

# Análisis del estado de tensiones en uniones carpinteras de empalme de llave por el método de los elementos finitos

## **Jose R. Aira**

Ingeniero de Montes, Doctorando  
Dep. Construcción y Vías Rurales,  
Universidad Politécnica de Madrid  
Madrid, España

[joseramonaira@hotmail.com](mailto:joseramonaira@hotmail.com)



## **Francisco Arriaga**

Dr. Arquitecto, Catedrático  
Universidad Politécnica de Madrid  
Madrid, España

[francisco.arriaga@upm.es](mailto:francisco.arriaga@upm.es)



## **Guillermo Íñiguez-González**

Dr. Ingeniero de Montes, Profesor  
Universidad Politécnica de Madrid  
Madrid, España

[guillermo.iniguez@upm.es](mailto:guillermo.iniguez@upm.es)



## **Miguel Esteban**

Dr. Ingeniero de Montes, Profesor  
Universidad Politécnica de Madrid  
Madrid, España

[miguel.esteban@upm.es](mailto:miguel.esteban@upm.es)



## **Carlos González**

Dr. Arquitecto, Profesor  
Universidad Antonio de Nebrija  
Madrid, España

[cgonzabr@nebrija.es](mailto:cgonzabr@nebrija.es)



**Palabras clave** – uniones carpinteras, empalme de llave, MEF, líneas de isotensión.

**Keywords** –carpentry joints, halved and tabled joint, FEM, isobar lines.

## **RESUMEN**

El objeto del presente trabajo es la determinación de la distribución de tensiones en la unión carpintera de empalme de llave mediante el método de los elementos finitos y su comparación con los valores obtenidos mediante la teoría de Resistencia de Materiales. Se analizan las zonas donde se produce concentración de tensiones y se estudia la influencia del refinado de la malla sobre los resultados con el fin de determinar el tamaño que proporciona los valores de tensión más ajustados a la teoría. En las zonas donde la concentración de tensiones es menor, distintos tamaños de la malla muestran valores de tensión similares. Los resultados muestran una simetría central de la distribución de isotensiones donde el centro de simetría se corresponde con el centro geométrico de la unión. En las zonas donde se produce concentración de tensiones, los valores de las mismas aumentan considerablemente con el refinado de la malla. La comparación de los niveles de tensiones normales obtenidos por el MEF y la teoría clásica muestran diferencias reducidas, excepto en los puntos de concentración de tensiones.

## **ABSTRACT**

The purpose of this study is to determine the stress distribution in the joint carpenter of halved and tabled joint with the finite element method and its comparison with the values obtained using the

theory of Strength of Materials. The stress concentration areas were analyzed and the influence of mesh refinement was studied on the results in order to determine the mesh size that provides the stress values more consistent with the theory. In areas where stress concentration is lower, different mesh sizes show similar stress values. The results show a central symmetry of the isobar lines distribution where the centre of symmetry corresponds to the geometric centre of the joint. In areas where stress concentration occurs, the same values increase considerably with the refinement of the mesh. Comparison of normal stress levels obtained by the FEM and the classical theory shows small differences, except at points of stress concentration.

## 1. Introducción

La madera está formada por un conjunto de células especializadas en tejidos que llevan a cabo las funciones fundamentales del vegetal dando lugar a una heterogeneidad del material que determina sus propiedades físicas y mecánicas denominada anisotropía de la madera, es decir el comportamiento desigual frente a una propiedad física o mecánica según la dirección que se considere. Por ello, para analizar el comportamiento mecánico de la madera se considera como un material ortótropo distinguiendo las tres direcciones principales: longitudinal, radial y tangencial.

Las uniones constituyen los puntos de transmisión de esfuerzos entre los elementos que conforman una estructura de madera. En las uniones tradicionales los esfuerzos se transmiten de unas piezas a otras a través de trabajos carpinteros realizados en las mismas que equilibran los esfuerzos axiales y cortantes mediante compresiones localizadas, esfuerzos tangenciales y el rozamiento entre las caras de contacto. Los elementos metálicos incorporados generalmente tienen la misión exclusiva de mantener la continuidad de las caras de contacto.

Las uniones tradicionales se denominan acoplamientos cuando las piezas se unen por sus caras para conseguir una mayor sección resistente, empalmes cuando las piezas se unen por sus testas para conseguir una mayor longitud y ensambles cuando las piezas se unen formando cierto ángulo.

El empalme de llave, Fig. 1, se compone de dos piezas unidas por sus testas transmitiéndose entre ellas principalmente un esfuerzo de tracción  $N$  a través de una compresión paralela a la fibra localizada en el encaje de sección  $b \cdot t$ , éste se transmite a la sección completa mediante un esfuerzo rasante que produce tensiones tangenciales en el plano del cogote de superficie  $b \cdot l$ . Además, el estrechamiento que se produce en la sección en cada una de las piezas, recibe la tracción completa unida a un momento flector  $M$  provocado por la excentricidad de la carga actuante  $N$  respecto al centro de gravedad de la sección reducida, produciendo un giro que tiende a desarmar la unión. Este efecto puede contrarrestarse mediante la realización de unas entalladuras en los extremos del empalme o mediante la colocación de unas bridas metálicas, Fig. 2. Para facilitar el montaje del empalme, se suele colocar una cuña a cada lado del mismo asegurando el contacto continuado entre los elementos (Arriaga et al., 2010).

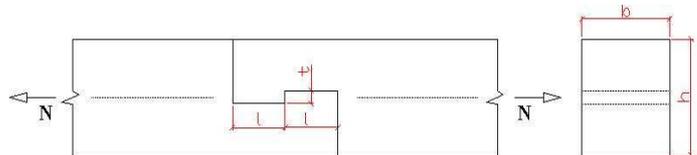


Fig. 1. Croquis del empalme de llave sin redientes finales ni cuña central.

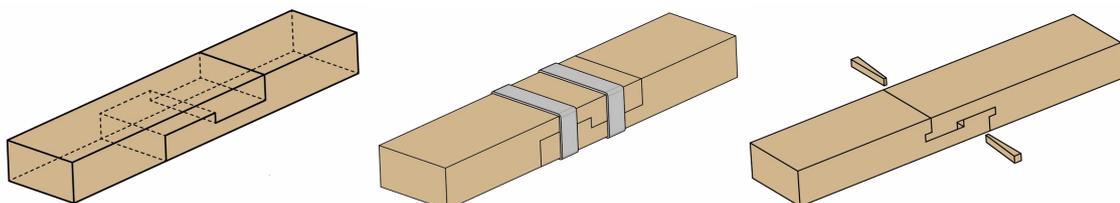


Fig. 2. Distintas disposiciones del empalme de llave [1].

Desde el punto de vista del cálculo de estructuras, el método de los elementos finitos (MEF) puede considerarse como una extrapolación de los métodos de cálculo matricial para estructuras discretizadas mediante barras y nudos, al análisis de estructuras de tipo continuo. La fase de modelización del MEF consiste en la división de la estructura continua en elementos finitos interconectados entre sí mediante nodos. Las estructuras cuyo comportamiento o deformación ante las cargas recibidas depende de una sola variable se discretizan en elementos finitos unidimensionales, cuando depende de dos coordenadas la estructura se divide en elementos finitos bidimensionales y cuando se trata de estructuras espaciales en elementos finitos tridimensionales (Vázquez et al., 2001).

En los últimos años se ha producido una creciente utilización del MEF para el análisis de uniones tradicionales entre elementos de madera estructural. El ensamble de caja y espiga es uno de los más estudiados comparando resultados experimentales con los métodos numéricos (Feio et al., 2008), analizando los modos de fallo y la influencia del ángulo de encuentro (Walter et al., 2008), o analizando los modelos de comportamiento (Koch et al., 2008). El ensamble de cola de milano redondeado utilizado en la actualidad gracias al desarrollo del control numérico, su comportamiento mecánico y modos de fallo han sido estudiados recientemente (Soilán et al., 2008); también mediante una análisis 3D por MEF ha permitido proponer ecuaciones para la optimización del ensamble (Tannert, 2008). La influencia del rozamiento en el comportamiento mecánico del ensamble embarbillado entre par y tirante fue analizado mediante métodos numéricos comparando los resultados con las propuestas de cálculo de las normas (Villar et al., 2007 y 2008). Finalmente, puede destacarse un trabajo de análisis mediante MEF de un empalme de llave con pernos de fijación para evitar el desarme de la unión (Sangree et al., 2009).

## 2. Material y métodos

### 2. 1. Descripción general de la metodología

En primer lugar se establecen las secciones de estudio críticas, es decir, aquellas secciones donde se considera inicialmente que podría fallar la unión. Posteriormente se realiza en las mismas una comparación de los valores de tensión obtenidos por la aplicación del MEF con los valores obtenidos mediante la formulación de la teoría clásica de Resistencia de Materiales con el objeto de determinar la influencia del tamaño de la malla en los resultados y la coincidencia de las distribuciones tensionales obtenidas con los valores teóricos. En una primera aproximación, con el objetivo de profundizar en la metodología de análisis y salida de resultados de la herramienta informática utilizada, se realizó un estudio auxiliar consistente en un empalme a media madera con el plano rasante encolado.

### 2. 2. Herramienta informática

Para el estudio por el MEF, se utiliza la aplicación informática COSMOSWorks, que es un sistema de análisis, validación y optimización de diseños, completamente integrado en el software de diseño industrial Solidworks.

En el presente trabajo, se utiliza para el análisis un estudio tridimensional con un comportamiento estático lineal, considerando la madera como un material ortótropo y modelizando las piezas que componen el empalme con elementos finitos tetraédricos cuadráticos de 10 nodos denominados TETRA 10 según se muestra en la Fig. 3.

La configuración de contacto define la interacción entre contornos de piezas que se encuentran en contacto desde un principio o que entran en contacto durante la carga. Los contactos definidos para las caras que se tocan son los siguientes:

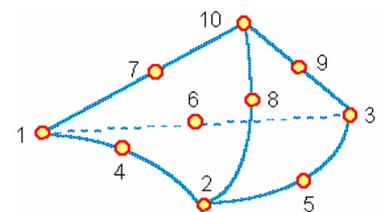


Fig. 3. Tetraedro cuadrático TETRA 10 [2].

- Sin penetración, contacto nodo a nodo: Impide la interferencia entre las entidades de origen y destino permitiendo la formación de separaciones. Se crea una malla compatible en todas las áreas en contacto de modo que los nodos pertenecientes a distintas piezas en áreas de contacto coinciden unos con otros, Fig. 4.

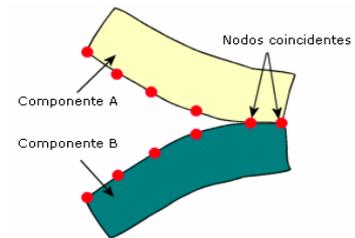


Fig. 4. Contacto sin penetración nodo a nodo [2].

- Sin penetración, contacto superficie a superficie: Impide la interferencia entre las entidades de origen y destino permitiendo la formación de separaciones. No requiere una malla compatible entre todas las áreas de contacto, admitiendo sólo superficies como entidades de origen y destino por lo que los nodos pertenecientes a distintas piezas o sólidos en áreas de contacto no tienen porqué coincidir unos con otros.

No se ha considerado la existencia de rozamiento entre superficies de contacto por no ser éste el objeto principal del presente estudio además de pretender su comparación con la Resistencia de Materiales, donde no se considera el efecto del rozamiento. Los tipos de contacto utilizados en el modelo MEF son los siguientes:

- “sin penetración, superficie a superficie” en el encaje, para contemplar el contacto en toda la superficie del mismo y no solo en los nodos coincidentes.
- “sin penetración, nodo a nodo” en el resto de caras en contacto, por tratarse de superficies lo suficientemente grandes como para asegurar la coincidencia de varios nodos dentro de la misma, siendo éstos representativos del comportamiento de toda la superficie.

El programa COSMOSWorks aporta resultados espaciales para elementos sólidos y no incluye en sus funciones la capacidad de realizar un análisis de tensiones plano. Los resultados que se obtienen para cada fibra de la pieza presentan valores ligeramente diferentes según la profundidad. Para poder comparar los resultados del modelo espacial con los valores obtenidos mediante la aplicación de la teoría de Resistencia de Materiales se procedió a tomar unos valores medios representativos. Para ello, en cada sección de estudio se obtienen valores de los extremos, se halla la media aritmética entre ellos y posteriormente se realiza una nueva media aritmética con el valor de la parte central obteniendo de este modo un único valor medio final.

### 2. 3. Dimensiones geométricas y secciones de estudio

El empalme analizado se compone de dos piezas unidas, la pieza izquierda que está coaccionada permitiendo únicamente el deslizamiento en el plano que contiene la propia testa de la pieza, y la pieza derecha que recibe la carga exterior. Las piezas tienen una anchura de 200 mm y una altura de 240 mm. Se aplica una carga uniformemente distribuida en toda la sección de valor  $N=66$  kN, traccionando de este modo ambas piezas.

Las secciones de estudio en el empalme de llave sin redientes finales ni cuña central se pueden apreciar en la Fig. 5 y son las siguientes:

- sección reducida de la pieza derecha sometida a esfuerzos de tracción y flexión. Se calculan las tensiones normales en la dirección longitudinal de ambas piezas  $\sigma_x$ .
- sección del encaje sometida a esfuerzos de compresión. Se calculan las tensiones normales en la dirección longitudinal de ambas piezas  $\sigma_x$ .

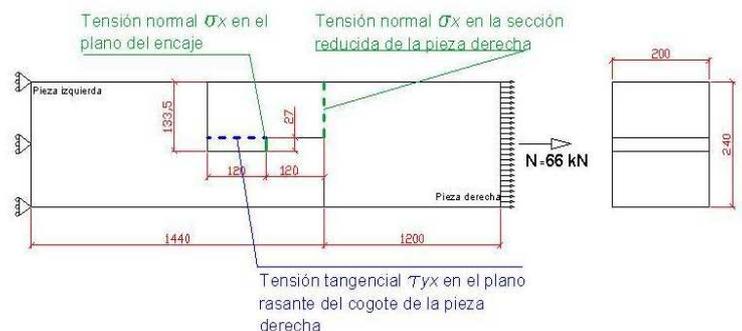


Fig. 5. Secciones de estudio del empalme de llave.

- sección del cogote de la pieza derecha sometida a esfuerzo rasante. Se calculan las tensiones tangenciales  $\tau_{yx}$ .

## 2. 4. Constantes elásticas de los materiales ortótropos

En un cuerpo ortótropo, las relaciones entre las tensiones y las deformaciones unitarias quedan definidas al conocer las doce constantes elásticas siguientes:

3 módulos de elasticidad longitudinal:  $E_L$   $E_T$   $E_R$   
 3 módulos de elasticidad transversal:  $G_{LT}$   $G_{TR}$   $G_{RL}$   
 6 coeficientes de Poisson:  $\nu_{RL}$   $\nu_{TL}$   $\nu_{RT}$   $\nu_{LT}$   $\nu_{TR}$   $\nu_{LR}$

Siendo L,T y R las direcciones longitudinal, tangencial y radial, respectivamente.

Las incógnitas se reducen a 9 mediante la aplicación del teorema de la reciprocidad de recorridos:

$$\frac{\nu_{TL}}{E_T} = \frac{\nu_{LT}}{E_L} \quad \frac{\nu_{RL}}{E_R} = \frac{\nu_{LR}}{E_L} \quad \frac{\nu_{RT}}{E_R} = \frac{\nu_{TR}}{E_T}$$

donde,

$E_i$ : módulo de elasticidad en dirección i, (L, T, R). Relación entre la tensión  $\sigma_i$  y el alargamiento unitario  $\varepsilon_i$  que se produce en la dirección i.

$G_{ij}$ : módulo de elasticidad transversal en el plano ij (RT, TL, LR). Relación entre la tensión tangencial  $\tau_{ij}$  y la distorsión producida  $\gamma_{ij}$ .

$\nu_{ij}$ : coeficiente de Poisson. Permite deducir la deformación longitudinal unitaria  $\varepsilon_j$  que genera la tensión normal  $\sigma_i$ , mediante la expresión:  $\varepsilon_j = -\nu_{ij} \cdot \varepsilon_i$

Para la definición de las propiedades físicas y mecánicas del modelo, se elige una madera de conífera de clase resistente C22 con un módulo de elasticidad longitudinal de 10.000 N/mm<sup>2</sup>. Los restantes valores se han tomado de las relaciones habituales para coníferas (Argüelles et al., 2000).

$$E_T = E_y = E_L/21 \quad E_R = E_z = E_L/13 \quad G_{RT} = G_{zy} = E_L/153,47 \quad G_{TL} = G_{yx} = E_L/17,25 \quad G_{RL} = G_{zx} = E_L/14,90$$

C22 (Módulos en N/ mm <sup>2</sup> )			
$E_L = E_x = 10.000$	$\nu_{LT} = \nu_{xy} = 0,43$	$\nu_{TL} = \nu_{yx} = 0,02$	$G_{RT} = G_{zy} = 65$
$E_T = E_y = 476$	$\nu_{TR} = \nu_{yz} = 0,31$	$\nu_{RT} = \nu_{zy} = 0,51$	$G_{TL} = G_{yx} = 580$
$E_R = E_z = 769$	$\nu_{LR} = \nu_{xz} = 0,39$	$\nu_{RL} = \nu_{zx} = 0,03$	$G_{RL} = G_{zx} = 671$

La densidad se tomará como prácticamente nula siendo su valor  $1 \cdot 10^{-50}$  kg/m<sup>3</sup>, para evitar la influencia del peso propio de los elementos asegurando de este modo una tracción pura.

## 3. Resultados

### 3.1. Deformada

El trazado de deformación que ofrece COSMOSWorks muestra, según se puede observar en la Fig. 6, que ambas piezas trabajan claramente a tracción transmitiéndose los esfuerzos entre ellas a través de la compresión localizada en la sección del encaje de la llave. Con la deformación de la llave se produce un deslizamiento entre las caras de contacto en el entalle de ambas piezas y un giro que tiende a desarmar la unión.

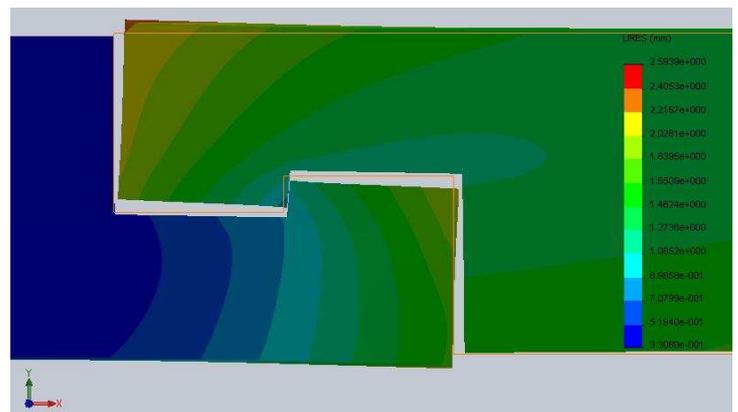


Fig. 6. Deformada del empalme de llave (x5).

### 3.2. Sección reducida de la pieza

Aplicando la teoría de Resistencia de Materiales, la tensión axial en la sección reducida de la pieza derecha se obtiene mediante la suma algebraica (con sus correspondientes signos: + tensión de tracción, - tensión de compresión) de las tensiones producidas por la fuerza normal N actuando en la sección reducida y por el momento que tiene lugar por estar el centro de gravedad de aplicación de la fuerza desplazado respecto al centro de gravedad de la sección reducida una excentricidad de valor  $e=66,75$  mm según se muestra en la Fig. 7. La tensión normal  $\sigma_x$  viene dada por la expresión:

$$\sigma_x = \frac{N}{b \cdot h_r} \pm \frac{M \cdot y}{I}$$

donde,

N: fuerza exterior aplicada (66 kN).

b: anchura de la sección reducida (200 mm).

$h_r$ : altura de la sección reducida (106,5 mm).

M: momento flector referido al eje principal de la sección reducida,  $M=N \cdot e=4.406 \cdot 10^3$  N·mm

y: distancia al eje principal ( $y_{\max}=53,25$  mm)

I: momento de inercia de la sección reducida,  $I=b \cdot h_r^3/12=20.132.494$  mm<sup>4</sup>



Fig. 7. Tensión normal  $\sigma_x$  en la sección reducida de la pieza.

La parte superior de la sección reducida está sometida a una tensión de tracción debida a la acción de la fuerza axial N y a una tensión de compresión debida al momento flector M, mientras que la parte inferior de la sección reducida está sometida a una tensión de tracción debida a la acción de la fuerza normal N y a una tensión de tracción debida al momento flector M.

$$\sigma_x = \frac{66.000}{200 \cdot 106,5} \pm \frac{4.406 \cdot 10^3 \cdot 53,25}{20.132.494} = \begin{cases} -8,56 \text{ N/mm}^2 \\ 14,75 \text{ N/mm}^2 \end{cases}$$

En la Fig. 8 se muestran las líneas de igual tensión o líneas de isotensión en la dirección x (tensión normal  $\sigma_x$ ) para el tamaño de la malla de 13,5 mm. La distribución de líneas de isotensión muestra claramente la inexistencia puntos de especial concentración de tensiones en la sección reducida de la pieza derecha.

Únicamente en la parte inferior de la sección se podría apreciar cierta concentración de líneas de isotensión debido a la reducción brusca de la sección resistente eficaz por la cual se transmite el esfuerzo completo de tracción N.

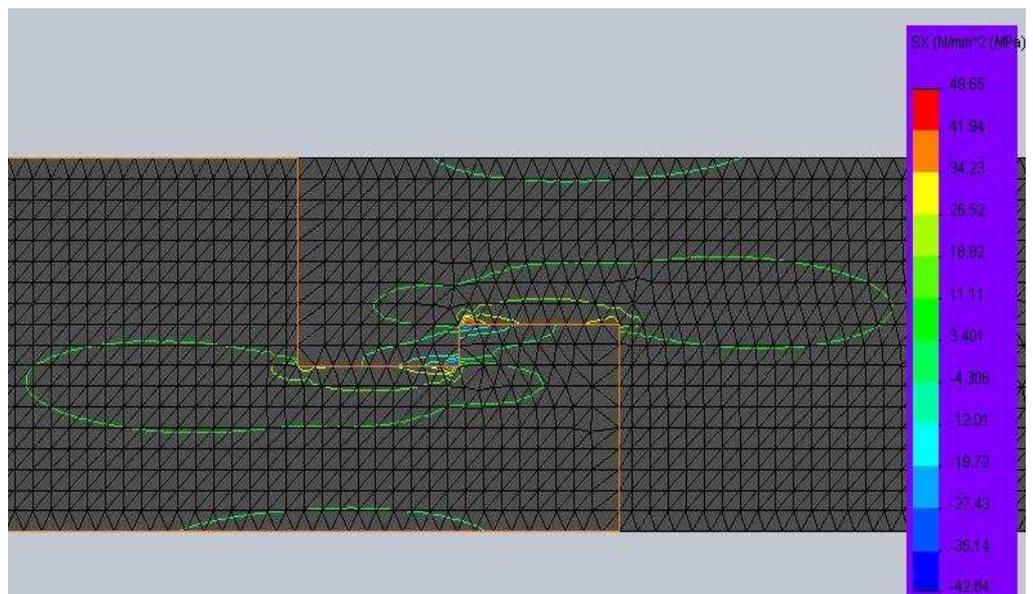


Fig. 8. Líneas de isotensión  $\sigma_x$  para una malla de 13,5 mm.

Se elabora una gráfica mostrada en la Fig. 9, donde se superponen los estados tensionales obtenidos para los distintos tamaños de la malla representando los ejes cartesianos las variables siguientes:

- eje de ordenadas: posición de la altura de la sección reducida de la pieza derecha.
- eje de abscisas: tensión normal en la dirección longitudinal de ambas piezas  $\sigma_x$ .

La distribución de tensiones para los distintos tamaños de la malla coincide con bastante aproximación entre las cotas de 8 mm y 120 mm de la sección reducida. Es decir, los valores de compresión en la parte superior de la sección son muy similares para todos los tamaños de la malla. Los valores de tracción coinciden hasta el punto donde comienza a producirse una pequeña concentración de tensiones, donde se aprecia claramente que cuanto menor es el tamaño de la malla, mayores son los valores de tensión de tracción del modelo MEF.

Se aprecia además, que los valores teóricos sitúan la fibra neutra en la cota 64 mm de la sección reducida de la pieza derecha y los valores del modelo MEF indican una variación de la posición de la fibra neutra respecto a la teoría de modo que ésta descende hasta la cota 62 mm aproximadamente.

### 3.3. Sección del encaje

Aplicando la teoría de Resistencia de Materiales, la tensión normal  $\sigma_x$  en la sección del encaje (Fig. 10) se puede obtener mediante la siguiente expresión:

$$\sigma_x = \frac{N}{b \cdot t} = 12,22 N / mm^2$$

donde,

$N_d$ : fuerza exterior aplicada (66 kN).

b: anchura de la sección del encaje (200 mm).

t: altura del encaje (27 mm).

Las líneas de isotensión normal  $\sigma_x$  para el tamaño de la malla de 13,5 mm son las mismas mostradas anteriormente en la Fig. 8. La distribución de isotensiones muestra claramente dos puntos de elevada concentración de tensiones de compresión en la parte inferior del encaje en la pieza derecha y en la parte superior del mismo en la pieza izquierda.

Empalme llave sección reducida pieza derecha ( $\sigma_x$ )

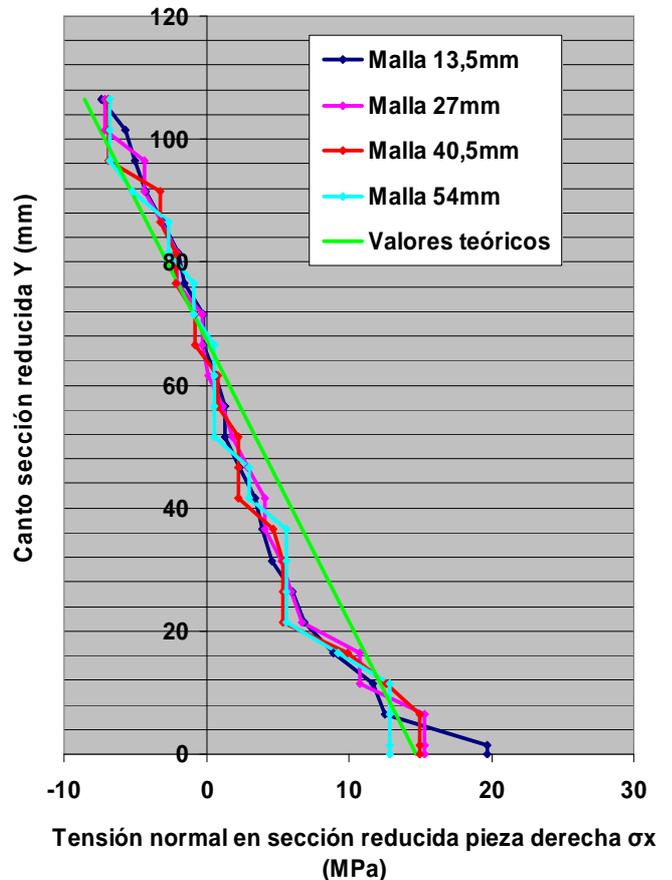


Fig. 9. Estados tensionales  $\sigma_x$  en la sección reducida de la pieza derecha para distintos tamaños de malla.

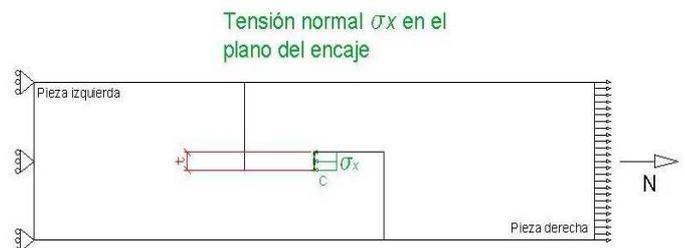


Fig. 10. Tensión normal  $\sigma_x$  en la sección del encaje.

Las zonas de concentración de tensiones de compresión en la pieza izquierda se corresponden con las zonas de concentración de tensiones de tracción y tensiones tangenciales en la pieza derecha.

En la Fig. 11 se indica la presión de contacto entre la pieza derecha y la pieza izquierda en la superficie del encaje para los distintos tamaños de la malla representando los ejes cartesianos las variables siguientes:

- eje de ordenadas: posición de la altura de la sección del encaje.
- eje de abscisas: tensión normal en la dirección longitudinal de ambas piezas  $\sigma_x$ .

En la gráfica se observa que la superficie completa del encaje trabaja a compresión acorde a lo que indican los valores teóricos.

Aparecen dos zonas de elevada concentración de tensiones, una situada en la parte superior de la sección y otra en la parte inferior de la misma, verificándose que al disminuir el tamaño de la malla, la tensión de compresión que muestra el modelo MEF aumenta. Los valores de tensión de la parte inferior de la sección son mayores que en la parte superior debido a la modelización realizada, donde se coacciona el apoyo en la testa de la pieza izquierda y se aplica la carga externa en la testa de la pieza derecha.

### 3.4. Sección del cogote

Aplicando la teoría de Resistencia de Materiales y suponiendo una distribución uniforme, la tensión tangencial en la sección del cogote de la pieza derecha (Fig. 12) se puede obtener mediante la expresión siguiente:

$$\tau_{yx} = \frac{N}{b \cdot l} = 2,75 N / mm^2$$

donde,

N: fuerza exterior aplicada (66 kN).

b: anchura de la sección (200 mm).

l: longitud de la superficie del cogote (120 mm).

Seguidamente se muestran en la Fig. 13 las líneas de isotensión tangencial  $\tau_{yx}$  en el plano “alzado” para un tamaño de la malla de 13,5 mm.

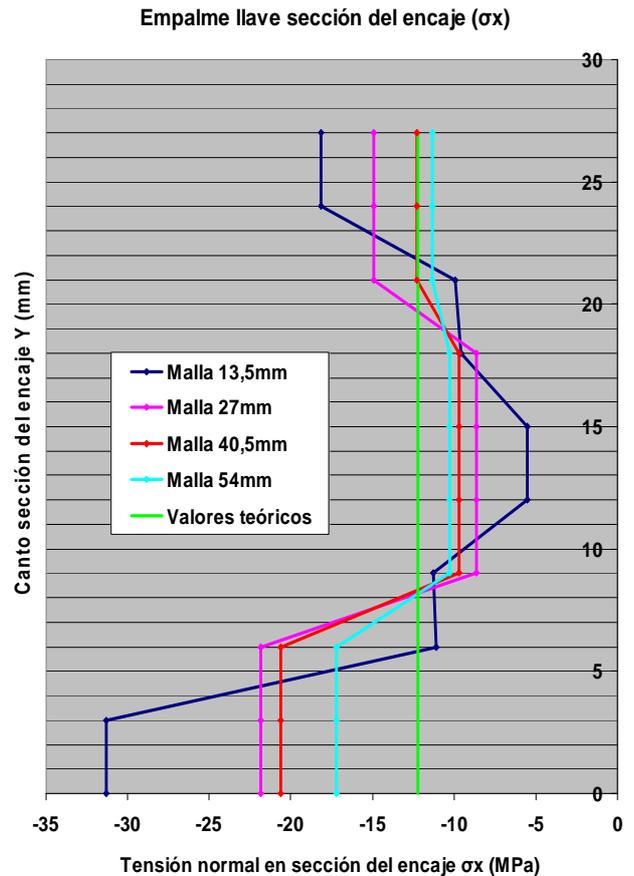


Fig. 11. Estados tensionales  $\sigma_x$  en la sección del encaje para distintos tamaños de malla.

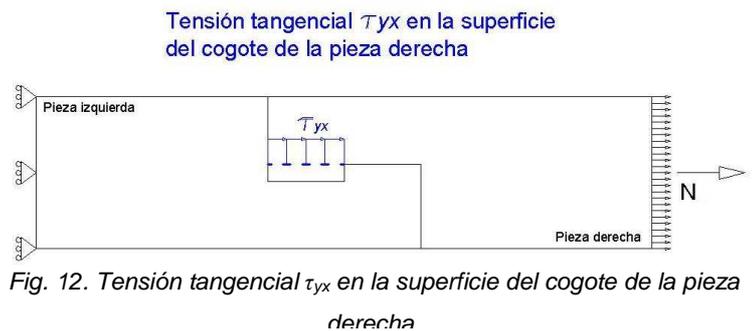


Fig. 12. Tensión tangencial  $\tau_{yx}$  en la superficie del cogote de la pieza derecha

La distribución de isotensiones muestra claramente dos puntos de elevada concentración de tensiones tangenciales en la parte superior del encaje en la pieza derecha y en la parte inferior del mismo en la pieza izquierda. Por tanto, la concentración de tensiones de

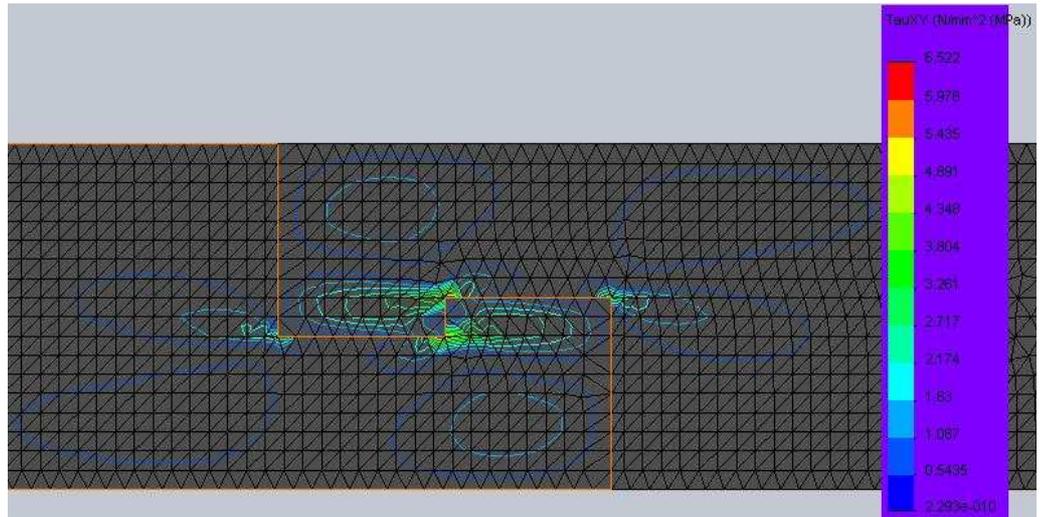


Fig. 13. Líneas de isotensión  $\tau_{yx}$  para malla de 13,5 mm.

compresión en la pieza derecha se corresponde con una concentración de tensiones tangenciales en la pieza izquierda para equilibrar los esfuerzos transmitidos entre las superficies en contacto de ambas piezas.

En la Fig. 14 se ubican los estados tensionales obtenidos para los distintos tamaños de la malla representando los ejes cartesianos las variables siguientes:

- eje de ordenadas: tensión tangencial  $\tau_{yx}$  en el plano del cogote de la pieza derecha.
- eje de abscisas: posición a lo largo de la de la longitud del plano.

Las tensiones muestran valores cercanos a cero en la parte final del cogote de la pieza derecha

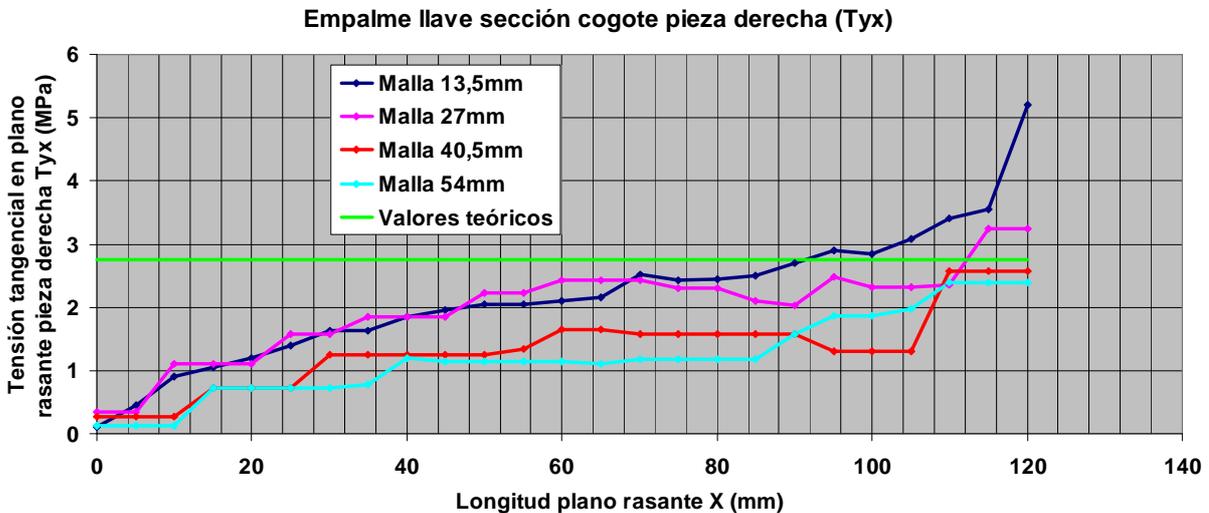


Fig. 14. Estados tensionales  $\tau_{yx}$  en el plano del cogote de la pieza derecha para distintos tamaños de la malla.

(testa izquierda de la misma), aumentando progresivamente con el acercamiento al inicio del cogote de la pieza derecha, que es donde se produce la concentración de tensiones. En esta zona se aprecia que el valor de la tensión tangencial aumenta al disminuir el tamaño de la malla.

Debido a un tamaño excesivo de la malla, en la Fig. 14 se observa que el volumen de tensiones obtenido para los distintos tamaños de la misma es inferior en cualquier caso a los valores teóricos. El programa opera obteniendo las tensiones en los nodos de cada elemento por extrapolación de los resultados calculados en los puntos de integración de Gauss, de modo que en nodos comunes existirán tantos resultados de tensión como elementos confluyan en ese nodo. Posteriormente se promedian los resultados de todos los elementos que contribuyen con tensiones a dicho nodo. En los elementos de la parte superior de la sección del cogote, Fig. 13, varias líneas de isotensión describen su trayectoria dentro de un mismo elemento por lo que se produce un gradiente muy acusado del valor de la tensión en el interior del elemento. Por ello, los

nodos ubicados en la sección del cogote no recogen las máximas tensiones, para lo cual se requeriría un refino de la malla en esa zona.

#### 4. Conclusiones

Mediante el análisis de las distribuciones de tensiones en las diferentes secciones de estudio para cada tamaño de malla utilizado y la comparación de los valores obtenidos mediante el MEF y la teoría clásica de Resistencia de Materiales en éstas, se puede concluir:

a) La distribución de isotensiones, tanto de tensiones normales como de tensiones tangenciales, es prácticamente simétrica cumpliendo una simetría central donde el centro de simetría se corresponde con el centro geométrico de la unión.

b) En las zonas donde se produce concentración de tensiones, los valores de las mismas para un mismo elemento aumentan considerablemente con el refino de la malla. En zonas donde la concentración de tensiones es menor, distintos tamaños de la malla muestran valores de tensión similares entre sí. Por ello, el tamaño de la malla utilizado es especialmente relevante en las zonas donde se produce concentración de tensiones.

c) Comparando los valores obtenidos en el modelo con los valores teóricos, se demuestra que en la zona de concentración de tensiones es necesario refinar la malla suficientemente para recoger las máximas tensiones porque con tamaños de malla mayores, los valores tensionales resultantes son siempre inferiores a los valores teóricos necesarios para mantener el equilibrio de la unión teniendo en cuenta las cargas exteriores aplicadas. Por ello, el mallado más adecuado de los considerados es el de menor tamaño, es decir, el de 13,5 mm.

e) La comparación de los niveles de tensiones normales obtenidos por el MEF y la teoría clásica muestran valores de tensiones cercanos entre sí, excepto en los puntos de concentración de tensiones.

f) Este trabajo debe ser considerado como un primer paso al estudio de las tensiones en los empalmes de llave. La concentración elevada de tensiones en los cambios bruscos de sección quedan en la realidad reducidos por la plastificación en las zonas comprimidas y su análisis mediante MEF debe realizarse con un modelo que incluya esta plasticidad, así como su verificación experimental. Este enfoque será desarrollado por los autores en trabajos futuros.

#### Referencias Bibliográficas

- Argüelles Álvarez R., Arriaga F., Martínez J.J., 2000. "Estructuras de Madera. Diseño y Cálculo" 2ª edición. AITIM, Asociación de la Investigación Técnica de las Industrias de la Madera y Corcho. Madrid, España.
- Arriaga F., Íñiguez G., Esteban M., Argüelles R, Fernández.Cabo J.L., 2010. "Uniones en estructuras de madera". Ed. Construir con madera (en imprenta).
- Feio A., Lourenço P., 2008. "Structural behaviour of tradicional mortise-and-tenon timber joints". Word Culture, Braga 2008.
- Koch H., Schäfers M., Seim W., 2008. "Tradicional timber joints-experimental investigation on tapered tenons". WCTE 08.
- Sangree R.H., Schafer B.W., 2008. "Experimental and numerical analysis of a halved and tabled traditional timber scarf joint". Construction and Building Materials. Pp. 615-624.
- Soilán A., Guaita M., Arriaga F., Hermoso E., Eiras A., 2008."Análisis of Stress-Strain State of Dovetail Joints between Joints and Beams". WCTE 08.
- Vázquez M., López E., 2001. "El Método de los Elementos Finitos aplicado al Análisis Estructural". Editorial Noelia. Madrid, España.
- Villar J.R., Guaita M., Vidal P., Arriaga F., 2007. "Analysis of the stress state at the cogging joint in timber structures". Biosystems Engineering (Biosyst. Eng). 96 (1), 79-90.
- Villar J.R., Guaita M., Vidal P., Argüelles Bustillo R., 2008. "Numerical simulation of framed joints in sawn-timber roof trusses". Spanish Journal of Agricultural Research 2008 6(4), pp. 508-520.
- Walter CR., Fonseca F.S., Judd J.P., Thorley P.R., 2008. " Tensile Capacity of timber-Frame Mortise and Tenon Connections". WCTE 08.
- Tannert T., 2008. "Structural performance of rounded dovetail connections". Tesis Doctoral.The University of British Columbia, Vancouver (Canada).

#### Infografía

[1] [www.craftsmanspace.com](http://www.craftsmanspace.com)

[2] [www.iberisa.com](http://www.iberisa.com)