

INDUSTRIALES
ETSII | UPM

Estimación de modelos borrosos y su aplicación al control óptimo

Basil M. Al-Hadithi, Fernando Matía and Agustín Jiménez
Grupo de Control Inteligente
Universidad Politécnica de Madrid

POLITECNICA

INDUSTRIALES
ETSII | UPM

Resumen

- El objetivo de la presentación es dar a conocer los últimos trabajos del Grupo de Investigación sobre Control Borroso.
- Obtención de modelos precisos de sistemas no lineales basados en sistemas borrosos
 - Mamdani
 - Takagi-Sugeno
 - Linealización
- Generalización del método propuesto por T-S
- Identificación iterativa basada en el Filtro de Kalman
- Sistemas de control basados en el modelo TS obtenido
 - LQR

2

POLITECNICA

INDUSTRIALES
ETSII | UPM

Método de Identificación T-S

- Propuesto por Takagi y Sugeno, 1985
- Se buscan aproximaciones de la función

$$f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$$

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- Mediante el sistema borroso

$S^{(i_1 \dots i_n)}$: if x_1 is $M_1^{i_1}$ and x_2 is $M_2^{i_2}$ and ... x_n is $M_n^{i_n}$
then $\hat{y} = p_0^{(i_1 \dots i_n)} + p_1^{(i_1 \dots i_n)}x_1 + p_2^{(i_1 \dots i_n)}x_2 + \dots + p_n^{(i_1 \dots i_n)}x_n$

3

POLITECNICA

INDUSTRIALES
ETSII | UPM

Método de Identificación T-S

- La estimación de la salida será

$$\hat{y} = \sum_{i_1=1}^{r_1} \dots \sum_{i_n=1}^{r_n} \beta^{(i_1 \dots i_n)}(x) \left[p_0^{(i_1 \dots i_n)} + p_1^{(i_1 \dots i_n)}x_1 + \dots + p_n^{(i_1 \dots i_n)}x_n \right]$$

donde

$$\beta_k^{(i_1 \dots i_n)} = \frac{w^{(i_1 \dots i_n)}(x_k)}{\sum_{i_1=1}^{r_1} \dots \sum_{i_n=1}^{r_n} w^{(i_1 \dots i_n)}(x_k)}$$

$$w^{(i_1 \dots i_n)}(x) = \prod_{j=1}^n \mu_{j i_j}(x)$$

y $\mu_{j i_j}(x)$ son funciones de pertenencia que se suponen conocidas

4

POLITECNICA

Método de Identificación T-S

- Si disponemos de un conjunto de muestras entrada/salida

$$\{x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk}, y_k\}$$
- Los parámetros del sistema borroso se pueden calcular minimizando

$$J = \sum_{k=1}^m (y_k - \hat{y}_k)^2 = \|Y - Xp\|^2$$

Método de Identificación T-S

- Donde

$$Y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_m]^t$$

$$p = [p_0^{(1..1)} \ p_1^{(1..1)} \ p_2^{(1..1)} \ \dots \ p_n^{(1..1)} \ \dots \ p_0^{(r_1 \dots r_n)} \ \dots \ p_n^{(r_1 \dots r_n)}]^t$$

$$X = \begin{bmatrix} \beta_1^{(1..1)} & \beta_1^{(1..1)}x_{11} & \dots & \beta_1^{(1..1)}x_{n1} & \dots & \beta_1^{(r_1 \dots r_n)} & \dots & \beta_1^{(r_1 \dots r_n)}x_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_m^{(1..1)} & \beta_m^{(1..1)}x_{1m} & \dots & \beta_m^{(1..1)}x_{nm} & \dots & \beta_m^{(r_1 \dots r_n)} & \dots & \beta_m^{(r_1 \dots r_n)}x_{nm} \end{bmatrix}$$

Método de Identificación T-S

- Operando

$$J = \|Y - Xp\|^2 = (Y - Xp)^t (Y - Xp)$$

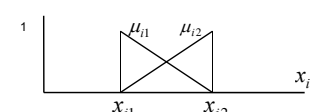
$$\nabla_p J = -2(Y - Xp)^t X = 0$$

$$X^t (Y - Xp) = X^t Y - X^t X p = 0$$
- Si la matriz X es de rango completo

$$p = (X^t X)^{-1} X^t Y$$

Restricciones del método T-S

- No es aplicable en el más común de los casos, donde las funciones de pertenencia en el intervalo $[x_{i1}, x_{i2}]$ son



$$\mu_{i1}(x_i) = \frac{x_{i2} - x_i}{x_{i2} - x_{i1}} \quad \mu_{i2}(x_i) = \frac{x_i - x_{i1}}{x_{i2} - x_{i1}}$$

Restricciones del método T-S

- En este caso es fácil demostrar que la matriz X no es de rango completo y por tanto $X^t X$ no es invertible, invalidando el método de T-S en este caso

9

Restricciones del método T-S

- En el caso más sencillo: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $y = f(x)$

- Cada fila de la matriz es de la forma:

$$X_k = \begin{bmatrix} \mu_1(x_k) & \mu_1(x_k)x_k & \mu_2(x_k) & \mu_2(x_k)x_k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{x_2 - x_k}{x_2 - x_1} & \frac{x_2 - x_k}{x_2 - x_1} x_k & \frac{x_k - x_1}{x_2 - x_1} & \frac{x_k - x_1}{x_2 - x_1} x_k \end{bmatrix}$$

10

Restricciones del método T-S

- Que verifica

$$\begin{bmatrix} \frac{x_2 - x_k}{x_2 - x_1} & \frac{x_2 - x_k}{x_2 - x_1} x_k & \frac{x_k - x_1}{x_2 - x_1} & \frac{x_k - x_1}{x_2 - x_1} x_k \\ -1 & x_1 \\ x_2 & -1 \end{bmatrix} = 0$$

- Las columnas de X son linealmente dependientes
- El rango de X en este caso es 3
- Este resultado se puede extender fácilmente a funciones n-dimensionales

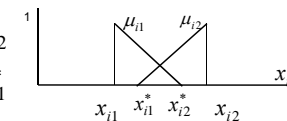
11

Restricciones del método T-S


- La solución propuesta por (Takagi and Sugeno, 1985) evita esta situación
- En el intervalo $[x_{i1}, x_{i2}]$ se toman unos puntos intermedios
 $x_{i1}^* \in [x_{i1}, x_{i2}]$ $x_{i2}^* \in [x_{i1}, x_{i2}]$
- Por lo que las funciones de pertenencia son

$$\mu_{i1}(x) = \begin{cases} \frac{x_i - x_{i2}^*}{x_{i1} - x_{i2}^*} & x_{i1} \leq x \leq x_{i2}^* \\ 0 & x_{i2}^* \leq x \leq x_{i2} \end{cases}$$

$$\mu_{i2}(x) = \begin{cases} 0 & x_{i1} \leq x \leq x_{i1}^* \\ \frac{x_i - x_{i1}^*}{x_{i2}^* - x_{i1}^*} & x_{i1}^* \leq x \leq x_{i2} \end{cases}$$



12



Análisis del Problema

INDUSTRIALES
ETSII | UPM


POLITECNICA

- Esta restricción del método de identificación de T-S no significa que no existan soluciones
- Las soluciones deben cumplir

$$X^t Y - X^t X p = 0$$
- Las columnas de X son linealmente dependientes, por tanto las filas de X^t serán linealmente dependientes.
- La misma dependencia lineal tendrán

$$X^t Y \quad \text{y} \quad X^t X$$

13



Análisis del Problema

INDUSTRIALES
ETSII | UPM


POLITECNICA

- El rango de la matriz del sistema de ecuaciones lineales será el mismo que el de la matriz ampliada con el término independiente.

$$\text{rank}(X^t X) = \text{rank}(X^t X | X^t Y)$$
- El sistema de ecuaciones lineales tiene solución
- Por no ser de rango completo será un sistema compatible indeterminado:

INFINITAS SOLUCIONES

14




Análisis del Problema

INDUSTRIALES
ETSII | UPM

POLITECNICA

- Por tanto el problema no es la falta de una solución sino la existencia de infinitas soluciones
- La idea clave es la posibilidad de encontrar una de ellas
- Un primer intento sería buscar la solución de mínima norma

15



Primer intento

INDUSTRIALES
ETSII | UPM

POLITECNICA

- Solución de norma mínima

$$\text{minimizar } \|p\|^2$$
 con la restricción

$$X^t X p = X^t Y$$
- Los métodos de resolución conocidos llevan a algoritmos complejos sin garantías de obtener la solución deseada

16



Ponderación de parámetros

- Solución aproximada
 - Extender la función objetivo incluyendo una ponderación de la norma del vector de parámetros

$$J = \sum_{k=1}^m (y_k - \hat{y}_k)^2 + \gamma^2 \sum_j p_j^2 = \|Y - Xp\|^2 + \gamma^2 \|p\|^2$$

- Que se puede reescribir como:

$$J = \left\| \begin{bmatrix} Y \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X \\ \gamma I \end{bmatrix} p \right\|^2 = \|Y_a - X_a p\|^2$$

17



Ejemplo

- Sea la función

$$y = x^2 \quad x \in [0,1]$$
 - Definimos dos conjuntos borrosos

$$\mu_1(x) = 1 - x$$

$$\mu_2(x) = x$$
 - El objetivo es calcular un modelo borroso T-S

19



Ponderación de parámetros

- La matriz ampliada X_a es de rango completo: Solución única
- El vector P se calcula como:

$$p = (X_a^t X_a)^{-1} X_a^t Y_a$$

- Esta solución no es el óptimo
- Sin embargo, para valores pequeños del factor de ponderación, la solución será cercana al óptimo

18



Ejemplo

- Aplicando el método de ponderación de parámetros con $\gamma = 0.1$ se obtiene el modelo borroso:

$$S^1 : \text{if } x \text{ is } M_1^1 \text{ then } y = -0.3332x$$

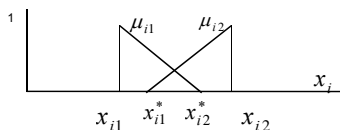
$$S^2 : \text{if } x \text{ is } M_1^2 \text{ then } y = 0.3334 + 0.6666x$$
 - El máximo del valor absoluto del error en el intervalo es 2.0166e-005
 - No es la solución óptima
 - Pero representa una muy buena aproximación

20



Ejemplo

- Para comparar este método con el original de T-S, definimos un factor de recubrimiento α que determine los dos puntos adicionales del original



$$x_{i1}^* = x_{i2} - \alpha(x_{i2} - x_{i1})$$

$$x_{i2}^* = x_{i1} + \alpha(x_{i2} - x_{i1})$$

21



Ejemplo

- En el método de T-S, para $\alpha = 0.7$ se obtiene:

$$S^1 : \text{if } x \text{ is } M_1^1 \text{ then } y = -0.0389 + 0.5238x$$

$$S^2 : \text{if } x \text{ is } M_1^2 \text{ then } y = -0.5151 + 1.4762x$$

- Con un error de 0.0389
- Incrementando $\alpha = 0.8$ el error se reduce a 0.0360
- Para $\alpha = 0.9$ el error es 0.0249
- Para $\alpha = 0.95$ el error es 0.0149

22



Ejemplo

- La identificación mejora cuando el factor α se aproxima a la unidad
- Pero no puede alcanzar el óptimo, que es precisamente $\alpha=1$, ya que, para este valor la matriz X no es de rango completo y por tanto no es invertible.
- Incluso, cuando α se aproxima a la unidad, el número de condición de la matriz X tiende a infinito, lo que indica que $X^t X$ se aproxima a la singularidad y por tanto el cálculo de su inversa no es numéricamente fiable

23



Sintonía de parámetros

- Los parámetros obtenidos no tienen significado físico
- Podemos usar una primera estimación de los mismos

$$P_0 = [p_0^0 \ p_1^0 \ p_2^0 \ \dots \ p_n^0]^t$$

- Linealización
- Usando mínimos cuadrados en un entorno del punto de funcionamiento

24

Sintonía de parámetros

- El vector de parámetros del modelo borroso se puede obtener minimizando:

$$J = \|Y - Xp\|^2 + \gamma^2 \|p_0 - p\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} Y \\ \gamma p_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X \\ \gamma I \end{bmatrix} p \right\|^2 = \|Y_a - X_a p\|^2$$

$$p_0 = \underbrace{[P_0 \ P_0 \ \dots \ P_0]^t}_{r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n}$$

- Interpretaciones locales

25

Identificación multivariable

- En el caso de funciones vectoriales

$$f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$$

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad y \in \mathfrak{R}^m$$

es equivalente a m funciones escalares

$$y_j = f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad y \in \mathfrak{R} \quad j = 1..m$$

y cada una de estas funciones se puede modelar mediante un sistema

$$S_j^{(i_1 \dots i_n)}: \text{if } x_1 \text{ is } M_{j1}^{i_1} \text{ and } x_2 \text{ is } M_{j2}^{i_2} \text{ and } \dots \text{ and } x_n \text{ is } M_{jn}^{i_n}$$

$$\text{then } \hat{y}_j = p_{j0}^{(i_1 \dots i_n)} + p_{j1}^{(i_1 \dots i_n)} x_1 + p_{j2}^{(i_1 \dots i_n)} x_2 + \dots + p_{jn}^{(i_1 \dots i_n)} x_n$$

26

Identificación multivariable

- Aplicando la formulación anterior

$$Y_j = [y_{j1} \ y_{j2} \ \dots \ y_{jN}]^t$$

$$p_j = [p_{j0}^{(1..1)} \ p_{j1}^{(1..1)} \ \dots \ p_{jn}^{(1..1)} \ \dots \ p_{j0}^{(r_1 \dots r_n)} \ p_{j1}^{(r_1 \dots r_n)} \ \dots \ p_{jn}^{(r_1 \dots r_n)}]^t$$

$$X_j = \begin{bmatrix} \beta_{j1}^{(1..1)} & \beta_{j1}^{(1..1)} x_{11} & \dots & \beta_{j1}^{(1..1)} x_{n1} & \dots & \beta_{j1}^{(r_1 \dots r_n)} & \beta_{j1}^{(r_1 \dots r_n)} x_{11} & \dots & \beta_{j1}^{(r_1 \dots r_n)} x_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{jN}^{(1..1)} & \beta_{jN}^{(1..1)} x_{1N} & \dots & \beta_{jN}^{(1..1)} x_{nN} & \dots & \beta_{jN}^{(r_1 \dots r_n)} & \beta_{jN}^{(r_1 \dots r_n)} x_{1N} & \dots & \beta_{jN}^{(r_1 \dots r_n)} x_{nN} \end{bmatrix}$$

$$J_j = \left\| \begin{bmatrix} Y_j \\ \Gamma_j p_{j0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_j \\ \Gamma_j \end{bmatrix} p_j \right\|^2 \Rightarrow p_j = (X_{ja}^T X_{ja})^{-1} X_{ja}^T Y_{ja}$$

27

Identificación multivariable

- Si los conjuntos borrosos de los antecedentes y las matrices de ponderación son los mismos para todos los subsistemas

$$\left. \begin{array}{l} X_1 = X_2 = \dots = X_m = X \\ \Gamma_1 = \Gamma_2 = \dots = \Gamma_m = \Gamma \end{array} \right\} \Rightarrow X_{1a} = X_{2a} = \dots = X_{ma} = X_a$$

entonces se pueden agrupar

$$[p_1 \ p_2 \ \dots \ p_m] = (X_a^T X_a)^{-1} X_a^T \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & \dots & Y_m \\ \Gamma p_{10} & \Gamma p_{20} & \dots & \Gamma p_{m0} \end{bmatrix}$$

28



Identificación iterativa

- El método de identificación iterativa propuesto por Takagi and Sugeno, 1985, se basa en el método de mínimos cuadrados recursivos
- El método no es válido cuando las funciones de pertenencia está solapadas por pares
- Proponemos un método iterativo basado en el Filtro de Kalman

29



Identificación con EKF

- Una de las aplicaciones del filtro de Kalman es la identificación de parámetros
- Supongamos una función que depende de q parámetros

$$p_1, p_2, \dots, p_q$$

$$f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$$

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_q) = f(x, p)$$

- El problema de la identificación de parámetros se puede traducir al problema de la estimación del estado del sistema

$$p(k+1) = p(k)$$

$$y(k) = f(p(k)) + e(k)$$

37



Identificación con EKF

- Se puede utilizar entonces el filtro extendido de Kalman con las siguientes particularidades

$$\Phi(k) = I$$

$$R_1 = [0]$$

$$\Gamma(k) = [0]$$

$$R_{12} = [0]$$

$$C(k) = \left. \frac{\partial f(x, p)}{\partial p} \right|_{p=\hat{p}(k)}$$

R_2 ajustado mediante prueba y error

38



Identificación con EKF

- La formulación del algoritmo queda:

$$K(k) = \left(P(k/k-1)C^t \right) \left(CP(k/k-1)C^t + R_2 \right)^{-1}$$

$$\hat{p}(k+1/k) = \hat{p}(k/k-1) +$$

$$+ K(k)(y_k - f(x_k, \hat{p}(k/k-1)))$$

$$P(k+1/k) = P(k/k-1) - K(k)CP(k/k-1)$$

39

INDUSTRIALES
ETSII | UPM

Aplicación al modelo de T-S

- Sea la función f correspondiente al modelo T-S

$$f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$$

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n, p) = \sum_{i_1=1}^{r_1} \dots \sum_{i_n=1}^{r_n} \beta^{(i_1 \dots i_n)}(x) \left[p_0^{(i_1 \dots i_n)} + p_1^{(i_1 \dots i_n)} x_1 + \dots + p_n^{(i_1 \dots i_n)} x_n \right]$$

40

INDUSTRIALES
ETSII | UPM

Aplicación al modelo de T-S

- La función de salida es lineal respecto a los parámetros por lo que se puede calcular

$$\left. \frac{\partial f}{\partial p_0^{(i_1 \dots i_n)}} \right|_{p=\hat{p}(k)} = \beta_k^{(i_1 \dots i_n)}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial p_j^{(i_1 \dots i_n)}} \right|_{p=\hat{p}(k)} = \beta_k^{(i_1 \dots i_n)} x_{jk} \quad \text{for } j=1 \dots n$$

41

INDUSTRIALES
ETSII | UPM

Aplicación al modelo de T-S

- Por tanto, la matriz Jacobiana coincide con la fila de la matriz X antes definida

$$C(k) = \left. \frac{\partial f}{\partial p} \right|_{p=\hat{p}(k)} = X_k = \left[\beta_k^{(1 \dots 1)} \beta_k^{(1 \dots 1)} x_{1k} \dots \beta_k^{(1 \dots 1)} x_{nk} \dots \beta_k^{(n \dots n)} \dots \beta_k^{(n \dots n)} x_{nk} \right]$$

- El problema puede ser formulado como la estimación del estado del sistema lineal

$$p(k+1) = p(k)$$

$$y_k = X_k \cdot p(k) + e(k)$$

42

INDUSTRIALES
ETSII | UPM

Aplicación al modelo de T-S

- Si las funciones de pertenencia están solapadas por pares no se puede aplicar este algoritmo
- Como el problema no tiene una única solución aparecen problemas de convergencia

43

Sintonía de parámetros EKF

- La propuesta es describir el problema como el de la estimación óptima del estado del sistema

$$p(k+1) = p(k)$$

$$\begin{bmatrix} y_k \\ \delta p_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk}, p(k)) \\ \delta p(k) \end{bmatrix} + e(k)$$

$$= \begin{bmatrix} X_k p(k) \\ \delta p(k) \end{bmatrix} + e(k) = \begin{bmatrix} X_k \\ \delta I \end{bmatrix} p(k) + e(k)$$

44

Sintonía de parámetros EKF

- La fórmula de predicción será por tanto

$$\hat{p}(k+1/k) = \hat{p}(k/k-1) + K(k) \left(\begin{bmatrix} y_k \\ \delta p_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_k \\ \delta I \end{bmatrix} \cdot p(k) \right)$$

- Este método iterativo debería ser equivalente al no iterativo
- Si m es el número de muestras usadas, la equivalencia se produce cuando $\delta = \gamma / m$
- En general se debe cumplir que $\delta \ll \gamma$

45

Generalización

- Esta metodología se puede generalizar para obtener los parámetros óptimos de los antecedentes de las reglas, es decir, los parámetros de las funciones de pertenencia

$$y_k = f(\mu_1(x_{1k}, a_{11}, a_{12}, \dots), \dots, x_k, p(k)) + e(k)$$

$$C_j(k) = \frac{\partial f}{\partial a_{11}}$$

46

Controlador borroso

- El objetivo que nos planteamos es diseñar un controlador óptimo para el sistema no lineal, o bien descrito por

$$x'(t) = f(x(t), u(t)) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad u \in \mathbb{R}^m$$

- O bien en forma discreta

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad u \in \mathbb{R}^m$$

47

INDUSTRIALES
ETSII | UPM

Controlador borroso

- En el caso más sencillo sería diseñar un controlador óptimo para el sistema descrito por

$$x^{(n)} = f(x, x', \dots, x^{(n-1)}, u)$$
- Aplicando el método de estimación propuesto, el sistema puede ser modelado por el modelo de T-S

$$S^{(i_1 \dots i_n)}: \text{if } x \text{ is } M_1^{i_1} \text{ and } x' \text{ is } M_2^{i_2} \text{ and } \dots x^{(n-1)} \text{ is } M_n^{i_n} \text{ then}$$

$$x^{(n)} = a_0^{(i_1 \dots i_n)} + a_1^{(i_1 \dots i_n)} x + a_2^{(i_1 \dots i_n)} x' + \dots + a_n^{(i_1 \dots i_n)} x^{(n-1)} + b^{(i_1 \dots i_n)} u$$

48

INDUSTRIALES
ETSII | UPM

Controlador borroso

- Muchas metodologías, p.e. “regla a regla”
 - Si el controlador se diseña de una forma semejante

$$C^{(i_1 \dots i_n)}: \text{if } x \text{ is } M_1^{i_1} \text{ and } x' \text{ is } M_2^{i_2} \text{ and } \dots x^{(n-1)} \text{ is } M_n^{i_n} \text{ then}$$

$$u = r - \left(k_0^{(i_1 \dots i_n)} + k_1^{(i_1 \dots i_n)} x + k_1^{(i_1 \dots i_n)} x' + \dots + k_1^{(i_1 \dots i_n)} x^{(n-1)} \right)$$
 - La metodología de diseño se basa en poder formular el sistema realimentado como

$$SC^{(i_1 \dots i_n)}: \text{if } x \text{ is } M_1^{i_1} \text{ and } x' \text{ is } M_2^{i_2} \text{ and } \dots x^{(n-1)} \text{ is } M_n^{i_n} \text{ then}$$

$$x^{(n)} = a_0^{(i_1 \dots i_n)} + a_1^{(i_1 \dots i_n)} x + \dots + a_n^{(i_1 \dots i_n)} x^{(n-1)} + b^{(i_1 \dots i_n)} \left[r - \left(k_0^{(i_1 \dots i_n)} + k_1^{(i_1 \dots i_n)} x + \dots + k_1^{(i_1 \dots i_n)} x^{(n-1)} \right) \right]$$

49

INDUSTRIALES
ETSII | UPM

Diseño del término afín

- El término afín de la acción de control se usa para eliminar el término afín del sistema

$$a_0^{(i_1 \dots i_n)} + b^{(i_1 \dots i_n)} k_0^{(i_1 \dots i_n)} = 0 \Rightarrow k_0^{(i_1 \dots i_n)} = -\frac{a_0^{(i_1 \dots i_n)}}{b^{(i_1 \dots i_n)}}$$
- El sistema realimentado se puede formular entonces como

$$SC^{(i_1 \dots i_n)}: \text{if } x \text{ is } M_1^{i_1} \text{ and } x' \text{ is } M_2^{i_2} \text{ and } \dots x^{(n-1)} \text{ is } M_n^{i_n}$$

$$\text{then } x^{(n)} = a_1^{(i_1 \dots i_n)} x + \dots + a_n^{(i_1 \dots i_n)} x^{(n-1)} + b^{(i_1 \dots i_n)} \left[r - \left(k_1^{(i_1 \dots i_n)} x + \dots + k_1^{(i_1 \dots i_n)} x^{(n-1)} \right) \right]$$

55

INDUSTRIALES
ETSII | UPM

Control por realimentación del estado

- Se puede utilizar cualquier metodología para diseñar un control por realimentación del estado
 - Método de asignación de polos
 - Regulador lineal óptimo (LQR) en la regla central y asignación de polos en el resto
 - Regulador lineal óptimo (LQR) aplicado a cada una de las reglas del sistema

56

LQR Borroso

- El sistema se representa mediante el modelo de estado

$$x = [x \quad x' \quad \dots \quad x^{(n-1)}]^t$$

$S^{(i_1 \dots i_n)}$: if x_1 is $M_1^{i_1}$ and x_2 is $M_2^{i_2}$ and ... x_n is $M_n^{i_n}$ then

$$x' = A_0^{(i_1 \dots i_n)} + A^{(i_1 \dots i_n)} x + B^{(i_1 \dots i_n)} u$$

$$A_0^{(i_1 \dots i_n)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_0^{(i_1 \dots i_n)} \end{bmatrix}, \quad A^{(i_1 \dots i_n)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_1^{(i_1 \dots i_n)} & a_2^{(i_1 \dots i_n)} & a_3^{(i_1 \dots i_n)} & \dots & a_n^{(i_1 \dots i_n)} \end{bmatrix}, \quad B^{(i_1 \dots i_n)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b^{(i_1 \dots i_n)} \end{bmatrix}$$

59

LQR Borroso

- La metodología LQR se aplica para cada subsistema usando unas mismas matrices Q de de ponderación del estado y R de ponderación de las entradas para todas las reglas
- Entonces, la ecuación de Riccati se resuelve para cada subsistema

$$0 = -Q + L^{(i_1 \dots i_n)} B^{(i_1 \dots i_n)} R^{-1} B^{(i_1 \dots i_n)T} L^{(i_1 \dots i_n)} - L^{(i_1 \dots i_n)} A^{(i_1 \dots i_n)} - A^{(i_1 \dots i_n)T} L^{(i_1 \dots i_n)}$$

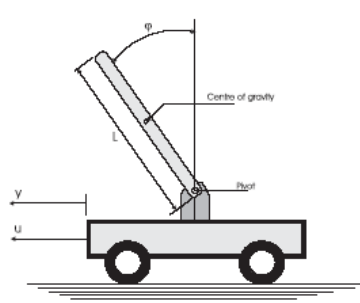
- Obteniendo el vector de realimentación

$$K^{(i_1 \dots i_n)} = [k_1^{(i_1 \dots i_n)} \quad k_2^{(i_1 \dots i_n)} \quad \dots \quad k_n^{(i_1 \dots i_n)}] = R^{-1} B^{(i_1 \dots i_n)T} L^{(i_1 \dots i_n)}$$

60

Ejemplo

Péndulo invertido



$$\ddot{\phi} = \frac{g \operatorname{sen} \phi - \cos \phi \left(\frac{u + ml \dot{\phi}^2 \operatorname{sen} \phi}{M + m} \right)}{l \left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 \phi}{M + m} \right)}$$

61

Ejemplo

- Funciones de pertenencia

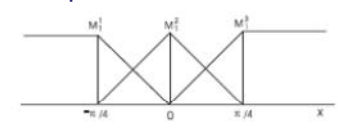


Figure 3: Membership functions for the angle x of the inverted pendulum

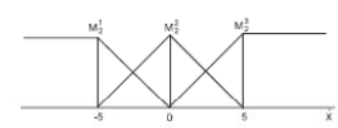


Figure 4: Membership functions for the angular velocity of the inverted pendulum

62

Ejemplo

- Usando el método clásico de identificación de mínimos cuadrados en un intervalo alrededor del punto de equilibrio se obtiene el sistema

$$\dot{x}'_2 = 15.2665x_1 - 0.0000x_2 - 1.4187u$$

63

Ejemplo

- En primer lugar se diseña el término afin

$$a_0^{(i_2)} + b^{(i_2)} k_0^{(i_2)} = 0 \Rightarrow k_0^{(i_2)} = -\frac{a_0^{(i_2)}}{b^{(i_2)}}$$

- El resto de los términos se calculan mediante LQR minimizando para todas las reglas:

$$J = \int_{t_0}^{\infty} (100x_1^2 + 10x_2^2 + u^2) dt$$

65

Ejemplo

- Aplicando el método de sintonía de parámetros

$$S^{11}: \text{if } x_1 \text{ is } M_1^1 \text{ and } x_2 \text{ is } M_2^1$$

$$\text{then } \dot{x}'_2 = 0.1642 + 15.0164x_1 - 0.3271x_2 - 1.2458u$$

$$S^{12}: \text{if } x_1 \text{ is } M_1^1 \text{ and } x_2 \text{ is } M_2^2$$

$$\text{then } \dot{x}'_2 = 0.4848 + 14.6366x_1 + 0.0002x_2 - 1.1546u$$

⋮

$$S^{22}: \text{if } x_1 \text{ is } M_1^2 \text{ and } x_2 \text{ is } M_2^2$$

$$\text{then } \dot{x}'_2 = 15.5778x_1 - 0.0003x_2 - 1.4536u$$

⋮

$$S^{33}: \text{if } x_1 \text{ is } M_1^3 \text{ and } x_2 \text{ is } M_2^3$$

$$\text{then } \dot{x}'_2 = -0.0942 + 15.1516x_1 - 0.2821x_2 - 1.3232u$$

– El error medio cuadrático obtenido es de 0.0333

64

Ejemplo

- El controlador borroso resultante es

$$R^{11}: \text{if } x_1 \text{ is } M_1^1 \text{ and } x_2 \text{ is } M_2^1$$

$$\text{then } u = 0.1318 + 27.7146x_1 + 7.1239x_2$$

$$R^{12}: \text{if } x_1 \text{ is } M_1^1 \text{ and } x_2 \text{ is } M_2^2$$

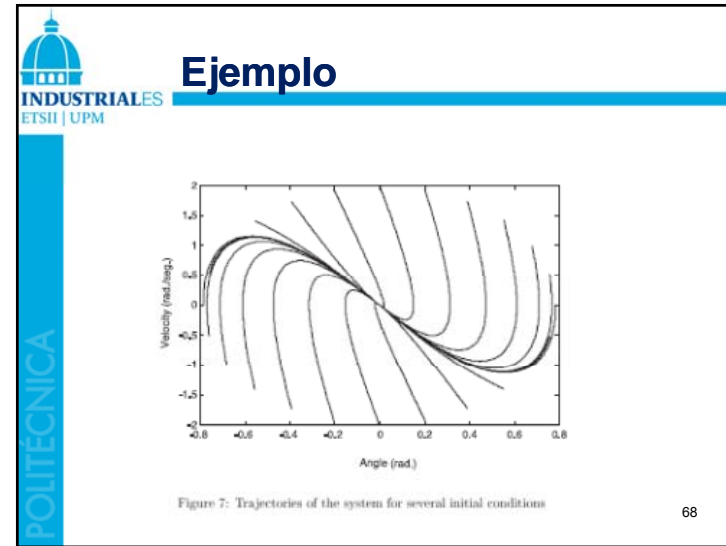
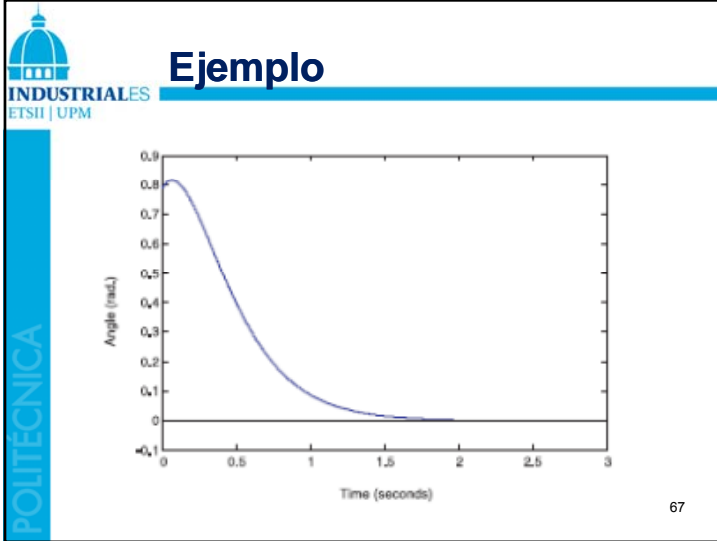
$$\text{then } u = 0.4199 + 28.8232x_1 + 7.6493x_2$$

⋮

$$R^{33}: \text{if } x_1 \text{ is } M_1^3 \text{ and } x_2 \text{ is } M_2^3$$

$$\text{then } u = -0.0712 + 26.6529x_1 + 6.8812x_2$$

66



Control global discreto

- Partimos de un sistema discreto

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)) \quad x \in \mathfrak{R}^n \quad u \in \mathfrak{R}^m$$
- Aplicando identificación multivariable

$$S^{(i_1 \dots i_n)} : \text{if } x_1(k) \text{ is } M_1^{i_1} \text{ and } x_2(k) \text{ is } M_2^{i_2} \text{ and } \dots x_n(k) \text{ is } M_n^{i_n}$$

$$\text{then } x(k+1) = a_0^{(i_1 \dots i_n)} + A^{(i_1 \dots i_n)} x(k) + B^{(i_1 \dots i_n)} u(k)$$

$$a_0^{(i_1 \dots i_n)} \in \mathfrak{R}^n \quad A^{(i_1 \dots i_n)} \in \mathfrak{R}^{n \times n} \quad B^{(i_1 \dots i_n)} \in \mathfrak{R}^{n \times m}$$

69

Control global discreto

- Equivalente al sistema discreto

$$x(k+1) = a_0(x(k)) + A(x(k))x(k) + B(x(k))u(k)$$

donde las matrices vienen determinadas por el sistema borroso

$$S^{(i_1 \dots i_n)} : \text{if } x_1(k) \text{ is } M_1^{i_1} \text{ and } x_2(k) \text{ is } M_2^{i_2} \text{ and } \dots x_n(k) \text{ is } M_n^{i_n}$$

$$\text{then } a_0 = a_0^{(i_1 \dots i_n)} \quad \text{and } A = A^{(i_1 \dots i_n)} \quad \text{and } B = B^{(i_1 \dots i_n)}$$

70



Control global discreto

- Se propone en cada paso utilizar el control que minimice (LQR a un paso)

$$J_k = x^t(k+1)Qx(k+1) + u^t(k)Ru(k)$$

obteniendo

$$u(k) = -[R + B^t(x(k))QB(x(k))]^{-1} B^t(x(k))Q[a_0(x(k)) + A(x(k))x(k)]$$

71



Ejemplo discreto

- El péndulo con un período de muestreo de 0.1 s se modela como

S^{11} : if x_1 is M_1^1 and x_2 is M_2^1

$$\text{then } x'(k+1) = \begin{bmatrix} 0.0028 \\ 0.0809 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9509 & 0.0933 \\ -0.7242 & 0.7771 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.0036 \\ 0.0582 \end{bmatrix} u(k)$$

⋮

S^{33} : if x_1 is M_1^3 and x_2 is M_2^3

$$\text{then } x'(k+1) = \begin{bmatrix} -0.0020 \\ -0.0583 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9505 & 0.0933 \\ -0.7340 & 0.7773 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.0035 \\ 0.0566 \end{bmatrix} u(k)$$

72



Ejemplo discreto

- Es decir

$$x(k+1) = a_0(x(k)) + A(x(k))x(k) + B(x(k))u(k)$$

- Y se resuelve la minimización de

$$J_k = x^t(k+1) \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k+1) + u^t(k)[0.01]u(k)$$

73



Ejemplo discreto

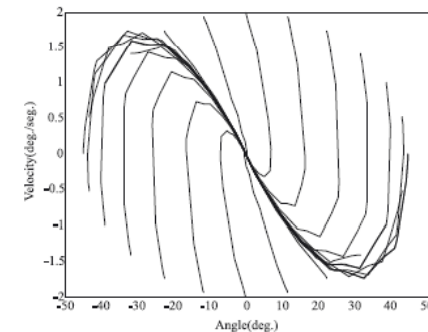


Fig. 7. Trajectories of the system for several initial conditions.

74



Conclusiones

- Hemos estudiado el método de identificación propuesto por Takagi and Sugeno en 1985
- El problema encontrado es que el método no se puede aplicar cuando las funciones de pertenencia son triangulares solapadas por pares

75



Conclusiones

- Hemos desarrollado nuevos métodos de identificación que mejoran la capacidad de aproximación local y global de los modelos T-S a los sistemas dinámicos
 - Hemos desarrollado un método no iterativo de sintonía de parámetros
 - Y un método iterativo basado en el filtro de Kalman

76



Conclusiones

- Hemos propuesto controladores borrosos basados en el Regulador Lineal Óptimo (LQR) que demuestran la efectividad de los métodos de estimación desarrollados en aplicaciones de control
 - Control “regla a regla” para sistemas continuos
 - Control global discreto

77



Publicaciones

- Identificación de modelos T-S
 - “An Optimal T-S Model for the Estimation and Identification of Nonlinear Functions”, Agustín Jimenez, Basil M. Al-Hadithi and Fernando Matia, WSEAS Transactions on Systems and Control (ISSN: 1991-8763) Issue 10, Volume 3, October 2008, pp 897-906
 - “Extended Matrix Approach for the Identification of Takagi-Sugeno Fuzzy Model”, A. Jimenez, B. M. Al-Hadithi and F. Matia, ICONS2009 The 2nd IFAC International Conference on Intelligent Control Systems and Signal Processing, Estambul, Turquía, 21-23 septiembre 2009.

78



Publicaciones

• Identificación de modelos T-S

- "Improvement of Takagi-Sugeno Fuzzy Model for the Estimation of Nonlinear Functions", A. Jiménez, B. M. Al-Hadithi, F. Matía, R. Haber-Haber. Asian Journal of Control, Vol. 14, No. 2, pp. 320–334, March 2012 (Publicado online en Wiley Online Library noviembre 2010)

79



Publicaciones

• Identificación y control de modelos T-S

- "Extended Kalman Filter for the Estimation and Fuzzy Optimal Control of Takagi-Sugeno Model", Agustín Jiménez, Basil M. Al-Hadithi and Fernando Matía. Capítulo 4 del libro "Fuzzy Controllers, Theory and Applications", Lucian Grigorie (Ed.), ISBN: 978-953-307-543-3, Editorial: InTech, Febrero 2011.
- "New methods for the estimation of Takagi-Sugeno model based extended Kalman filter and its applications to optimal control for nonlinear systems", Basil M. Al-Hadithi, Agustín Jiménez and Fernando Matía. Aceptado para su publicación en Optimal Control Applications and Methods. Publicado online (2011) en Wiley Online Library DOI: 10.1002/oca.1014

80



Publicaciones

• Identificación y control de modelos T-S

- A new Approach to Fuzzy Estimation of Takagi-Sugeno Model and its Applications to Optimal Control for Nonlinear Systems", Basil M. Al-Hadithi, Fernando Matía and Agustín Jiménez . Applied Soft Computing. Vol 12, issue 1 (Jan. 2012), pp. 280-290.

81



Publicaciones

• Identificación de modelos Mamdani T-S

- "An affine fuzzy model with local and global interpretations", F. Matía, B. M. Al-Hadithi, A. Jimenez, P. San Segundo. Applied Soft Computing, Vol. 11, Issue 6 pp 4226–4235, Sept. 2011 (doi:10.1016/j.asoc.2011.03.018).

82



Publicaciones

- Identificación generalizada de modelos T-S
 - “Adaptación paramétrica de un sistema borroso mediante el filtro de Kalman extendido”, A. J. Barragán, J. M. Andújar, A. Jiménez, B. M. Al-Hadithi. XXXI Jornadas de Automática. Jaén, 8 al 10 de septiembre de 2010
 - “Algoritmo para la adaptación paramétrica de un sistema borroso mediante el filtro de Kalman extendido”, A. J. Barragán, J. M. Andújar, M. J. Aznar y A. Jiménez. VI Simposio CEA de Control Inteligente, La Laguna, 26 y 26 de noviembre de 2010

83



Publicaciones

- Identificación generalizada de modelos T-S
 - “Methodology for adapting the parameters of a fuzzy system using the extended Kalman filter”, A. Javier Barragán Piña, José M. Andújar Márquez, Mariano J. Aznar Torres, Agustín Jiménez Avello, Basil M. Al-Hadithi, EUSFLAT-LFA 2011. Aix-lesBains. France, 18-22 July 2011
 - “Application of the Extended Kalman filter to fuzzy modeling: Algorithms and practical implementation”. A. Javier Barragán Piña, José M. Andújar Márquez, Mariano J. Aznar Torres, Agustín Jiménez Avello, Basil M. Al-Hadithi. EUSFLAT-LFA 2011, Aix-lesBains. France. 18-22 July 2011

84



Estimación de modelos borrosos y su aplicación al control óptimo

Basil M. Al-Hadithi, Fernando Matía and
Agustín Jiménez

*Grupo de Control Inteligente
Universidad Politécnica de Madrid*