Segunda Jornada Internacional
"Matemáticas Everywhere"

Grafos y diseño arquitectónico

Juana María Sánchez, Ascensión Moratalla, MªAgripina Sanz

EXCMO. AYUNTAMIENTO DE CASTRO URDIALES

20 y 21 de junio de 2012

Resumen

La Teoría de grafos, que en su origen fue una rama de la topología algebraica, es hoy en día una herramienta matemática utilizada en distintos campos. En este artículo se analizan diseños arquitectónicos con una óptica topológica, atendiendo a las conexiones de las distintas partes del proyecto que lo componen basadas en el uso, que se da a cada una de ellas, y se comparan los grafos asociados a distintas obras de arquitectura.

Palabras Clave: Grafos, Arquitectura, Geometría y Topología.

1. Teoría de grafos

1.1 Introducción

La Geometría Topológica es una parte de la matemática que estudia la interrelación de los elementos que forman un conjunto. Tiene sus orígenes a finales del Siglo XIX y se contrapone frontalmente a la Geometría Euclídea imperante hasta ese momento al plantear la equivalencia entre dos objetos en la existencia o no, en ellos, de las mismas relaciones entre sus partes.

Como es sabido, muchos autores coinciden en señalar al matemático suizo Leonhard Euler como uno de los padres de la topología ya que, al analizar en 1.736 el famoso "Problema de los Puentes de Königsberg" y dar como solución la "no solución del problema", revoluciona el pensamiento matemático de la época. Con anterioridad se consideraba que la solución a un problema sólo era tal si podía ser demostrada. Más tarde, en 1845 Gustav Kirchhoff publicó sus leyes sobre los circuitos para calcular el voltaje y la corriente en circuitos eléctricos. En 1852 Francis Guthrie plantea el problema de los cuatro colores en el que se trata de averiguar si, utilizando sólo cuatro colores se puede colorear cualquier mapa, de manera que dos países vecinos nunca coincidan en color. El problema, que no se resolvió hasta un siglo más tarde, puede ser considerado como el nacimiento de la teoría de grafos. En su análisis, los matemáticos definieron términos y conceptos teóricos fundamentales para dicha teoría.

Con este nuevo enfoque, las matemáticas descubrieron de improviso una nueva faceta que dotaba de libertad a sus teorías: la de poder ser aplicadas a diferentes formas y espacios siempre que pudiesen ser "deformados sin romperse". Desde aquel momento, la solución a ciertos problemas geométricos no dependía de la forma exacta de los objetos involucrados, sino de la manera en la que los elementos estudiados se relacionaban entre sí.

El hecho de que la Geometría Topológica plantease la importante pregunta de si sólo la combinación de elementos era importante (y se pudiese obviar la complejidad de los mismos), supuso un importante avance en todos aquellos campos en los que fuese necesario estudiar las relaciones.

2.1 Conceptos

Los grafos son la representación gráfica de las relaciones que estudia la Geometría Topológica (Fig.1).

El origen de la palabra grafo es griego y su significado etimológico es "trazar", y con este sentido se va a utilizar en este trabajo. Vamos a dibujar un organigrama, un gráfico representativo de una serie de tareas a realizar indicando su secuenciación.

En su definición plástica intervendrán un conjunto de puntos (vértices) conectados con líneas (arcos), en ocasiones con diferentes posibilidades. De ahí que al grafo lo podamos considerar tanto como un "objeto geométrico" como un "objeto combinatorio", es decir, un conjunto de puntos y un conjunto de líneas tomando, de entre el conjunto de ellas, una relación que una cada par de vértices de forma que, al cambiar su definición geométrica, altere también las propiedades del objeto al que se le aplica el estudio.

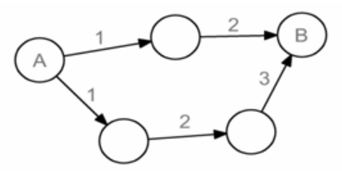


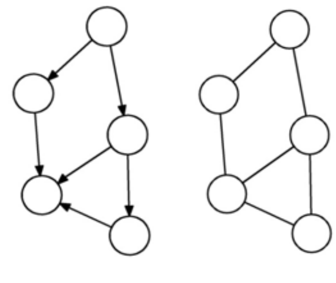
Figura 1. Ejemplo de grafo

Para nuestro análisis nos interesan especialmente los grafos como estructuras de datos no lineales que tienen una naturaleza generalmente dinámica y, para ello, vamos a clasificarlos en dos bloques: Grafos dirigidos y grafos no dirigidos, aunque este segundo bloque sea, en realidad un caso que incluye el primero.

Con el fin de facilitar la lectura de este artículo recordamos algunos conceptos.

Desde el punto de vista algebraico un grafo *G* es un conjunto en el que hay definida una relación binaria, es decir, *G* = (*V*, *A*), tal que *V* es un conjunto, no vacío, de objetos a los que denominaremos vértices o nodos y $A \subseteq V \times V$ una relación binaria a cuyos elementos denominaremos arcos o aristas. Entonces, dados $x, y \in V$ puede ocurrir que $(x, y) \in A$, lo que supondrá que x e y están relacionados, y por lo tanto, unidos por una arista, o bien que $(x, y) \notin A$, caso en que no lo están.

Si las aristas de un grafo tuviesen asociada una dirección $((x, y) \neq (y, x))$, diremos que el grafo es dirigido, (Fig 2) en caso contrario, $((x, y) = (y, x))$ diremos que el grafo es no dirigido (Fig 3).



Figuras 2 y 3. Ejemplo de grafo dirigido y grafo no dirigido

Las aristas son, pues, las auténticas protagonistas de los grafos. En algunas ocasiones, pueden tener valores numéricos para completar la definición de la relación de los elementos. Estos valores no suelen ser tanto distancias métricas como "intensidad de las relaciones" (como por ejemplo, la cantidad de información que se transmiten en unos ordenadores unidos por una red) (Fig. 4).

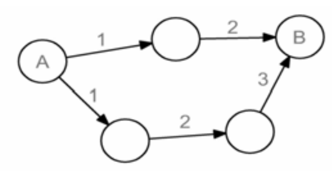


Figura 4

Diremos que un grafo $G = (V, A)$ es completo si $A=V\text{x}V$, es decir, si para cualquier pareja de vértices existe una arista que los une.

Un grafo dirigido es simétrico si $\forall(x, y) \in A$, también sucede que $(y, x) \in A$; y es un grafo antisimétrico cuando $\forall(x, y) \in A$, sucede que $(y, x) \notin A$.

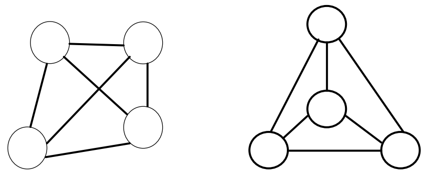
Dos aristas son adyacentes cuando tienen un vértice común que es, a la vez, origen de una y extremo de la otra. A un conjunto de aristas adyacentes la llamaremos camino, si el grafo es dirigido, y cadena si no lo es.

Un circuito (o ciclo para grafos no dirigidos) es un camino en el que coinciden los vértices inicial y final. El circuito se llama simple cuando todas sus aristas son distintas, y elemental cuando todos los vértices por los que pasa son distintos. La longitud de un circuito es el número de arcos que lo componen. Un bucle es un circuito de longitud 1, están permitidos los arcos de la forma (i, i).

Dado un grafo $G = (V, A)$, diremos que $G' = (V, A')$ con $A' \subset A$ es un grafo parcial de G, y un subgrafo de G es todo grafo $G'' = (V', A')$ con $V' \subseteq V$ y $A' \subseteq A$ donde A' será el conjunto de todas aquellas aristas que unían en el grafo G dos vértices que están en V'. Se podrían combinar ambas definiciones dando lugar a lo que llamaremos subgrafo parcial.

A todo grafo no dirigido se puede asociar un grafo denominado dual cambiando los vértices por aristas y viceversa.

Dos grafos G_1 y G_2 son isomorfos si existe una correspondencia biunívoca entre los vértices de G_1 y G_2 que tienen la propiedad de que el número de aristas que unen los vértices correspondientes de G_1 es igual al número de aristas que unen los vértices correspondientes de G_2



Figuras 5 y 6

Un grafo *G* se dice sumergible en una superficie *S* si existe un grafo isomorfo que puede dibujarse sobre *S* de forma que las aristas se intersequen en los vértices. Un grafo planar es aquel que es sumergible en un plano. Las figuras 5 y 6 mostraban grafos isomorfos. La figura 5 tiene el inconveniente que las aristas se cortan en puntos que no son nodos, sin embargo en la figura 6 las aristas sólo se cortan en los nodos, decimos entonces que el grafo de la figura 6 es plano. Por ser la figura 5 isomorfa a un grafo plano se puede concluir que la figura 5 es un grafo planar. No todos los grafos se pueden sumergir en un plano pero sí en el espacio tridimensional. También se pueden sumergir en otras superficies como la esfera, el toro,… Podemos encontrar relaciones entre ellas, así, un grafo es planar si se puede sumergir en la superficie de una esfera.

2. La Topología en la Arquitectura

2.1 Consideraciones preliminares

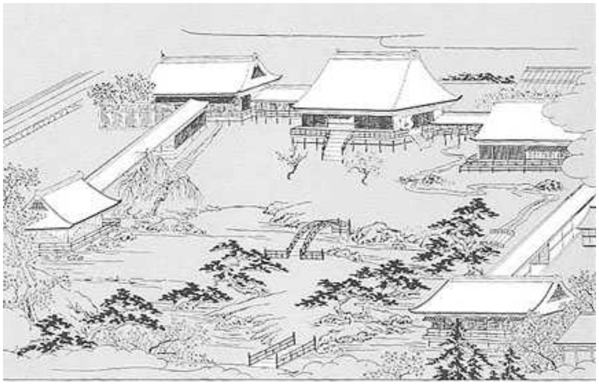
Si nos centramos en la Arquitectura, la Topología puede ser, y es, una forma matemática de analizar el "topos": el lugar, el espacio y todo lo que está contenido en él. En topología no distinguimos entre dos figuras o dos espacios si podemos pasar de uno a otro por medio de una deformación continua, eso es sin saltos o cortes.

Con este sentido, la topología es una herramienta muy utilizada en la arquitectura, especialmente en la japonesa, donde el sentido de la medida euclidiano, tan anclado en la cultura occidental, pierde importancia en favor de la medida como "*una suma de secuencias y adiciones aparentemente aleatorias en su organización*"[1] en la que el recorrido de un determinado espacio

[1] El concepto de *espacio topológico* fue introducido por vez primera 1969 por el historiador de arquitectura Mitsuo Inoue en su libro traducido al inglés en 1985 como *Space in Japanese Architecture*

arquitectónico, y la relación de uso planteada entre sus diferentes estancias, tendrá una especial importancia.

Si queremos estudiar la importancia de la topología en el diseño de la arquitectura japonesa contemporánea, es necesario que nos detengamos en el estudio de tipologías constructivas tradicionales, como pueden ser la casa tradicional japonesa del período Heian (Siglos X-XII) en la que el núcleo principal lo constituía una habitación diáfana que recibía el nombre *Shinden*[2], generalmente la morada del dueño de la casa, unido con otros pabellones por medio de espacios porticados (Fig. 7).



Figuras 7

Tras el período feudal y medieval el *Shinden* pasó a compartimentarse interiormente para diferenciar estancias en distintos grados de privacidad. De esta manera del espacio unitario empezaron a aparecer una serie de nuevas salas de concatenaciones espaciales yuxtapuestas, donde el recorrido por el edificio se convertía en una secuencia de escenas independientes en la que la posición o distancia entre ellas era indiscernible al carecer de una referencia espacial (Fig. 8 y 9). En otras palabras, era un espacio topológico.

Figura 8

[2] El Shinden-Zukuri estaba determinado por un edificio central, orientado invariablemente a Sur, y rodeado por una serie de edificios secundarios por toda una suerte de pasarelas, corredores porticados y puentes

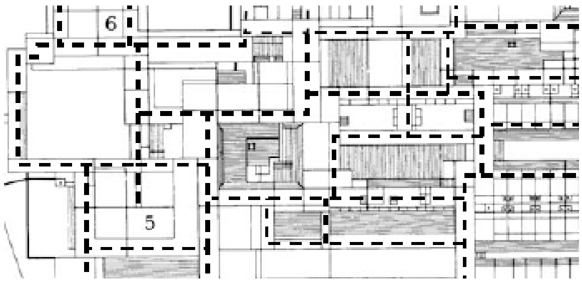
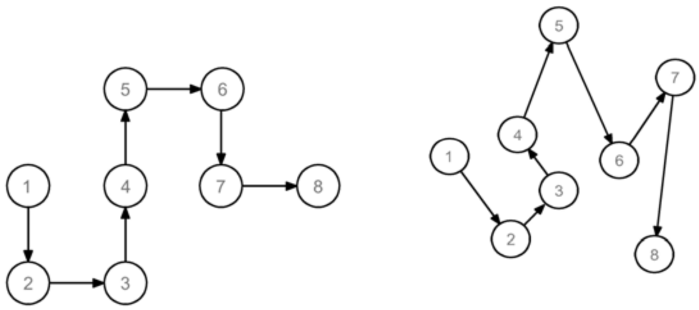


Figura 9

Hay que destacar que, al relacionar entre sí determinados espacios y desde el punto de vista de la arquitectura topológica, el primer grafo (Fig. 10) y el segundo (Fig. 11) corresponden al mismo concepto. 1, 2, 3…8 corresponden a diferentes estancias conectadas por un corredor o yuxtapuestas. Como se puede ver en el esquema, la longitud relativa, el ángulo del corredor, o los quiebros y requiebros que se hagan en el recorrido son completamente irrelevantes para alguien que habite esos espacios.



Figuras 10 y 11

2.2 Análisis topológico de ejemplos arquitectónicos japoneses

Observando los antecedentes arquitectónicos y las bases ideológicas y religiosas de la sociedad japonesa, caso que no nos ocupa, es más fácil reconocer qué elementos están presentes en sus obras arquitectónicas actuales. La irregularidad orgánica, la belleza en la asimetría, la falta de jerarquía de los elementos y la ambigüedad del recorrido son constantes en muchas propuestas orientales.

Como ejemplo ilustrativo de lo que se afirma hemos elegido a los componentes del estudio SANAA, ya que suponen un claro ejemplo de esta evolución de la arquitectura japonesa tradicional a la moderna, bien a través de la continuación o de la reinterpretación.

Si quisiéramos continuar con el análisis de espacio topológico reflejado en la figura 9, deberíamos estudiar espacios como los Apartamentos Moriyama sitos en los suburbios de Tokio o la Escuela de Administración y Diseño de Zollverein en Essen. Ambos se conciben como unidades independientes, diseminadas de forma aparentemente aleatoria en planta, sin jerarquía entre las piezas, no sólo en términos de grande o pequeño, también en exterior-interior. No hay ningún criterio visible que diferencie estos aspectos. Todas las estancias son tratadas de forma similar: Los diferentes espacios no están conectadas directamente, sino que plantean un recorrido sin condicionar una trayectoria concreta. Las circulaciones por los complejos, no son líneas rectas sino requiebros alrededor de los volúmenes que no siguen ningún orden particular.

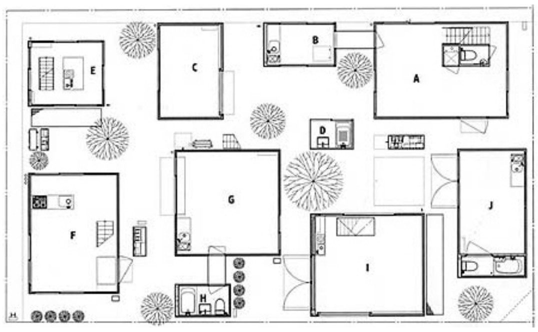


Figura 12

En el caso de la Escuela de Administración y Diseño de Zollverein (Fig. 13 y 14)[3] se puede apreciar cómo el diseño desafía el sistema convencional de distribución interior de un edificio en una interpretación actual de la filosofía espacial, la de una arquitectura sin pasillos equivalente a la de los *Shinden* del período Heian tardío.

[3] SANAA "Escuela de Administración y Diseño" de Zollverein en Essen (Alemania, 2005).

Figura 13

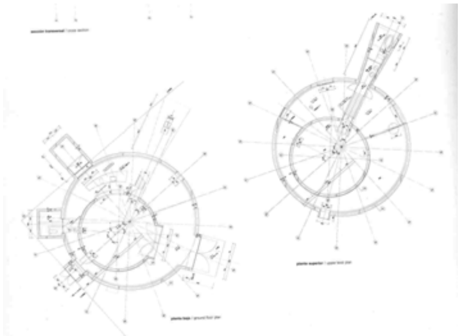
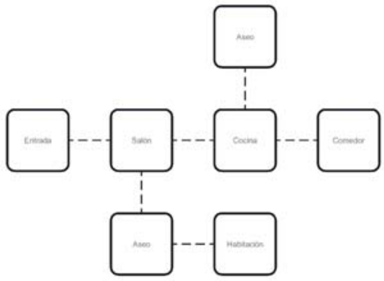
Figura 14

Sin embargo, se han elegido como ejemplos patentes de la flexibilidad de aplicación de los grafos, dos viviendas unifamiliares en las que, las habitaciones forman un conjunto de espacios interiores continuos. Aquí no es importante si una estancia está alineada con otra, sino a qué otras habitaciones está conectada cada una de ellas[4].

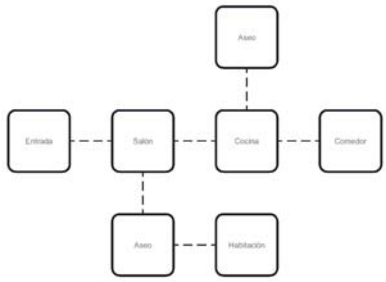
La primera es la Villa en el Bosque[5], (Fig. 15 y 16) construida a comienzos de los años noventa del pasado siglo y que responde al mismo gráfico de composición espacial que otra de aspecto muy distinto: La Platform I House (Fig.17 y 18).

[4] El trabajo sobre "Topología, Grafos y Arquitectura Japonesa" lo llevó a cabo el alumno Antonio de Blas Orive Exp. 01058 de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid en la asignatura La Geometría en la Arquitectura de la Vanguardias. Suyos son los gráficos adjuntos.

[5] La Villa en el Bosque, Nagano (Japón) 1992 y 1994

Figuras 15 y 16

Figuras 17 y 18

Como podemos observar en estas imágenes, independientemente de la solución plástica concreta adoptada en cada una de las viviendas, ambas responden a un modelo espacial prácticamente idéntico. Solo difieren en pequeños detalles debidos al tamaño de las distintas estancias o al programa concreto de usos al que responde la propuesta. En algunas ocasiones, los espacios están yuxtapuestos y se mezclan, en otras están unidos por corredores o escaleras que conectan un nivel con otro. La forma concreta de unión no es tan importante como el que unos espacios se relacionen o no con otros.

2.3 Análisis topológico de ejemplos arquitectónicos occidentales

También en una arquitectura más cercana a la nuestra, arquitectura de tipo occidental, es posible encontrarnos con situaciones espaciales que se pueden analizar de una manera parecida.

Es el caso, por ejemplo de Josep Antoni Coderch[6] quien, para la organización de sus viviendas unifamiliares divide las zonas de uso en tres tipos: servicios relación y descanso, prestando una especial atención a la relación entre exterior (público), y el exterior privado (jardín) y la transición entre estos dos conceptos. Esas relaciones entre zonas distintas, independientemente de que puedan variar al aumentar de superficie o en el número de estancias que las componen, pueden relacionarse según un esquema de relaciones fundamental, que podrá variar pero siempre intentando acercarse a un modelo considerado ideal.

Como ejemplo se han elegido dos de sus casas unifamiliares en las que, a pesar de la distinta superficie ocupada y la complejidad añadida al programa de uso, con la consiguiente multiplicidad de circulaciones, se resuelven mediante la aplicación del mismo grafo. Son la Casa Catasús (Fig. 19)[7] y la Casa Ballvé (Fig. 22), ambas llevadas a cabo en los años cincuenta del pasado siglo.

Figura 19 Casa Catasús. Planta

De ambas se facilita la planta, la distribución del programa de usos dentro de dichas plantas (Fig.20 y Fig.23) y el dibujo del grafo correspondiente (Fig.21 y Fig.24).

[6] El trabajo sobre José Antonio Coderch lo llevó a cabo el alumno Daniel Blanco Muñoz exp 7054 de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid en la asignatura La Geometría en la Arquitectura de la Vanguardias. Suyos son los gráficos que se adjuntan.
[7] Casa Catasús, Sitges, Barcelona 1956 y Casa Ballvé, Camprodon, Gerona, 1957.

Figura 20

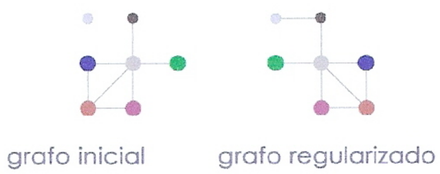


Figura 21

A pesar de que en este caso, el recorrido, no tenga el mismo significado que el planteado en los casos anteriores, ya que nada tienen que ver los lugares adyacentes orientales con los pasillos de distribución de la arquitectura occidental, generalmente en línea recta y marcando una dirección concreta; las conexiones pueden analizarse desde un punto de vista similar utilizando el esquema de un grafo.

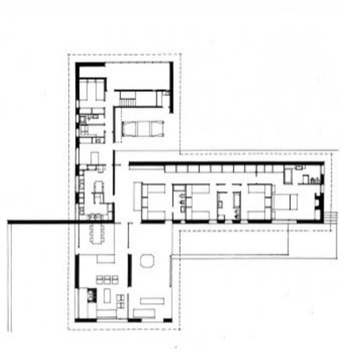


Figura 22

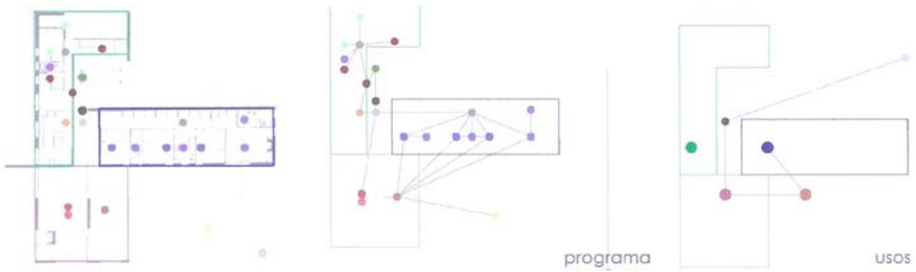


Figura 23

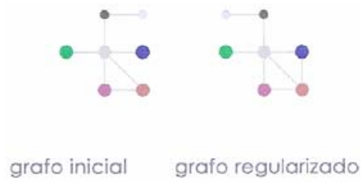


Figura 24

El ejemplo se ha centrado en un par de viviendas de los años cincuenta, época en la que Coderch define su propio estilo, la que se considera más lograda y homogénea. Modelos parecidos de organización se repiten tanto en su obra tanto en otras viviendas unifamiliares como colectivas.

3. Conclusiones

Nuestra inquietud por relacionar las Matemáticas con otras áreas de conocimiento de la carrera de Arquitectura, nos ha llevado a plantear el estudio de la topología y su aplicación al diseño arquitectónico. Como conclusión de esta experiencia, cabe destacar el descubrimiento de una rama de la Matemática, no contemplada en los planes de estudio de los alumnos de Arquitectura, que les proporciona una herramienta muy útil a la hora de plantear y analizar proyectos. Esta nueva forma de ver la arquitectura les permite, no sólo entender mejor la obra de los distintos autores u obras que hayan elegido para su trabajo, sino que, al entrar en contacto con teorías y conceptos referentes a la topología en general, aunque siempre orientada a sus fines concretos, les permite estudiar cualquier edificio desde otra perspectiva. Así, podrán establecer las relaciones entre los espacios de la obra de cualquier maestro y utilizarlas, por ejemplo, en un encargo personal que tenga unos requerimientos de programa parecidos, independientemente del tamaño del encargo. De esta forma, se podrán extrapolar soluciones y utilizar la impronta subjetiva y el sentido propio de la estética, sin que por ello deje de ser "el mismo edificio", el que funciona de forma análoga al del maestro.

Referencias

[1] ALSINA, C., TRILLAS, E., *Lecciones de Álgebra y Geometría*, pp. 18-23, Editorial GG. Barcelona, 1995.

[2] CHINN, W.G., STEENROD, N. E., *Primeros conceptos de topología*, pp. 64-72, Editorial Alhambra, Madrid, 1975.

[3] CORTÉS, J.A. *Topología arquitectónica. Una indagación sobre la naturaleza del espacio contemporáneo*. *SANAA 2004-2008.* Rev. El Croquis. Nº 139. pp. 32-56.

[4] CORTÉS, J.A. *Una conversación con Kazuyo Sejima y Ryue Nishizawa*. *SANAA 1983-2004, 2004-2008.* Rev. El Croquis. Nº 139. pp. 7 - 31.

[5] FERNÁNDEZ GALIANO, L. *SANAA en Sueño*. Rev. AV Monografías Nº 121. pp. 6 - 13. 2006.

[6] KAZUYO SEJIMA + RYUE *NISHIZAWA: SANAA*. *Casas.* Editores: Sam Chermayeff, Agustín Pérez Rubio y Tomoko Sakamoto. Madrid: ACTAR MUSAC

[7] WILSON, Robin J. *Introducción a la teoría de grafos*, páginas específicas consultadas, Alianza Editorial, Madrid, 1983.

Sobre el/los autor/es:
Nombre: Juana María Sánchez González
Correo Electrónico: juanamaria.sanchez@upm.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid
Nombre: Ascensión Moratalla de la Hoz
Correo Electrónico: ascension.moratalla.delahoz@upm.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid
Nombre: Mª Agripina Sanz García
Correo Electrónico: mariaagripina.sanz@upm.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid