HIDRODINAMICA DE LA FUSION POR LASER

J. R. SANMARTIN

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronaúticos. UNIVERSIDAD POLITECNICA DE MADRID. Ciudad Universitaria. MADRID - 3.

CONTENIDO

I.A.- Longitudes y tiempos característicos en la fusión

Las dificultades halladas durante los últimos treinta años en los intentos por obtener fusión termonuclear controlada, han propiciado una búsqueda cuidadosa de los valores de densidad y temperatura más convenientes para el quemado. Como en otros muchos fenómenos, las longitudes y tiempos característicos de los procesos (binarios) determinantes de la fusión son inversamente proporcionales a la densidad; la elección de ésta puede así ser discutida de un modo simple, como se hará en esta Introducción. En la actualidad, y para el quemado de deuterio-tritio, se consideran valores que abarcan un intervalo de casi 13 órdenes de magnitud: de $n<10^{14}$ cm^{-3} para Tokamaks a $n>10^{26}$ cm^{-3} para el confinamiento inercial; n es el número de iones por unidad de volumen. No es posible una discusión tan sencilla respecto de la temperatura T, de la cual tiempos y longitudes dependen de modo más diverso. Afortunadamente el quemado es tan sensible a la temperatura que los valores considerados abarcan poco más de un orden de magnitud (digamos de 4 a 60 KeV).

En un plasma uniforme, con iguales proporciones de deuterio y tritio, se tiene

$$\frac{dn}{dt} = -\tfrac{1}{2}\langle\sigma v\rangle n^2 \qquad (n_D = n_T = \tfrac{1}{2}n) \qquad (1)$$

donde la constante $\langle\sigma v\rangle$ de la velocidad de reacción depende de T. Si T=cte, la fracción de quemado f al cabo de un tiempo τ vale, según (1),

$$f(\tau) \equiv 1 - \frac{n(\tau)}{n(0)} = \frac{\frac{1}{2}\langle\sigma v\rangle n(0)\tau}{1+\frac{1}{2}\langle\sigma v\rangle n(0)\tau} \, . \qquad (2)$$

En (1) se puede definir un tiempo característico de quemado

$$t_q \equiv 2/n\langle\sigma v\rangle \qquad \text{[escribiendo n por n(0)]} \qquad (3)$$

de modo que si por ejemplo $\tau = t_q$ resulta f=1/2. El crecimiento de

$\langle\sigma v\rangle$ con T es extraordinariamente rápido por debajo de 10 KeV (aumenta en casi cinco órdenes de magnitud, entre 1 y 10 KeV, donde vale 1.1×10^{-16} cm^3/seg) pero existe un máximo de 9×10^{-16} cm^3/seg a 65 KeV.

A tales temperaturas el plasma es un intenso emisor de radiación de Bremsstrahlung. Suponiéndole, por el momento, transparente a su propia radiación, se tiene

$$2\,n\,\frac{3}{2}\,\kappa\,\frac{dT}{dt} = -C_B n^2, \qquad C_B \propto T^{1/2}.$$

El tiempo característico de enfriamiento es $t_B = 3kT/C_B n$. El cociente t_B/t_q, independiente de n, es igual a la unidad a 22 KeV; a temperaturas inferiores el plasma se enfriaría antes de quemarse y en consecuencia no se quemaría. Afortunadamente la energía $Q\simeq17.6$ MeV liberada en la reacción de fusión

$$D + T \longrightarrow He^4 + n$$

es mucho mayor que kT a temperaturas del orden de 10 KeV. Si suponemos por el momento que (solamente) las partículas α depositan su energia, $Q_\alpha \simeq 3.5$ MeV, en el plasma, resulta

$$3n\kappa\,\frac{dT}{dt} = -C_B n^2 + \frac{1}{2}\langle\sigma v\rangle n^2 Q_\alpha\,. \qquad (4)$$

El tiempo característico

$$t_\alpha \equiv 6\kappa T/n\langle\sigma v\rangle Q_\alpha \qquad (5)$$

se hace menor que t_B cuando T sobrepasa 4.2 KeV; así pues bastaría alcanzar esa temperatura para que se produjese un calentamiento creciente y un quemado acelerado (ignición) del plasma.

Para evitar ciertas dificultades en la ignición puede ser conveniente considerar temperaturas algo más altas (digamos 10 KeV), a las cuales ya se tiene $t_\alpha \ll t_B$. Nótese a este respecto que cuando la dimensión característica del plasma es menor que el alcance λ_α de las partículas α, dado por

$$n\lambda_\alpha \simeq 2\times10^{21}\,[T(KeV)]^{3/2}\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{x^3+(T/T_0)^{3/2}} \quad cm^{-2} \qquad (6)$$

donde $kT_o \simeq 10^2$ KeV, la deposición de energía se reduce (y se hace no local); el calentamiento es menor. Por otra parte, la energía Q_α se reparte, en general, desigualmente entre iones y electrones. La reducción del valor de la integral en (6) por debajo de la unidad representa la contribución iónica al frenado de partículas α. Por ejemplo, a 10 KeV la integral está próxima a la unidad; los electrones dominan la absorción; por encima de 40 KeV la absorción es predominantemente iónica. Si el tiempo característico t_{ei}, para el intercambio energético entre ambas especies, dado por

$$n t_{ei} \simeq 3.1 \times 10^{12} \left[T(\mathrm{KeV})\right]^{3/2} \quad \mathrm{cm^{-3}\,seg} \tag{7}$$

no es suficientemente pequeño, pueden existir temperaturas cinéticas T_e y T_i diferentes. Esto también puede dificultar la ignición ya que $\langle\sigma v\rangle$ es función de T_i, y la radiación de Bremsstrahlung (que enfría a los electrones) depende de T_e.

La velocidad del sonido c_s, característica de un plasma en expansión libre al vacío, permite relacionar el tiempo de quemado (tiempo de existencia del plasma), con su tamaño inicial; el valor de c_s en D-T es $3.6 \times 10^7 \left[T(\mathrm{KeV})\right]^{1/2}$ cm/seg. Para una esfera de radio inicial R se tendrá $\tau = aR/c_s$ donde a es una constante. De (2) se obtiene

$$\tau(n,T,f) = \frac{1}{n}\,\frac{2}{\langle\sigma v\rangle}\,\frac{f}{1-f} \tag{8}$$

y por tanto

$$R(n,T,f) = \frac{1}{n}\,\frac{2\,c_s}{a\langle\sigma v\rangle}\,\frac{f}{1-f} \;. \tag{9}$$

La energía invertida en el plasma vale

$$E(n,T,f) = \frac{4}{3}\pi R^3 n\, 3\kappa T \longrightarrow \frac{1}{n^2}\,\frac{32\pi\kappa T c_s^3}{a^3\langle\sigma v\rangle^3}\left(\frac{f}{1-f}\right)^3 \tag{10}$$

y la potencia mínima requerida

$$W(n,T,f) = \frac{E}{\tau} \longrightarrow \frac{1}{n}\,\frac{16\pi\kappa T c_s^3}{a^3\langle\sigma v\rangle^2}\left(\frac{f}{1-f}\right)^2 . \tag{11}$$

Para $a=1/4$, $f=0.005$, $kT=10$ KeV y $n=10^{16}$ cm^{-3} resulta

$$\tau \simeq 9.1 \text{ mseg.}$$

$$R \simeq 42 \text{ Km} \tag{12}$$

$$E \simeq 1.5\times 10^{22} \text{ J} \tag{13}$$

$$W \simeq 1.6\times 10^{24} \text{ W.} \tag{14}$$

Los valores (12) - (14) son evidentemente desmesurados (E es mayor que el consumo anual de energía en el mundo).

En las fórmulas (8) - (11) se supuso T≈cte. Como

$$\frac{\tau}{t_\alpha} = \frac{f}{1-f}\,\frac{t_q}{t_\alpha} = \frac{f}{1-f}\,\frac{Q_\alpha}{3kT} \simeq 0.6 \tag{15}$$

el calentamiento es de hecho moderado, y será todavía menor en la medida en que λ_α sea mayor que R. Se puede tener en cuenta este efecto usando $Q_\alpha R\ (R+\lambda_\alpha)^{-1}$, en vez de Q_α, como energía depositada; el cociente (15) queda entonces reducido en el factor $(1+\lambda_\alpha/R)^{-1}$, aproximadamente 0.4 a 10 KeV. Se consideró además $T_e=T_i$. El cociente τ/t_{ei} vale 0.45 a 10 KeV y en consecuencia es posible una diferencia de temperaturas apreciable. No obstante, como el calentamiento dabido a la fusión es pequeño, T_e y T_i serán próximos si así resultan cuando se genera el plasma.

El valor 1/4 es una elección razonable para a. En una esfera de gas inicialmente uniforme, en el vacío, aparece una onda de rarefacción que avanza hacia el centro con velocidad c_s; al cabo de un tiempo aR/c_s, a=1/4, algo más de la mitad de la masa de gas ha sido alcanzada por la onda, tras la cual decrecen n y T, y por tanto decrece drásticamente el quemado. Por otra parte R, E y W serían también desmesurados si se tomase a=1.

Radio, energía y potencia decrecen con f, pero el valor f= 0.005 parece el mínimo admisible. Supongamos que la energía disponible tras el quemado, $E+E_f$,

$$E_f = \frac{4}{3}\pi R^3 n \frac{1}{2} Qf \tag{16}$$

se transforma en energía eléctrica en una máquina térmica convencional de rendimiento η_t, y que la energía eléctrica se reinvierte íntegramente en una nueva esfera de plas a. Se tendría entonces

$$(E+E_f)\eta_t = E \qquad (17)$$

$$\frac{1}{\eta_t} - 1 = \frac{E_f}{E} \longrightarrow \frac{fQ}{6\kappa T} \qquad (18)$$

y tomando η_t=0.4, kT=10 KeV, resulta f=0.005. Nótese que para esos valores de T y f, la Ec. (2) conduce a

$$n\tau \simeq 10^{14}\ cm^{-3}\ seg$$

que es el criterio de Lawson, siempre obtenido para temperaturas y rendimientos como los aquí considerados[se ha despreciado en (17) la radiación de Bremsstrahlung ya que a 10 KeV, $t_B \gg t_\alpha$].

Para valores de T que difieran de 10 KeV, la Ec. (15) muestra que, fijado η_t, $f \propto T$. Para f pequeño resulta entonces

$$R \propto T^{3/2}/\langle\sigma v\rangle \qquad (19)$$

$$E \propto T^{11/2}/\langle\sigma v\rangle^3 \qquad (20)$$

$$W \propto T^{9/2}/\langle\sigma v\rangle^2 . \qquad (21)$$

Los cocientes (19) - (21) presentan mínimos muy suaves (a temperaturas entre 10 y 20 KeV) que no difieren en más de un factor 1/2 de los valores correspondientes a 10 KeV.

En conclusión, sólo parece posible obtener fusión termonuclear controlada si se consigue dificultar sensiblemente la libre expansión del plasma al vacío (confinamiento) o se utilizan densidades tan altas que reduzcan R, E y W en (9) - (11) substancialmente ("confinamiento inercial"). En el primer caso el tiempo τ sería mucho mayor que aR/c_s, y por tanto, dado τ por (8) se tendría $R \ll c_s\tau/a$; radio, energía y potencia podrían tomar quizá valores razonables. Para n= 10^{16} cm^{-3}, y a 10 KeV, la presión del plasma vale 330 atm. Esta parece ser, por otra parte, la máxima presión magnética alcanzable prácticamente; en consecuencia, la máxima densidad confinable mediante campos magnéticos (el método universalmente considerado) es justamente del orden de 10^{16} cm^{-3}. Densidades menores presentan el inconveniente de que el tiempo τ, exigido por (8), debe ser mayor, y la ventaja de que, siendo la presión menor, el campo puede permear el plasma, lo que reduce inestabilidades que afectan al confinamiento. En la actualidad no se consideran densidades inferiores a 10^{13} cm^{-3}.

Fuera del intervalo, digamos, 3×10^{13} - 3×10^{16} cm^{-3}, hay que considerar el confinamiento inercial. La máxima densidad fácilmente obtenible (criogénicamente) es la del estado sólido, $n_s \simeq 5\times10^{22}$ cm^{-3}, a la cual, si kT=10 KeV y f=0.005

$$\tau \simeq 1.8 \text{ nseg}$$
$$R \simeq 0.83 \text{ cm}$$
$$E \simeq 0.58\times10^{9} \text{ J}$$
$$W \simeq 3.2\times10^{17} \text{ W}.$$

Otra cantidad a considerar a tales densidades es el flujo de energía

$$\phi = W/4\pi R^2 \longrightarrow n\, c_s kT/a \qquad (22)$$

que crece con n. Para $n=n_s$, resulta $\phi \simeq 4\times10^{16}$ W/cm^2.

Es posible tener intensidades de ese orden en pulsos láser de alta potencia. Sin embargo son todavía excesivos tanto E (no en general pero sí para un pulso láser) como W. Por otra parte el rendimiento η_L de transformación de energía eléctrica en energía del láser es bajo, lo que afecta al balance (18): E_f/E y por tanto la fracción de quemado aumentan. Eso conduce a valores de E y W todavía mayores. En definitiva, la densidad n_s no es suficientemente alta.

I.B.- Confinamiento inercial mediante un pulso láser

Parece posible llevar un blanco sólido de D-T a densidades muy superiores a n_s, mediante el mismo pulso láser que lo calienta. Desgraciadamente el rendimiento energético η_c del proceso de compresión es, como se verá, bajo, lo que exige mayores valores de la energía del láser, $E_L=E/\eta_c$ y del cociente E_f/E,

$$(E_f+E)\eta_t\eta_L\eta_c = E \longrightarrow \frac{E_f}{E} = \frac{1}{\eta_t\eta_L\eta_c} - 1 \simeq \frac{1}{\eta_t\eta_L\eta_c} \; ; \quad (23)$$

un inconveniente adicional es que la intensidad ϕ crece con n, según muestra (22). Sin embargo las ventajas de un incremento substancial de n son todavía más notables. En primer lugar, de acuerdo con (10) y (11), se produce una fuerte reducción de los valores de E y W. En segundo lugar, la reducción puede ser tan intensa que permita considerar valores de f muy superiores a 0.005. Para f pequeño y creciente se tiene, de (8), (9) y (16),

$$R \propto \tau \propto f \,, \qquad\qquad E_f \propto f^4$$

mientras que, por encima de un cierto valor f_p, la Ec. (10) deja de ser válida: E crece con f más lentamente. En consecuencia, para $f>f_p$, el cociente E_f/E no es, como indica (18), proporcional a f sino que aumenta más aprisa; esto hace más fácil el satisfacer la Ec. (23). Finalmente, por encima de f_p ϕ decrece al aumentar f, ya que $\phi \propto E/R^2\tau \propto E/f^3$: la intensidad requerida es menor que la dada por (22).

La razón por la que el crecimiento de E con f se hace más débil por encima de un cierto valor es que τ/t_α, y por tanto el calentamiento, crecen con f. Si la esfera de plasma a temperatura T no está en el vacío sino rodeada de D-T frío, se puede producir la ignición de éste, en la zona vecina al plasma caliente, donde se libera energía; se inicia así la propagación de una onda o frente de quemado por toda la masa combustible. Se puede estimar f_p por la condición

$$\frac{\tau}{t_\alpha} = \frac{Q_\alpha}{3kT}\,\frac{f_p}{1-f_p} \simeq 1 \,.$$

De (5), (8) y (9) se obtiene

$$\tau/t_\alpha = a\,Q_\alpha \langle\sigma v\rangle n R_p / 6kTc_s \simeq 1$$

ecuación que da el radio mínimo R_p de plasma caliente que permite propagar la ignición. Un análisis detallado por Linhart conduce a la condición $\tau/t_\alpha \simeq 1.05$. Tomando Q_α en vez de $Q_\alpha R_p(R_p+\lambda_\alpha)^{-1}$ como energía depositada por cada partícula α, nR_p viene dada, como función de T por la ecuación

$$\frac{(nR_p/n\lambda_\alpha)^2}{1+(nR_p/n\lambda_\alpha)} = G(T) \equiv \frac{6kTc_s}{a\,Q_\alpha\langle\sigma v\rangle n\lambda_\alpha}\,. \qquad (24)$$

G(T) tiene un mínimo suave, algo menor que la unidad, a las temperaturas de interés por lo que R_p es siempre del orden de λ_α.

Para $f>f_p$ (o $R>R_p$) se tiene

$$E = \frac{4}{3}\pi R_p^3\, n\, 3kT \; + \; E(R_p<r<R) \qquad (25)$$

donde $E\,(R_p<r<R)$ es la energía del D-T frío más allá de R_p. Esa energía no es nula: hay que realizar un trabajo para comprimir el medio hasta la densidad $n>n_s$. En cualquier medio la energía interna crece, a volumen constante, con la entropía, y por otra parte la entropía específica s es enteramente despreciable en el D-T criogénico; en consecuencia, la compresión debe ser isentrópica: se tendrá $s\simeq 0$ y por tanto $T\simeq 0$ durante el proceso. Para n suficientemente grande y temperatura nula la energía cinética electrónica es mucho mayor que la de interacción culombiana, y el D-T se comporta como un gas ideal, degenerado, de electrones; la energía interna por unidad de volumen toma la forma simple $n(3/5)\,k\,T_F$, donde

$$T_F(n) = T_{Fs}\,\frac{n^{2/3}}{n_s^{2/3}} \qquad \left[kT_{Fs} \equiv kT_F(n_s) \simeq 4.9 \text{ eV}\right]$$

es la temperatura de Fermi. Para $n \ll 10^6\, n_s$ y $kT=10$ KeV, se tiene $\frac{3}{5}k\,T_F \ll 3kT$, y en consecuencia el valor de E en (25) puede ser mucho menor que $\frac{4}{3}\pi R^3\, n\, 3kT$.

La absorción de luz láser en el D-T va acompañada de generación de entropía y calentamiento. Debido a esto es necesario que la frecuencia ω de la luz sea mayor que la frecuencia de plasma a la densidad n_s, $\omega_{pe}(n_s) \equiv (4\pi e^2 n_s/m_e)^{1/2}$, o de otro modo, que la llamada densidad crítica

$$n_c(\omega) \equiv m_e \omega^2/4\pi e^2 \tag{26}$$

sea menor que n_s (blanco sobredenso). Se encuentra que en tales condiciones hay una superficie (de ablación) bien definida que separa su interior denso y frío -lo que define el "blanco" en cada instante- del exterior, donde ocurre la absorción: una corona de gas ionizado (con altos valores de T y s), formada por D-T que ha cruzado la superficie de ablación y escapa al vacío. El rendimiento η_c es bajo porque solo una pequeña parte de la fracción de E_L absorbida en la corona es transportada al blanco.

Como la luz no alcanza el interior del blanco, el calentamiento de la zona central de radio R_p, que ha de existir al final de la compresión (cuando el blanco tiene densidad n y radio R y empieza el quemado), debe producirse de modo indirecto. Nótese, a este respecto que el proceso de compresión debe ser rápido a) por el continuo escape de masa a la corona, y b) porque, como veremos más adelante, es preciso consumir potencia simplemente para mantener en la superficie de ablación la presión P_a necesaria. En el rápido movimiento convergente (implosión) que se produce en el blanco se genera en algún momento una onda de choque: una capa delgada, con fuertes gradientes, donde hay producción de entropía y calentamiento intensos. Debe así evitarse la formación de esa onda de choque hasta que la implosión llegue a una distancia del centro apropiada; el calentamiento subsiguiente a través de la onda y el persistente movimiento convergente dan lugar a la zona central de ignición. *

Es claro que al final de la implosión la densidad del blanco no es uniforme, y debe entenderse el valor n utilizado en ecuaciones precedentes como un valor medio conveniente, una aproximación ra zonable en la presente discusión. Por el contrario, es fundamental para la discusión el que la energía interna por unidad de volumen, en la región exterior del blanco ($R_p < r < R$) sea mucho menor que $n\,3kT$: debe estimarse $E(R_p < r < R)$ con un cierto grado de aproximación. En simulaciones numéricas se encuentra que la temperatura en esa región decae como r^{-2} desde el valor T para $r = R_p$. En consecuencia se tiene

$$E(R_p < r < R) = n \int_{R_p}^{R} 4\pi r^2 dr \times \text{Máximo} \left\{ 3kT\left(\frac{R_p}{r}\right)^2, \ \frac{3}{5}k\left[T_F(n) - T_{FS}\right] \right\}. \qquad (27)$$

Se ha escrito $T_F - T_{FS}$ en vez de T_F para que se anule la energía interna a temperatura nula y densidad n_s, aunque de hecho la expresión (27) sólo es válida si $n \gg n_s$ (cuando el D-T frío es un gas ideal degenerado).

La ecuación (18) permitía escribir τ, R, E, W, E_f y ϕ en (8)-(11), (16) y (22), en función de n, T y η_t. De igual modo, se pueden ahora escribir aquellas cantidades en función de n, T y $\eta_t\,\eta_L\,\eta_c$; las ecuaciones (25) y (27), y (23) sustituyen a (10) y (18), y $W = E/\tau$ y $\phi = W/4\pi R^2$ se modifican consecuentem nte. Se puede utilizar E en lugar de $\eta_t\,\eta_L\,\eta_c$ como variable independiente, junto a n y T. Reescribiendo (25) en la forma

$$E = E_o(T)\left(\frac{n_s}{n}\right)^2\left[1 + \frac{E(R_p < r < R)}{E_o(T)\,(n_s/n)^2}\right]$$

donde

$$E_o(T) \equiv \frac{4}{3}\pi \frac{(nR_p)^3\, 3kT}{n_s^2} \qquad (28)$$

resulta de (27)

$$E = E_o(T)\left(\frac{n_s}{n}\right)^2 \left[\frac{R}{R_p}\, g(x) - 2\right] \qquad (29)$$

$$\left.\begin{aligned} g(x) &= 3 & x<1 \\ &= x + 2/x^{1/2} & x>1 \end{aligned}\right\} \quad x = \left(\frac{R}{R_p}\right)^2 \frac{(n/n_s)^{2/3} - 1}{5T/T_{FS}} .$$

Esta ecuación da R/R_p en función de n, T y E y de ahí se obtiene

$$R(n, T, E) = \frac{1}{n}\, nR_p\, \frac{R}{R_p}$$

En lo que sigue pondremos $(n/n_s)^{2/3} - 1 \simeq (n/n_s)^{2/3}$.

La ecuación (23) se puede poner en la forma

$$\frac{1}{\eta_t \eta_L \eta_c} \simeq \frac{E_f}{E} = \frac{E_0(T)}{E}\left(\frac{n_s}{n}\right)^2 \frac{Q}{6\kappa T}\left(\frac{R}{R_p}\right)^3 f \ .$$

Definiendo $\bar{n}=n/n_r$ donde

$$n_r \equiv 5^{3/14} \times 3^{3/7}\left(\frac{T}{T_{FS}}\right)^{3/14}\left[\frac{E_0(T)}{E}\right]^{3/7} n_s$$

y usando (9), reescrito

$$f(n,T,E) = \frac{R/R_p}{R/R_p \ + \ 2C_s/a\langle\sigma v\rangle n R_p}$$

junto con (29), se obtiene

$$\frac{E_f}{E} = \frac{5^{6/7}}{6\times 3^{9/7}}\ \frac{Q}{\kappa T_{FS}}\left(\frac{T_{FS}}{T}\right)^{1/7}\left[\frac{E}{E_0(T)}\right]^{2/7}\ \frac{F^4\ \bar{n}^{-3}}{F+\nu\bar{n}^{1/3}} \qquad (30)$$

siendo

$$F(\bar{n},\epsilon) = \bar{n}^{7/3} + \epsilon\,\bar{n}^{1/3} \qquad F<1 \qquad (31a)$$

$$= \left[3(\bar{n}^{7/3} + \epsilon\,\bar{n}^{1/3} - 2\right]^{1/3} \qquad F>1 \qquad (31b)$$

y

$$\epsilon = \frac{2}{3^{2/7}\times 5^{3/7}}\left(\frac{T_{FS}}{T}\right)^{3/}\ \left[\frac{E_0(T)}{E}\right]^{1/7} \qquad (32)$$

$$\nu = 3C_s\,\epsilon\,/\,a\ \langle\sigma v\rangle n R_p \ . \qquad (33)$$

De particular interés es el cociente $E_F/E_L \simeq 1/\eta_t\,\eta_L$,

$$\frac{E_f}{E_L} = 0.58\times 10^6\ \eta_c^{9/7}\left[\frac{E_L}{E_0(T)}\right]^{2/7}\left(\frac{T_{FS}}{T}\right)^{1/7}\ \frac{F^4\ \bar{n}^{-3}}{F+\nu\bar{n}^{1/3}} \ . \qquad (34)$$

La función

$$\eta(\bar{n},\epsilon,\nu) \equiv \frac{F^4\ \bar{n}^{-3}}{F+\nu\,\bar{n}^{1/3}}$$

presenta un máximo, fijados ϵ y ν, para un cierto valor de $\bar{n}$ [el comportamiento $\eta \rightarrow \infty$ cuando $\bar{n}\rightarrow 0$ no es válido y se debe al uso de la expresión $n\frac{3}{5}k\,T_F(n)$ como energía interna por unidad de volumen, para valores de n inapropiados]. En consecuencia, fijados T, η_c y E_L, la ganancia E_f/E_L presenta un máximo para un cierto n. La Fig. 1 muestra la ganancia en función de n. para $\eta_c = 0.05$, T=15 KeV y varios valores de E_L; existe muy buen acuerdo con curvas similares de Nuckolls (ver bibliografía), donde se tienen en cuenta resultados de complejas simulaciones numéricas.

Llamando $\bar{n}_{opt}$ al valor que hace máximo η se tiene

$$\eta_{max}(\nu,\epsilon) \equiv \eta[\bar{n}_{opt}(\nu,\epsilon),\nu,\epsilon] .$$

El parámetro $\epsilon \propto (\eta_c E_L)^{-1/7}$, prácticamente constante en el intervalo 10-35 KeV, es pequeño (0.1, 0.2) para todos los valores de interés; η_{max}, representado en la Fig. 2, depende débilmente de ϵ: $\eta_{max} \simeq \eta_{max}(\nu,\epsilon=0)$. En la Fig. 3 se representa la ganancia máxima

$$\left.\frac{E_f}{E_L}\right|_{max} \propto \left[\frac{\eta_c^{9/2}\, E_L}{T^{1/2}\, E_c(T)}\right]^{2/7} \eta_{max}(\nu,\epsilon=0.1)$$

en función de T, para $\eta_c=0.05$ y $E_L=10^6$ J; hay un máximo para T≃25 KeV. Nótese que fijado T, la ganancia máxima depende débilmente de E_L: $E_f/E_L|_{max} \propto E_L^{2/7}$ [para $\nu \gtrsim 0(1)$, $\eta_{max} \propto \nu^{-1} \propto (\eta_c E_L)^{1/7}$, y se tiene $E_f/E_L|_{max} \propto E_L^{3/7}$]. La dependencia con η_c es mucho más fuerte ($\eta_c^{9/7}$ o $\eta_c^{10/7}$): es importante optimizar el flujo de energía en la corona durante el proceso de compresión.

En la Fig. 2 se representa $\bar{n}_{opt}(\nu,\epsilon)$ para $\epsilon=0.1$, 0.2; $\bar{n}_{opt}$ es próximo a 2 en todos los casos de interés. En consecuencia, en $n_{opt}/n_s \equiv (n_r/n_s)\,\bar{n}_{opt}$, se tiene

$$\frac{n_{opt}}{n_s} \propto \frac{n_r}{n_s} \propto \left[\frac{T^{1/2}\, E_c(T)}{\eta_c\, E_L}\right]^{3/7} .$$

Nótese que $n_{opt} \propto (\eta_c E_L)^{-3/7}$. La Fig. 3 muestra por otra parte que n_{opt}/n_s crece rápidamente cuando $E_f/E_L|_{max}$ es máximo.

Consideremos finalmente las hipótesis de que el plasma es transparente a la radiación de Bremsstrahlung que emite y a los neutrones de fusión. El camino libre medio neutrónico es en general grande comparado con λ_α, por lo que es claro que en confinamiento magnético los neutrones escapan siempre del plasma; por el contrario, en confi

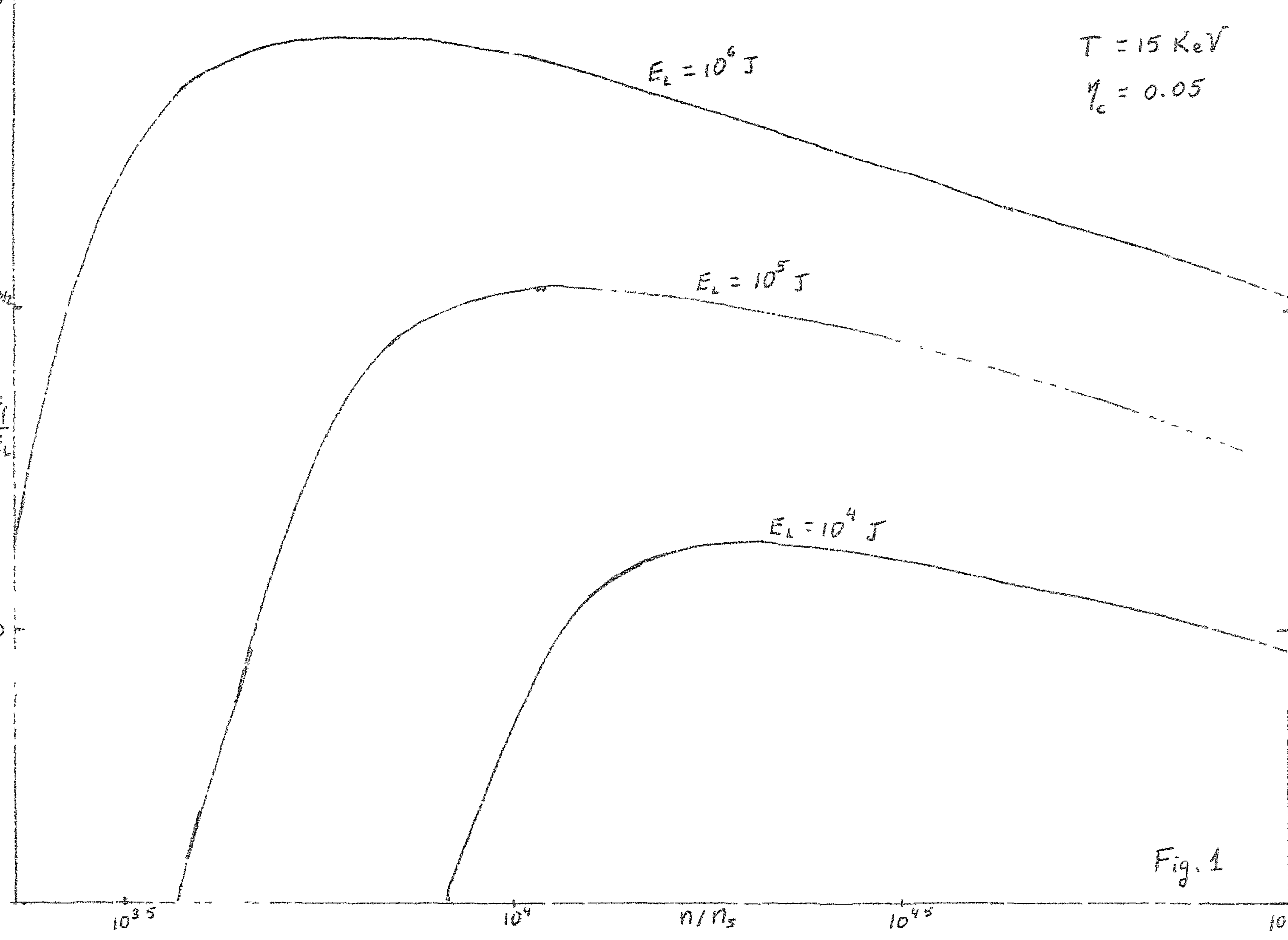


Fig. 1

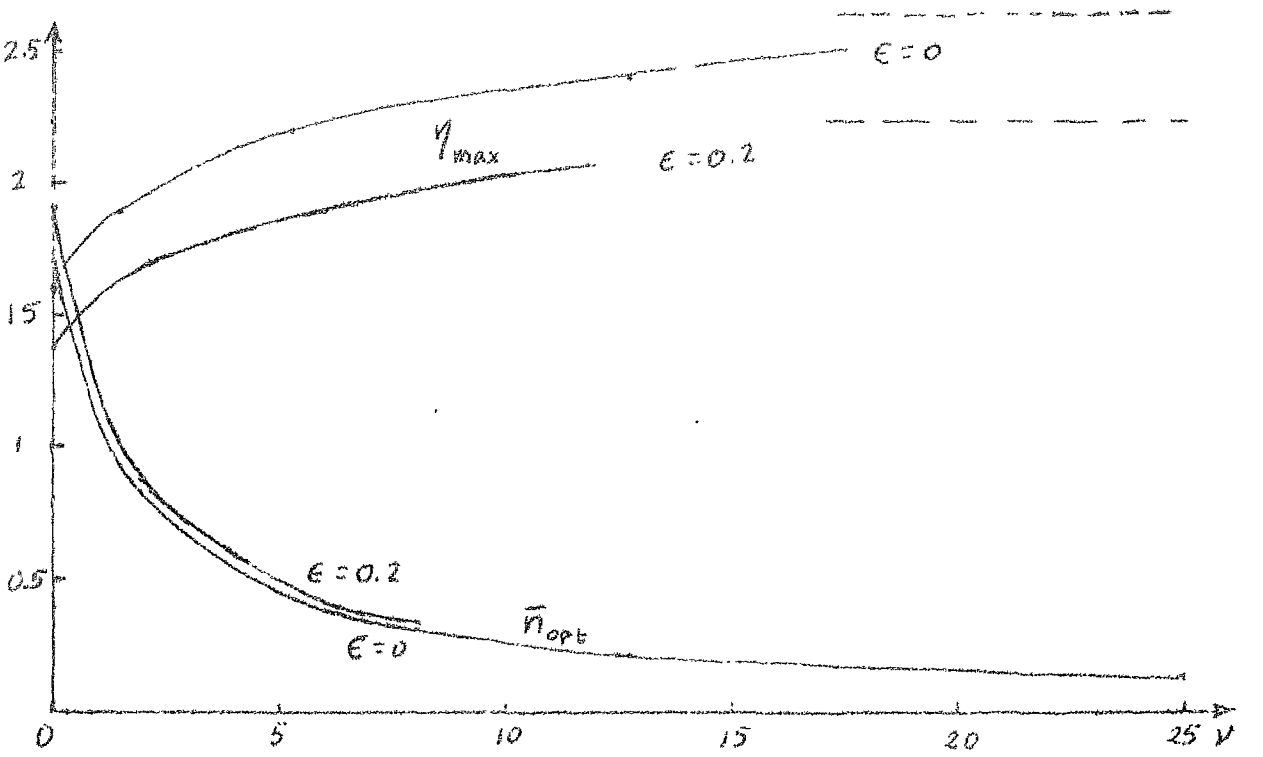

2.5
2
1.5
1
0.5
0
5
10
15
20
25 ν
ε = 0
ε = 0.2
η_max
ε = 0.2
ε = 0
n̄_opt

Fig. 2

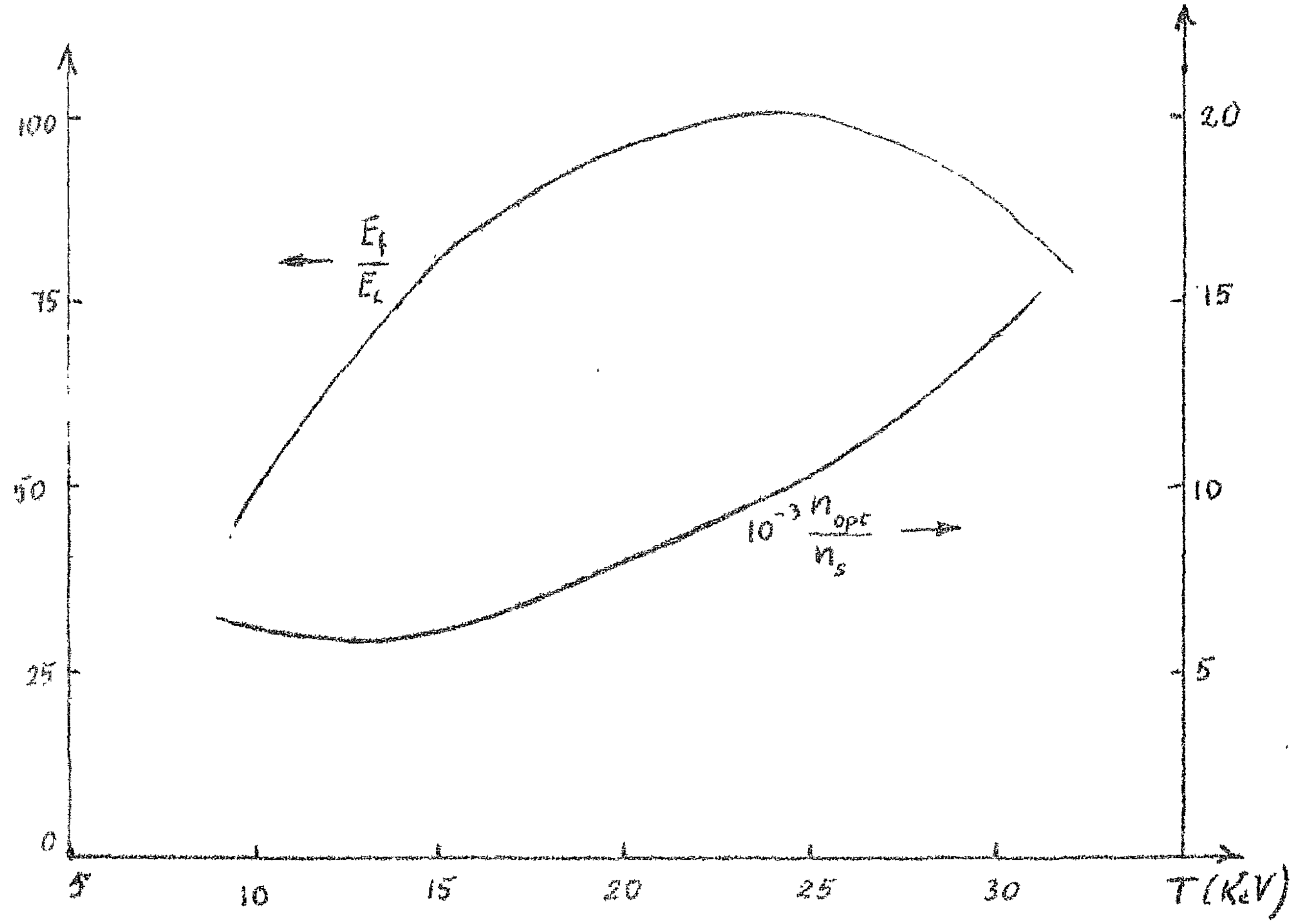

100
75
50
25
0
20
15
10
5
E_f / E_L
10^-3 n_opt / n_s
5
10
15
20
25
30
T (KeV)

Fig. 3

namiento inercial, cuando R/R_p se hace suficientemente grande ($R_p > \lambda_\alpha$) toda la energía de fusión Q, y no Q_α se deposita en el plasma lo cual facilita la ignición. En cuanto a la absorción de radiación (un proceso ternario), esta puede ser apreciable cuando n^2R excede un cierto valor; de nuevo puede este efecto ayudar a la ignición en el caso de confinamiento inercial, a altas densidades.

II.A. Compresión unidimensional. Pulso de intensidad constante

Para comprender el proceso de compresión, consideremos un problema unidimensional y supongamos que el medio es un gas ideal, en general. Las ecuaciones de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía en un fluído ideal toman la forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\rho v = 0, \qquad (35)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v^2 + P) = 0, \qquad (36)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(e_i + \tfrac{1}{2}v^2) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho v(e_i + \tfrac{1}{2}v^2) + Pv\right] = \Phi . \qquad (37)$$

Se han introducido la densidad másica ρ (en vez de la densidad de partículas n) y la energía por unidad de tiempo y volumen depositada en el medio, Φ. Conviene utilizar como tercera variable, junto a ρ y a la velocidad v, el cuadrado de la velocidad del sonido, $c^2 = \partial P/\partial \rho|_s$; para un gas ideal, la presión P, y la energía interna e_i y entropía s específicas toman la forma

$$P = \frac{\rho c^2}{\gamma}, \quad e_i = \frac{c^2}{\gamma(\gamma-1)}, \quad s \propto \ln\frac{c^2}{\rho^{\gamma-1}} .$$

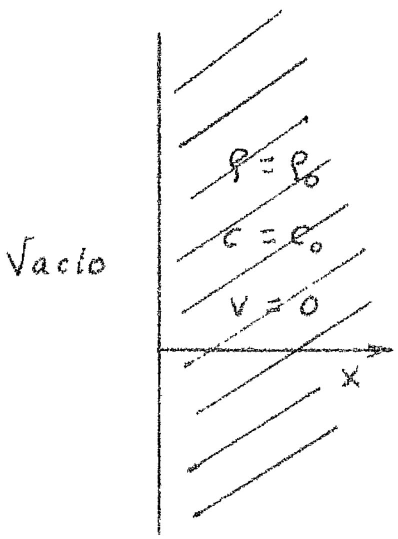
Se tiene además $T \propto c^2$. Las ecuaciones (35)-(36) se pueden reescribir introduciendo el operador $D/Dt \equiv \partial/\partial t + v\,\partial/\partial x$:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\frac{\partial v}{\partial x} \tag{35a}$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \tag{36a}$$

$$\rho\left(\frac{De_i}{Dt} + P\frac{D}{Dt}\frac{1}{\rho}\right) \equiv \rho T\frac{Ds}{Dt} = \Phi \;. \tag{37a}$$

Consideremos el semiespacio x>0 ocupado en t=o por un gas con valores $\rho=\rho_0$, $c=c_0$ y $v=0$; a la izquierda hay vacío. Cuando $\Phi\equiv 0$



las ecuaciones (35a)-(37a), admiten solución de semejanza, bien conocida. Definiendo

$$\eta=\frac{x}{c_0 t}\;,\quad \hat{\rho}=\frac{\rho}{\rho_0}\;,\quad \hat{c}=\frac{c}{c_0}\;,\quad \hat{v}=\frac{v}{c_0} \tag{38}$$

se obtiene

$$(\hat{v}-\eta)\frac{d\hat{\rho}}{d\eta} = -\hat{\rho}\frac{d\hat{v}}{d\eta} \tag{39}$$

$$(\hat{v}-\eta)\frac{d\hat{v}}{d\eta} = -\frac{\hat{c}^2}{\hat{\rho}}\frac{d\hat{\rho}}{d\eta} \tag{40}$$

$$\frac{d}{d\eta}\frac{\hat{c}^2}{\hat{\rho}^{\gamma-1}} = 0 \;. \tag{41}$$

El sistema (39)-(41) presenta dos tipos de soluciones:

$$\left.\begin{aligned} &\hat{v}-\eta = \mp\hat{c} \\ &\eta \mp \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\hat{c} = cte \\ &\frac{\hat{c}^2}{\hat{\rho}^{\gamma-1}} = cte \end{aligned}\right\} (42\,a) \qquad\qquad \left.\begin{aligned} &\hat{c} = cte \\ &\hat{v} = cte \\ &\hat{\rho} = cte \end{aligned}\right\} (42\,b)$$

Con las condiciones de contorno

$$\hat{\rho}=1\;,\quad \hat{v}=0\;,\quad \hat{c}=1 \qquad \text{en } \eta=\eta_f$$
$$\hat{\rho}=0\;,\quad \hat{v}=\eta_v \qquad \text{en } \eta=\eta_v$$

donde η_f es la posición del frente que avanza en el gas no perturbado, y η_v señala la frontera gas-vacío, que avanza con la velocidad del fluído local, resulta (Fig. 4)

$$\eta_f = 1 , \qquad \eta_v = -\frac{2}{\gamma-1}$$

$$\hat{c} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(\eta + \frac{2}{\gamma-1}\right), \quad \hat{v} = -\frac{2}{\gamma+1}(\eta-1) , \qquad \hat{\rho} = \hat{c}^{\,2/(\gamma-1)} ;$$

de $\eta_f=1$ se obtiene $x_f=c_o t$: el frente avanza con la velocidad del sonido (perturbación débil).

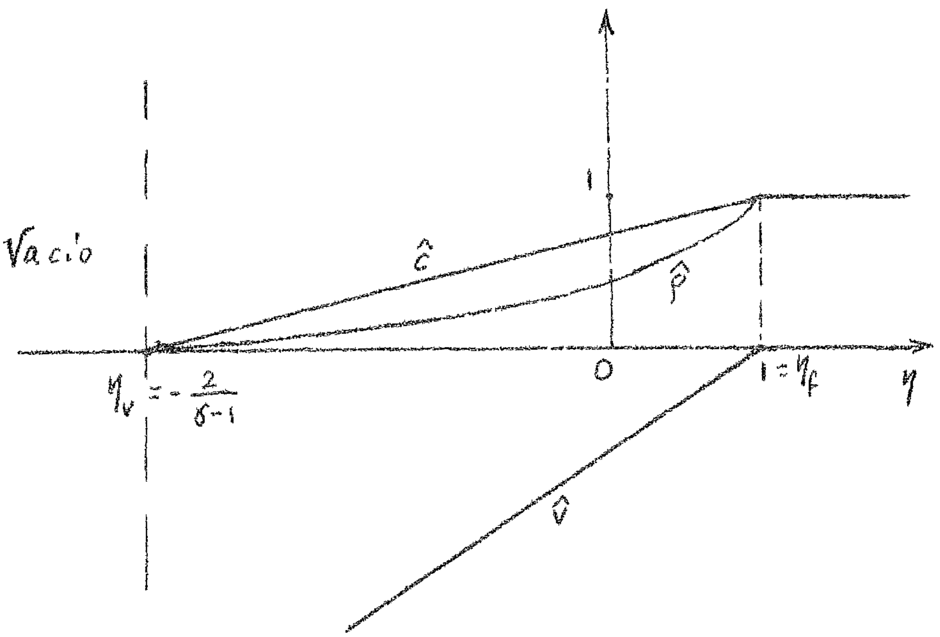


Fig. 4

Supongamos ahora que hay deposición de energía, pero sólo en una capa delgada, de espesor despreciable, de modo que

$$\Phi = \phi_o\,\delta(x-x_D) \qquad (44)$$

donde $\phi=\phi_o$=cte es la energía depositada por unidad de área y tiempo. Supondremos conocido no x_D sino $\rho_- \equiv \rho(x_D-0)$. Existirán discontinuidades en las magnitudes fluídas de x_D-0 (subíndice -) a x_D+0 (subíndice +). Rearreglando (39) se tiene

$$\frac{d}{d\eta}\,\hat{\rho}(\hat{v}-\eta) = -\hat{\rho} ,$$

ecuación que se puede obtener directamente, usando (38) en (35). A través de la capa delgada en $\eta_D \equiv x_D/c_o t$,

$$\hat{\rho}(\hat{v}-\eta_D)\Big|_-^+ = -\int_{\eta_D-}^{\eta_D+} \hat{\rho}\, d\eta \simeq 0 . \qquad (45)$$

De igual modo se obtiene

$$\left[\hat{\rho}\,(\hat{v}-\eta_D)^2 + \frac{\hat{\rho}\,\hat{c}^2}{\gamma}\right]\Bigg|_-^+ \simeq 0 \tag{46}$$

$$\hat{\rho}\,(\hat{v}-\eta_D)\left[\frac{1}{2}(\hat{v}-\eta_D)^2 + \frac{\hat{c}^2}{\gamma-1}\right]\Bigg|_-^+ \simeq \hat{\phi}_o \equiv \frac{\phi_o}{\rho_o c_o^3} \; . \tag{47}$$

A derecha e izquierda de la discontinuidad se tendrán soluciones de los tipos (42a) o (42b). Un examen cuidadoso permite comprobar que a la derecha, pero no a la izquierda, debe existir una región donde se cumpla (42b). Por tanto

$$\hat{v}_- - \eta_D = -\hat{c}_- \tag{48}$$

Si se escribe

$$\hat{v}_+ - \eta_D = -\mu\,\hat{c}_+ \tag{49}$$

donde μ es desconocido, las ecuaciones (45)-(49) permiten determinar $\hat{\rho}_+$, $\hat{c}_+$, $\hat{c}_-$, $\hat{v}_+-\eta_D$ y $\hat{v}_--\eta_D$ en función de $\hat{\rho}_-\equiv\rho_-/\rho_o$, $\hat{\phi}_o$, γ y μ. En particular se obtiene

$$\hat{\rho}_+ = \frac{1+\gamma\mu^2}{(1+\gamma)\mu^2}\,\hat{\rho}_- \qquad\qquad \hat{c}_+ = \left[\frac{2(\gamma^2-1)\mu^2}{(1-\mu^2)^2}\;\frac{\hat{\phi}_o}{\hat{\rho}_+}\right]^{1/3} . \tag{50}$$

Se podría determinar μ si se conociese una relación del tipo $\hat{\rho}_+(\hat{c}_+)$; si la región uniforme a la derecha de η_D empalma con el gas no perturbado a través de la solución usual (43), resulta obviamente

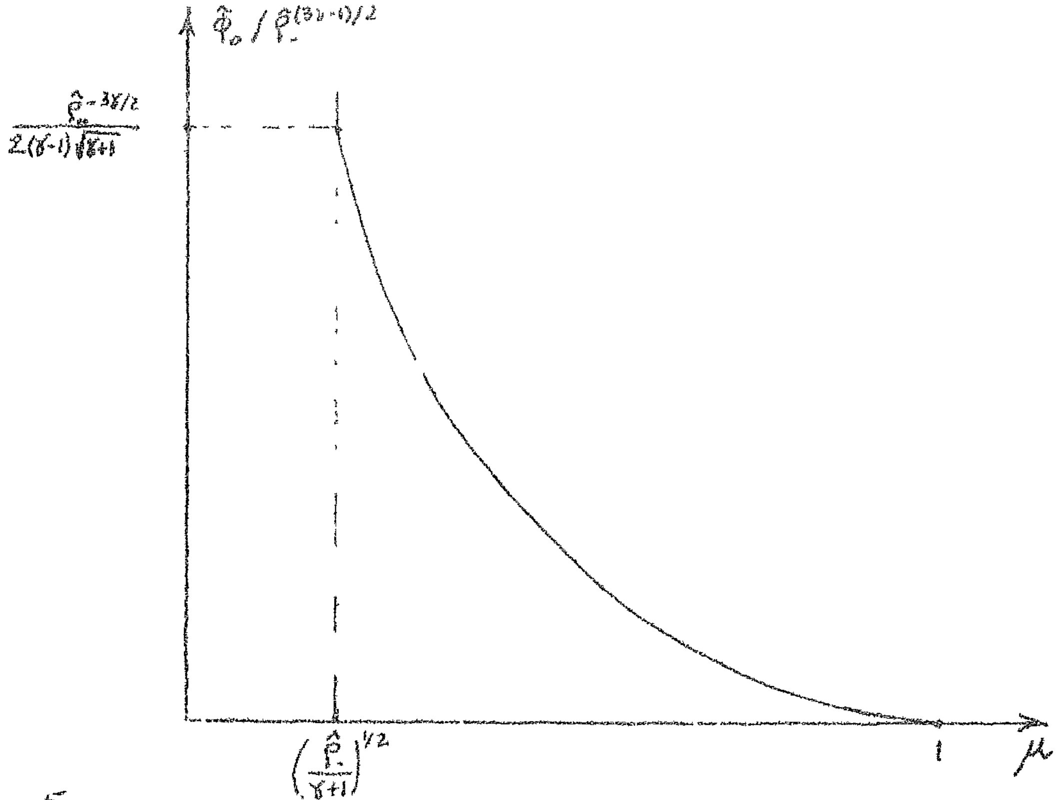
$$\hat{\rho}_+ = \hat{c}_+^{\,2/(\gamma-1)} \; . \tag{51}$$

De (50) y (51) se encuentra $\mu(\hat{\phi}_o, \hat{\rho}_-, \gamma)$, dado por

$$\frac{\hat{\phi}_o}{\hat{\rho}^{(3\gamma-1)/2}} = \frac{(1-\mu^2)^2}{2(\gamma^2-1)\mu}\left[\frac{1+\gamma\mu^2}{(\gamma+1)\mu^2}\right]^{(3\gamma-1)/2} \tag{52}$$

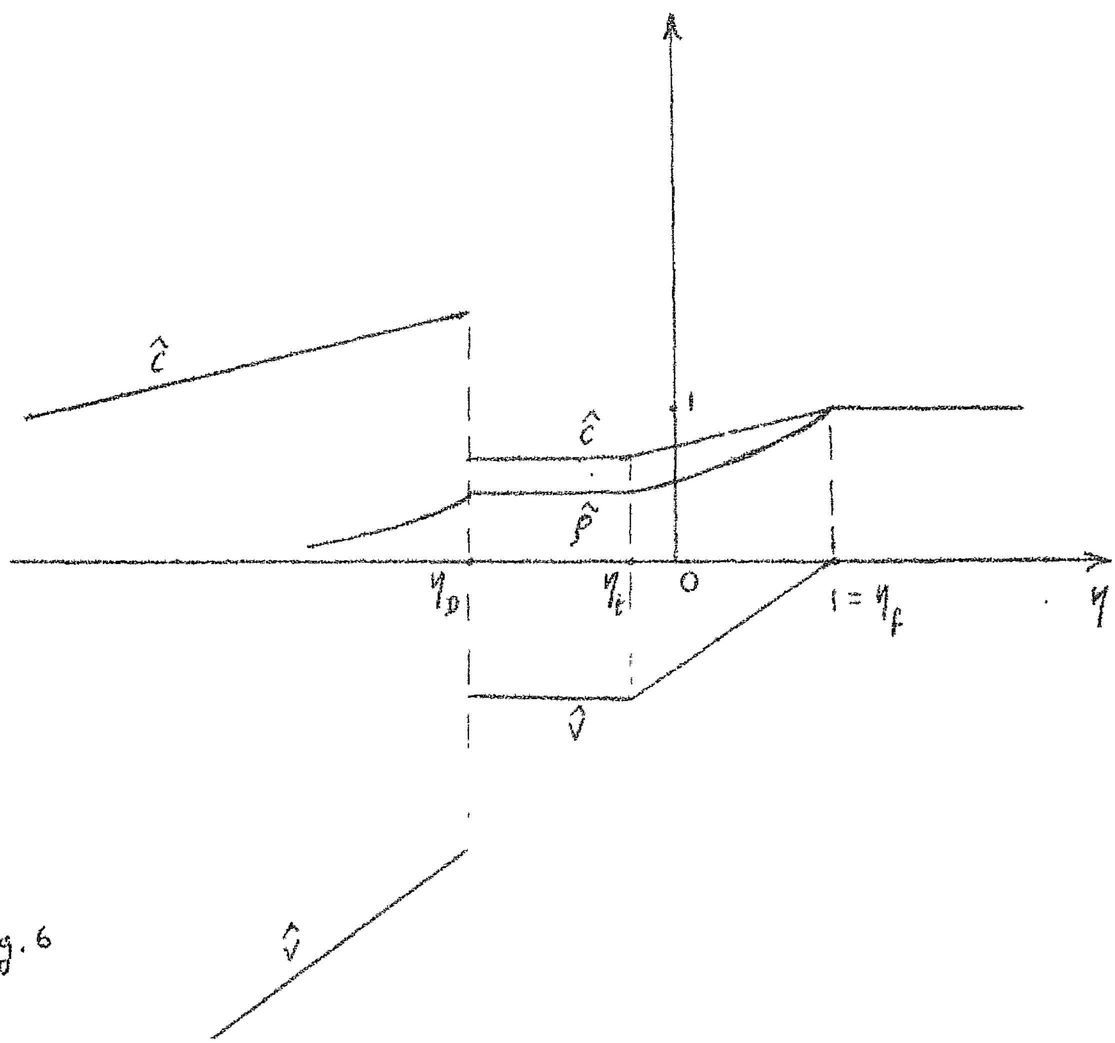
representado esquemáticamente en la Fig. 5.

Las ecuaciones (43) para $\hat{c}$ y $\hat{v}$ permiten determinar el punto de empalme η_t con la región uniforme, y $\hat{v}_+$, lo cual conduce a η_D, $\hat{v}_+$ y $\hat{v}_-$, y completa la solución, representada en la Fig. 6.



$\hat{\varphi}_o / \hat{\rho}_-^{(3\gamma-1)/2}$
$\frac{\hat{\rho}_{\infty}^{-3\gamma/2}}{2(\gamma-1)\sqrt{\gamma+1}}$
$\left(\frac{\hat{\rho}_-}{\gamma+1}\right)^{1/2}$
1
μ

Fig. 5



$\hat{c}$
$\hat{c}$
1
$\hat{\rho}$
η_D
η_t
0
$1 = \eta_f$
η
$\hat{v}$
$\hat{v}$

Fig. 6

Nótese que al crecer $\hat{\phi}_o$ ($\hat{\rho}_-$ fijado) decrece μ desde el valor $\mu=1$ para $\hat{\phi}_o=0$ (se demuestra que la condición $\eta_D<\eta_t$ corresponde a $\mu<1$), y crece $\hat{\rho}_+$. Cuando $\hat{\rho}_+=0(1)$, y si $\hat{\rho}_-\ll 1$, se tiene $\mu\ll 1$ y de (50) y (52) resulta

$$\hat{\rho}_+ \simeq \left[4(\gamma-1)^2(\gamma+1)\hat{\rho}_-\hat{\phi}_o^2\right]^{1/5} .$$

Para $\hat{\rho}_+=1$ se obtiene

$$\hat{\phi}^2\hat{\rho}_- \simeq \frac{1}{4(\gamma-1)^2(\gamma+1)} \qquad \left(\mu^2\simeq\frac{\hat{\rho}_-}{\gamma+1}\right).$$

Para intensidades mayores, no existe solución de la forma estudiada: aparece una onda de choque que avanzará supersónicamente ($\eta_f>1$).

Las ecuaciones (45)-(47) son válidas a través de la onda de choque sin más que hacer cero el lado derecho de (47); en consecuencia se obtiene

$$\hat{\rho}(\hat{v}-\eta_f)\Big|_-^+ = 0 \tag{53}$$

$$\left[\hat{\rho}(\hat{v}-\eta_f)^2+\frac{\hat{\rho}\hat{c}^2}{\gamma}\right]\Big|_-^+ = 0 \tag{54}$$

$$\left[\frac{1}{2}(\hat{v}-\eta_f)^2+\frac{\hat{c}^2}{\gamma-1}\right]\Big|_-^+ = 0 . \tag{55}$$

Si se conoce uno de los valores η_f, $\hat{\rho}_f\equiv\hat{\rho}(\eta_f-0)$, $\hat{v}_f\equiv\hat{v}(\eta_f-0)$, $\hat{c}_f\equiv\hat{c}(\eta_f-0)$, el sistema (53)-(55) permite determinar los otros tres ya que en η_f+0 se tiene evidentemente $\hat{v}=0$, $\hat{\rho}=1$, $\hat{c}=1$. Así pues se puede obtener una relación entre dos cualesquiera de esos cuatro valores, en particular

$$\hat{c}_f^2 = \frac{(\gamma+1)(\gamma-1)^{-1}-\hat{\rho}_f^{-1}}{(\gamma+1)(\gamma-1)^{-1}-\hat{\rho}_f} . \tag{56}$$

En la región $\eta_D<\eta<\eta_f$ entre superficie de deposición de energía y onda de choque, la solución apropiada es del tipo (42b). Por tanto

$$\hat{c}_+=\hat{c}_f \; , \quad \hat{\rho}_+=\hat{\rho}_f \; , \quad \hat{v}_+=\hat{v}_f \; .$$

La Ec. (56) proporciona la relación $\hat{\rho}_+(\hat{c}_+)$ que junto con (50) permiten obtener $\mu(\hat{\phi}_o, \hat{\rho}_-, \gamma)$. Como μ es pequeño $[\mu < \hat{\rho}_-^{1/2}(1+\gamma)^{-1/2}]$, se tiene aproximadamente

$$\hat{\rho}_+ \simeq \frac{\hat{\rho}_-}{(\gamma+1)\mu^2} \quad , \qquad \hat{c}_+ \simeq \left[2(\gamma^2-1)\mu\,\frac{\hat{\phi}_o}{\hat{\rho}_+}\right]^{1/3}$$

y finalmente

$$4(\gamma+1)(\gamma-1)^2\,\hat{\phi}_o^2\,\hat{\rho}_- \simeq \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{\mu^2(\gamma+1)}{\hat{\rho}_-}\right]^3 \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\,\frac{\mu^2(\gamma+1)}{\hat{\rho}_-} - 1\right]^{-3}$$

expresión que se representa en la Fig. 7. El comportamiento de la solución se representa en la Fig. 8.

Cuando $\hat{\phi}_0 \to \infty$, $\mu^2 \to (\gamma-1)(\gamma+1)^{-2}\hat{\rho}_-$ y $\hat{\rho}_+ \to (\gamma+1)(\gamma-1)^{-1}$. Nótese que $\eta_D/\eta_F \to 2(\gamma+1)^{-1}$.

II.B.- Estructura de la capa de deflagración

En un plasma, a causa de la muy desigual masa de electrones e iones, la conducción térmica electrónica es usualmente mucho más importante que la viscosidad iónica. Si el gas de la Sec. II.A es un plasma, la estructura de la capa delgada en η_D (onda de deflagración) puede ser determinada incluyendo en la Ec. (37) simplemente la conducción de calor. Se tiene entonces:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\rho(e_i + \tfrac{1}{2}v^2) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho v(e_i + \tfrac{1}{2}v^2) + pv - \bar{K}T_e^{5/2}\frac{\partial T_e}{\partial x}\right] = \Phi \quad . \quad (5$$

Como se sabe, la conductividad $K=\bar{K}T_e^{5/2}$, $\bar{K}$ cte, es fuertemente no lineal. Cuando la conducción es importante se tiene, en general, $T_e \neq T_i$; para simplificar la discusión supondremos que el número de carga iónico Z_i es grande (densidad de iones n/Z_i mucho menor que la de electrones n), de modo que sean despreciables la presión y la energía interna iónicas.

Es inmediato ver que de (35) se obtiene no sólo que $\hat{\rho}(\hat{v}-\eta_D)$

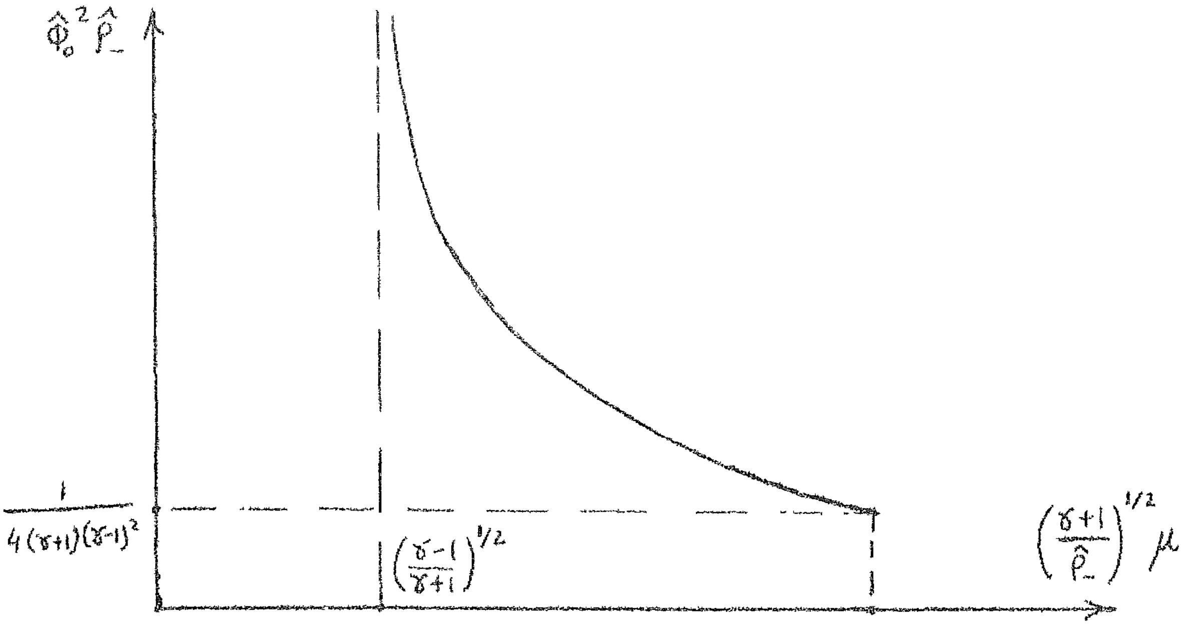

$\hat{\Phi}_o^2 \hat{\rho}_-$
$\frac{1}{4(\gamma+1)(\gamma-1)^2}$
$\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{1/2}$
$\left(\frac{\gamma+1}{\hat{\rho}_-}\right)^{1/2} \mu$

Fig. 7

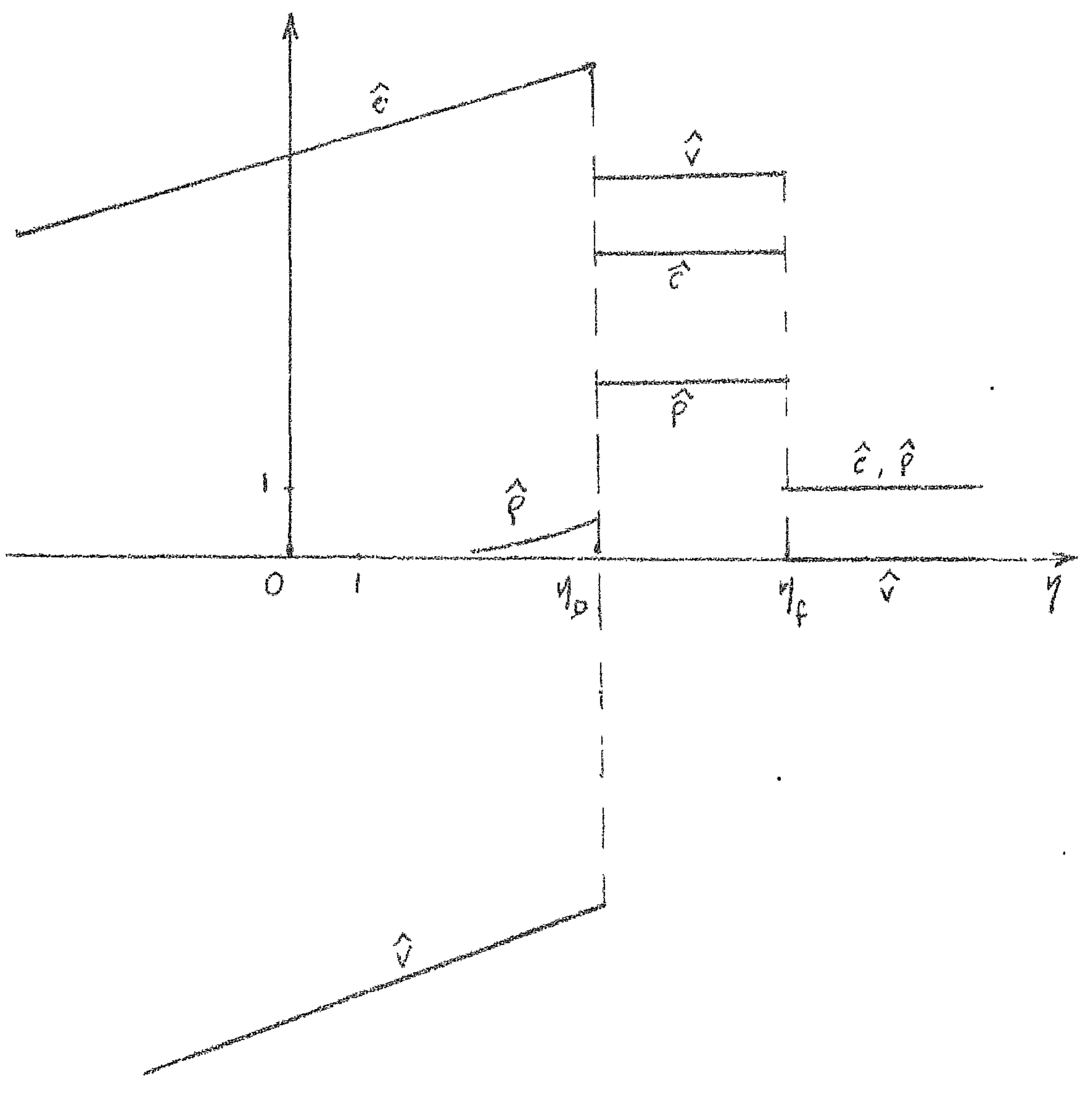

$\hat{c}$
$\hat{v}$
$\hat{c}$
$\hat{\rho}$
$\hat{c}\, ,\ \hat{\rho}$
1
$\hat{\rho}$
0
1
η_D
η_f
$\hat{v}$
η
$\hat{v}$

Fig. 8

toma iguales valores delante y detrás de la capa de deflagración [Ec. (45)] sino que no varía de un punto a otro del interior de aquélla, $\hat{\rho}(\hat{v}-\eta_D)$=cte; utilizando variables dimensionales, y $n \simeq Z_i \rho/m_i$ y la velocidad relativa a la onda $u \equiv v - c_o \eta_D$ en lugar de ρ y v, se tiene en el interior de ésta,

$$nu = cte \equiv -a < 0 . \tag{58}$$

De igual modo se obtiene, en lugar de (46),

$$\frac{m_i n u^2}{Z_i} + n k T_e = cte \equiv b \tag{59}$$

donde se usó $T_e \simeq P/nk \simeq m_i c^2/\gamma Z_i k$ en lugar de P ó c^2. Si la energía depositada en el plasma se debe a que éste absorbe luz láser incidente desde el vacío, la deposición debe ocurrir a densidades menores que la crítica, n_c. Supondremos que la absorción es anómala: tiene lugar en una región en torno al plano crítico (donde $n=n_c$), mucho más delgada que la misma capa de deflagración. Se tiene entonces:

$$\Phi = \phi_o \delta(x-x_c), \qquad n(x_c) = n_c$$

donde ϕ_o es la intensidad del láser. De (57) resulta

$$\frac{m_i}{Z_i} n u \frac{1}{2} u^2 + nu \frac{5}{2} k T_e - \bar{K}\, T_e^{5/2} \frac{\partial T_e}{\partial x} = -\phi_o \sigma \tag{60}$$

$$\sigma = 0 \;,\; x > x_c \;; \qquad \sigma = 1 \;,\; x < x_c \;.$$

Se recobra (47) restando (60) delante y detrás de la onda, donde la conducción se hace despreciable.

Definiendo variables adimensionales

$$\bar{n} = \frac{n}{n_r} \;, \qquad \bar{u} = \frac{u}{u_r} \;, \qquad \bar{T} = \frac{T_e}{T_r}$$

$$\frac{d\bar{x}}{dx} = \frac{1}{L} \;, \qquad \bar{\phi} = \frac{\phi_o}{u_r n_r k T_r} \tag{61}$$

siendo

$$u_r = \left(\frac{Z_i k T_r}{m_i}\right)^{1/2} \;, \qquad L = \frac{\bar{K}\, T_r^{7/2}}{u_r n_r k T_r} \tag{62}$$

y T_r, n_r valores apropiados tales que $n_r u_r = a$, $n_r k T_r = b$ se obtiene de

(58)-(60)

$$\bar{n}\bar{u} = -1 \tag{63}$$

$$\bar{u}^2+\bar{T} = -\bar{u} \tag{64}$$

$$\tfrac{1}{2}\bar{u}^2 + \tfrac{5}{2}\bar{T} + \bar{T}^{5/2}\,\frac{d\bar{T}}{d\bar{x}} = \bar{\phi}\,\sigma \ . \tag{65}$$

Obsérvese que los valores ρ_- y ρ_+ de la Sec. II.A deben satisfacer

$$\hat{\rho}_- < \frac{n_c m_i}{Z_i} < \hat{\rho}_+ \ .$$

Si $n_c m_i/Z_i \ll \rho_o$, se deduce que $\hat{\rho}_- \ll 1$ como se supuso en II.A. Cuando la intensidad es suficientemente grande (el caso de interés) se tenía $\hat{\rho}_+=0(1)$. En consecuencia, el cociente n/n_c será del orden de la unidad en la capa de deflagración pero tiende a un valor grande $\rho_o Z_i \hat{\rho}_+/ /m_i n_c$ delante de ella. Si hacemos $\bar{n}\to\infty$ en (63) resulta $\bar{u}\to 0$ y de (64), $-\bar{T}/\bar{u}\to 1$. Se tiene entonces ($\sigma=0$ para $\bar{x}>\bar{x}_c$)

$$\frac{5}{2}\bar{T} + \bar{T}^{5/2}\frac{d\bar{T}}{d\bar{x}} \simeq 0 \longrightarrow \bar{T} \simeq \left(-\frac{25}{4}\bar{x}\right)^{2/5}. \tag{66}$$

Así pues, para $n_c m_i \ll Z_i \rho_o$ y a causa del carácter no lineal de la conducción electrónica, el frente de la onda de deflagración ocurre en una superficie ("de ablación") bien definida [en $d\bar{x}/dx=1/L$ se tomó el origen de $\bar{x}$ de modo que coincida con dicha superficie, como muestra (66), y la capa cubra valores negativos de $\bar{x}$].

A la derecha del plano crítico ($\bar{x}_c<\bar{x}<0$) σ es nulo y la pendiente $d\bar{T}/d\bar{x}$ en (65) es negativa. De (64) se sigue que

$$\bar{u} = -\tfrac{1}{2}\left[1 \pm (1-4\bar{T})^{1/2}\right] \quad ; \tag{67}$$

se debe tomar la raiz negativa para que, partiendo de valores nulos en $\bar{x}=0$, $\bar{T}$ y $-\bar{u}$ crezcan al decrecer $\bar{x}$. Cuando $\bar{T}$ alcanza su máximo valor, 1/4, debe decrecer o permanecer constante; en consecuencia en $\bar{T}=1/4$, hay un salto en la pendiente $d\bar{T}/d\bar{x}$, lo que marca la posición de $\bar{x}_c$, de acuerdo con (65):

$$\bar{T}^{5/2}\left.\frac{d\bar{T}}{d\bar{x}}\right|_{\bar{x}_c^-}^{\bar{x}_c^+} = -\bar{\Phi} \quad ;$$

el máximo de temperatura ocurre en el plano crítico, como era de esperar. Para $\bar{T}=1/4$, se tiene $-\bar{u}=1/2$: en $\bar{x}_c$ la velocidad es igual a la velocidad local (isoterma) del sonido. Por otra parte, como $-\bar{n}\,\bar{u}=1$,

$$n_c/n_r = \bar{n}(\bar{x}_c) = 2 \longrightarrow n_r = n_c/2 .$$

Finalmente de (65) se obtiene

$$-\bar{x} = \int_0^{\bar{T}} \left\{ \frac{5}{2}s + \frac{1}{8}\left[1 \pm (1-4s)^{1/2}\right]^2 - \bar{\Phi}\sigma \right\}^{-1} ds \quad . \qquad (68)$$

Tomando la raiz negativa y poniendo $\sigma=0$, $\bar{T}=1/4$ resulta $-\bar{x}_c \simeq 4.7\ 10^{-3}$.

Para que $\bar{n}$ decrezca para $\bar{x}<\bar{x}_c$ es preciso tomar la raiz positiva en (67). La función

$$F(s) \equiv \frac{5}{2}s + \frac{1}{8}\left[1 + (1-4s)^{1/2}\right]$$

presenta un máximo, 25/32, en s=15/64. Por otra parte el denominador en (68), con la raiz positiva, debe anularse cuando $\bar{x}\to-\infty$; en consecuencia ha de tenerse

$$\frac{24}{32} = F\left(\frac{1}{4}\right) \leq \bar{\Phi} \leq F\left(\frac{15}{64}\right) = \frac{25}{32} .$$

Esta desigualdad, junto con (67), lleva a la condición

$$1 \leq \bar{u}^2/\bar{T} \leq 5/3 \ ; \qquad (\bar{x}\to-\infty)$$

la velocidad del plasma a la salida de la onda de deflagración es menor o igual que la velocidad (isentrópica) del sonido. En condiciones muy generales, el análisis en el exterior de la onda requiere que dicha velocidad sea sónica o supersónica; en tales casos, y en particular en el de la Sec. II.A [recuérdese la Ec. (48)], la velocidad de salida es sónica

$$\frac{\bar{u}^2}{\bar{T}} \to \frac{5}{3} \qquad \text{cuando} \qquad \bar{x}\to-\infty$$

Se encuentra así $\bar{\phi}$=25/32, lo que unido al resultado $n_r=n_c/2$ determina u_r (y T_r) en (61). Se puede entonces calcular L en (62) y comprobar si efectivamente la capa es delgada ($L \ll c_o t$). Por otra parte de $n_r u_r=a$, $n_r kT_r=b$ se obtienen los autovalores a (proporcional al gasto másico a través de la onda) y b [presión en la superficie de ablación P_a, como se ve en la Ec. (59)]. Se encuentra así

$$\phi_o = \frac{\text{Potencia}}{\text{Sección}} = \frac{25}{32}\left(\frac{2Z_i}{m_i n_c}\right)^{1/2} P_a^{3/2} \tag{69}$$

$$\frac{\text{Gasto}}{\text{Seccion}} = \left(\frac{m_i n_c}{2Z_i}\right)^{1/2} P_a^{1/2} \quad . \tag{70}$$

La densidad a la salida de la onda es $\bar{n}_- = 1/|\bar{u}_-| = 8/5$; se tiene por tanto $n_-/n_c=4/5$ y $\hat{\rho}_- = 4m_i n_c/5Z_i\rho_o$. La Fig. 9 representa la estructura de la onda de deflagración.

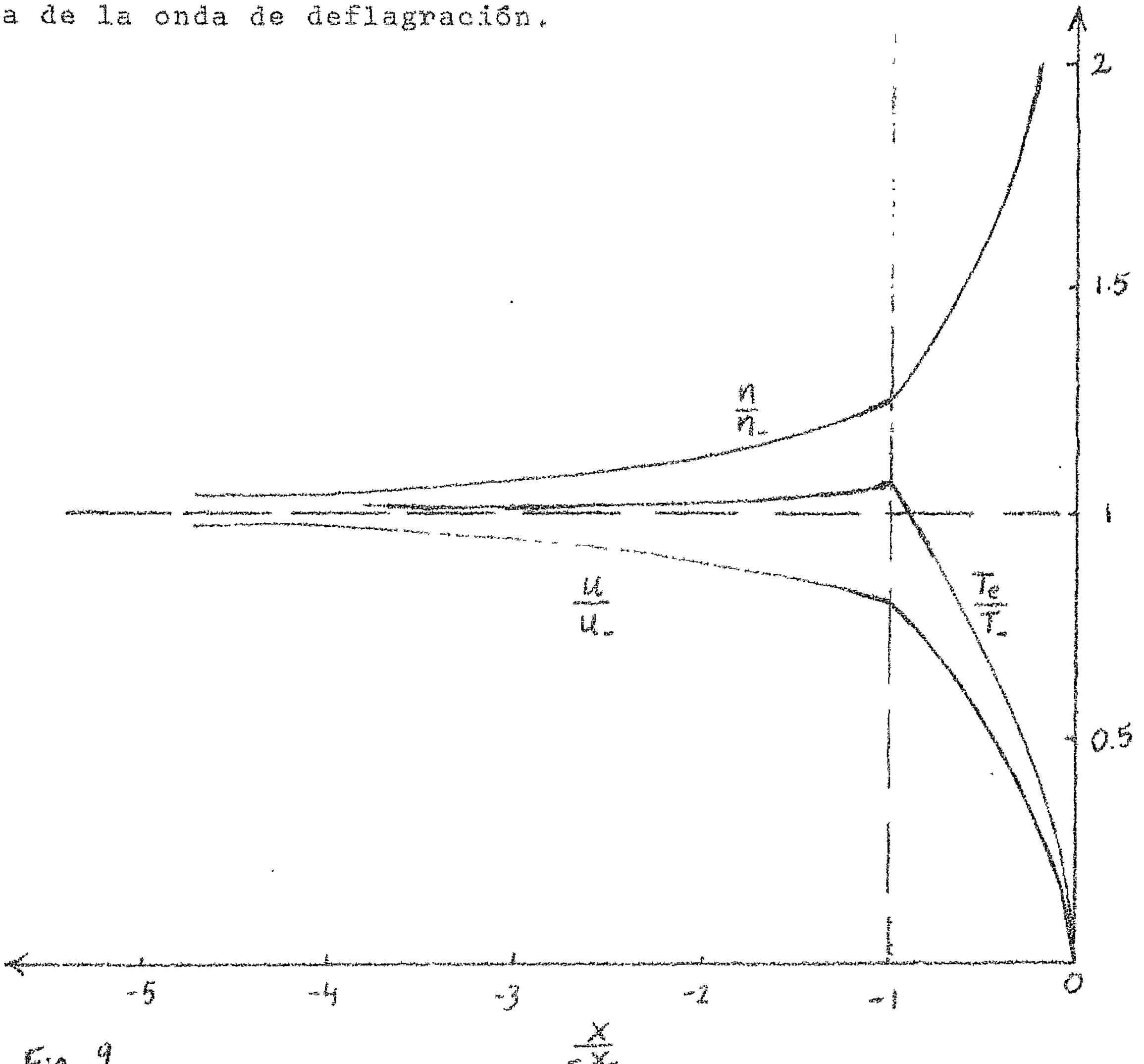


Fig. 9

III.- Compresión unidimensional. Pulso de intensidad proporcional al tiempo

Como se vió en la Sec. II.A para un pulso de intensidad constante ϕ_o, sólo se produce compresión del plasma cuando se genera una onda de choque, al exceder ϕ_o un cierto umbral,

$$\phi_{o\,min} = \left(\frac{5\times 3^3}{2^9}\ \frac{\rho_o Z_i}{m_i n_c}\right)^{1/2} \rho_c c_o^3 \quad , \qquad \left(\gamma = \frac{5}{3}\ ,\ Z_i >> 1\right) .$$

Consideremos ahora el problema de la Sec. II.A para una intensidad $\phi(t)=\phi_o(t/\tau)^s$, s>0. No existe entonces solución de semejanza pues hay un parámetro τ con dimensiones de tiempo. Sin embargo, si $\phi_o \gg \phi_{o\,min}$, en cuanto t exceda una pequeña fracción de τ se tendrá $\phi(t) \gg \phi_{o\,min}$, y existirá una onda de choque intensa. En tales condiciones se pueden despreciar la presión y energía interna en el medio no perturbado: c_o será un parámetro ignorable. Se obtiene así, de nuevo, una solución de semejanza.

El pulso lineal, s=0, presenta un particular interés. En la Sec. II.B se determinó la longitud L característica de la capa de deflagración. Para intensidad constante, L no depende del tiempo mientras que la longitud característica ($c_o t$) de la región isentrópica exterior a dicha capa sí; para tiempos pequeños no se satisface la hipótesis de capa delgada. Por otra parte se encontró

$$L \propto \phi_o^{4/3} \quad , \qquad u_r \propto T_r^{1/2} \propto \phi_o^{1/3} \quad .$$

En consecuencia si $\phi \propto t$, se tendrá $L \propto t^{4/3}$, y por tanto

$$\frac{dL}{dt} \propto t^{1/3} \propto u_r \quad ;$$

es de esperar que la condición de existencia de onda de deflagración será independiente del instante t considerado.

Las ecuaciones del problema correspondiente son

$$\frac{Dn}{Dt} = -n\,\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (71)$$

$$\frac{m_i n}{Z_i}\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x}\, n\kappa\left(T_e + \frac{T_i}{Z_i}\right) \tag{72}$$

$$n T_e \frac{D}{Dt}\left(\kappa \ln \frac{T_e^{3/2}}{n}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{K}\, T_e^{5/2}\, \frac{\partial T_e}{\partial x}\right) - \frac{3}{2}\kappa n \frac{T_e - T_i}{t_{ei}} + \phi_o \frac{t}{\tau}\,\delta(x - x_i) \tag{73}$$

$$\frac{n}{Z_i} T_i \frac{D}{Dt}\left(\kappa \ln \frac{T_i^{3/2} Z_i}{n}\right) = \frac{3}{2}\kappa n \frac{T_e - T_i}{t_{ei}}\,. \tag{74}$$

Se ha considerado Z_i arbitrario por lo que se ha escrito (36a) en la forma (72), poniendo $P=nkT_e+nkT_i/Z_i$. La existencia de dos especies de partículas, con diferentes temperaturas T_e y T_i exige considerar la ecuación de la entropía para cada una, en lugar de (37a); $k \ln (T^{3/2}/n)$ es la entropía por partícula de un gas ideal. Para no limitar, a priori, a una capa delgada los efectos no isentrópicos se han incluído en (73) y (74) la conducción electrónica y el término de intercambio energético entre iones y electrones; el tiempo característico de este intercambio tiene la forma [ver Ec. (7)]

$$t_{ei} = \bar{t}_{ei}\, T_e^{3/2}/n \quad , \qquad\qquad \bar{t}_{ei} \simeq cte\,.$$

Las ecuaciones (71)-(74) admiten solución de semejanza en la cual las variables

$$n \quad , \quad v/t^{1/3} \;, \quad T_e/t^{2/3} \quad , \; T_i/t^{2/3} \tag{75}$$

dependen de $\xi \propto x/t^{4/3}$; nótese que las frecuencias de colisión en la conductividad térmica y en el intercambio energético ión-electrón, en un plasma, varían como $T_e^{3/2}$: las inversas de esas frecuencias son, de acuerdo con (75), proporcionales al tiempo. La solución depende de tres parámetros adimensionales

$$Z_i \;, \qquad \varepsilon \equiv \frac{m_i n_c}{Z_i \rho_o} \qquad , \qquad \alpha_c \equiv \frac{9\kappa Z_i}{4 m_i}\left(\frac{\kappa^2 n_c^2 \tau}{\bar{K}\,\phi_o}\right)^{2/3}.$$

La Fig. 10 representa esquemáticamente la evolución de la solución cuando se varía α_c; ε se supondrá siempre pequeño y Z_i no afecta esen-

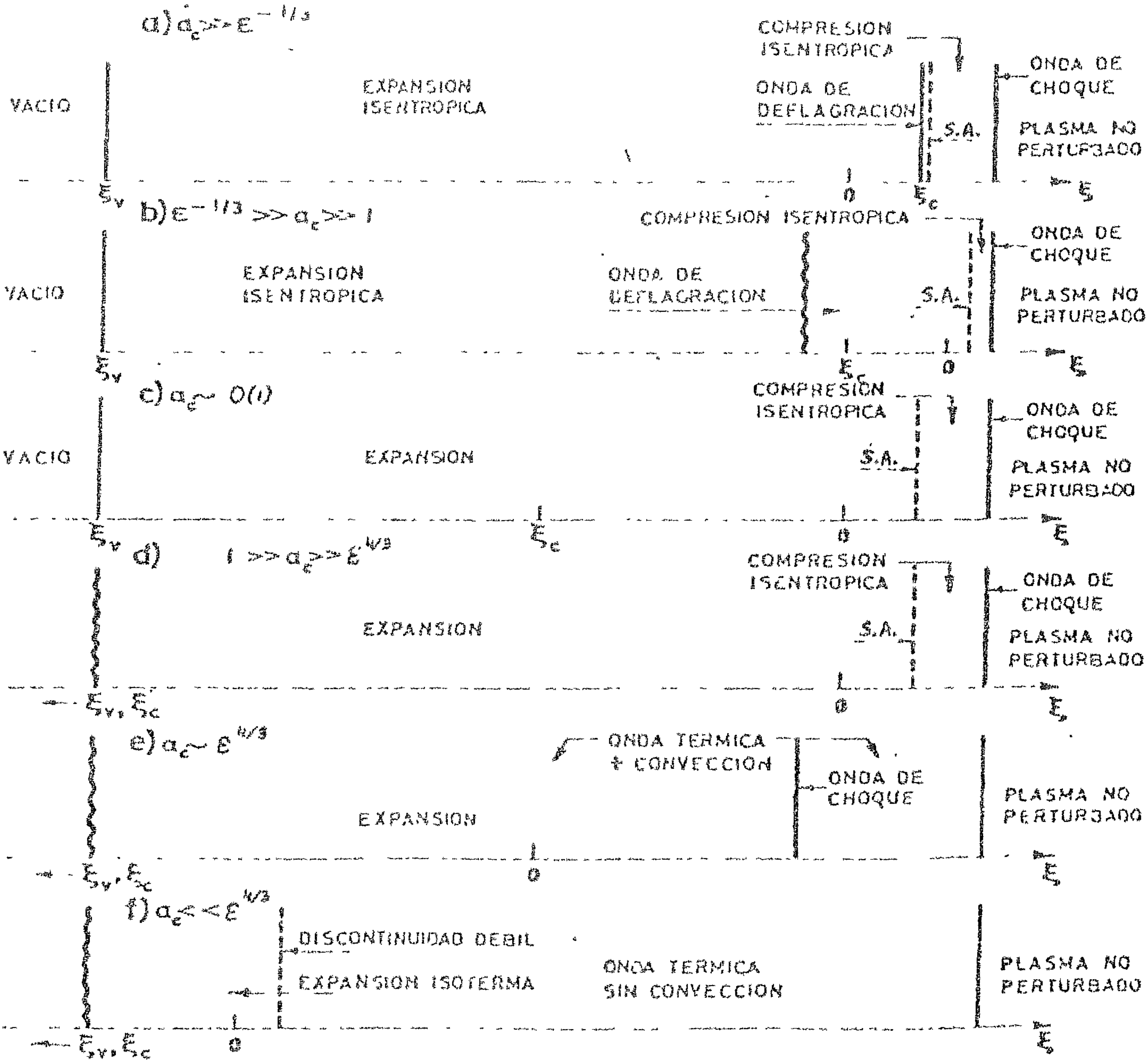
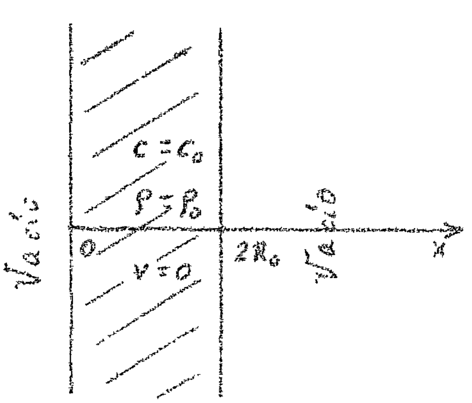


Fig. 10 Representación esquemática del comportamiento del plasma para diferentes valores del parámetro a_c.

cialmente a aquélla.

Para $t>0$, la frontera plasma-vacío ocurre en cierto valor de ξ, ξ_v (y el plano crítico en ξ_c); como $x_v \propto \xi_v t^{4/3}$, cuando $t \to 0+$, dicha frontera colapsa al origen de modo que la solución es continua en el tiempo. Cuando α_c se hace mayor que cierto número de orden unidad, $\xi_v = -\infty$. Existe capa de deflagración si $\alpha_c \gg 1$ (la Fig. 10a tiene igual forma que la Fig. 8); si $\varepsilon^{-1/3} \gg \alpha_c \gg 1$, la capa es delgada comparada con la región de compresión isentrópica pero no con la de expansión. Cunado $\alpha_c = 0(1)$ no existe separación en onda de deflagración y expansión isentrópica. Sin embargo existe superficie de ablación (S.A.) en tanto que $\alpha_c \gg \varepsilon^{4/3}$ (recuérdese que el frente de la estructura en la Sec. II.B ocurría en una superficie bien definida debido al carácter no lineal de la conducción electrónica). Cuando $\alpha_c = 0(\varepsilon^{4/3})$ el precursor electrónico ante la onda de choque en Fig. 10 a-d (como en todo plasma) adquiere una extensión comparable a la de expansión isentrópica, y deja de existir una superficie de ablación bien definida. Cuando $\alpha_c \ll \varepsilon^{4/3}$, la onda de choque deviene una discontinuidad débil: delante hay una onda térmica sin movimiento apreciable (no hay compresión) y detrás una expansión isoterma de menor extensión. Los regímenes de interés corresponden a la condición $\alpha_c \gg \varepsilon^{4/3}$.

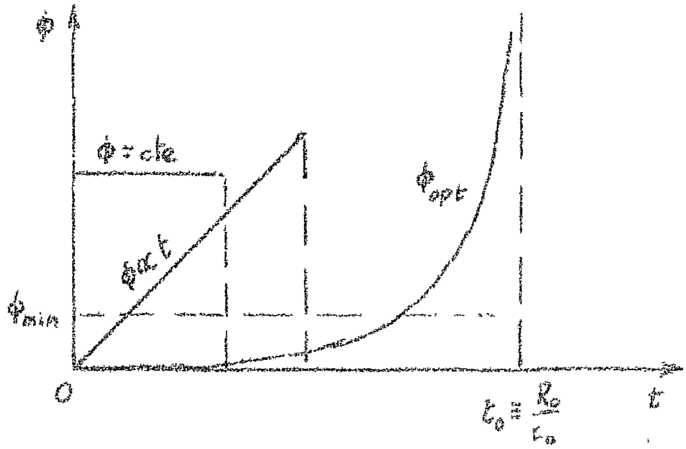
IV. Compresión unidimensional. Pulso óptimo



Supongamos que se quiere comprimir fuertemente una lámina de espesor $2R_o$, irradiando ambas caras con un pulso láser. Por simetría bastará considerar el semiespacio $x<R_o$. Los análisis de las Secciones II y III serán enteramente apli

cables al presente caso en tanto $x_f < R_o$, donde x_f es la posición del frente de perturbación (onda de choque o perturbación débil). Se vió que para intensidad ϕ=cte sólo se produce compresión cuando aparece onda de choque ($\phi > \phi_{min}$); la relación de compresión (salto de densidades a través de la onda) es sólo *moderada* $[(\gamma+1)/(\gamma-1)$ como máximo para un gas ideal: 4 si $\gamma=5/3]$, y va acompañada de fuerte generación de entropía. Como se comentó en la Sec. I.B, es necesario que la compresión sea enteramente isentrópica (ausencia de ondas de choque), si se limita uno a estudiar el aumento de densidad (prescindiendo del calentamiento de la zona central del blanco, que se requiere para obtener fusión por láser).

Si no hay onda de choque se tiene $dx_f/dt = c_o$: el tiempo de llegada de la perturbación al centro de la lámina es $t_o = R_o/c_o$, mayor que para una onda de choque, que viaja supersónicamente. Se ha representado esquemáticamente la intensidad $\phi(t)$, para un pulso de energía $\int \phi\, dt$ dada, hasta el instante en que $x_f = R_o$. Se vió que para un pulso lineal se formaba onda de choque en cuanto $\phi \gtrsim \phi_{min}$. Parece necesario, para un pulso óptimo, que sólo dure hasta $t=t_o$ (recuérdese que la compresión debe ser rápida, Sec. I.B), pero que la mayor parte de la energía se deposite cerca del final a fin de evitar la formación de una onda de choque antes de t_o. La compresión intensa, isentrópica, más rápida, es la compresión isentrópica centrada, en la que se forma una onda de choque justamente en $t=t_o$, $x_f = R_o$.



Si se define, para $0 < t < t_o$,

$$\eta = \frac{R_o - x}{R_o - c_o t}, \quad \hat{\rho} = \frac{\rho}{\rho_o}, \quad \hat{c} = \frac{c}{c_o}, \quad \hat{v} = \frac{v}{c_o},$$

las ecuaciones (35)-(37), a la derecha del plano crítico donde $\bar{\Phi}=0$, se reducen al sistema (39)-(41), cuya solución es de nuevo (42a) o (42b). Como $x_f=c_o t$, se tiene $\eta_f=1$; con las condiciones de contorno

$$\hat{\rho}=1 \ , \quad \hat{c}=1 \ , \quad \hat{v}=0 \qquad en \qquad \eta=\eta_f\equiv 1$$

se recobra la solución (43),

$$\hat{c}=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(\eta+\frac{2}{\gamma-1}\right) , \quad \hat{v}=\frac{2}{\gamma+1}(\eta-1) , \quad \hat{\rho}=\hat{c}^{\,2/(\gamma-1)} . \qquad (76$$

Nótese sin embargo que aquí η crece al decrecer x: $\eta>1$ en la región perturbada de modo que $\hat{c}>1$ y $\hat{\rho}>1$ [Fig. 11].

Es fácil ver que ni la solución anterior ni su combinación con una solución del tipo (42b) pueden ser válidas hasta la frontera plasma-vacío. Afortunadamente, la existencia de superficie de ablación en condiciones muy generales permite desacoplar el problema interno [región a la derecha de dicha superficie, $x>x_a(t)$] del externo (la corona a su izquierda). Es fácil comprobar que en el caso de $\Phi=$ cte, el gasto es pequeño: la masa contenida en la corona cuando $x_f=R_o$ es una pequeña fracción de la masa inicial. Suponiendo esto válido, por el momento, para el pulso óptimo, se puede suponer, aproximadamente, que la superficie de ablación es una superficie fluída (gasto nulo a su través) en el estudio del problema interno, que queda desacoplado del externo. Halladas las leyes $P_a(t)$ y $x_a(t)$, se puede analizar la corona para hallar $\Phi(t)$ y el gasto másico (a tratar posteriormente como una pequeña corrección, para mejorar el análisis del problema interno). Si existe capa de deflagración como supondremos en lo que sigue, la estructura determinada en II.B proporciona $\Phi[P_a(t)]$ y el gasto [Ecs. (69) y (70)]; se hace innecesario un estudio de la corona a la izquierda de dicha capa.

Consideremos la partícula fluída en x^* $(0<x^*<R_o)$ en $t=0$; la solución (76) le será válida para $t>t^*=x^*/c_o$ (cuando el frente llega a t^*). Sea $x_p(t)$ su posición para $t>t^*$, se tiene

$$x_p(t) = R_0 + \eta_p(t)\, c_0 (t - t_0)$$

$$v_p(t) = \frac{dx_p}{dt} = c_0 \hat{v}[\eta_p(t)] = c_0 \frac{2}{\gamma+1}[\eta_p(t) - 1]$$

de donde

$$\eta_p(t) = -\frac{2}{\gamma-1} + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(\frac{1-t^*/t_0}{1-t/t_0}\right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} \qquad (77)$$

Para gasto nulo, $x_p = x_a$ para $x^* = 0$, de donde

$$P_a = P_0 \hat{\rho}_a \hat{c}_a^2 = P_0 \hat{c}_a^{2\gamma/(\gamma-1)} = P_0 (1 - t/t_0)^{-2\gamma/(\gamma+1)} \quad ;$$

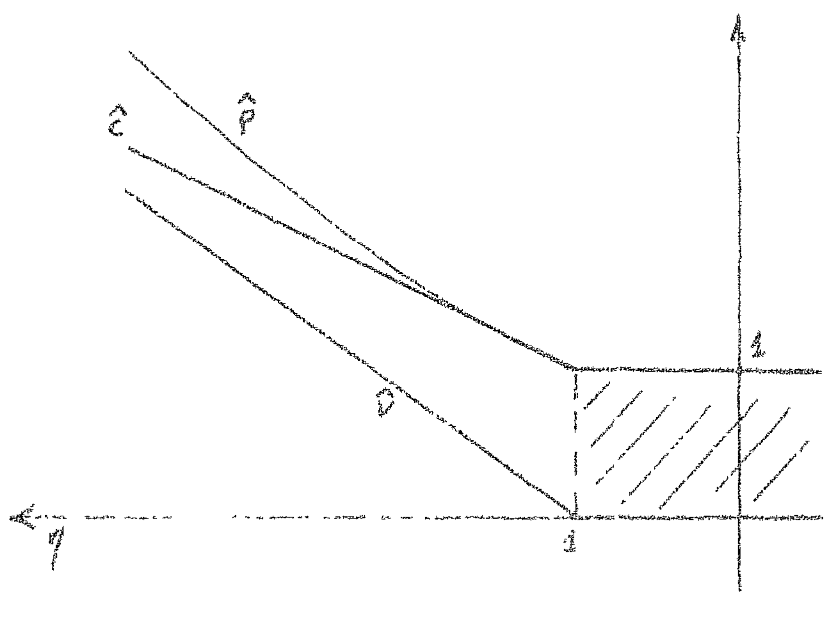
para $\gamma = 5/3$, $P_a = P_0(1-t/t_0)^{-5/4}$ y de (69) resulta

$$\phi_{opt}(t) = \frac{25}{32}\left(\frac{2Z_i}{n_c m_i}\right)^{1/2} P_0^{3/2} (1 - t/t_0)^{-15/8} .$$

Nótese que: a) $\phi(0) \neq 0$ porque en un gas ideal (pero no en un medio sólido) $P_0 \propto \rho_0 c_0^2 \neq 0$, y b) ϕ y la energía total se hacen infinitos cuando $t \to 0$: es preciso limitar ϕ para algún $t \neq t_0$ [la Ec. (77) muestra que para $t = t_0$, $x_p = R_0$ para todo x^*]. Se puede comprobar, por otra parte, que el gasto es en verdad pequeño:

$$\int_0^{R_0/c_0} \left(\frac{m_i n_c}{2Z_i}\right)^{1/2} P_a^{1/2}\, dt \simeq R_0 \rho_0 \frac{\gamma+1}{(2\gamma)^{1/2}} \left(\frac{m_i n_c}{Z_i \rho_0}\right)^{1/2}$$

mucho menor que $R_0 \rho_0$ si $\rho_0 \gg m_i n_c / Z_i$.



REFERENCIAS

- J. NUCKOLLS, en Laser Interaction and Related Plasma Phenomena, editado por H. Schwarz y H. Hora (Plenum, Nueva York 1974), Vol. 3B, pág. 399.

- K. BRUECKNER y S. JORNA, Rev. Mod. Physics 46, 325 (1974).

- F.L. RIBE, Rev. Mod. Phys. 47, 7 (1975).

- H. HORA, Laser Plasmas and Nuclear Energy, (Plenum, Nueva York 1975).

- T.P. HUGHES, Plasmas and Laser Light (Adam Hilger, Londres 1975).

- H. MOTZ, The Physics of Laser Fusion, (Academic, Nueva York 1979).