APENDICE

LA TRANSFORMACION DE FOURIER

Por ENRIQUE ALARCON

LA TRANSFORMACION DE FOURIER

El espacio L_2 de funciones de cuadrado integrable admite varios sistemas completos y ortogonales* de funciones, tales que si $\{\phi_i\}$ es uno de ellos

$$\forall f \in L_2 \; ; \; f = \sum_1^\infty c_i \phi_i$$

Como el producto escalar en L_2 se define según

$$\int f(x)\, g(x)\, d\mu$$

(μ es la medida del espacio), los coeficientes se obtienen fácilmente

$$\int f(x)\, \phi_i(x)\, d\mu = \int \sum_1^\infty c_j (\phi_j, \phi_i)\, d\mu = c_i \int \phi_i^2\, d\mu = c_i \|\phi_i\|^2$$

con lo que

$$c_i = \frac{1}{\|\phi_i\|^2} \int f(x)\, \phi_i(x)\, d\mu$$

que son llamados coeficientes de Fourier.

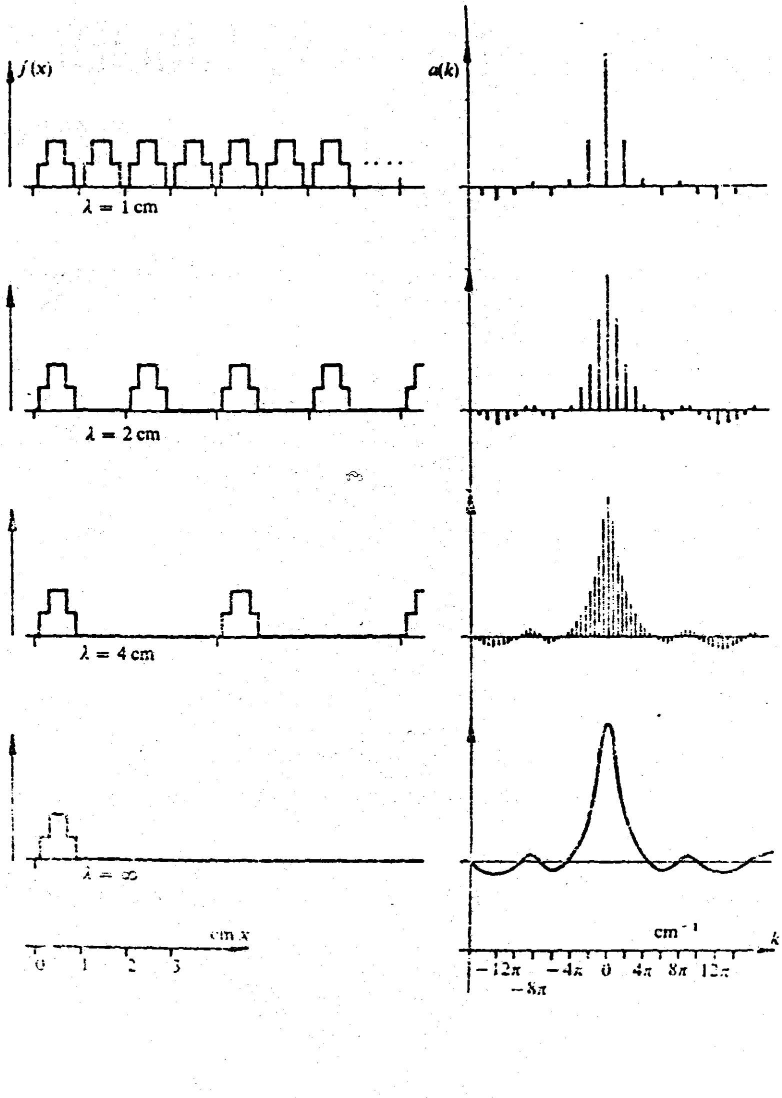
Para nosotros el sistema más interesante es el trigonométrico.

En el espacio $L_2(-\pi, \pi)$ de las funciones de cuadrado integrable en el segmento $(-\pi, \pi)$ un sistema completo, ortogonal y normal es

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \; \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \; \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{\pi}} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

---

* Un sistema es ortogonal cuando el producto escalar de dos elementos es nulo $(\phi_\alpha, \phi_\beta) = 0$ para $\alpha \neq \beta$, y completo cuando el menor subespacio cerrado que lo contiene es el propio L_2.



f(x)
a(k)
λ = 1 cm
λ = 2 cm
λ = 4 cm
λ = ∞
cm x
0
1
2
3
cm⁻¹
k
−12π
−8π
−4π
0
4π
8π
12π

De acuerdo con la terminología habitual el desarrollo en serie de Fourier es

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n x + b_n \operatorname{sen} n x$$

y como

$$\| \phi_o \|^2 = 2\pi$$

$$\| \phi_n \|^2 = \pi$$

tendríamos

$$\frac{a_o}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos n x \, d x$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} n x \, d x$$

Como en un sistema ortogonal cerrado completo se cumple la igualdad de Parseval

$$\sum_{1}^{\infty} c_k^2 = \| f \|^2$$

en nuestro caso

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx$$

Si en lugar del intervalo $[-\pi, \pi]$, $f(t)$ está definida en el intervalo $[-T/2, T/2]$ basta hacer $t = \frac{T/2\, x}{\pi}$ para tener $f(\frac{T/2\, x}{\pi})$ en el segmento $[-\pi, \pi]$ y

$$a_n = \frac{1}{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \frac{n \pi t}{T/2}\, dt$$

$$b_n = \frac{1}{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{sen} \frac{n \pi t}{T/2}\, dt$$

Un aspecto interesante es la forma compleja de la serie.

Como

$$\begin{cases} sen\ n\ x = \dfrac{e^{inx} - e^{-inx}}{3\ 2\ i} \\[2ex] cos\ n\ x = \dfrac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \end{cases} \qquad \text{(Fórmulas de Juan Bernouilli)}$$

$$\frac{a_o}{2} + \Sigma\ a_n\ cos\ n\ x + b_n\ sen\ n\ x = \frac{a_o}{2} + \Sigma\ a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2\ i} =$$

$$= \frac{a_o}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{inx} (a_n - i\ b_n) + e^{-inx} (a_n + i\ b_n) = \boxed{c_o + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\ e^{inx}}$$

lo que exige

$$\boxed{\begin{aligned} c_o &= \frac{a_o}{2} \\ c_n &= \frac{a_n - i\ b_n}{2} \\ c_{-n} &= \frac{a_n + i\ b_n}{2} \end{aligned}}$$

La expresión de los coeficientes se obtiene también de modo directo.

Si $\quad f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n\ e^{inx}$

Multiplicando por e^{-imx} e integrando y como

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\ e^{-imx}\ d\ x = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\ x}\ d\ x = \frac{1}{i\ (n-m)}\ e^{i\ (n-m)\ x} \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

Si $m \neq m$

$$I = \frac{1}{i\ (n-m)} \left[e^{i\ (n-m)\ \pi} - e^{-i\ (n-m)\ \pi} \right] = \frac{e\ i}{i\ (n-m)}\ sen\ (n-m)\ \pi = 0$$

Si $m = m$

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} d\ x = 2\ \pi$$

con lo que

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} \sum c_n e^{inx}\, dx = 2\pi c_m$$

$$\boxed{c_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-imx}\, dx} \qquad \boxed{f(x(= \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}}$$

que es válido para $m = 0\ ,\ \pm 1\ ,\ \pm 2\ ,\ \ldots$

Recordando

$$t = \frac{T/2\, x}{\pi}$$

tambien

$$\boxed{f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi}{l} t}$$

$$\boxed{c_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-\frac{im\pi}{l}} \frac{\pi}{l}\, dt = \frac{1}{2l}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-i\frac{m\pi t}{l}}\, dt}$$

Considerando $2l$ como T (perído).

$$\boxed{f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{i\pi n 2}{\lambda}} \qquad c_m = \frac{1}{\lambda}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-i\frac{2\pi m t}{\lambda}}\, dt}$$

Una interesante representación del desarrollo se obtiene llevando en abscisas los valores de n (o los valores de $\frac{2\pi n}{T}$) y en coordenadas los de c_n. Es decir, podemos pensar en c_n como función de n (o de

$$\frac{2\pi n}{T}) \;.\; \omega = \frac{2\pi n}{T}$$

corresponde a un armónico de longitud de onda T/n.

Obtenemos así el espectro de $f(t)$, que es discreto. (Obsérvese que mientras la unidad de $f(t)$ es t, la de ω es t^{-1}).

PARES DE FOURIER

Hagamos $\lambda \to \infty$

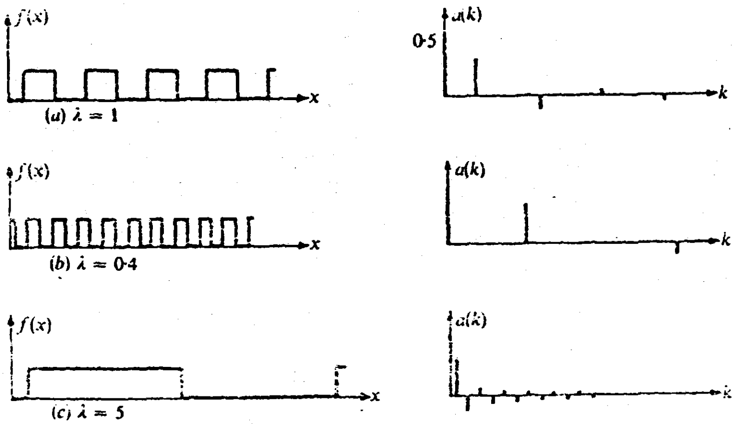
$$f(t) = \lim_{T\to\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(\xi)\, e^{-i\frac{2\pi m}{T}\xi}\, d\xi \right] e^{i\frac{2\pi n}{T} t}$$

En el espectro

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$$

de modo que, cuando $T \to \infty$ $\Delta\omega \to 0$, es decir, las ordenadas del espectro tienden a agruparse (y viceversa).

Veamos tres ejemplos:



Este hecho es del mayor interés, pues permite representar una función no periódica, por otra periódica correspondiente al caso $\lambda = \infty$, , con un espectro continuo.

Volviendo al comienzo del parrafo.

$$f(t) = \lim_{T\to\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(\xi)\, e^{-i\omega\xi}\, d\xi$$

En el limite la suma se sustituye por una integral sobre $d\omega$ y

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{-i\omega\xi}\, d\xi$$

donde el orden de integración debe preservarse para evitar inconsistencias.

Llamaremos pàr de Fourier a $F(\omega)$ y $f(t)$ donde

$$\boxed{\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{-i\omega\xi}\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \end{aligned}} \quad *$$

A parte de otras diferencias observese que la primera ecuación es algo establecido por definición mientras que la segunda es la afirmación de una igualdad.

TRANSFORMACION DE FOURIER

La expresión

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

establece una correspondencia entre toda la función f absolutamente integrable y otra F definida en toda la recta numérica.

$F(\omega)$ recibe el nombre de transformación de Fourier de la función inicial.

Por otro lado

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

se llama fórmula de inversión.

Como $F(\omega)$ es compleja

$$F(\omega) = F(\omega)\; e^{i\phi(\omega)} \quad \left\{ \begin{array}{l} F(\omega) \text{ es el espectro de magnitud de } f(t) \\ \phi(\omega) \text{ el espectro de fase de } f(t) \end{array} \right.$$

De la propia definición se deduce

$$\Im[\, a f_1(t) + b f_2(t)\,] = a\,\Im[\, f_1(t) + b\,\Im[\, f_2(t)\,]$$

Propiedades: Si se admite que $f(t)$ y sus derivadas se anulan en $\pm\infty$

---

* Para que las igualdades sean válidas se demuestra que f, además de ser integrable, debe verificar la condición de Dini, es decir, la existencia de la integral

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}\, dt$$

para un x fijo y para algún valor de $\delta > 0$.

1) $$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = f(t)\, e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\,\omega \int f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

Es decir $\Im\{ f'(t) \} = i\,\omega\, F(\omega)$

y sucesivamente

$$\boxed{\Im\{ f^{n}(t) \} = (i\,\omega)^{n}\, F(\omega)}$$

2) Si $\delta(t)$ es la función de Dirac.

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 & para \quad t < 0 \quad y \quad t > 0 \\ \delta(t) = \infty & para \quad t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

Se ve que

$$\boxed{\Im[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = 1}$$

De este modo será posible escribir en función de la transformación inversa

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, d\omega$$

es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, d\omega = 2\pi\, \delta(t)$$

La transformación de $t^{0} = 1$ sería (observese que no se cumple la condición de acotación).

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(-\omega)t}\, dt = 2\pi\, \delta(-\omega) = 2\pi\, \delta(\omega)$$

$$\boxed{\Im[A] = 2\pi\, \delta(\omega)\, A \quad , \quad A = cte.}$$

Según 1)

$$\Im\{ \delta'(t) \} = i\,\omega$$

es decir

$$\delta'(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\,\omega\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

Si se presentan los indices t y ω.

$$2\pi i\,\delta'(\omega) = i^2 \int_{-\infty}^{\infty} t\, e^{i\omega t}\, dt$$

o bien

$$\Im[\,t\,] = \int_{-\infty}^{\infty} t\, e^{-i\omega t}\, dt = -2\pi\, i\,\delta'(\omega) = +\, 2\pi i\,\delta'(\omega)$$

Según 1)

$$\Im\{\,\delta^{n)}(t)\,\} = (i\,\omega)^n \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = (i\,\omega)^n$$

$$\delta^n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\,\omega)^n\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$2\pi\,\delta^{n)}(\omega) = i^n \int_{-\infty}^{\infty} t^n\, e^{i\omega t}\, dt$$

$$\Im[\,t^n\,] = \int_{-\infty}^{\infty} t^n\, e^{-i\omega t} = \frac{1}{i^n}\, 2\pi\,\delta^n(-\omega) = \frac{(-1)^n}{i^n}\, 2\pi\,\delta^{n)}(\omega) = i^n\, 2\pi\,\delta^{n)}(\omega)$$

$$\boxed{\Im[\,t^n\,] = 2\pi\, i^n\,\delta^n(\omega)} \quad *$$

3) Veamos ahora la transformación de $f(t) = e^{-a|t|}$

$$\Im[\,e^{-a|t|}\,] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}\, e^{-it\omega}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\omega)t}\, dt + \int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\omega)t}\, dt = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

4) Si

$f(t) = e^{iat}$

$$\boxed{\Im[\,e^{iat}\,] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iat}\,.\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(a-\omega)t}\, dt = 2\rho\,\delta(\omega - a)}$$

$$* \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\,\phi(t)\, dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\phi'(t)\, dt = -\,\phi'(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^n(t)\,\phi(t)\, dt = (-1)^n\,\phi^n(0)$$

ϕ es cualquiera siempre que se anule en $\pm\infty$.

Como

$$\cos a = \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}$$

$$\boxed{\Im [\cos a] = \pi [\delta(\omega - a) + \delta(\omega + a)]}$$

y análogamente

$$\boxed{\Im [\operatorname{sen} a] = -i\pi [\delta(\omega - a) - \delta(\omega + a)]}$$

5) Si

$$\Im [f(t)] = F(\omega)$$

veamos la transformada de $f(At)$ donde , $A = cte$ positiva

$$\Im [f(At)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(At)\, e^{-i\omega t}\, dt \quad , \quad At = x$$

$$\Im [f(At)] = \frac{1}{A}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega \frac{x}{A}} \quad dx = \frac{1}{A} F\left(\frac{\omega}{A}\right)$$

El lector puede comprobar que si A es negativa

$$\boxed{\Im [f(At)] = \frac{1}{A} F\left(\frac{\omega}{A}\right)}$$

Así pues la ampliación de la escala de tiempos (At) se corresponde con la reducción en la escala de frecuencias.

En particular si $A = -1$.

$$\Im [f(-t)] = F(-\omega)$$

6) Un interesante caso es el que presenta la función de Heaviside

$$\begin{cases} h(t) = 1 & \text{si} \quad t > 0 \\ h(t) = 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

por ello

$$h(t) + h(-t) = 1$$

(salvo para $t = o$)
y en virtud de lo anterior si

$$\Im[h(t)] = F(\omega)$$

$$F(\omega) + F(-\omega) = 2\pi\,\delta(\omega)$$

Supongamos

$$F(\omega) = A\,\delta(\omega) + f(\omega) \qquad [A \ cte]$$

$$F(-\omega) = A\,\delta(\omega) + f(-\omega)$$

sumando y teniendo en cuenta la igualdad previa

$$2\pi\,\delta(\omega) = 2 \cdot A\,\delta(\omega) + [f(\omega) + f(-\omega)]$$

de donde

$$A = \pi$$

$$f(\omega) = -f(-\omega)$$

es decir $f(\omega)$ es impar.

Para encontrar su valor es preciso recurrir al hecho de que

$$h'(t) = \delta(t)$$

y por 1)

$$\Im[h'(t)] = i\,\omega\,\Im[h(t)] = i\,\omega\,[\pi\,\delta(\omega) + f(\omega)]$$

Así

$$i\,\omega\,[\pi\,\delta(\omega) + f(\omega)] = 1$$

pero

$$\omega\,\delta(\omega) = 0$$

por lo que

$$f(\omega) = \frac{1}{i\,\omega} = \frac{-i}{\omega}$$

(Observese de pasada que

$$\omega\,F_1(\omega) = \omega\,F_2(\omega)$$

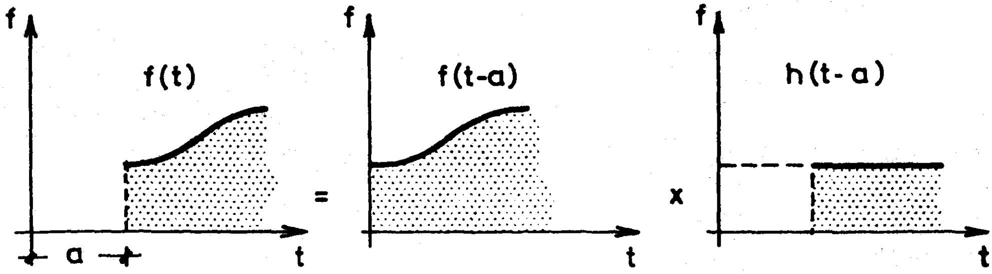
no implica $F_1 = F_2$ sino $F_1 = F_2 + C\,\delta(\omega)$]

En resumen

$$\boxed{\Im[h(t)] = \pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{j\,\omega}}$$

7) Fórmulas de desplazamiento.

La función de Heaviside permite trasladar paralelamente al eje $O\,t$ cualquier función $f(t)$ considerada para $t > 0$. pues según se observa claramente



$$f(t) = f(t-a)\ .\ h(t-a)$$

$$\Im[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)\ h(t-a)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{a}^{\infty} f(t-a)\, e^{-i\omega t}\, dt =$$

(mediante el cambio $t - a = u$

$$= e^{-i\omega a}\int_{a}^{\infty} f(u)\, e^{-i\omega u}\, du$$

Es decir

$$\boxed{\Im[f(t-a)\ .\ h(t-a)] = e^{-i\omega a}\,\Im[f(t)]}$$

Esta relación puede ser utilizada en sentido inverso, vg. : como sabemos que

$$\Im[h(t)] = \pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{j\,\omega}$$

$$\Im^{-1}\left\{e^{-i\omega a}\left[\pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{j\,\omega}\right]\right\} = h(t-a)\ .\ h(t-a) = h(t-a)$$

$$\Im^{-1}\left[\pi\,\delta(\omega) + \frac{e^{-i\omega a}}{j\,\omega}\right] = h(t-a)$$

$$\boxed{\Im[h(t-a)] = \pi\,\delta(\omega) + \frac{e^{-i\omega a}}{j\,\omega}}$$

o como

$$\mathfrak{F}[\delta(t)] = 1$$

$$\mathfrak{F}^{-1}[e^{-i\omega a}] = \delta(t-a)$$

$$\boxed{\mathfrak{F}[\delta(t-a)] = e^{-i\omega a}}$$

Asimismo él lector puede comprobar la fórmula de desplazamiento en frecuencia

$$F(\omega - a) = \mathfrak{F}[f(t)\, e^{iat}]$$

8) <u>El teorema de Borel</u>
Supongamos

$$F(\omega) = \mathfrak{F}[f(t)]$$

$$G(\omega) = \mathfrak{F}[g(t)]$$

y vamos a obtener la función imagen del producto

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\, e^{-i\omega \tau}\, d\tau$$

$$F(\omega)\ G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} F(\omega)\, g(\tau)\, d\tau$$

puesto que

$$\mathfrak{F}[h(t-\tau)\ f(t-\tau)] = e^{-i\omega\tau}\mathfrak{F}[f(t)] = e^{-i\omega\tau} F(\omega)$$

$$F(\omega)\ G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\, f(t-\tau)\, g(\tau)\, e^{-i\omega t}\, d\tau\, dt$$

y como

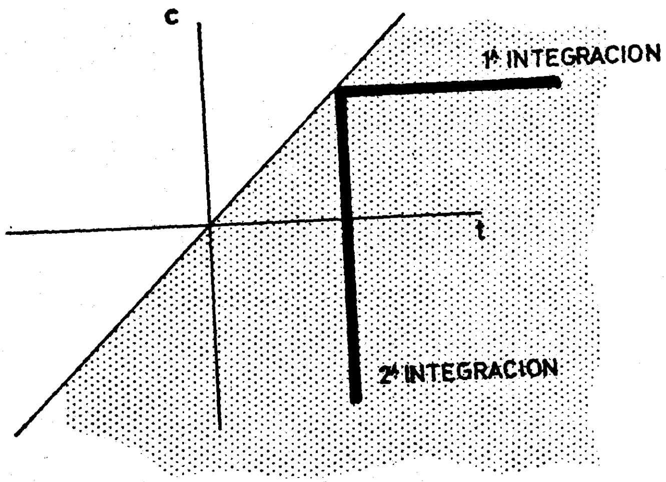
$$\left.\begin{array}{lll} h(t-\tau) = 0 & si & t < \tau \\ h(t-\tau) = 1 & si & t > \tau \end{array}\right\}$$

$$F(\omega)\ G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\tau}^{\infty} e^{-i\omega t}\, g(\tau)\ f(t-\tau)\ d\tau\ dt$$

En esta expresión τ varia entre $-\infty$ e ∞ y t entre τ e ∞. (Orden t, τ).

Si se cambia el orden de integración (τ, t) los límites serían para t

$$\tau \left\{ \begin{matrix} t \\ -\infty \end{matrix} \right. \qquad t \left\{ \begin{matrix} \infty \\ -\infty \end{matrix} \right.$$



con lo cual

$$F(\omega)\ G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\, dt \int_{-\infty}^{t} g(\tau)\ f(t-\tau)\, d\tau$$

expresión que equivale a

$$F(\omega)\ G(\omega) = \Im \left[\int_{-\infty}^{t} g(\tau)\ f(t-\tau)\ d\tau \right]$$