

## LOS ELEMENTOS MIXTOS EN LA TEORÍA DE ELEMENTOS DE CONTORNO

I. Rodríguez, A. Martín, E. Alarcón

Cátedra de Estructuras  
E.T.S.I. de Ing. Industriales  
Universidad Politécnica de Madrid

**Resumen.**— En este trabajo se expone la formulación del B.I.E.M. (en problemas de potencial) con elementos mixtos, que representan una interpolación lineal en la función de campo y constante en su derivada. El objetivo primordial de dicha formulación, es el soslayar los problemas que se presentan con los planteamientos anteriores, cuando existen puntos singulares. Los ejemplos que se incluyen, resueltos mediante un programa desarrollado en un miniordenador, confirman que el método propuesto consigue mejores resultados, sin ninguna complicación adicional sobre la formulación general, y con un ahorro significativo en cuanto al número de incógnitas y ecuaciones que se han de resolver.

## INTRODUCCION

Siguiendo la ruta marcada previamente por el desarrollo del método de los elementos finitos, el B.I.E.M. se ha venido practicando mediante el uso de discretizaciones isoparamétricas simultáneas para las condiciones esenciales y naturales de contorno. De experiencias previas, en las que una sobreaproximación, produce los clásicos resultados oscilantes, parecía deducirse la conveniencia de usar órdenes diferentes de interpolación. Esta circunstancia llevó al estudio de los elementos que llamamos mixtos, combinando interpolación lineal de las condiciones esenciales con un orden constante para las naturales.

Este artículo presenta, brevemente, el desarrollo de la teoría de los elementos mixtos y la forma de evitar la sobredefinición que aparece en algunos casos.

Aunque este estudio se ha realizado utilizando la teoría de potencial, su aplicación a la teoría de elasticidad es inmediata, con las consiguientes ventajas en los casos de acoplamiento con el F.E.M

## PLANTEAMIENTO DEL METODO

La formulación general de la teoría de elementos de contorno mixtos es en todo semejante al tratamiento dado a las condiciones de contorno. Partiendo del Teorema de Green se llega a la ecuación integral aplicable al contorno

$$c(l) \cdot \phi(l) + \sum_{k=1}^N \int_{\partial D_k} \phi_k \left( \frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_k(l) ds_k = \sum_{k=1}^N \int_{\partial D_k} \psi_k q_k ds_k \quad (1)$$

donde  $\phi$  representa la función potencial,  $q$  su flujo y  $\psi$  es una solución fundamental de la ecuación de Laplace.

Imponiendo a (1) las condiciones de contorno con elementos mixtos y para dos dimensiones

$$\phi_k(\xi) = [N_1(\xi) \quad N_2(\xi)] \begin{bmatrix} \phi_k(K) \\ \phi_k(K+1) \end{bmatrix}$$

(Variación lineal de  $\phi$ )

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi)$$

$$N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi)$$

$$-1 \leq \xi \leq 1$$

$$q_k = \text{constante}$$

(Variación constante de  $g$ )

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \quad \text{solución fundamental para dos dimensiones}$$

obtenemos:

$$c(l) \cdot \phi(l) + \sum_{k=1}^N [A_1, A_2] \begin{bmatrix} \phi_k(K) \\ \phi_k(K+1) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N q_k G_{lk} \quad (2)$$

Donde  $A_1$ ,  $A_2$  y  $G_{lk}$  son constantes de integración, a cuyo cálculo se dedicará un apartado -

posterior.

$$A_1 = \int_{\partial D_k} N_1(\xi) \left( \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) ds_k$$

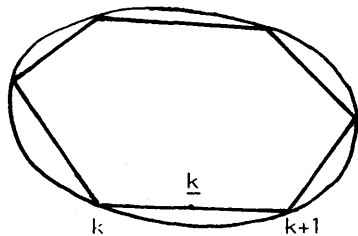
$$A_2 = \int_{\partial D_k} N_2(\xi) \left( \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) ds_k$$

$$G_{ik} = \int_{\partial D_k} \psi ds_k$$

La ecuación se aplica integrando desde un punto del elemento l, sobre cada uno de los N elementos en que se ha discretizado el contorno.

TRATAMIENTO DE LA ECUACION INTEGRAL

La ecuación (2) es aplicable a cualquier punto de cada elemento. La definición de variación lineal del potencial sobre un elemento viene dada por el valor  $\phi_k(k)$ , potencial en el nodo k, y por  $\phi(k+1)$  valor del potencial en el nodo k+1. La definición de la variación constante del flujo a su vez, queda determinada por el valor de éste en el centro del elemento. Esta discre-



tización, que elimina los problemas de esquina, conlleva la sobre-determinación de algunos nodos.

Como se ha dicho, la ecuación (2) es aplicable a cualquier punto de cada elemento. Bajo las hipótesis de discretización descritas, se integrará, en cada caso, desde el punto donde exista una incógnita, sobre el resto del contorno, pudiendo ser dicho punto, bien un extremo del elemento o su centro, según los distintos casos.

CALCULO DE LAS CONSTANTES DE INTEGRACION Y DEL TERMINO LIBRE

Si se está integrando desde un elemento l en el cual se desconoce el potencial en el nodo l se integrará desde dicho nodo.

A.- Caso de que se esta integrando sobre un elemento no contiguo k.

En esta caso las constantes de integración se evalúan por métodos numéricos (Cuadraturas de Gauss):

$$A_1 = \frac{L_k}{4} \sum_{i=1}^4 (1 - \xi_i) \frac{D}{r_i^2} \omega_i$$

$$A_2 = \frac{-L_k}{4} \sum_{i=1}^4 (1 + \xi_i) \frac{D}{r_i^2} \omega_i$$

$$G_{lk} = \frac{L_k}{2} \sum_{i=1}^4 \left( \ln \frac{1}{r_i} \right) \omega_i$$

B.- Caso de que esté integrando sobre un elemento contiguo l ó l-1.

Al integrar desde un nodo y calcular las constantes de integración sobre los elementos contiguos se producen singularidades en las fórmulas anteriores.

Integrando sobre el elemento l obtenemos

$$A_1 \text{ indeterminada}$$

$$A_2 = 0$$

Integrando sobre el elemento l-1 obtenemos

$$A_1 = 0$$

$$A_2 \text{ indeterminada}$$

Para hallar el valor de las constantes indeterminadas aplicamos un potencial constante sobre todo el contorno.

Analizando la ecuación (2) se puede observar que la suma del término independiente y las constantes indeterminadas es el coeficiente del potencial en el nodo. La ecuación (2) queda al aplicar un potencial constante en el contorno.

$$c(l) \phi(l) + \sum_{k=1}^N (A_1 A_2) \begin{bmatrix} \phi_k(k) \\ \phi_k(k+1) \end{bmatrix} = 0$$

operando se llega a

$$H_{lk} \phi_k = 0$$

$$H_{lk} = A_2 \text{ (sobre el elemento } k-1) + A_1 \text{ (sobre el elemento } k)$$

$$H_{ll} = c(l) + A_2 \text{ (sobre } l-1) + A_1 \text{ (sobre } l)$$

Por tanto

$$c(l) + A_1 + A_2 = - \sum_{k=1}^N H_{lk}$$

En lo que respecta al término  $G_{ll}$ , éste puede obtenerse analíticamente siendo

$$G_{ll} = L_e \left( 1 + \ln \frac{1}{L_l} \right)$$

Si se está integrando desde un elemento l en el cual desconocemos el flujo integrando desde el

centro del elemento.

A.- Si no se está integrando sobre el propio elemento.

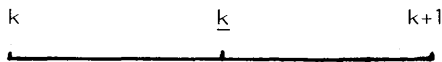
En este caso las constantes se evaluarán numéricamente análogamente a como se hizo en el apartado anterior (A).

B.- Caso de que se esté integrando sobre el propio elemento.

En este caso  $A_1$  y  $A_2$  son indeterminadas pero - puede demostrarse que son iguales.

Teniendo en cuenta que el término independiente es  $\frac{1}{2}$  en  $k$  por ser el contorno regular, (2) queda.

$$\frac{1}{2} \phi_k + \sum_{i=1}^n (A_1 A_2) \begin{bmatrix} \phi_k(k) \\ \phi_k(k+1) \end{bmatrix} = 0 \sum_{i=1}^N G_{kl} q_k$$



y desarrollando

$$\frac{1}{2} \phi_k + A_1 \phi_k(k) + A_2 \phi_k(k+1) + \dots = \sum_{i=1}^N G_{kl} q_k \quad (3)$$

teniendo en cuenta que:

$$\phi_k = \frac{1}{2} (\phi_k(k) + \phi_k(k+1))$$

la ecuación (3) queda por lo tanto

$$\left(\frac{1}{4} + A_1\right) \phi_k(k) + \left(A_2 + \frac{1}{4}\right) \phi_k(k+1) + \dots = \sum G_{kl} q_k$$

Si consideramos constante el potencial en el contorno y teniendo en cuenta que:  $A_1 = A_2$ , obtenemos

$$A_1 = A_2 = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^N H_{lk} \right)$$

El cálculo de  $G_{ll}$  se realiza analíticamente

$$G_{ll} = L_l \left( 1 + L_n \frac{2}{L_l} \right)$$

RESOLUCION DEL PROBLEMA. SINTESIS DE LAS ECUACIONES.

Partiendo de la ecuación (2), integrando desde los puntos donde existan incógnitas se llegará a una ecuación matricial de la forma:

$$\underline{P} \underline{X} = \underline{F}$$

Recorriendo el contorno en sentido positivo, se

establecerán las condiciones de contorno fijando- las en los nodos, considerandose el flujo conocido en él si se conoce en el elemento posterior.

Los casos que se pueden presentar en un nodo - cualquiera k son:

- 1.- Se conoce  $\phi_k$  y se desconoce  $q_k$  en el elemento k, por tanto se integra desde el centro de k.
- 2.- Se conoce  $q_k$  en el elemento y se desconoce  $\phi_k$  por lo que se integra desde el nodo k.
- 3.- Se conoce  $\phi_k$  y  $q_k$ ; en este caso no se genera ecuación.

Integrando desde un punto "k" (centro o nodo) sobre un elemento "l" cualquiera, el ensamblaje de las ecuaciones en función de los distintos casos posibles, es como sigue:

Nodo l

- En el nodo l se conoce  $q_l$  y se desconoce  $\phi_l$

$$F_{kl} = F_{kl} + A_1$$

$$F_k = F_k + G_{ll} q_k$$

- En el nodo l se conoce  $\phi_l$  y se desconoce  $q_l$

$$F_{kl} = -G_{kl}$$

$$F_k = F_k - A_1 \phi_l$$

- En el nodo l se conoce  $q_l$  y  $\phi_l$

$$F_k = F_k - A_1 \phi_l + G_{lk} q_l$$

Nodo l+1

- En el nodo l+1 se conoce  $q_l$  y se desconoce  $\phi_l$

$$F_{k,l+1} = F_{k,l+1} + A_2$$

- En el nodo l+1 se conoce  $q_l$  y  $\phi_l$  o solo se conoce  $\phi_l$

$$F_k = F_k - A_2 \phi_{l+1}$$

EJEMPLOS

Se desarrollan aquí tres ejemplos, en los que el método propuesto desarrolla todas sus posibilidades.

Primer ejemplo : es un problema de transmisión de calor en una placa cuadrada; la tabla i presentada es la salida del programa para este ejemplo. Los resultados obtenidos coinciden con los teóricos. La Fig. 1 también obtenida en la salida de resultados, presenta la discretización aplicada y la posición de los puntos internos .

El segundo y tercer ejemplo corresponden a problemas de potencial, en los que existe un punto singular, en el que una de las incógnitas toma un valor infinito. Este problema, difícil de tratar con métodos anteriores, no presenta dificultades adicionales al aplicar el método presentado.

Segundo ejemplo: La Fig. 2 presenta la definición del problema. En la Tabla 2, se presentan los resultados obtenidos por Jaswon con 80 elementos; con una discretización lineal de 40 elementos, la solución aceptada de Papamichael y dos discretizaciones significativas del método presentado.

Tercer ejemplo: En la Fig. 3 se presenta la definición del problema. En la Tabla 3, se presentan los resultados obtenidos, en los puntos de contorno y del interior más significativos, por diversos métodos y dos discretizaciones realizadas con el método presentado.

### CONCLUSIONES

Se ha presentado la formulación general del B.I.E.M. con elementos mixtos, y se ha realizado un programa de ordenador en minicomputadora (HF-98/45-B), que ha permitido comprobar el método, mediante una serie de ejemplos especialmente significativos.

Los resultados obtenidos han sido óptimos en el caso de problemas que presentan singularidades. Asimismo, la formulación presentada permite una simplificación de las distintas posibilidades que deben considerarse, y además produce un menor número de ecuaciones, con el consiguiente ahorro de tiempo de ordenador.

Es de esperar, que el método aquí expuesto desarrolle todas sus posibilidades en su aplicación a problemas de Elasticidad, en los que los problemas que éste método soslaya, son mucho más importantes y significativos.

### BIBLIOGRAFIA

- Alarcón, E; Martín, A; Paris F (1978a). Improved Boundary Elements in torsion problems. Conf. on Recent Adv. in B.E.M. Southampton.
- Alarcón, E; Martín, A; Paris, F. (1978 b.). Some minor problems with B.I.E.M. 2ª Conf. of App. Num. Mod. Madrid.
- Alarcón, E; Martín, A; Paris, F (1979). Boundary Elements in potential and elasticity theory. Comp. & strc. Vol 1.
- Jaswon, M.A.; Symm, G.T. (1977). Integral Equation Methods in Potential theory and Elastostatics. Academic Press.

Paris, F. (1979). El Método de los Elementos de Contorno en la Teoría del Potencial y la Elasticidad. Tesis, Madrid.

Paris, F; Domínguez, J.; Martín, A; Alarcón, E (1979). Numerical treatment of thick shells with holes. 2ª Int. Congr. of shells. Madrid. Paris, F; Comunicación privada.

### SUMMARY

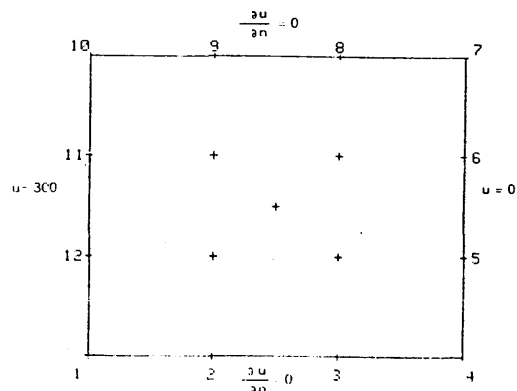
In this paper the mixed B.I.E.M. for bidimensional potential problems is presented. The interpolation of the field variable is done by piecewise constant one. The main idea is to sweep out the solution the parasitic disturbances introduced near singular points by a finite value although an important byproduct is the possibility of connexion with domain methods, as F.E.M., in which the same kind of interpolation is worked. Results are very good, as shown by the examples, and also interesting is the reduction in computer time comparatively to the classical B.I.E.M approach.

Fig. 1

\*\*\*\*\*Transmisión de calor en una placa cuadrada\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*DATOS DE ENTRADA: \*\*\*\*\*

NODO ****	COORD X *****	COORD Y *****	CODIGO *****	POTENCIAL *****	FLUJO *****
***1	0.000	0.000	*****3	300.0000	0.000
***2	2.000	0.000	*****2	Incognita	0.000
***3	4.000	0.000	*****2	Incognita	0.000
***4	6.000	0.000	*****1	0.0000	Incognita
***5	6.000	2.000	*****1	0.0000	Incognita
***6	6.000	4.000	*****1	0.0000	Incognita
***7	6.000	6.000	*****3	0.0000	0.000
***8	4.000	6.000	*****2	Incognita	0.000
***9	2.000	6.000	*****2	Incognita	0.000
**10	0.000	6.000	*****1	300.0000	Incognita
**11	0.000	4.000	*****1	300.0000	Incognita
**12	0.000	2.000	*****1	300.0000	Incognita



\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\* SOLUCION \*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

NODO ****	COORD X *****	COORD Y *****	CODIGO *****	POTENCIAL *****	FLUJO *****
***1	0.000	0.000	*****3	300.00	0.00
***2	2.000	0.000	*****2	200.00	0.00
***3	4.000	0.000	*****2	100.00	0.00
***4	6.000	0.000	*****1	0.00	-50.00
***5	6.000	2.000	*****1	0.00	-50.00
***6	6.000	4.000	*****1	0.00	-50.00
***7	6.000	6.000	*****3	0.00	0.00
***8	4.000	6.000	*****2	100.00	0.00
***9	2.000	6.000	*****2	200.00	0.00
**10	0.000	6.000	*****1	300.00	50.00
**11	0.000	4.000	*****1	300.00	50.00
**12	0.000	2.000	*****1	300.00	50.00

\*\*\*\*\* POTENCIAL EN LOS PUNTOS INTERNOS \*\*\*\*\*

Pto. INTERNO *****	COORD X *****	COORD Y *****	POTENCIAL *****
****1	2.000	2.000	200.0029
****2	2.000	4.000	200.0029
****3	3.000	3.000	150.0013
****4	4.000	2.000	100.0008
****5	4.000	4.000	100.0008

TABLA.1.

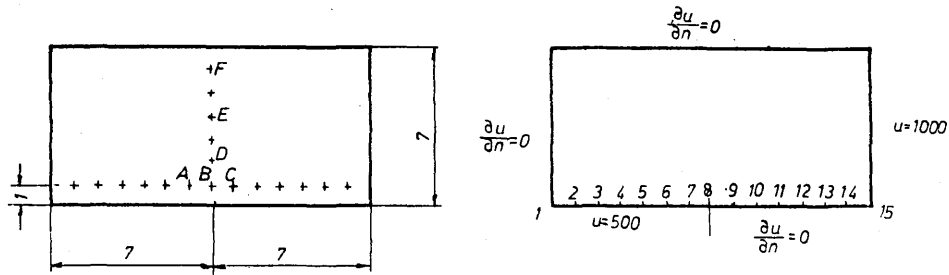


Fig. 3.

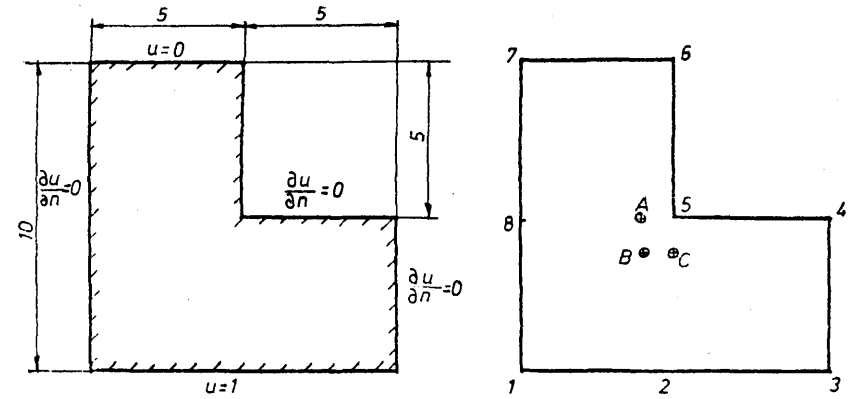


Fig. 2

Punto	Método presentado con 21 Elementos	Método presentado con 48 Elementos	Papamichael	Jawson (96 Elementos)	Jawson (48 Elementos)
1	u= 500	u= 500	u= 500	u= 500	u= 500
2	500	500	500	500	500
3	500	500	500	500	500
4	500	500	500	500	500
5	500	500	500	500	500
6	500	500	500	500	500
7	500	500	500	500	500
8	500	500	500	539	556
9	668	658	656	662	667
10	736	730	728	732	736
11	794	791		791	794
12	848	845	844	846	848
13	899	897		899	900
14	950	949	949	950	951
15	1000	1000	1000	1000	1000
A	561	561	562	564	566
B	604	604	604	608	612
C	670	670	670	674	678
D	641	641	642	644	647
E	683	683	684	685	688
F	687	701	702	704	705

TABLA 3.

Punto	Método presentado con 8 elementos	Método presentado con 48 elementos	B. I. E. M. Liral (4) El.	Papamichael	Jawson (80 elementos)
1	u= 1,00	u= 1,00	u= 1,00	u= 1,00	u= 1,000
2	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
3	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
4	0,8948	0,8989	0,89389	0,9005	0,9009
5	0,6681	0,6667	0,66747	0,6663	0,6667
6	0,00	0,00	0,00	0,000	0,00
7	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
B	0,5559	0,5506	0,55523	0,5500	0,5495
A		0,6054	0,605	0,6026	0,6019
B	0,7362	0,7076	0,706	0,7066	0,7066
C		0,7547	0,756	0,7560	0,7565

TABLA 2.