversal a las cuatro rectas  $L_i$ , con lo cual existen infinitas transversales comunes; o bien,  $L_4 \not\subset Q$  y, por tanto, corta a  $Q$  en dos puntos (que podrían coincidir cuando la recta es tangente a la cuádrica). En este caso, las rectas de la otra familia que pasan por dichos puntos<sup>21</sup> son las únicas transversales comunes a las cuatro rectas dadas.

En la siguiente proposición “aparecen” las rectas que nos faltaban y esto completa la demostración del teorema 1.

**Proposición 4** Sean  $L, M, \{L_i\}_{i=1}^5$  y  $\{L'_i\}_{i=1}^5, \{L''_i\}_{i=1}^5$  las diecisiete rectas de  $S$  dadas por la proposición 3.

- a) Si  $N \subset S$  es una recta de  $S$  distinta de las diecisiete rectas anteriores, entonces  $N$  corta exactamente a tres rectas del conjunto  $\{L_i\}_{i=1}^5$ .

<sup>20</sup>Debido otra vez al Teorema de Bézout.

<sup>21</sup>Por cada punto de una cuádrica lisa pasa una recta de cada familia de rectas contenidas en la superficie (ver [9]).

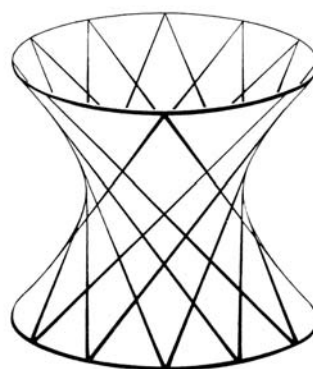


Figura 15: Cuádrica lisa

- b) Por cada elección de tres elementos  $\{i, j, k\}$  del conjunto  $\{1, \dots, 5\}$ , hay una única recta de  $S$ , digamos  $L_{ijk}$ , distinta de las diecisiete rectas anteriores, que corta exactamente a  $L_i, L_j$  y a  $L_k$ .

DEMOSTRACIÓN. **a)** Las rectas  $\{L_i\}_{i=1}^5$  son disjuntas entre sí por la proposición 2. Dadas cuatro rectas disjuntas de  $S$ , el lema 3 implica que las cuatro no pueden estar contenidas en una cuádrica lisa, porque en dicho caso, tendrían infinitas transversales comunes. Por el teorema de Bézout, estas rectas habrían de estar contenidas en la superficie cúbica  $S$ , puesto que la cortan en más de tres puntos; pero entonces  $S$  debería contener a la cuádrica<sup>22</sup> y por tanto no sería irreducible, en contra de nuestras hipótesis. Como consecuencia de esto, las cuatro rectas disjuntas tienen una o dos transversales comunes.

Ahora, si  $N$  cortara a más de tres rectas  $L_i$ , usando otra vez el lema 3, estas rectas disjuntas tendrían más de dos transversales en común:  $N, L, M$ , y llegamos a una contradicción.

Si  $N$  corta a menos de tres rectas  $L_i$ , entonces cortaría a tres o más de las  $L'_i$  (por el lema 2). Si, por ejemplo,  $N$  cortase a  $L_5$  y a  $L'_1, L'_2, L'_3$  (y a  $L_4$  o a  $L'_4$ ), estas cuatro rectas de  $S$ , que son disjuntas por la proposición 2, poseerían más de dos transversales en común:  $N, L$ , y  $L''_5$ , lo cual, de nuevo, es imposible. De esta forma,  $N$  corta exactamente a tres rectas del conjunto  $\{L_i\}_{i=1}^5$ .

**b)** Consideramos la recta  $L_1 \subset S$ . Por la proposición 2, hay exactamente diez rectas distintas de  $S$  que la cortan. De estas diez, hasta ahora han aparecido cuatro:  $L, M, L'_1$  y  $L''_1$ . Cada una de las seis rectas que faltan (que, por las configuraciones dadas en las proposiciones 2 y 3 no pueden ser ninguna de las doce rectas restantes en el conjunto  $\{L, M, \{L_i\}_{i=1}^5, \{L'_i\}_{i=1}^5, \{L''_i\}_{i=1}^5\}$ ), debe cortar exactamente a una pareja de rectas de entre  $L_2, \dots, L_5$ , usando **a)**.

Como hay seis de dichas parejas, todas las posibilidades ocurren y esto nos da una única recta  $L_{1jk}$  para cada  $\{j, k\}$  entre  $\{2, 3, 4, 5\}$ , en las condiciones del apartado **b)**. El argumento con  $L_1$  se repite con el resto de las rectas  $L_i$  y esto termina la prueba.

Este último resultado proporciona, a partir de la configuración de diecisiete rectas que se deducía de la proposición 3, exactamente otras diez rectas distintas de  $S$  (una por cada subconjunto de tres elementos tomados de uno con cinco elementos) y prueba que no puede haber más.

Con las cuatro proposiciones anteriores, hemos acabado de demostrar el teorema 1: cada superficie cúbica no singular contiene 27 rectas que, con la notación empleada, son las siguientes:  $\{L, M, \{L_i\}_{i=1}^5, \{L'_i\}_{i=1}^5, \{L''_i\}_{i=1}^5, L_{ijk}\}$ , es decir  $2 + 5 + 5 + 5 + 10 = 27$ .

<sup>22</sup>Porque contiene a infinitas de sus rectas y, en general, la intersección de una cúbica y una cuádrica tiene, de nuevo por Bézout, grado a lo más seis, así que consiste como mucho en seis rectas.

### 3. SOBRE LA CONFIGURACIÓN DE LAS 27 RECTAS

Volviendo a la configuración geométrica de estas 27 rectas y a la fascinación que despierta, en cuanto a las *relaciones de incidencia* entre ellas, se tiene que:

- $L$  corta a  $\{L_i\}_{i=1}^5, \{L'_i\}_{i=1}^5$ .
- $L_1$  corta a  $L, M, L'_1, L''_1$  y a  $L_{ijk}$  para las seis elecciones posibles  $\{j, k\} \subset \{2, 3, 4, 5\}$ .
- $L'_1$  corta a  $L, L_1$ , a las cuatro rectas  $\{L''_j\}_{j=2}^5$  y a  $L_{ijk}$  para las cuatro elecciones posibles  $\{i, j, k\} \subset \{2, 3, 4, 5\}$ .
- $L''_1$  corta a  $M, L_1$ , a las cuatro rectas  $\{L'_j\}_{j=2}^5$  y a  $L_{ijk}$  para las cuatro elecciones posibles  $\{i, j, k\} \subset \{2, 3, 4, 5\}$ .
- $L_{123}$  corta a  $L_1, L_2, L_3, L_{145}, L_{245}, L_{345}, L'_4, L'_5, L''_4, L''_5$ .

Ya mencionamos en la Introducción que hay numerosos trabajos de *Geometría Projectiva Clásica* asociados a las 27 rectas. En los artículos de Cayley y Salmon y otros que les siguieron, se probaba que las 27 rectas constituyen 45 ternas de rectas coplanares y 36 de los conocidos como *6-dobles* descubiertos por L. Schläfli (1814-1895).

Estos 6-dobles son configuraciones de doce rectas en las que las seis primeras son disjuntas dos a dos, las seis segundas también lo son y además, una recta del primer lote corta a una del segundo si y sólo si están en distinta posición (en la colección de 6). Con la notación utilizada aquí, las doce rectas  $\{L, L''_1, \dots, L''_5\} \cup \{M, L'_1, \dots, L'_5\}$  constituyen un *6-doble*. Se puede demostrar que dada una recta cualquiera, digamos  $E_1$ , y cinco rectas suficientemente generales que la cortan, por ejemplo  $G_2, \dots, G_6$ , entonces hay otras seis rectas  $G_1, E_2, \dots, E_6$ , determinadas de manera única para formar un 6-doble<sup>23</sup>.

Se prueba también que dado un 6-doble existe una única superficie cúbica no singular que lo contiene (ver [13]).

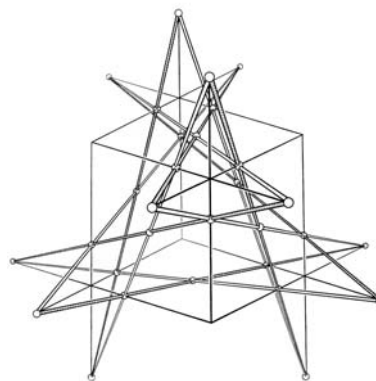


Figura 16: 6–doble de Schläfli

<sup>23</sup>Si al lector le apetece divertirse experimentando con estos 6-dobles de Schläfli, puede consultar la página de la red:

<http://enriques.mathematik.uni-mainz.de/csh/mathback/doublesix.html>

En lo que se refiere a la relación con *teoría de grupos*, si se considera la *configuración de 27 rectas* olvidando la superficie, es decir, una colección de 27 rectas que satisfaga las relaciones de incidencia que poseen las rectas contenidas en una cúbica, y se piensa en los *automorfismos de la configuración*, es decir, las permutaciones de los 27 elementos que preservan dichas relaciones, se puede ver que para cada subconjunto de seis rectas mutuamente disjuntas, existe un único automorfismo de la configuración que lleva  $\{L, L_1'', \dots, L_5''\}$  a las seis rectas dadas (ver [10], V, 4.10.1). Ahora, puesto que cada automorfismo debe enviar rectas disjuntas a rectas disjuntas, todos los elementos del grupo de automorfismos de la configuración, digamos  $G$ , se obtienen así. El número de elementos de  $G$  será entonces igual al de posibles elecciones de seis rectas mutuamente disjuntas: en nuestro caso, hay 27 elecciones para  $L$ , 16 para  $L_1''$  (puesto que, por la proposición 2, hay exactamente diez rectas de la configuración cortando a  $L$ ), 10 para  $L_2''$  (ya que teniendo las dos rectas disjuntas anteriores, por la proposición 3, hay exactamente otras quince rectas de la configuración que cortan a una de esas dos rectas) y, con argumentos similares, se ve que hay seis elecciones para  $L_3''$ , dos para  $L_4''$  y una para  $L_5''$ . Por tanto, el orden de  $G$  es  $27 \times 16 \times 10 \times 6 \times 2 \times 1 = 51.840$  (hay otras formas de determinar este número, ver por ej. [8], p. 485).

Se puede demostrar que el grupo  $G$  es isomorfo al *grupo de Weyl*  $E_6$  (ver [10], Ex. 4.11). Los grupos de Weyl se definen como grupos abstractos a partir de diagramas que consisten en puntos y segmentos que unen algunos de ellos, dando generadores y relaciones: cada punto es un generador  $x_i$  y las relaciones son  $x_i^2 = 1$  para cada  $i$ ,  $(x_i x_j)^2 = 1$  si  $i$  y  $j$  no están unidos por un segmento y  $(x_i x_j)^3 = 1$  si  $i$  y  $j$  están unidos.

En cuanto a la posible relación entre el grupo  $G$  de automorfismos de la configuración de 27 rectas y el grupo, digamos  $H$ , de automorfismos de la propia superficie cúbica  $S$ , en general, cada elemento de  $H$  da uno de  $G$ , pero el recíproco no es cierto y, de hecho,  $H$  es un subgrupo propio de  $G$ . Descripciones explícitas de  $H$  según los distintos tipos de superficies cúbicas no singulares se pueden encontrar en el libro de Segre ([21]), donde se distingue además el caso real del complejo y donde se relaciona el orden de  $H$  con el número de *puntos Eckardt* de la superficie<sup>24</sup>. Hay trabajos que relacionan  $H$  con  $G$  de forma más concreta, estableciendo que  $H$  corresponde a cierto subgrupo estabilizador de  $G$  (ver [18]).

Después de todo lo expuesto, aún caben multitud de preguntas acerca de la configuración de las 27 rectas de una superficie cúbica. Por ejemplo,

- dadas 27 rectas con la misma incidencia que poseen las rectas de una cúbica, ¿existe una única superficie cúbica no singular que las contiene?

---

<sup>24</sup>Un punto de una superficie es Eckardt cuando el plano tangente a la superficie en el punto corta a la superficie en tres rectas.

Sabemos que dado un 6-doble, sí existe una única cúbica que lo contiene y para cada uno de ellos, las quince rectas que completan el conjunto de 27 con la incidencia fijada, están determinadas unívocamente, pero se puede ver que hay 36 elecciones posibles de un 6-doble en un conjunto de 27 rectas con la incidencia fijada, como hemos mencionado arriba, así que la respuesta a esta pregunta es *no*.

- Si seis rectas de una superficie cúbica no singular son reales, ¿el resto están forzadas a serlo?

En el libro de Segre ([21]) se da una tabla que muestra la existencia de superficies cúbicas no singulares que poseen exactamente siete rectas reales (y también quince), por lo que de nuevo la respuesta es *no*.

- ¿Y si la *superficie cúbica es singular*?

Hemos visto a lo largo de la exposición cómo la no singularidad de la superficie servía en diversas situaciones para garantizar que las rectas que se iban encontrando fueran distintas. Cuando la superficie tiene puntos singulares, lo que ocurre es que algunas rectas coinciden con otras y el número de rectas distintas disminuye. Por ejemplo, si la superficie tiene un punto doble ordinario, hay seis rectas que coinciden con otras seis y el número de rectas distintas baja a 21. De hecho, existe una clasificación de superficies cúbicas singulares (ver [4]) y ocurre que, cuando las *singularidades* son *aisladas*, cada tipo de singularidad lleva asociado un número de rectas para la superficie cúbica que lo posee: en el caso peor, el que corresponde a la singularidad más degenerada que puede presentar la superficie, la cúbica contiene una única recta. Si las *singularidades no* son *aisladas*, se puede demostrar que la cúbica posee toda una recta de puntos dobles y que además es *reglada*, es decir que va a contener infinitas rectas.

#### 4. VARIEDADES DE FANO

La familia de rectas contenidas en una hipersuperficie cúbica con un número finito de singularidades fue estudiada a principios del siglo XIX por G. Fano (1871-1952), pionero en geometría finita y uno de los primeros en intentar construir un marco abstracto para la geometría.

En general, la *variedad de Fano* de orden  $k$  asociada a una variedad proyectiva  $X \subset \mathbb{P}^n$  es el conjunto de  $k$ -planos (espacios lineales de dimensión  $k$ ) contenidos en  $X$ . De forma natural, es una subvariedad de la grassmanniana  $G(k, n)$  de  $k$ -planos de  $\mathbb{P}^n$  (una generalización de la grassmanniana de rectas de  $\mathbb{P}^3$ ,  $G(1, 3)$ , de la que hablamos en la demostración de la proposición 1).

La dimensión esperada (hay excepciones) de la variedad de Fano de rectas contenidas en una superficie general de grado  $d$  de  $\mathbb{P}^3$  es  $3 - d$  (ver [9])<sup>25</sup>. De este modo, una superficie cúbica general de  $\mathbb{P}^3$  contiene un número finito de rectas (porque la dimensión esperada es 0 en este caso, pero una cuádrica general contiene infinitas (dimensión 1) y una cuártica general no contiene rectas (dimensión negativa)).

Si  $n$  es arbitrario, la condición necesaria para que una hipersuperficie general de grado  $d$  de  $\mathbb{P}^n$  contenga rectas es que  $d \leq 2n - 3$ . Si se tiene igualdad, el número de rectas es finito; en concreto, para  $n = d = 3$  es 27 como hemos visto, para  $n = 4, d = 5$ , es 2.875, y para  $n = 5, d = 7$ , es  $7^3 \times 2035$ .

Es claro entonces que el método con el que se han encontrado aquí las 27 rectas de una superficie cúbica no singular de  $\mathbb{P}^3$  no es adecuado para casos más generales. Lo que se hace es utilizar *fibrados vectoriales*, *clases de Chern* de estos fibrados y *teoría de intersección* en grassmannianas (generalización de la de espacios proyectivos). La variedad de Fano en cuestión se identifica con los ceros de una *sección de un fibrado* sobre una grassmanniana; esto implica que su clase en el anillo de intersección de dicha grassmanniana viene dada por la clase de Chern máxima del fibrado y esta última se calcula encajando el fibrado en *sucesiones exactas* apropiadas.

En el caso de la superficie cúbica se obtiene así que la clase -en el anillo de la grassmanniana de rectas de  $\mathbb{P}^3$ - de su variedad de Fano de rectas es  $18s_1^2s_2 + 9s_2^2$ , donde  $s_1, s_2$  son los generadores de dicho anillo y las relaciones entre ellos hacen que la expresión anterior dé como resultado 27, como ya sabíamos.

En ciertos problemas de *Geometría Algebraica Enumerativa* es preciso construir variedades de Fano aún más generales que las referidas aquí. Por ejemplo, en [12], se define una que parametriza rectas contenidas en una superficie cúbica que, además, pasan por un punto singular fijado en la superficie y se utiliza para determinar el grado, como variedades proyectivas de  $\mathbb{P}^{19}$ , de algunos estratos de la clasificación de superficies cúbicas singulares de  $\mathbb{P}^3$  mencionada al final de la sección 3.

De entre las referencias que siguen, el lector interesado en saber más sobre superficies cúbicas puede consultar el libro de B. Segre, [21], en el caso liso, y el artículo de Bruce y Wall, [4], para el caso singular. Un buen lugar para aprender los fundamentos de las variedades de Fano es el libro de J. Harris [8].

<sup>25</sup>De hecho, la fórmula para la dimensión, con  $k, n$  y  $d$  generales, es

$$(k+1)(n-k) - \binom{k+d}{d}$$



## REFERENCIAS

- [1] D. ABBOT (ed.), *The Biographical Dictionary of Scientists: Mathematicians*, Blond Educational (1985).
- [2] F. APERY, *Models of the Real Projective Plane*, Vieweg (1987).
- [3] A. BEAUVILLE, *Complex Algebraic Surfaces*, London Math Soc., Lecture Notes Series 68, Cambridge Univ. Press, (1983).
- [4] J. W. BRUCE Y C.T.C. WALL, On the classification of cubic surfaces, *J. London Math. Soc.* (2), 19 (1979), 245-256.
- [5] H. S. M. COXETER, *Projective Geometry*, Springer-Verlag (1987).
- [6] W. FULTON, *Intersection Theory*, Springer-Verlag (1984).
- [7] W. FULTON, S. L. KLEIMAN Y R. MACPHERSON, *About the enumeration of contacts, Proc. Ravello 1982*. Springer, Lecture Notes 997, (1983), 156-196.
- [8] P. GRIFFITHS Y J. HARRIS, *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley and Sons (1978).
- [9] J. HARRIS, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag (1992).
- [10] R. HARTSHORNE, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag (1977).
- [11] A. HENDERSON, *The 27 lines upon the cubic surface*, Cambridge Univ. Press (1911).
- [12] R. HERNÁNDEZ Y M. J. VÁZQUEZ-GALLO, Degree of strata of singular cubic surfaces, *Trans. Amer. Soc.* 353, (2001), no. 1, 95-115.
- [13] D. HILBERT Y S. COHN-VOSSEN, *Geometry and the Imagination*, Chelsea Pub. Co. (1952).
- [14] G. A. JENNINGS, *Modern Geometry with Applications*, Springer-Verlag (1994).
- [15] L. KADISON Y M. T. KROMANN, *Projective Geometry and Modern Algebra*, Birkhäuser (1996).
- [16] A. N. KOLMOGOROV Y A. P. YUSHKEVICH, (ed.) *Mathematics of the 19th. Century*, Birkhäuser (1996).
- [17] Y. U. MANIN, *Cubic Forms*, North-Holland Pub. Co. (1972).
- [18] I. NARUKI Y E. LOOIJENGA, Cross ratio variety as a moduli space of cubic surfaces, *Proc. London Math. Soc.* (3), 45 (1982), 1-30.
- [19] D. PEDOE, *Geometry, A Comprehensive Course*, Dover Publications (1988).
- [20] M. REID, *Undergraduate Algebraic Geometry*, London Math. Soc., Student Texts **12**, Cambridge Univ. Press (1988).
- [21] B. SEGRE, *The non-singular cubic surfaces*, Oxford Univ. Press (1942).

- [22] B. VAN GEEMEN, A linear system on Naruki's moduli space of marked cubic surfaces, preprint AG/0101161, (2001).

María Jesús Vázquez Gallo  
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias  
Universidad Autónoma de Madrid  
28049, Madrid  
Correo electrónico: [mjesus.vazquez@uam.es](mailto:mjesus.vazquez@uam.es)