

# APLICACIÓN DEL M.E.C. A UN PROBLEMA DE INTERACCIÓN SUELO- ESTRUCTURA

Jaime Vega

*Centro de Modelado en Ingeniería Mecánica (CEMIM)F2I2-UPM*

Orlando Maeso y J.J. Aznárez

*ETS de Ingenieros Industriales, Universidad de Las Palmas*

Enrique Alarcón

*ETS de Ingenieros Industriales, Universidad Politécnica de Madrid*

## **Resumen**

Este artículo presenta la aplicación del MEC a un problema de interacción suelo-estructura. Se trata de una estructura rígida empotrada a gran profundidad en un terreno muy duro y sometido a acciones sísmicas de importancia.

Tras recordar los conceptos básico del problema se describe la discretización utilizada para la resolución mediante el método de los tres pasos.

Se describe también la modificación inducida por la presencia de la estructura en la sollicitación sísmica tanto en profundidad como en distancia a aquella.

## **1. Interacción terreno-estructura**

### *1.1 Panorama previo*

La conexión de la estructura al suelo de cimentación altera las características dinámicas que tendría en base rígida. La flexibilidad del suelo modifica las frecuencias y el amortiguamiento de aquel afecta al conjunto.

En las estructuras muy rígidas y fuertemente empotradas en el terreno, la rigidez de la estructura impide la libre deformación del terreno y ello implica el

cambio del movimiento en la interfase frente al que se produciría en campo libre.

Los efectos de la interacción fueron reconocidos muy pronto en lugares como Japón con un sistema de construcción sismorresistente basado en la rigidez (Tajimi [1], Akino et al. [2]) y recogidos con gran interés por la comunidad ingenieril embarcada entonces en los grandes proyectos de construcción de centrales nucleares.

La conexión con las primeras investigaciones de Reissner [3] sobre la respuesta de semiespacios fue descrita magistralmente por Richard et al. [4] y planteada de forma definitiva por Verbic y Veletsos [5], dando origen a una rama de estudio basada en la Descomposición de Dominios, que continúa hasta la actualidad (Wolf [6], Gazetas [7] y Mylonakis et al. [8]).

Por otro lado el desarrollo del método de los elementos finitos condujo a un esfuerzo de investigación para superar las limitaciones relacionadas con la acotación del dominio o la dificultad de simulación de problemas tridimensionales tratables con los ordenadores de aquella época. Son históricas las aportaciones llevadas a cabo por Lysmer con sus contornos absorbentes, el tratamiento lineal “equivalente” en el dominio de la frecuencia y la elaboración de programas como SHAKE (Schabel et al. [9]), FLUSH (Lysmer et al. [10]), o SASSI (Lysmer et al. [11]) que permitieron a la ingeniería práctica el estudio realista de los problemas dinámicos.

Se consiguió de esta forma llegar en los 80 a una situación estable dentro de la aplicación de conocimientos que cabe atribuir a los diferentes paneles de discusión establecidos por la U.S. Nuclear Regulatory Commission y a la sistematización de los Manuales ASCE [12].

El comienzo de la aplicación del método de los elementos de contorno a los problemas de interacción se debe a J. Domínguez [13], en colaboración con la escuela de J.M. Roesset, quien había desarrollado en el MIT una fecunda escuela de análisis de estos problemas (Kausel et al. [14], Roesset [15]). Aunque Luco había publicado en 1971 (Luco y Westmann [16]), la aplicación de un método indirecto de ecuaciones integrales, las ventajas del método directo lo hacen especialmente indicado para este tipo de problemas y por ello se han producido numerosas contribuciones a este campo (Luco y Westmann [16], Alarcón et al. [17], Maeso et al. [18], Domínguez [19]) entre ellas la obra tipo para su estudio (Domínguez [20]).

En la actualidad prosigue el estudio activo de las alternativas de modelización numérica mediante métodos espectrales (Komatitsch et al. [21]) o modelos de cono (Cotterau [22]).

Una interesantísima línea abierta recientemente (Cotterau [22], Soize [23]) en relación con el estudio probabilista del problema es la denominada de

“modelos no paramétricos” en la que se produce una identificación de matrices de masa, rigidez y amortiguamiento del dominio representativo del suelo mediante variables ocultas lo que permite la formulación en el tiempo teniendo en cuenta la heterogeneidad del medio y la profundidad de empotramiento. El carácter probabilista se introduce mediante la técnica de matrices estocásticas y el estudio se lleva a cabo con el método de Monte Carlo.

## 1.2 Planteamiento formal

La ecuación del sistema completo suelo-estructura una vez discretizado responde al esquema clásico.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = -\mathbf{M}\mathbf{J}\ddot{u}_s \quad (1)$$

donde  $\mathbf{M}$  es la matriz de masa,  $\mathbf{C}$  es la matriz de amortiguamiento,  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez,  $\mathbf{J}$  es el vector de arrastre,  $\ddot{u}_s$  es la aceleración del suelo y  $\mathbf{u}$  el vector de desplazamientos relativos.

El sistema puede resolverse de forma directa o bien se puede recurrir a una subdivisión que tiene gran interés práctico. Para ello se descompone la matriz de masa en la forma:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_s + \mathbf{M}_{est} \quad (2)$$

donde  $\mathbf{M}_s$  es la matriz de masa del dominio representativo del suelo y  $\mathbf{M}_{est}$  es la matriz de masa de la estructura.

A su vez el desplazamiento se subdivide en dos:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \quad (3)$$

donde  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$  se precisan más abajo.

La sustitución de las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación (1) conduce, tras el adecuado reordenamiento a :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{K}\mathbf{u}_1 + \mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{u}}_2 + \mathbf{M}_{est} (\ddot{\mathbf{u}}_1 + \ddot{\mathbf{u}}_2) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_2 + \mathbf{K}\mathbf{u}_2 = \\ = -\mathbf{M}_s \mathbf{J} \ddot{u}_s - \mathbf{M}_{est} \mathbf{J} \ddot{u}_s \end{aligned} \quad (4)$$

$\mathbf{u}_1$  se escoge de forma que se cumpla:

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{K}\mathbf{u}_1 = -\mathbf{M}_s \mathbf{J} \ddot{u}_s \quad (5)$$

Con lo que se tiene:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_2 + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_2 + \mathbf{K}\mathbf{u}_2 = -\mathbf{M}_{est} (\ddot{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{J}\ddot{u}_s) \quad (6)$$

La ecuación (5) muestra que  $\mathbf{u}_1$  es la respuesta del sistema cuando se considera que la masa de la estructura es nula.



La ecuación (6) muestra que  $u_2$  es la respuesta del sistema con masa completa si tan sólo a las masas de la estructura se la aplicasen las fuerzas de inercia totales correspondientes al primer caso.

$u_1$  es la llamada la respuesta por interacción cinemática y  $u_2$  la respuesta por interacción inercial.

Puesto que para el cálculo de  $u_1$  se desprecia la masa de la estructura puede recurrirse a una descomposición de dominios en la que, el dominio representativo del suelo tiene en el caso de estructura rígida, un contorno rígido sin masa, correspondiente a la interfase con la estructura y puede recurrirse a las técnicas de estudiar su respuesta a movimientos unidad para construir una matriz de rigidez.

Esta matriz de rigidez condensada (que incluye la influencia de la masa y el amortiguamiento del terreno) puede añadirse a la de la estructura para representar el primer miembro de la ecuación (6).

Para obtener el segundo miembro es preciso resolver el problema de la interacción cinemática que permite ver la modificación del movimiento.

La Figura 1 tomada de Kramer [24] muestra la descomposición indicada y el estudio del dominio de la estructura sobre los “muelles” representativos.

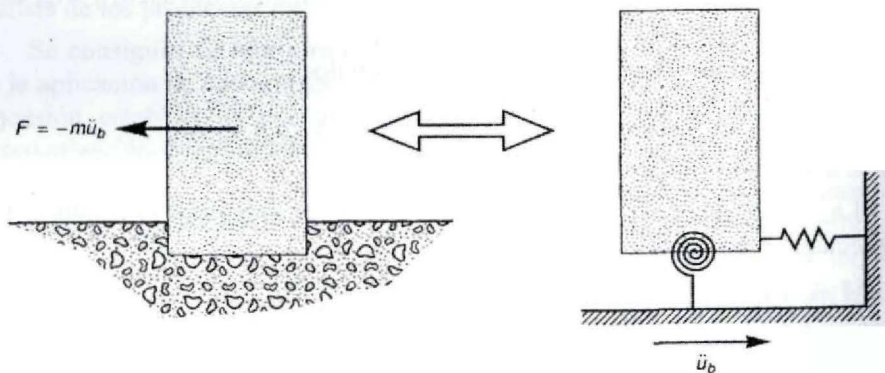


Figura 1: Esquema de la descomposición del problema según Kramer [24].

Este es el llamado “método de los tres pasos” o método indirecto que incluye:

- Interacción cinemática.

Un estudio del problema de difracción de ondas por la interfase rígida, que produce un cambio de los detalles del movimiento en su

superficie, pero también la adición de un movimiento de giro provocado por la rigidez.

- Condensación de las propiedades del semiespacio.  
Determinación de la impedancia dinámica en el dominio de la frecuencia. Respuesta de la estructura+suelo.
- Estudio dinámico del sistema estructura+matriz de impedancia ante las sollicitaciones modificadas.

## 2. Descripción del problema

En la Figura 2 se esquematiza el problema en estudio. Se trata de un cilindro de 30 m de diámetro y 80 m de altura, empotrado 50 m en el terreno.

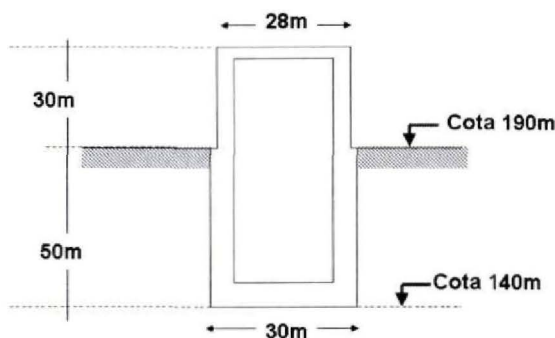


Figura 2: Alzado de la estación de bombeo.

La flexibilidad de la estructura de hormigón se ve reducida por diversos rellenos y refuerzos interiores que garantizan que la hipótesis de paredes infinitamente rígidas sea suficientemente razonable desde el punto de vista práctico.

La estructura forma parte de una gran instalación industrial y en su interior se encuentran equipos sensibles cuya respuesta sísmica se deseaba estudiar pero que no son objeto de este artículo.

El suelo está formado por tres estratos de gran rigidez. El primero, de arcillas muy rígidas, llega a 37m bajo la superficie. El segundo está formado por conglomerados y tiene 9m de espesor y finalmente se encuentra una roca/suelo sedimentaria detrítica muy consolidada.

La fijación de las propiedades del terreno se ha llevado a cabo a partir de los ensayos de campo todos ellos de tipo estático, utilizando correlaciones bien establecidas y, en particular, la fórmula de Ishihara [25].

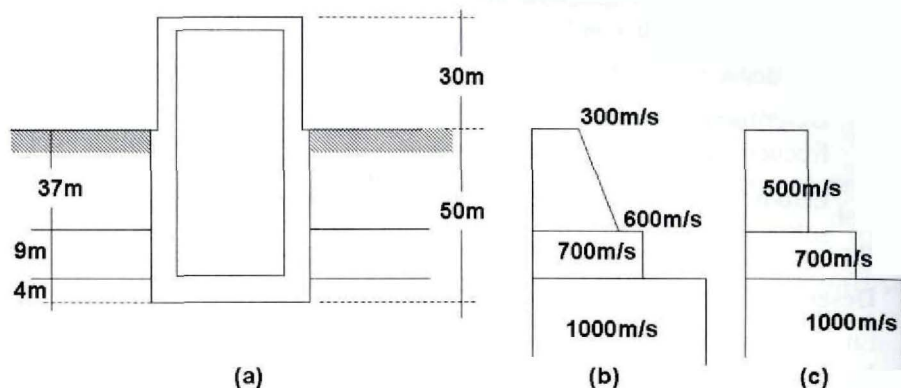


Figura 3: Posición de los estratos y perfiles de las celeridades de onda de cortante.

$$G = A \cdot F(e) \cdot (OCR)^{k_0} \sqrt{\sigma'_0} \quad (7)$$

$$A = 3300, \quad F(e) = \frac{(2.97'e)^2}{1+e}$$

Donde  $e$  es el índice de huecos,  $OCR$  el índice de preconsolidación,  $k_0$  un factor igual a 0,2 para el índice de plasticidad de la capa superficial ( $IP \sim 23$ ) y  $\sigma'_0$  la tensión octaédrica efectiva.

Se ha supuesto que el índice de plasticidad, el coeficiente de empuje al reposo y el índice de preconsolidación están ligados por la fórmula de Broker y Ireland [26] lo que ha permitido determinar los valores de  $G$  y, apoyándose en las densidades medidas en laboratorio, los de la celeridad  $c_s$  indicadas en la Figura 3b.

Debido a la incertidumbre de las propiedades se realizó un estudio de sensibilidad mediante el programa SHAKE con diferentes perfiles de suelos.

A estos efectos se llevaba a cabo la deconvolución de los acelerogramas situados en superficie y se comparaban los espectros de respuesta a una profundidad de 50m en los puntos de frecuencia correspondientes a las frecuencias fundamentales del equipamiento situado en el interior del cilindro.

Con ello y a efectos de simplificar el modelo del terreno se decidió fijar para los estudios posteriores, el perfil de la Figura 3c que producía efectos conservadores en las frecuencias citadas.

La sismicidad estaba definida en superficie de campo libre mediante el espectro de respuesta unitario de la Figura 4, y se precisaba el estudio para dos niveles de sollicitación: un sismo base de explotación con aceleración pico

horizontal de 17%g y un sismo máximo probable del 30%g con duraciones convencionales de 10 y 15s respectivamente.

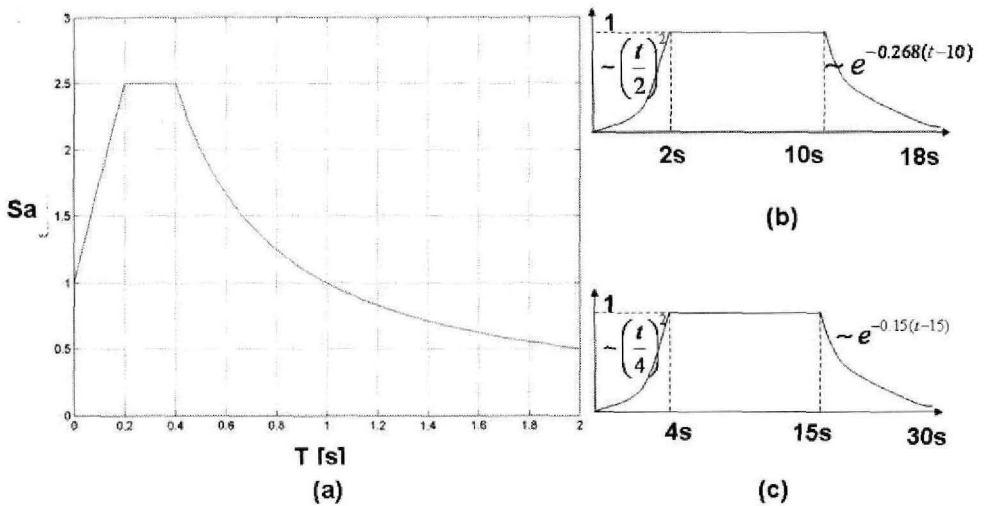


Figura 4: Espectro normalizado de proyecto y esquema de modulación de los registros artificiales.

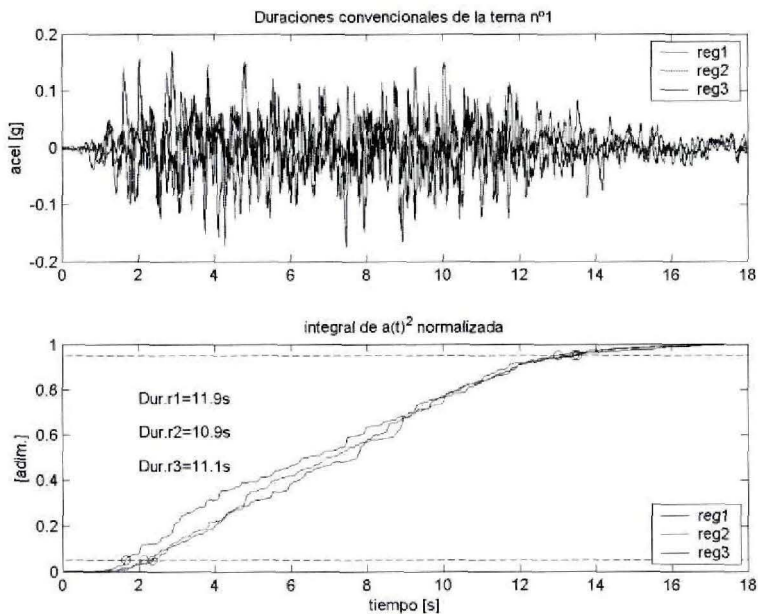


Figura 5: Medida de la duración convencional de los registros.



Para su posterior uso en el cálculo se simularon ternas de acelerogramas mediante el programa SIMQKE [27] modulando los procesos generados mediante los envolventes descritos en la Figura 4b y Figura 4c, en que puede verse que las duraciones totales son de 18 y 30 segundos.

La Figura 5 representa una de las ternas generadas así como el cálculo de las duraciones convencionales. Se ha comprobado también que la función de correlación mútua entre los registros que forman la terna tenían un valor medio superior a 0.2 y un valor promedio inferior a 0.3.

### 3. Método de Cálculo

Aunque, como se indicará más adelante, es factible la utilización del método directo (lo que elimina la necesidad de la hipótesis de rigidez de la estructura), se decidió atacar el problema mediante el método de los tres pasos lo que permitía ir comprobando resultados parciales mediante las fórmulas existentes en la literatura y mantener una comprensión sobre los fenómenos presentados. A continuación se van describiendo cada una de las etapas.

#### 3.1 Paso 1. Funciones de Transferencia del terreno

El objetivo del cálculo se centra en la obtención de las funciones de transferencia del terreno. Para ello se deben determinar los desplazamientos y los giros en la base de una estructura rígida de 30m de diámetro, empotrada en un suelo estratificado hasta una profundidad e 50m, ocasionados por ondas sísmicas longitudinales y transversales, P y S respectivamente, que inciden verticalmente hacia la estructura desde zonas profundas del terreno. El análisis debe abarcar todo el rango de frecuencias contenido en el espectro sísmico.

Los resultados de desplazamientos y giros en la base del depósito cilíndrico se calculan en relación a los desplazamientos producidos por el tren de ondas P o S en puntos de la superficie libre del suelo en zonas alejadas de la estructura (desplazamientos de campo libre de un problema de suelo estratificado).

El problema es bien conocido (Roesset [15]), así como su planteamiento mediante el MEC (Domínguez [20], Alvarez-Rubio et al. [28]).

#### 3.1.1 ASPECTOS NUMÉRICOS Y MALLA DE ELEMENTOS DE CONTORNO

La Figura 6 muestra la malla de elementos de contorno utilizada para el cálculo y un detalle de la zona de encuentro cilindro-terreno. Solo se muestra un cuarto de la geometría total, ya que el programa de ordenador incorpora automáticamente las propiedades de simetría y/o antisimetría. La toma de decisiones relativas a los parámetros de discretización, principalmente el



tamaño de los elementos y la longitud de superficie libre discretizada, se ha llevado a cabo mediante pruebas sucesivas hasta garantizar la buena convergencia de los resultados. En total, la malla supone 21150 grados de libertad en variable compleja.

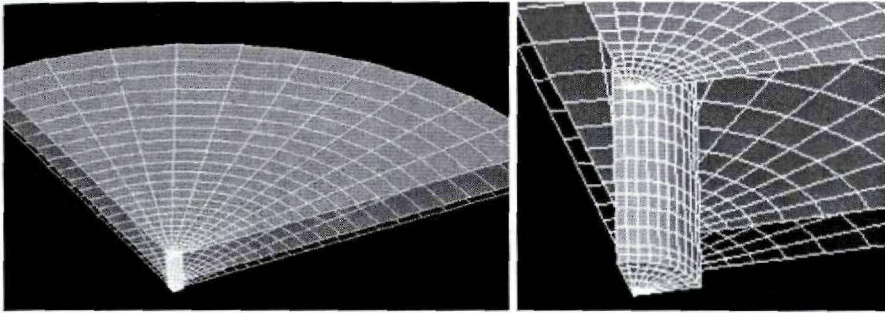


Figura 6: Malla de cálculo. Vista general y detalle.

### 3.1.2 REPRESENTACIÓN DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

La Figura 7 presenta la función de transferencia para el caso del desplazamiento vertical para una onda P.

Es interesante contrastar este resultado con las reglas sencillas propuestas (Elsabee et al. [29], JSCE [30] y Mylonakis et al. [8]) para representar la función de transferencia en terrenos homogéneos. Como muestra la Figura 8 se obtiene muy buena concordancia, en las frecuencias bajas, a pesar de la estratificación del terreno.

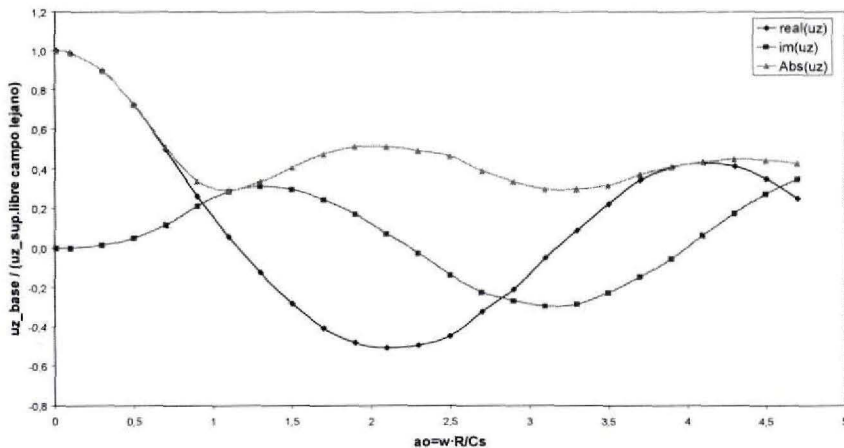


Figura 7: Desplazamiento vertical en la base relativo al de la superficie libre en puntos alejados. Onda P.

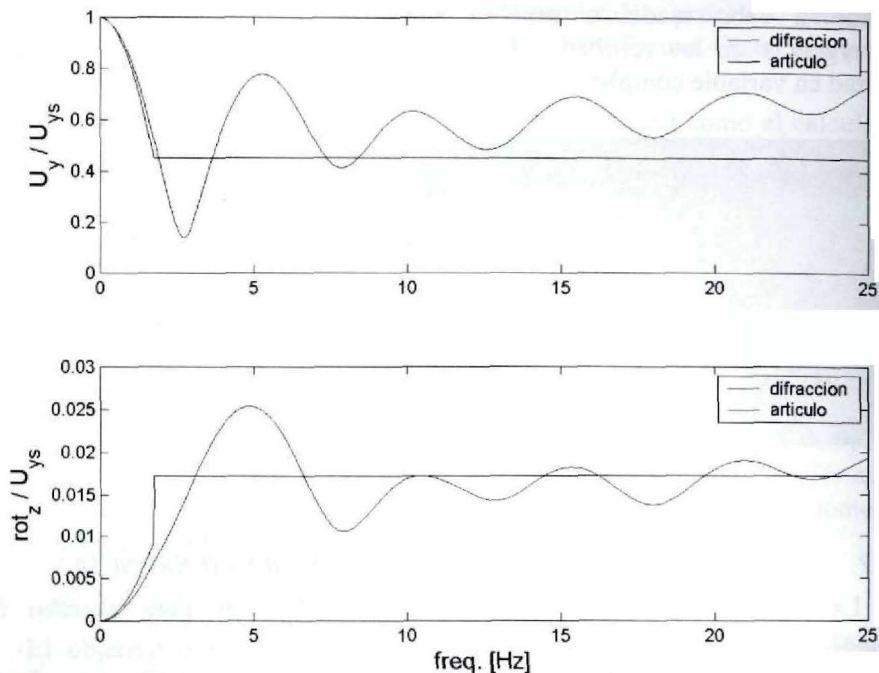


Figura 8: Comparación de las funciones de transferencia obtenidas mediante el estudio de difracción, con las obtenidas mediante las fórmulas de Mylonakis et al. [8].

### 3.1.3 MOVIMIENTO INDUCIDO EN EL CENTRO DE LA BASE DEL CILINDRO

La transformación del movimiento en superficie a movimiento en el centro de la base del cilindro se hace mediante la función de transferencia. Primero se transforma el registro sísmico desde el dominio del tiempo al de la frecuencia mediante la transformada de Fourier discreta. A continuación, se realiza el producto por la función de transferencia, que se ha definido en los apartados anteriores en el dominio de la frecuencia. Por último se realiza la transformación inversa del resultado del producto anterior, obteniéndose la historia temporal del registro transformado.

A modo de ejemplo de lo que ocurre al transformar una componente horizontal, la Figura 9 presenta lo que ocurre con la componente x de la primera terna correspondiente al SBE. En la base del cilindro se pasa de una aceleración pico del 17%g al 8%g en translación. La rotación según el eje y tiene valores pico cercanos al  $2 \cdot 10^{-3}$ .

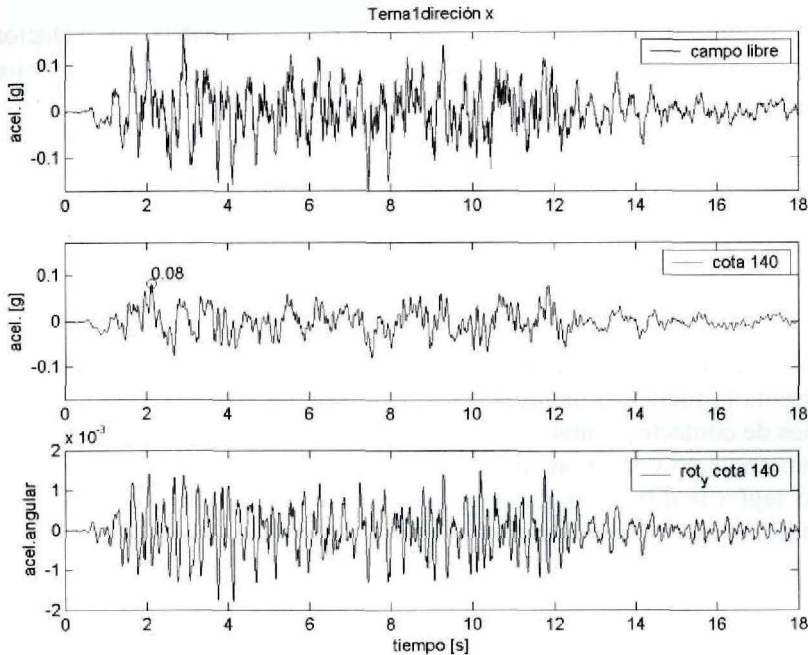


Figura 9: Registro en superficie y registros transformados en la base del cilindro.

### 3.2 Paso 2. Resortes y amortiguaciones equivalentes del espacio estratificado

La segunda etapa del método de los tres pasos consiste en la determinación de las rigideces dinámicas del terreno ante posibles movimientos de sólido rígido de la parte del cilindro empotrada en el suelo.

Para ello se recurre a la definición de rigidez: “fuerza que es necesario aplicar en los grados de libertad cuando se da un movimiento unidad a la estructura”.

En este caso el procedimiento consiste en dar movimientos armónicos del tipo  $1 \cdot e^{i\omega t}$  al cilindro empotrado en el terreno, rígido y sin masa. La suma de las tensiones desarrolladas en el contorno rígido son las fuerzas buscadas y el problema consiste en resolver, frecuencia a frecuencia, los casos correspondientes a movimiento vertical unidad, movimiento horizontal unidad y giro unidad, este último centrado en la base. Puesto que una rotación induce tensiones horizontales en las paredes del cilindro y, recíprocamente, un movimiento horizontal produce un momento en la base, las rigideces horizontal y de giro referidas a la base están acopladas.

Para una excitación armónica con pulsación  $\omega$ , se define la matriz de rigidez dinámica de una cimentación rígida como la matriz que relaciona el vector de fuerzas y momentos aplicados sobre ella con el vector de desplazamientos y giros resultantes:

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} \mathbf{u}$$

$$\begin{Bmatrix} F_z \\ F_x \\ M_{\theta\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & K_{xx} & K_{x\theta} \\ 0 & K_{\theta x} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_z \\ u_x \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (8)$$

Cada término de la matriz de rigidez  $K_{ml}$  es dependiente de la frecuencia  $\omega$  y representa la fuerza (o momento) resultante según la dirección  $l$ , debido a las tensiones de contacto, cuando sobre el contorno lateral y la base de la estructura rígida en contacto con el suelo se aplica un desplazamiento (o giro) armónico unitario según la dirección  $m$ . Fuerzas y desplazamientos están, en general, en desfasadas, es decir, los términos de  $K$  son valores complejos del tipo:

$$K_{lm}(\omega) = \text{Re}(K_{lm}) + i \text{Im}(K_{lm}) \quad (9)$$

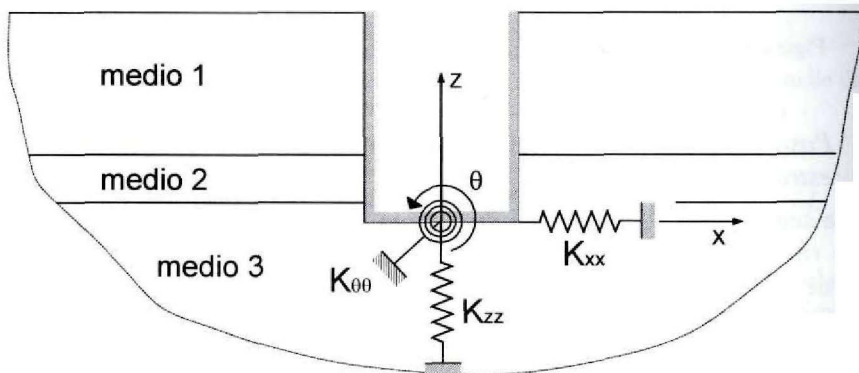


Figura 10: Esquema de la configuración geométrica del problema.

Utilizando la misma malla de elementos de contorno se obtienen resultados como el que se presenta en la Figura 11.

### 3.2.1 RESPUESTA DINÁMICA DE LA PARTE EMPOTRADA DEL POZO

La ecuación del movimiento relativo entre estructura y suelo es del tipo:

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega\dot{u} + \omega^2 u = -\ddot{u}_s \quad (10)$$



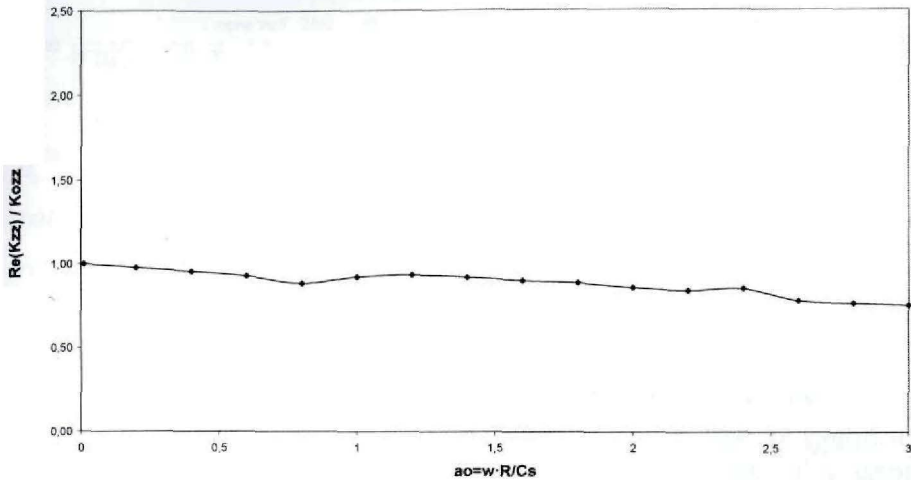


Figura 11: Coeficiente adimensional  $k_{zz}$ .

donde el movimiento absoluto de la estructura  $u^t$  es  $u^t = u_s + u$ , siendo  $u_s$  el movimiento del suelo y  $u$  el movimiento relativo entre suelo y estructura.

Los índices de amortiguamiento obtenidos en el estudio de impedancias son superiores al crítico, con lo que prácticamente anulan el desplazamiento  $u$  relativo entre el cilindro y el suelo. Por ello, el movimiento a tener en cuenta en la base de la estructura  $u^t$  es solamente el debido a la deconvolución del movimiento superficial  $u_s$  tras tener en cuenta la interacción cinemática.

Para confirmarlo se ha procedido a la integración paso a paso de un modelo formado por un sólido rígido con las características citadas en el párrafo anterior, que ha sido sometido a los movimientos resultantes de la deconvolución de los sismos en superficie.

La Figura 12 muestra la comparación de los espectros de aceleración que sufre el terreno y los del cilindro a dos cotas distintas (140 y 190). Puede verse que el movimiento de la estructura es prácticamente el que corresponde al terreno.

### 3.3 Acción para la determinación de la respuesta dinámica del voladizo

La rigidez del conjunto pantallas-pozo del cilindro, causante de la interacción terreno-estructura, cesa al llegar a la superficie del terreno. A partir de la cota 190 el cilindro se transforma en una torre flexible de diámetro prácticamente igual a su altura.

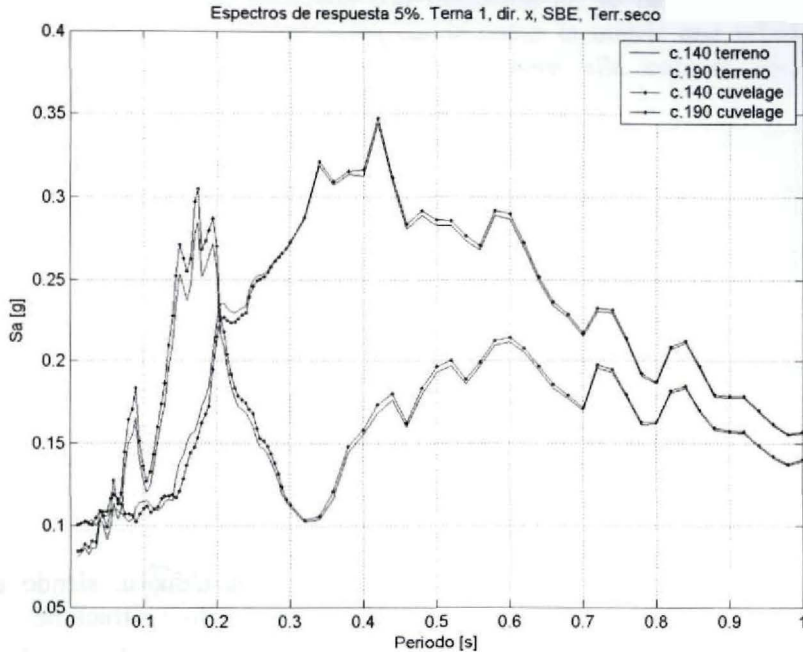


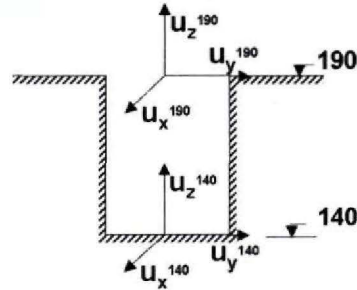
Figura 12: Comparación de espectros de respuesta correspondiente al movimiento sobre el cilindro y en la base de los resortes.

Debido a la rigidez de la parte empotrada en el terreno el movimiento de la cota 190 puede obtenerse como movimiento de sólido rígido, siendo igual a la suma de translación y rotación en la base tal y como se indica más abajo.

La acción sísmica se define a través de 5 historias temporales: tres desplazamientos según los ejes, y dos rotaciones según los ejes horizontales. Estas historias temporales son el resultado de la doble integración de los acelerogramas obtenidas tras dos transformaciones. La primera es la transformación del movimiento en superficie a movimiento bajo el centro del cilindro, mediante la función de transferencia, como se ha descrito anteriormente. La segunda es una transformación puramente geométrica para considerar la influencia del giro de la parte enterrada del cilindro en el movimiento horizontal, en la cota 190. La Figura 13 presenta un ejemplo del resultado de la transformación.

Las ecuaciones de transformación son:

$$\begin{aligned}
 u_x^{190} &= u_x^{140} + 50 \cdot rot_y^{140} \\
 u_y^{190} &= u_y^{140} - 50 \cdot rot_x^{140} \\
 u_z^{190} &= u_z^{140} \\
 rot_x^{190} &= rot_x^{140} \\
 rot_y^{190} &= rot_y^{140}
 \end{aligned}$$



(11)

#### 4. Modificación de la acción debido a la presencia de la estructura

Se presentan a continuación dos Figuras que presentan cómo se modifica el movimiento en distintos puntos, con respecto al que se produciría en campo libre.

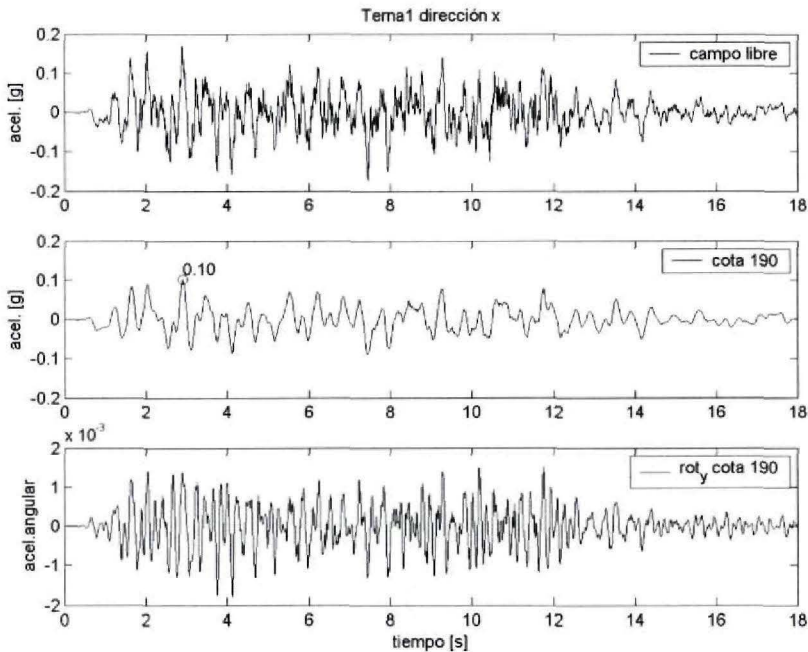


Figura 13: Movimientos transformados a la cota 190.

La Figura 14 presenta los espectros de respuesta correspondientes a puntos situados sobre la superficie del terreno, a distintas distancias de la pared del

cilindro. En ella se aprecia que el efecto del cilindro es una disminución de la sollicitación para periodos de vibración menores que 0.5s.

La Figura 15 presenta los espectros de respuesta correspondientes a puntos sobre la superficie del cilindro, a distintas profundidades. Se aprecia una disminución de la sollicitación, salvo en una banda alrededor del periodo de vibración 0.15s.

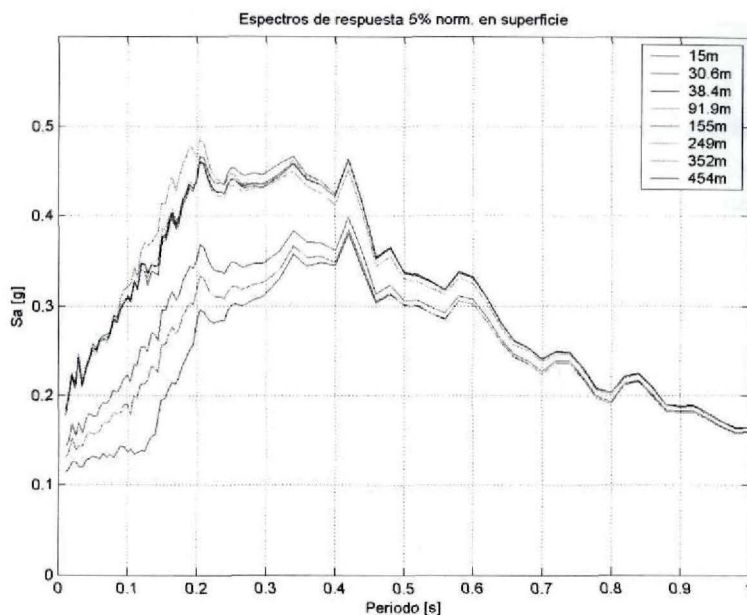


Figura 14: Espectros de respuesta en la superficie libre para diferentes distancias.

## Bibliografía

- [1] Tajimi, H., Dynamic analysis of a structure embeded in an elastic stratum, *Proc. 4th World Conference on Earthquake Engineering*, Chile, 1969.
- [2] Akino, K.; Ota, T. y Yomahara, H., Sesismic observation of rigid structures on various soils and its review, *Proc. 4th World Conference on Earthquake Engineering*, Chile, 1969.
- [3] Reissner, E., Stationäre, axialsymmetrische, durch eine schüttelnde Masse erregte Schwingungen eines homogenen elastischen Halbraumes, *Ingenieur Archiv*, 7(6), pp. 381-396, 1936.
- [4] Richard, F.E., Hall, J.R. y Woods, R.D., *Vibration of Soils and Foundations*, Prentice Hall, 1970.
- [5] Verbic, R. y Veletsos, A.S., *Impulse Response Functions for Elastic Foundations*, Rep. No.15. Rice University.
- [6] Wolf, J.P., *Dynamic soil-structure interaction*, Prentice Hall, 1985.



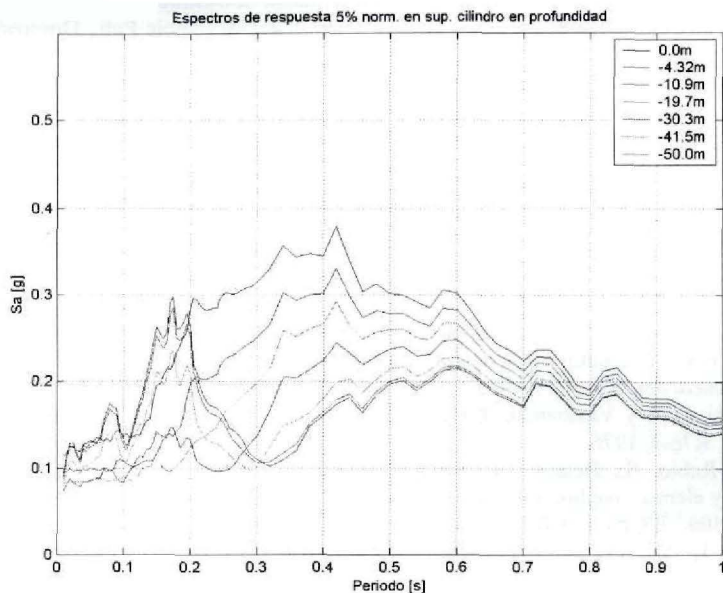


Figura 15: Espectros de respuesta en la superficie del cilindro para diferentes profundidades.

- [7] Gazetas, G., Foundation Vibrations (Chap. 15), *Foundation Engineering Handbook*, Ed. Fang, H.Y., Van Nostrand, 1981.
- [8] Mylonakis, G., Nikolaou, S. y Gazetas, G., Footings under seismic loading: Analysis and design issues with emphasis on bridge foundations, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 26, pp. 824-853, 2006.
- [9] Schabel, B., Lysmer, J. y Seed, H.B., *SHAKE. A Computer Program for Analysis of Horizontally Layered Sites*, Rep. No. EERC 72-12, 1972.
- [10] Lysmer, J., Udaka, T., Tsai, C.F. y Seed, H.B., *FLUSH: A Computer Program for Approximate 3-D Analysis of Soil-Structure Interaction Problems*, Rep. EERC 75-30, 1975.
- [11] Lysmer, J., Tabatabaie, M., Tajirian, F., Vahdani, S. y Ostadan, F., *SASSI: A System for Analysis of Soil-Structure Interaction*, Rep. UCB\GT81-02. U.C. Berkeley, 1981.
- [12] ASCE, *Structural Analysis and Design of Nuclear Plant Facilities*, ASCE-Manuals and Reports of Engineering Practice No.58, 1980.
- [13] Domínguez, J., *Dynamic Stiffness of Rectangular Foundations*, Rep. No. R78-20 MIT, 1978.
- [14] Kausel, E., Roesset, J.M. y Waas, G., Dynamic analysis of footings on layered media, *Jour. Eng. Mech. Div. ASCE*, 101, pp. 679-693, 1975.
- [15] Roesset, J.M., Soil amplification of earthquakes (Chap. 19), Eds. C.S.Desai y J.T.Christian, *Numerical Methods in Geotechnical Engineering*, McGraw-Hill, 1977.
- [16] Luco, J.E., Westmann, R.A., Dynamic response of circular footings, *ASCE J. Eng. Mech. Div.*, 97(EM5), pp. 1381-95, 1971.
- [17] E. Alarcón, E., Cano, J.J. y Domínguez, J., Boundary Element approach to the dynamic stiffness functions of circular foundations, *Int. Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 19, pp. 654-664, 1989.
- [18] Maeso, O., Aznarez, J.J. y Domínguez, J., Three dimensional models of reservoir sediments and effects on the seismic response of arch dams, *Earth. Eng. and Structural Dynamics* 33, 1103-1123, 2004.

- [19] Domínguez, J., Twenty five years of BEM for Dynamic Soil-Structure Mechanics, *Boundary Element Methods for Soil-Structure Interaction*, Kluwer Academic Pub., Dordrecht., pp. 1-51, 2003.
- [20] Domínguez, J., *Boundary Elements in Dynamics*, Elsevier & C.M.P., 1993.
- [21] Komatitsch, D. y Vilote, J.P., The spectral element method: An efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures, *Bull. Seis. Soc. of America*, 88(2), pp. 368-392, 1998.
- [22] Cotterau, R., *Probabilistic Models of Impedance Matrices*, Tesis doctoral, École Centrale Paris, 2006.
- [23] Soize, C., Random matrix theory for modelling uncertainties in computational mechanics, *Comp. Meth. in Applied Mechanics and Engineering*, 194(12-16), pp. 1333-1366, 2005.
- [24] Kramer, S.L., *Geotechnical Earthquake Engineering*, Prentice Hall, 1996.
- [25] Ishihara, K., *Soil Behaviour in Earthquake Geotechnics*, Oxford Science Publications, 1996.
- [26] Broker, E.W. y Ireland, H.O., Earth pressures at rest related to stress history, *Canadian Geotechnical Journal*, II(1), 1965.
- [27] Gasparini, D.A. y Vanmarcke, E.H., *SIMQKE A Program for Artificial Generation*, MIT. Pub. No. R76-4, 1976.
- [28] Alvarez-Rubio, S., Benito, J.J., Sánchez-Sesma, F.J. y Alarcón, E., The use of direct boundary element method for gaining insight into complex seismic site response, *Computers & Structures*, 83, pp. 821-835, 2005.
- [29] Elsabee, F., Morray, J.P. y Roesset, J.M., *Dynamic Behavior of Embedded Foundations*, Research Report R77-33, MIT, 1977.
- [30] Japanese Society of Civil Engineers, *Dynamic Analysis and Earthquake Resistant Design*, Vol. 2, Balkema, Rotterdam/Brookfield, 1997.