

Ordenación de las Alternativas Basándose en Intervalos de Veto y Ajuste

Pilar Sabio

Departamento de Economía Aplicada I
Facultad de Ciencias Jurídicas y Sociales, URJC
28933 Móstoles, Madrid, SPAIN
pilar.sabio@urjc.es

Alfonso Mateos y Antonio Jiménez

Departamento de Inteligencia Artificial
Facultad de Informática, Universidad Politécnica de Madrid
28660, Boadilla del Monte, SPAIN
{amateos, ajimenez}@fi.upm.es

Abstract— En este trabajo se presenta un método de ordenación de alternativas para problemas de toma de decisiones multicriterio en grupo, donde se conoce la importancia relativa de los decisores involucrados y sus preferencias se representan mediante una función de utilidad multiatributo aditiva. Suponemos que los decisores pueden definir un umbral de veto para los distintos criterios. El método propuesto identifica un intervalo de veto y otro de ajuste a partir de los vetos individuales proporcionados por cada decisor para cada uno de los criterios y, a partir de ellos, construye una *función de veto*, que permitirá vetar aquellas alternativas que tomen valores en el intervalo de veto; y una *función de ajuste*, que disminuirá la utilidad de las alternativas cuando contengan algún valor en un atributo dentro del intervalo de ajuste. Ambas funciones se incorporan convenientemente en el modelo en utilidad multiatributo aditivo para obtener una ordenación final de las alternativas consideradas.

Keywords-component: toma de decisiones en grupo, utilidad multiatributo aditiva, función de veto y de ajuste.

I. INTRODUCCIÓN

En muchos de los problemas de decisión reales se considera que el modelo de utilidad multiatributo aditivo [1] es una buena aproximación, siendo su forma funcional la siguiente:

$$u(A_i) = \sum_j w_j u_j(x_{ij})$$

donde $u_j(x_{ij})$ es la utilidad asociada a la consecuencia x_{ij} de la alternativa A_i en el atributo X_j , y w_j los pesos o importancia relativa de cada atributo en el contexto particular del problema de decisión.

En determinados problemas de decisión multicriterio y para ciertos atributos, los decisores pueden considerar necesario definir diferentes tipos de intervalos de valores: el *intervalo de veto*, que son aquellos valores de un atributo que hacen que la alternativa que los tome sea vetada por el decisor, independientemente del valor que tome en el resto de atributos; el *intervalo de ajuste*, que son aquellos valores de un atributo que hacen que la alternativa que los tome disminuya su utilidad para ajustarse a las preferencias de otros decisores; y el *intervalo normal*, que está constituido por el resto de valores que ni son ajustados ni vetados.

Por ejemplo, consideremos una pareja que decide comprar una vivienda, por lo que ambos tienen la misma importancia en el contexto del problema y ambos tienen derecho a veto. Supongamos que consideran como uno de los atributos el tamaño del inmueble, de modo que sus preferencias en el anterior atributo se han calculado usando alguno de los métodos existentes y han quedado representadas mediante una función de utilidad creciente, tomando para el primer decisor el valor 0 en 30 m² y 1 en el valor 300 m², mientras que para el segundo decisor el valor 0 está en 50 m² y 1 en el valor 300 m². Ambos piensan que deben tener presentes en la evaluación de las alternativas, los valores veto o límite del otro decisor, por lo que en esta hipotética situación, deciden definir como intervalo de veto [0, 30], como intervalo de ajuste (30, 50] y intervalo normal [50, 300].

Se han realizado diferentes trabajos en los que se considera el concepto de veto como una aproximación a las situaciones reales que permite expresar los límites de las preferencias de los decisores. Para definir dichas preferencias el *umbral de veto* se representa como una medida cuantificable, que se convierte en una herramienta importante en los sistemas de decisión multicriterio y en los problemas de decisión en grupo. Dentro de la teoría social, el concepto de veto está justificado por el axioma llamado *prudencia* enunciado por Arrow y Raynaud [2], cuya idea principal es que no es prudente aceptar alternativas cuyo grado de conflicto sea alto y en consecuencia, puedan dar lugar a decisiones vulnerables. En relación con el axioma anterior, Moulin define el principio de *veto proporcional* en un grupo de decisores [3], según el cual todo subgrupo tiene el derecho a vetar un cierto número de alternativas proporcional al tamaño del subgrupo.

En problemas de decisión multicriterio el concepto de veto ha sido utilizado por los *métodos de ordenación no compensatorios*. El primer método fue desarrollado dentro de la familia de métodos ELECTRE [4]. En la familia de métodos ELECTRE los decisores deben especificar la importancia relativa de cada criterio a evaluar y ciertos parámetros técnicos, como la preferencia, indiferencia y valores de umbral de veto. La definición de estos parámetros permite decidir si hay un criterio suficientemente alto como para decidir que una alternativa A_1 es mejor que la alternativa A_2 , y además las desviaciones del resto de criterios para A_1 no son tan altas.

Nowak empleó ELECTRE-III en la construcción de un ranking multiatributo usando umbrales de preferencia para distinguir situaciones de estricta y débil preferencia en aproximaciones estocásticas de dominancia [5]. Más tarde, en [6] se desarrolla una implementación basada en umbrales de veto, al mismo tiempo que utiliza la teoría de conjuntos borrosos para representar la información cualitativa.

Por otra parte, los *métodos compensatorias aditivos* han incorporado también el concepto de veto. Un ejemplo es el método TOPSIS (Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution) [7]. TOPSIS está basado en la idea de que la alternativa escogida debe estar tan cerca de la solución ideal como alejada de la solución anti-ideal. Ambas alternativas se comportan como umbrales de veto, no en el sentido estricto de rechazo de alternativas, sino en el sentido de puntos de referencia para resolver el problema de toma de decisión.

Bana et al definen una aproximación multicriterio para facilitar la prohibición de alternativas basado en el método MACBETH (Measuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation Technique) [8]. Las bases metodológicas de esta técnica están en línea de forma indirecta, con el concepto de *poder de veto* usado en los modelos no compensatorios.

En relación con las investigaciones basadas en el *poder de veto*, en [9] se propone axiomatizar índices individuales para valorar cuando cada criterio se comporta en forma de veto o a favor de la agregación mediante la integral de Choquet. Estos índices hacen posible identificar y medir la tendencia o impacto de cada criterio dentro de la evaluación global de las alternativas. En [10] utilizan la misma idea de los efectos de veto, expresando los grados de conjunción, disyunción, veto y aprobación dados por los índices mediante medidas de análisis borrosas, las cuales representan la medida de tolerancia al riesgo del decisor.

Recientemente, França y Almeida desarrollan una extensión del método de decisión multicriterio aditivo basándose en el concepto de intervalo de veto y en el factor de reducción, con el que dan soporte a un problema de decisión sobre inversión en la automatización del uso del agua en una compañía [11].

En este trabajo proponemos un método basado en los *conceptos de intervalo de veto y ajuste*, en el que los distintos decisores con derecho a veto, definen sobre cada uno de los atributos un valor de veto para expresar los límites de las preferencias, para a partir de aquí decidir el intervalo de veto y el intervalo de ajuste; extendiendo así el modelo aditivo clásico. El desarrollo de este estudio se inicia con la especificación del modelo aditivo con ajuste del veto que proponemos, seguidamente se muestra un ejemplo de aplicación para un caso particular con el que se analizan diferentes situaciones y se finaliza con las conclusiones.

II. MODELO MULTIATRIBUTO ADITIVO CON AJUSTE DEL VETO

Consideramos un conjunto de k decisores, que denotaremos por DM_l , $l=1, \dots, k$, cuya importancia relativa es conocida y denotada por w_{DM_l} . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el decisor más preferido es el DM_1 , seguido del DM_2 , y así sucesivamente hasta el DM_k por lo que, el conjunto de pesos concretos que representa su importancia

satisface las desigualdades $w_{DM_1} \geq \dots \geq w_{DM_k}$, además de cumplir que $\sum w_{DM_l} = 1$.

Se dispone de un conjunto de alternativas a ordenar $\{A_1, \dots, A_m\}$ evaluadas sobre un conjunto de atributos, X_1, \dots, X_n . Los k decisores pueden expresar vetos sobre los atributos bajo consideración, pero sólo para los r primeros su veto será efectivo, $r \leq k$, es decir, para los r decisores más importantes. El veto expresado por los restantes $k-r$ decisores se tendrá en cuenta de manera parcial, como se explica más adelante.

Las preferencias de cada decisor DM_l sobre cada alternativa A_i se representan mediante una función de utilidad multiatributo aditiva,

$$u^l(A_i) = \sum_{j=1}^n w_j^l u_j^l(x_{ij}), \forall l, i, \quad (1)$$

donde $u_j^l(\cdot)$ es la función de utilidad individual del decisor DM_l en el atributo X_j , y w_j^l es el peso del atributo X_j para el decisor DM_l .

Denotamos por x_{vj}^l al umbral de veto del decisor DM_l en el atributo X_j , valor por encima o por debajo del cual (en el caso de que la función de utilidad en ese atributo sea creciente o decreciente, respectivamente) el decisor correspondiente desearía que se encontrasen las alternativas consideradas. En consecuencia, $(0, x_{vj}^l)$ será el *intervalo de veto* del decisor DM_l en el atributo X_j . De aquí en adelante, supondremos por simplicidad que todas las funciones de utilidad consideradas son crecientes.

Definimos para cada atributo X_j un *intervalo de ajuste*, (x_{vj}^-, x_{vj}^+) , con $x_{vj}^- = \max_{l=1, \dots, r} \{x_{vj}^l\}$, el mayor de los vetos en el atributo X_j de los r decisores más importantes; y $x_{vj}^+ = \max_{l=1, \dots, k} \{x_{vj}^l\}$ el mayor de los vetos en el atributo X_j de todos los decisores.

El método que proponemos define dos funciones para representar las situaciones de *veto* y/o *ajuste* anteriormente descritas:

1) $v(A_i)$, *función de veto* que acumula la penalización global que tiene toda alternativa A_i , dependiendo del valor de la alternativa en cada atributo X_j :

$$v_j(A_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_{ij} > x_{vj}^- \\ 0 & \text{si } x_{ij} \leq x_{vj}^- \end{cases} \quad (2)$$

$$v(A_i) = \prod_{j=1}^n v_j(A_i),$$

2) $d_j(A_i)$, *función de ajuste* que evalúa la proporción en que va a disminuir la utilidad sobre los valores de la región de ajuste del atributo X_j :

$$d_j(A_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_{ij} \geq x_{vj}^+ \\ \frac{x_{ij} - x_{vj}^-}{x_{vj}^+ - x_{vj}^-} & \text{si } x_{vj}^- < x_{ij} < x_{vj}^+ \forall i, j \\ 0 & \text{si } x_{ij} \leq x_{vj}^- \end{cases} \quad (3)$$

Teniendo en cuenta las funciones anteriores, la función de utilidad multiatributo aditiva (1) puede ser modificada para cada DM_l quedando de la siguiente forma:

$$u_v^l(A_i) = [u_1^l(x_{i1})w_1^l d_1^l(A_i) + \dots + u_n^l(x_{in})w_n^l d_n^l(A_i)]v(A_i). \quad (4)$$

En (4) se puede observar que aquellas alternativas que tienen al menos un valor peor que el veto establecido por los r decisores más importantes obtienen una utilidad 0, mientras que solo en el caso de tener valores mejores que los vetos correspondientes en todos los atributos se utiliza la función de ajuste para penalizar los valores que pertenecen al intervalo de ajuste.

A partir de las utilidades obtenidas en la expresión (4) podemos calcular una ordenación de las alternativas para cada decisor DM_i . Para obtener las preferencias del grupo de decisores utilizamos el concepto de agregación de rankings de alternativas [12, 13].

La forma más sencilla de agregar los rankings individuales es contabilizar el número de veces que cada alternativa ha quedado en primera posición, segunda posición y así sucesivamente, ponderando la importancia relativa que tienen los decisores que los ordenan en cada una de estas posiciones. La ordenación final se obtendría a partir de los valores calculados anteriormente.

III. MÉTODO ADITIVO CON AJUSTE DEL VETO

Consideramos un problema con tres decisores con opción a veto, donde su importancia relativa viene representada por los siguientes pesos: $w_{DM1} = 0.5$, $w_{DM2} = 0.3$ y $w_{DM3} = 0.2$. Se dispone de un total de nueve alternativas que se deben ordenar en base a dos criterios, X_1 y X_2 , ambos con rango de posibles valores [0,100]. La Tabla I muestra los valores que proporcionan las nueve alternativas en dichos atributos.

Los tres decisores asumen una función de utilidad creciente lineal para cada atributo, véase en la Figura 1 las correspondientes al atributo X_2 .

Los umbrales de veto identificados por los decisores DM_1 y DM_2 para cada atributo son ($x_{v1}^1 = 20, x_{v2}^1 = 15$) y ($x_{v1}^2 = 10, x_{v2}^2 = 30$), respectivamente, mientras el decisor DM_3 decide no vetar los valores en ningún atributo. Asumimos que solamente se le concede al decisor DM_1 el derecho de veto efectivo, vetándose cualquier alternativa con un valor inferior a 20 para el primer atributo o con valor inferior a 15 en el segundo atributo. Por tanto, para el atributo X_1 el intervalo de veto es [0, 20] y el de ajuste es vacío (el veto del segundo decisor está dentro del intervalo de veto del atributo), mientras que para X_2 son [0, 15] y (15, 30), respectivamente.

La importancia relativa que tienen los atributos para los tres decisores vienen representados por los siguientes pesos:

$$w_1^1 = 0.6, w_2^1 = 0.4;$$

$$w_1^2 = 0.4, w_2^2 = 0.6;$$

$$w_1^3 = 0.2, w_2^3 = 0.8.$$

TABLA I. VALORES DE LAS ALTERNATIVAS

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
X_1	9	11	35	29	14	61	65	17	40
X_2	9	1	38	32	17	20	40	67	40

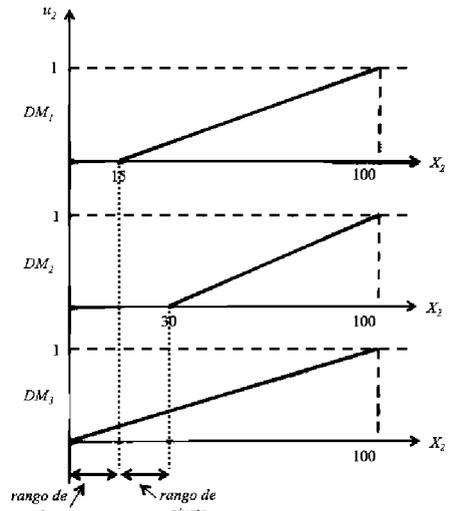


Figura 1. Funciones de utilidad individuales en X_2 .

Aplicando el modelo multiatributo aditivo sin tener en cuenta la información sobre el veto de los decisores obtendríamos la ordenación que se muestra en la Tabla II, en la que no sería descartada ninguna alternativa. En dicha ordenación la alternativa A_8 ocupa la segunda posición, pero dicha alternativa está vetada por el primer decisor ya que su valor para el primer atributo es inferior a 20. Las alternativas A_1, A_2 y A_3 , que ocupan las posiciones octava, novena y sexta, respectivamente; están vetadas por el primer decisor.

A continuación, se aplica el modelo aditivo con ajuste del veto propuesto. En primer lugar, calculamos los valores que proporcionan las funciones de veto (2) en las distintas alternativas y los valores de la función de ajuste para los dos atributos (3), véase la Tabla III.

Calculamos las utilidades de las alternativas para los distintos decisores, aplicando la extensión con veto del modelo aditivo (4) y, a partir de ellas, las ordenaciones de las alternativas para cada decisor (señalados en la Tabla IV entre paréntesis en **negrita**). Finalmente, agregamos las ordenaciones ponderando mediante la importancia relativa de los tres decisores, véase la Tabla IV, y obtenemos la ordenación final (en grupo) de las alternativas.

TABLA II. RANKING DE ALTERNATIVAS CON EL MODELO ADITIVO

	Utilidades DMs			Utilidad grupo	Ranking
	DM_1	DM_2	DM_3	$u(A_i)$	
A_1	0	0	0.09	0.018	8
A_2	0	0.0044	0.03	0.007	9
A_3	0.2366	0.1792	0.374	0.247	5
A_4	0.1648	0.1018	0.314	0.176	7
A_5	0.3112	0.0176	0.164	0.194	6
A_6	0.3516	0.2264	0.282	0.300	3
A_7	0.4704	0.3302	0.45	0.424	1
A_8	0.2532	0.3482	0.57	0.345	2
A_9	0.2833	0.2191	0.4	0.287	4

TABLA III. FUNCIONES DE VETO Y AJUSTE

	Funciones de Veto			Funciones de ajuste	
	$v_1(A_i)$	$v_2(A_i)$	$v_3(A_i)$	$d_1(A_i)$	$d_2(A_i)$
A_1	0	0	0	0	0
A_2	0	0	0	0	0
A_3	1	1	1	1	1
A_4	1	1	1	1	1
A_5	0	1	0	0	0.1333
A_6	1	1	1	1	0.3333
A_7	1	1	1	1	1
A_8	0	1	0	0	1
A_9	1	1	1	1	1

TABLA IV. RANKING DEL MÉTODO ADITIVO CON VETO

	Utilidades DMs $u_i^*(\bullet)$			Agregación ponderada	Ranking final
	$DM_1(0.5)$	$DM_2(0.3)$	$DM_3(0.2)$		
A_1	0	0	0	-	-
A_2	0	0	0	-	-
A_3	0.236 (4)	0.179 (4)	0.374 (3)	3.8	4
A_4	0.165 (5)	0.102 (5)	0.314 (4)	4.8	5
A_5	0	0	0	-	-
A_6	0.322 (2)	0.226 (2)	0.175 (5)	2.6	2
A_7	0.470 (1)	0.330 (1)	0.450 (1)	1.0	1
A_8	0	0	0	-	-
A_9	0.283 (3)	0.219 (3)	0.4 (2)	2.8	3

Nótese que en el ranking obtenido con el modelo aditivo multiatributo con veto, las alternativas no consideradas en el ranking lo son porque no superan el umbral de veto propuesto por el decisor DM_1 (el que tiene derecho a veto efectivo). Sin embargo, la alternativa A_6 , vetada por el decisor DM_2 sigue siendo considerada, entrando en juego la función de ajuste, que disminuye la utilidad de la alternativa en dicho atributo.

Si comparamos las ordenaciones obtenidas por los tres decisores en el modelo aditivo con veto se puede observar que coinciden completamente para los dos primeros. Sin embargo, DM_3 considera a la alternativa A_6 en quinta posición, cuando la posición que ocupa para los dos primeros decisores es la segunda. Debido a que la importancia relativa que tiene en el proceso de decisión en grupo el tercer decisor es pequeña (0.2), la ordenación final, obtenida como la agregación ponderada de las ordenaciones obtenidas para los tres decisores individualmente, coincide con la ordenación de los dos primeros decisores.

Por otro lado, la ordenación obtenida con el modelo aditivo con veto coincide con la obtenida en el modelo aditivo clásico, si no consideramos en este último las alternativas que han sido eliminadas por los vetos introducidos por los decisores.

El modelo propuesto evita compensaciones entre los valores de las alternativas. Esto se observa en la alternativa A_8 , donde el valor en X_2 compensa el bajo valor en X_1 . Dicha compensación provoca que el modelo aditivo la sitúe en una segunda posición; mientras que el modelo con veto la elimina.

IV. CONCLUSIONES

En este trabajo extendemos el modelo multiatributo aditivo para considerar información sobre vetos proporcionada por un

conjunto de los decisores involucrados en el proceso de toma de decisiones. En el modelo propuesto, partiendo de los vetos individuales de algunos decisores para algunos de los atributos considerados, se identifica un intervalo de veto y otro de ajuste, que son incorporados al modelo multiatributo aditivo a través de una función de veto y otra de ajuste.

La ordenación de las alternativas que proporciona este modelo aditivo con veto propuesto garantiza la eliminación de todas aquellas alternativas con valores en los intervalos de veto construidos para un subconjunto de decisores más importantes (con derecho efectivo a veto) y ajusta las alternativas con valores en el intervalo de ajuste, evitando además las compensaciones entre los atributos, de forma que las alternativas con atributos muy bien valorados no serán escogidas si al mismo tiempo contienen atributos muy mal valorados.

AGRADECIMIENTOS

El artículo fue subvencionado por el proyecto de la Comunidad de Madrid S2009/ESP-1685, el proyecto del Ministerio de Educación y Ciencia TIN 2008-06796-C04-02 y el proyecto del Ministerio de Ciencia e Innovación MTM2011-28983-C03-03.

REFERENCIAS

- [1] R. J. Keeney and H. Raiffa, Decision with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs. New York: Wiley, 1976.
- [2] K. J. Arrow and H. Raynaud, Social Choice and Multicriterion Decision Making. Cambridge: M.I.T. Press, 1986.
- [3] H. Moulin, "The proportional veto principle", Rev Econ Stud, vol. 48, pp. 407-416, 1981.
- [4] B. Roy, Multicriteria Methodology for Decision Analysis. Dordrecht: Kluwer, 1996.
- [5] M. Nowak, "Preference and veto threshold in multicriteria analysis based on stochastic dominance", Eur J Oper Res, vol. 158, pp. 339-350, 2004.
- [6] G. Munda, "A conflict analysis approach for illuminating distributional issues in sustainability", Eur J Oper Res, vol. 194, pp. 307-322, 2009.
- [7] K. Yoon, 1980, "System Selection by Multiple Attribute Decision Making". Tesis doctoral. Kansas State University Press. Manhattan.
- [8] C. A. Bana e Costa, E. Corrêa, J. M. De Corte and J. C. Vansnick, "Facilitating bid evaluation in public call for tenders: a social-technical approach", Omega, vol. 30, pp. 227-242, 2002.
- [9] J. L. Marichal, "Tolerant or intolerant character of interacting criteria in aggregation by the Choquet integral", Eur J Oper Res, vol. 155, pp. 771-791, 2004.
- [10] D. Liginlala and T. T. Ow, "Modeling attitude to risk in human decision processes: An application of fuzzy measures", Fuzzy Sets Syst, vol. 157, pp. 3040-3054, 2006.
- [11] S. Dantas and A. Teixeira, "The use of ranking veto concept to mitigate the compensatory effects of additive aggregation in group decisions on a water utility automation investment", Group Decis Negot, vol. 21, pp. 185-204, 2012.
- [12] N. Matsatsinis, E. Grigoroudis, E. and A. Samaras, "Aggregation and disaggregation of preferences for collective decision-making", Group Decis Negot, vol. 14, pp. 217-32, 2005.
- [13] D.C. Morais and A.T. Almeida, "Group decision making on water resources based on analysis of individual rankings", Omega, vol. 40, pp. 42-52, 2012.