

ELEMENTOS DE CONTORNO JERARQUIZADOS

A. Reverter, E. Alarcón

Cátedra de Estructuras E.T.S.I.I. U.P.M.

Resumen.- Se presenta en este trabajo un nuevo enfoque del M.E.C., según el cual el refinamiento de la solución se logra mediante incremento del número de funciones de forma, en contraposición al tradicional de refinamiento de la discretización. De esta forma se consigue una convergencia más rápida, y de forma automática. Asimismo la discretización del contorno se realiza de una forma natural, viniendo los puntos que la definen impuestos por cambios de geometría o condiciones de contorno solamente.

INTRODUCCION

Como es bien sabido, en el método de los elementos finitos se suele hablar de dos tipos de convergencia. La primera, o convergencia h , se refiere a la mejora del resultado que se obtiene refinando la malla. Debido a la correspondencia elemento-variables nodales - funciones de interpolación, ello implica un ajuste progresivo de los resultados en aquellas zonas donde se produce el refinamiento.

Se trata del método más usado cuando, de forma pragmática, se desea tener una idea de la convergencia de los resultados. Su principal inconveniente radica en el hecho que cada refinamiento exige el cálculo de matrices de rigidez diferentes de las anteriores, de modo que la información debe ser rehecha en cada caso y, por tanto, los costes son elevados.

El segundo método analiza la convergencia p , ó refinamiento de la aproximación mediante el incremento del grado del polinomio definido sobre cada elemento. Se trata de abandonar la idea de asociar a cada nodo el valor físico de la variable correspondiente en la aproximación típica.

$$u \approx a_1 \phi_1 = a_2 \phi_2 = a_3 \phi_3 = \dots = a_n \phi_n \quad (1)$$

donde las funciones ϕ son unidad en el nodo correspondiente y cero en el resto.

Por el contrario, se vuelve a la idea original de Ritz, semejante al de un desarrollo en serie de Fourier, donde las funciones ϕ están de

finidas globalmente y los coeficientes de ponderación no tienen que presentar un significado físico concreto.

Evidentemente, la vuelta no es total; se siguen manteniendo elementos y dentro de cada uno de ellos se establece una jerarquía de funciones ϕ_i .

Con esta situación intermedia entre la globalidad absoluta de Ritz y la correspondencia absoluta de la discretización con las variables se consigue, por un lado, mantener una versatilidad suficiente para el ajuste por trozos y, por otro, refinar la aproximación de forma inteligente ya que, al igual que sucede en una serie de Fourier, cada término que se añade produce un efecto menor, lo que posibilita el truncamiento cuando se alcanza un determinado nivel de precisión. Además, puesto que cada ϕ tiene un soporte perfectamente definido desde un principio, cada etapa del refinamiento aprovecha todos los cálculos anteriores y solo se necesita evaluar los nuevos términos de la matriz de rigidez.

La primera idea fue propuesta por Zienckiewicz et al. (1970), y posteriormente han desarrollado el método Szabo et al. (1978), Babuska (1975, 1978), Peano (1978), etc.

El proceso operativo incluye así

- a) Establecimiento de una malla amplia sobre el dominio a analizar.
- b) Definición de una jerarquía de funciones de interpolación dentro de cada elemento.
- c) Establecimiento de un "indicador" de las zonas que precisen la adición de nuevas funciones jerarquizadas.
- d) Establecimiento de un "estimador a posteriori" que evalúe el error cometido y precise el momento en que pueda ser detenido el proceso.

Un método que sigue los pasos anteriores se denomina autoadaptable y, como se puede comprender, resulta interesantísimo para problemas no triviales.

En lo que sigue vamos a contemplar la posibilidad de extender las ideas anteriores al método de los elementos de contorno.

ELECCION DE LAS FUNCIONES DE INTERPOLACION EN - EL M.E.C. ELEMENTOS NATURALES.

Como es sabido, el método de los elementos de contorno está basado en la existencia de una relación de reciprocidad entre dos problemas regidos por un operador elíptico.

$$Au = f \quad a)$$

$$Au^* = f^* \quad b) \quad (2)$$

que se obtiene al formar los productos internos

$$\begin{aligned} (Au, u^*)_{\Omega} &= (f, u^*)_{\Omega} \\ (Au^*, u)_{\Omega} &= (f^*, u)_{\Omega} \end{aligned} \quad (3)$$

Desarrollando el primer miembro

$$a(u, u^*)_{\Omega} + b(u, u^*)_{\partial\Omega} = (f, u^*)_{\Omega}$$

$$a(u^*, u)_{\Omega} + b(u^*, u)_{\partial\Omega} = (f^*, u)_{\Omega} \quad (4)$$

donde $a(\dots)$ es una forma bilineal en el dominio Ω y $b(\dots)$ otra en su contorno.

Debido a las condiciones de simetría del operador, la sustracción de ambas igualdades permite obtener

$$\begin{aligned} b(u, u^*)_{\partial\Omega} - b(u^*, u)_{\partial\Omega} &= (f, u^*)_{\Omega} - \\ &- (f^*, u)_{\Omega} \end{aligned} \quad (5)$$

Si (2a) es el problema original se observa que tan solo el último sumando del segundo miembro incluye los valores de la variable en el dominio, lo que exigiria su discretización.

Sin embargo, si se vesocoge (2b) de modo que

$$f^* = \delta(x - \tilde{a}) \quad (6)$$

se obtiene inmediatamente

$$(f^*, u)_{\Omega} = u(\tilde{a}) \quad (7)$$

y una fórmula de representación integral

$$\begin{aligned} u(\tilde{a}) &= -b(u, u^*)_{\partial\Omega} - b(u^*, u)_{\partial\Omega} + \\ &+ (f, u^*)_{\Omega} \end{aligned} \quad (8)$$

que en elasticidad, por ejemplo, se denomina identidad de Somigliana, y en potencial responde a la expresión

$$\begin{aligned} \phi(\tilde{a}) &= - \int_{\partial\Omega} \phi \left(\frac{d\phi^*}{dn} \right) + \int_{\partial\Omega} \phi^* \left(\frac{d\phi}{dn} \right) + \\ &+ \int_{\Omega} f \phi^* \quad \tilde{a} \in \Omega \end{aligned} \quad (9)$$

que indica que es posible expresar el potencial en un punto como la suma de un potencial de capa simple, otro de capa doble y un potencial volumétrico.

Si $\tilde{a} \in \partial\Omega$ el primer término de (8) se transforma en

$$\tilde{c} u(\tilde{a}) \quad \tilde{a} \in \partial\Omega \quad (10)$$

donde \tilde{c} es una matriz que recoge las características geométricas del contorno alrededor del punto \tilde{a} .

Con la modificación (10), la ecuación (8) puede interpretarse como un proceso de ponderación de tipo Galerkin, aunque la fórmula (8) como tal genera evidentemente un método de colocación.

Para crear un método numérico con base vg_0 en (9), basta ahora proceder a interpolar la solución en la forma habitual de los métodos proyectivos, es decir

$$\begin{aligned} \phi &\sim a_j \phi_j \\ q &= d\phi/dn \sim b_j \psi_j \quad j = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (11)$$

El M.E.C. tradicional utiliza para ϕ_j y ψ_j polinomios definidos localmente, lo que permite dar significado físico a a_j y b_j e incorporar una formulación isoparamétrica de representación del contorno. Así, si por claridad

$$\phi_j = \psi_j = N_j \quad (12)$$

se obtiene

$$c_i \phi(a_i) + \sum_j \left[\int_{\Gamma_j} N_j J q^* d\xi, \int_{\Gamma_j} N_j J q^* d\xi, \dots \right]$$

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \sum_j \left[\int_{\Gamma_j} N_j J \phi^* d\xi, \int_{\Gamma_j} N_j J \phi^* d\xi, \dots \right] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$i, j = 1, 2, 3, \dots, N \quad (13)$$

donde se ha hecho

$$q = d\phi/dn \quad (14)$$

y N son las funciones de interpolación típicas de los elementos lineales parabólicos etc.

Como puede observarse, el sistema anterior se reduce a

$$A \phi = B q \quad (15)$$

y, tras la imposición de las condiciones de contorno a

$$KX = F \quad (16)$$

que permite obtener las incógnitas X .

Es inmediato observar que, debido a la diferencia entre funciones de interpolación y funciones de ponderación, las matrices resultantes son asimétricas, lo que exige el cálculo de todas y cada una de las integrales que forman sus elementos.

También, aunque las funciones de interpolación sean locales, las de ponderación resultan al resolver el problema (2b) y, por lo tanto, están definidas globalmente. Además de asimétricas las matrices son, pues, llenas.

La propiedad más atractiva del método, es la reducción en dimensiones geométricas, pero el cálculo de las integrales exige un tiempo que a veces desequilibra la ventaja anterior.

No es pues extraño que tras los primeros años de adquirir confianza en los resultados del método se pretenda ahora encontrar soluciones que permitan reducir el esfuerzo de cálculo citado.

En este sentido, la idea de funciones jerarquizadas se presenta como una excitante posibilidad. En efecto, la filosofía isoparamétrica expuesta anteriormente ha servido para automatizar el método mejorando intentos anteriores. No obstante es artificial la creación de elementos mediante funciones de forma locales cuando con ello no se consigue la estructura en banda típica del M.E.F.

Para fijar ideas piensese en los casos de potencial bidimensional que se croquizan en la figura 1.

Si se prescinde de cómo conseguir un modelo geométrico del contorno, lo que no es más que

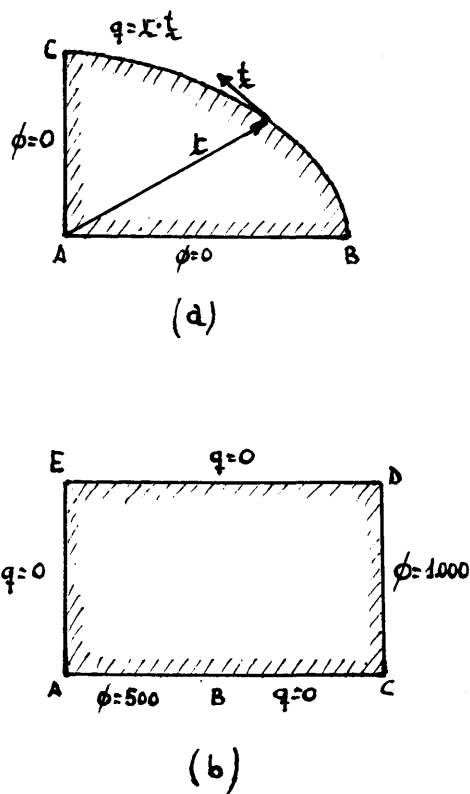


Fig. 1

un problema de interpolación, se observa la existencia de elementos "naturales" definidos bien por la existencia de esquinas, bien por singularidades o cambio en las condiciones de borde.

Es evidente que en el caso 1 a. tanto el flujo como el potencial evolucionan regularmente dentro de cada uno de los trozos AB, BC, CA (figura 2) que son, por tanto, los elementos lógicos en los que debe intentarse la interpolación

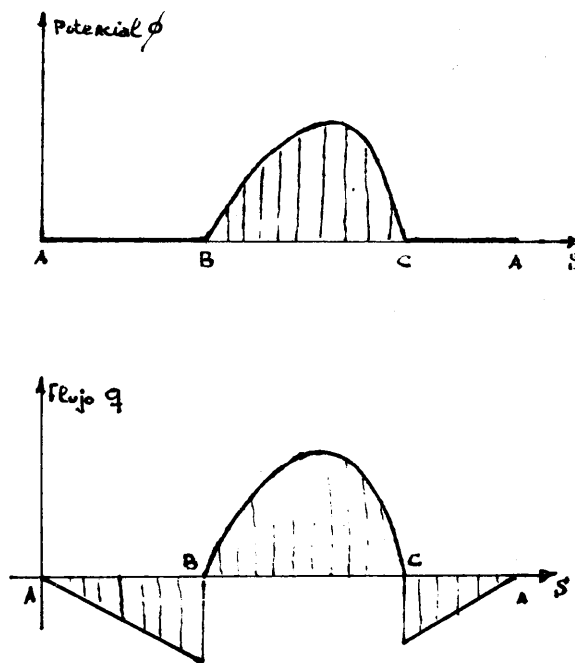


Fig. 2

de las variables ϕ y q .

Por su parte, en el ejemplo 1 b. las esquinas ACDE introducen flujos discontinuos que provocan la conveniencia de subdividir el contorno en esos trozos, pero, además, el cambio de condiciones en B sugiere inmediatamente la elección de los elementos naturales ZA, BC, CD, DE, EA.

Un ejemplo de cómo se estudia la convergencia mediante un método h en este caso puede verse en Alarcon et al. (1979). La sencillez de la geometría indica claramente lo absurdo que resulta un tratamiento local en este caso cuando unas pocas funciones globales y jerarquizadas sobre cada elemento (mas la posible adición de alguna que represente la singularidad de q) permitirían obtener resultados aceptables con un esfuerzo incomparablemente menor; en efecto, hay dominios fijos de integración y el número de funciones esta provocado por la complejidad del potencial y no por la geometría.

JERARQUIA DE FUNCIONES DE INTERPOLACION

En los casos planos, las funciones que se precisan son monodimensionales. Si se sigue con la idea de un desarrollo en serie de Fourier,

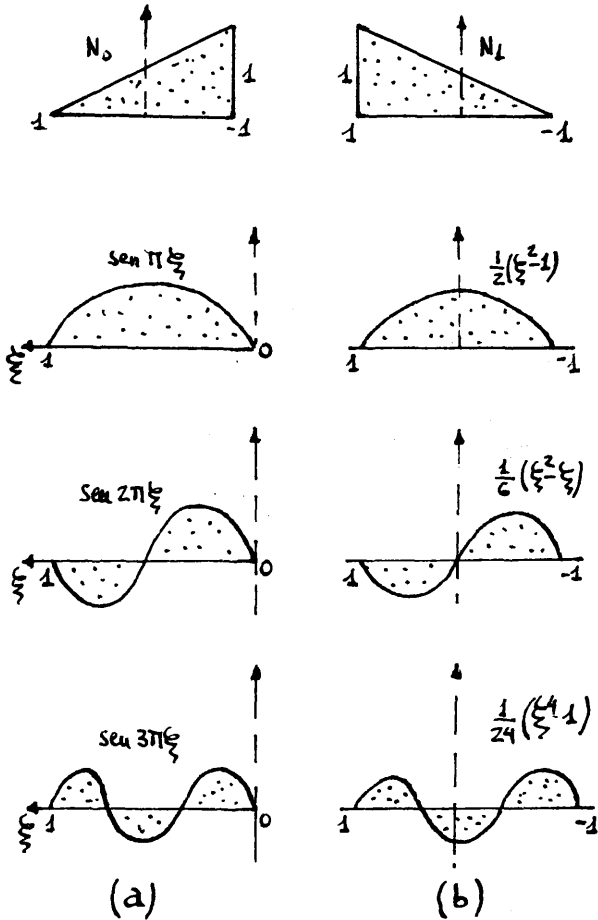


Fig. 3

la jerarquia sería la indicada en la figura 3a_ donde

$$0 < \xi < 1$$

Una serie popular, es la propuesta por Peano et al. (1978) figura 3b. que esta compuesta por las dos funciones lineales mas

$$N_p = \frac{1}{p} (\xi^p - b) \quad -1 < \xi < 1 \quad (17)$$

con
 b = 1 si p es par
 b = ξ si p es impar

En estas funciones, el significado de los coeficientes a_j y b_j de la ecuación 11 pasaría a ser el de derivadas sucesivas de la función en el centro del intervalo.

$$a_{p+1} = \frac{d^p \phi}{d\xi^p} \quad (18)$$

$$b_{p+1} = \frac{d^p q}{d\xi^p}$$

como puede comprobarse inmediatamente.

En problemas 3 D se necesitan funciones bidimensionales que se obtienen simplemente como pro

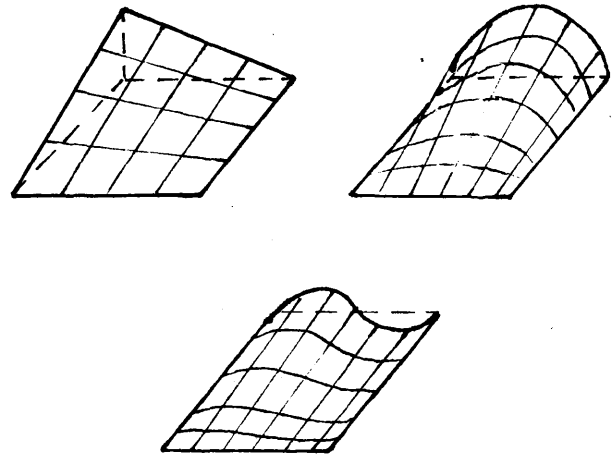


Fig. 4

ductos de las anteriores (Figura 4).

JERARQUIZACION DE LAS MATRICES DE INFLUENCIA

El uso de las funciones de interpolación indicadas en el apartado anterior provoca la deseada jerarquización de las matrices de influencia. Observemos un elemento.

Si el desarrollo

$$u = a_1 \phi_1 + a_2 \phi_2 + a_3 \phi_3 + \dots + a_N \phi_N \quad (19)$$

provoca la matriz

$$\begin{bmatrix} q_{1J}^* \phi_1 & q_{2J}^* \phi_2 & \dots & q_{1J}^* \phi_N \\ q_{2J}^* \phi_1 & q_{2J}^* \phi_2 & \dots & q_{2J}^* \phi_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{NJ}^* \phi_1 & q_{NJ}^* \phi_2 & \dots & q_{NJ}^* \phi_N \end{bmatrix} = A \quad (20)$$

la adición de a_{n+1} \phi_{n+1} implica orlar A en la forma

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \sim & \vdots & q_j^* & J\phi_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{n+1}^* & J\phi_j & q_{n+1}^* & J\phi_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (21)$$

Obsérvese que, para que esto sea posible, se precisa la elección de un nuevo punto de colocación que permita la escritura de la nueva ecuación.

Al respecto existen varias alternativas, como es la elección de puntos de integración utilizados en las cuadraturas de Gauss previas o la utilización de los puntos correspondientes a los máximos de las funciones de interpolación.

Así las funciones lineales se corresponderían con los extremos de los elementos y, si se utiliza la familia de senos se puede disponer de los puntos $\xi = 1/2j$ donde $j = 1, 2, 3, \dots$ etc.

Aunque es evidente, conviene observar también que los refinamientos sucesivos se refieren exclusivamente a la variable incógnita dentro de cada elemento, siendo el dato interpolado desde el principio según las indicaciones del usuario, tal como sucede con la geometría.

La jerarquización inducida en las matrices A y B se transmite íntegramente al sistema final (16), consiguiéndose matrices de rigidez anidadas

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \dots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \dots & K_{2N} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \dots & K_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{N1} & K_{N2} & K_{N3} & \dots & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \dots \\ X_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \dots \\ F_N \end{bmatrix} \quad (22)$$

Por si fuera poco, cada nuevo término x_{N+1} va disminuyendo en importancia respecto al anterior, lo que hace que se debiliten los acoplamientos y se obtenga una matriz mejor condicionada.

Obsérvese también que el anidado y sucesiva evanescencia de las contribuciones sugiere la utilización de métodos iterativos tras la primera resolución del problema, manteniendo como tanto inicial la solución anterior a cada paso.

CRITERIO DE PARADA

Según se dijo mas arriba, para que un sistema pueda ser llamado adaptable se precisa un indicador de la importancia de los términos a añadir así como un estimador del error implícito en la solución.

La labor desarrollada por Babuska y otros para el M.E.F. no existe todavía en el M.E.C. y por ello hasta ahora se ha procedido a utilizar el criterio de Peano que se describe a continuación.

Al estimar u mediante (19) en el problema

$$Au - f = 0 \quad (23)$$

se produce un residuo

$$A\hat{u} - f = r \quad (24)$$

debido al error

$$e = u - \hat{u} \quad (25)$$

evidentemente

$$Ae = Au - A\hat{u} = -f - r + f = -r \quad (26)$$

Se define el error "energético" como

$$\|e\|^2 = e Ae = -e r \quad (27)$$

que, con funciones jerarquizadas, se aproxima así

$$u - \hat{u} \sim \hat{u} = a_{i+1} N_{i+1}$$

por lo que

$$\|e\|^2 = -a_{i+1} \int_{N_{i+1}} r \quad (28)$$

De las nuevas ecuaciones de equilibrio

$$K_{i+1,j} a_j + K_{i+1,i+1} a_{i+1} = f_{i+1} \quad (29)$$

es decir

$$a_{i+1} = K_{i+1,i+1}^{-1} (f_{i+1} - K_{i+1,j} a_j) \quad (30)$$

Pero

$$-\int_{N_{i+1}} r = \int_{N_{i+1}} A(u - \hat{u}) \sim a_{i+1}$$

$$\int_{N_{i+1}} AN_{i+1} = a_{i+1} K_{i+1,i+1} \quad (31)$$

siempre que N_i, N_j sean ortogonales en la norma energética para $i \neq j$

Utilizando (30) y (31) en (28) se obtiene

$$\|e\|^2 = K_{i+1,i+1}^{-1} (f_{i+1} - K_{i+1,j} a_j)^2$$

que es el indicador de Peano a que hacemos referencia mas arriba.

Dependiendo de su valor, se escogen aquellos grados de libertad en los que el indicador es mayor y se procede a una resolución iterativa del sistema resultante.

Por el momento no se dispone de ningún estimador a posteriori que permita asegurar la precisión obtenida.

EJEMPLO

En la figura siguiente se recoge el problema del cuarto de elipse croquizado en 1 a.

La primera pasada corresponde a incógnitas con funciones N_1 y N_2 en los lados AB y AC y en una N_3 para ϕ en BC puesto que el valor $\phi = 0$ en B y C proscribire el uso de las N lineales.

CONCLUSIONES

La idea de jerarquias de funciones de interpolación permite discretizar el contorno en elementos naturales de acuerdo con las discontinuidades previsibles en las variables del problema.

Se puede mejorar de una forma independiente y automática la aproximación tanto en diferentes elementos como en las variables esenciales y naturales del problema.

Se puede reducir el cálculo de integrales (la parte mas costosa del M.E.C.) al mínimo imprescindible.

Se produce un mejor condicionamiento de la matriz y se debilitan los acoplamientos sucesivos.

Toda la información precisa es aprovechada al máximo al pasar de una aproximación a la siguiente, lo que facilita el uso de soluciones iterativas.

REFERENCIAS

1. Zienckiewicz O.C., Irons B.M, Scott F.E. & Campbell J.S. "High Speed Computing of Elastic Structures". Proc. IUTAM Liege 1970.
2. Bábuska I. "The selfadaptive Approach in the F.E.M." Mathem. of Fin. El. and Appl. Academic P. J.R. Whiteman (Ed) 1975
3. Szabo B.A., Basu P.K., Rosow M.P. "Adaptive Finite element based on P-convergence". NASA Conf. Pub. 2059, pp 43-50 1978
4. Bábuska I. & Rheinboldt W.C. "A posteriori error estimates for the F.E.M.". Int. Journ. Num. Meth. Eng. Vol. 12. 1597-1615 1978
5. Peano A., Riccioni A., Pasini A. & Sardella L. "Adaptive Finite Element Models". Applied Numerical Modelling. Pentech Press. E. Alarcón et al. (ed) 1979
6. Alarcón E., Martín A., Paris F. "Some minor problems with B.E.M.". Applied Numerical Modelling. Pentech Press. E. Alarcón et al. 1979

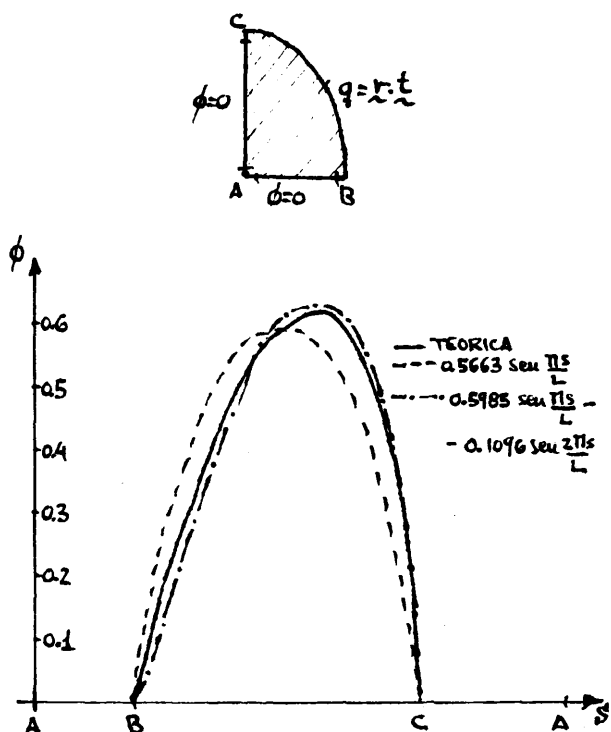


Fig. 5

Obsérvese que las variables son 5: los dos flujos anterior y posterior a 0, el flujo en B en el lado AB, el flujo en C en el lado AC, mas

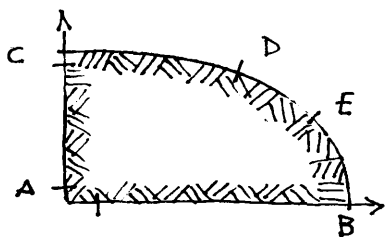


Fig. 6

el valor del potencial en el centro D de BC. La curva llena es la solución teórica de este problema, mientras que la de guiones da la solución de este primer paso.

La siguiente aproximación consiste en la suma de un $\sin 2\pi\xi$ en la zona BC y la colocación en el punto E (fig. 6).

La línea de punto y raya indica la nueva solución, que, como puede apreciarse, es excelente.

El problema se ha resuelto así con solo 6 incógnitas, mientras que una aproximación comparable exige 12 elementos lineales.