AUTOCONTRADICCIÓN EN EL CONJUNTO DE LAS FUNCIONES DE $[0,1]^{[0,1]}$ NORMALES Y CONVEXAS

Pablo Hernández[1], **Susana Cubillo**[2], **Carmen Torres-Blanc**[2]

[1]*Departamento de Matemática y Física, Universidad Nacional Experimental del Táchira, Avenida Universidad, San Cristóbal, Táchira, Venezuela*, phernandezv@unet.edu.ve

[2]*Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Politécnica de Madrid, 28660 Boadilla del Monte-Madrid, España*, {scubillo,ctorres}@fi.upm.es

Resumen

Las propiedades N-autocontradicción y autocontradicción, han sido suficientemente estudiadas en los conjuntos borrosos ordinarios y en los conjuntos borrosos intuicionistas de Atanassov. En el presente artículo se inicia el estudio de las mencionadas propiedades, dentro del marco de los conjuntos borrosos de tipo 2 cuyos grados de pertenencia son funciones normales y convexas (**L**). En este sentido, aquí se extienden los conceptos de N-autocontradicción y autocontradicción al conjunto **L**, y se establecen algunos criterios para verificar tales propiedades.

Palabras Clave: Conjuntos borrosos de tipo 2, funciones normales y convexas, N-autocontradicción, autocontradicción.

1. INTRODUCCIÓN

Los conjuntos borrosos de tipo 2 (T2FSs) fueron introducidos por L.A. Zadeh en 1975 [17], como una extensión de los conjuntos borrosos ordinarios (FSs, o conjuntos borrosos de tipo 1). Mientras que en estos últimos el grado de pertenencia de un elemento al conjunto viene determinado por un valor en el intervalo $[0,1]$, en el caso de los T2FSs el grado de pertenencia de un elemento es un conjunto borroso en [0,1], es decir, un T2FS queda determinado por una función de pertenencia $\mu : X \to [0,1]^{[0,1]}$, ver [9, 10, 11]. Por ello, para poder trabajar con dichos conjuntos, es necesario hacerlo previamente en el espacio de funciones $[0,1]^{[0,1]}$. Particularmente en este trabajo nos restringiremos al espacio **L**, de las funciones de $[0,1]^{[0,1]}$ normales y convexas.

Trillas et al. en [13, 14], iniciaron el estudio de la autocontradicción y contradicción de conjuntos en el contexto de la lógica borrosa, no sólo como un tema de interés teórico, sino también práctico, en el sentido de analizar las posibles consecuencias contradictorias en los procesos de inferencia borrosa. En artículos posteriores (ver [1, 4], por ejemplo): Se abordó con más profundidad la autocontradicción y contradicción en los FSs; se propusieron formas de medir el grado en que estas propiedades aparecen; se desarrolló una axiomática para las medidas de autocontradicción, contradicción entre conjuntos, autocontradicción respecto a una negación fuerte N (N-autocontradicción) y contradicción entre conjuntos respecto a una negación fuerte N (N-contradicción).

Así mismo, en [5] se aborda la contradicción en el marco de los conjuntos borrosos intuicionistas de Atanassov (AIFSs), introduciendo el concepto de un AIFS contradictorio, y la contradicción entre dos AIFSs. Luego, en diferentes artículos (ver [2, 3, 6, 12], por ejemplo): Se estudian los grados de autocontradicción y de N-autocontradicción de un AIFS; se proporcionan algunas fórmulas para medir dichos grados; se desarrollan las axiomáticas para medir dichas propiedades; se trata con más profundidad el tema de la contradicción entre AIFSs; se presentan algunas fórmulas para medir tal propiedad; y se proporciona un modelo axiomático para las medidas de contradicción entre AIFSs. En el presente trabajo se pretende iniciar con un estudio análogo al desarrollado anteriormente, especialmente en [2, 5, 13, 14], sobre la N-autocontradicción y autocontradicción, pero en los conjuntos de tipo 2, con grados de pertenencia en **L**.

El artículo se organiza como sigue: En la sección 2 recordamos algunas definiciones, operaciones y propiedades sobre los T2FSs, especialmente acerca del subálgebra **L**, presentadas en la literatura reciente (ver por ejemplo, [16]). En la sección 3 presentamos las definiciones y propiedades sobre la autocontradicción y N-contradicción en conjuntos borrosos, establecidas en artículos anteriores (por ejemplo, [14]); y extendemos algunas de estas definiciones al subálgebra **L**, el cual representa nuestro objeto de estudio. Por último, en la sección 4 determinamos algunos criterios para verificar dichas propiedades en **L**.

2. SOBRE LOS T2FSs

De aquí en adelante denotaremos por X un conjunto no vacío que representará el universo de discurso. Además, el símbolo $\leq$ denotará la relación de orden en el retículo de los números reales.

Definición 1. ([10, 11]) Un conjunto borroso de tipo 2, A, esta caracterizado por una *función borrosa de pertencia* μ_A, como

$$\mu_A : X \to [0,1]^{[0,1]},$$

donde $\mu_A(x)$ es un *grado borroso*, y es un conjunto borroso en el intervalo $[0,1]$. $\mu_A(x)$ es representado por

$$\mu_A(x) = f_x$$

donde

$$f_x : [0,1] \to [0,1].$$

Las operaciones teóricas en los T2FSs fueron deducidas a partir del principio de extensión de Zadeh [9, 10, 11, 17]. Luego, en [9] establecieron el "Teorema de Representación", mediante el cual se ratifican las fórmulas para dichas operaciones. Como los grados de verdad de los T2FSs están en $[0,1]^{[0,1]}$, entonces trabajaremos en este marco.

Definición 2. ([8, 16]) Sobre $[0,1]^{[0,1]}$ se definen las operaciones $\sqcup$ (unión), $\sqcap$ (intersección), N (complemento, o negación), $\bar{0}$ y $\bar{1}$ de la siguiente manera:

$$(f \sqcup g)(x) = f(x) \sqcup g(x) = sup\{f(y) \wedge g(z) : y \vee z = x\},$$

$$(f \sqcap g)(x) = f(x) \sqcap g(x) = sup\{f(y) \wedge g(z) : y \wedge z = x\},$$

$(N(f))(x) = \neg f(x) = sup\{f(y) : n(y) = x\} = f(n(x)) = f(1-x)$,

$$\bar{0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}, \quad \bar{1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \neq 1. \end{cases}$$

$\vee, \wedge$ y n son las operaciones máximo, mínimo, y la negación estandar ($n = 1 - id$), respectivamente, en el retículo $[0,1]$.

$\mathbf{M}$= $([0,1]^{[0,1]}, \sqcup, \sqcap, N, \bar{0}, \bar{1})$ es el álgebra básica de los valores de verdad de los T2FSs, [8, 16]. $\mathbf{M}$ no tiene estructura de retículo, ya que generalmente no se cumple la ley de absorción [8, 16]. Sin embargo, cada una de las operaciones $\sqcup$ y $\sqcap$ tienen las propiedades requeridas para definir un orden parcial, [16].

Definición 3. ([11, 16]) $f \sqsubseteq g$ si $f \sqcap g = f$; $f \preceq g$ si $f \sqcup g = g$.

En general, estos dos órdenes no coinciden, [11, 16]. Por otra parte, $\bar{0}$ y $\bar{1}$ son los elementos neutros de las operaciones $\sqcup$ y $\sqcap$, respectivamente, es decir, $\bar{0} \sqcup f = f$ y $\bar{1} \sqcap f = f$, para todo $f \in \mathbf{M}$. Además, $\bar{0}$ es el menor elemento (cota inferior) del orden parcial $\preceq$, ya que $\bar{0} \preceq f$, $\forall f \in \mathbf{M}$; y $\bar{1}$ es el mayor elemento (cota superior) del orden parcial $\sqsubseteq$, porque $f \sqsubseteq \bar{1}$, $\forall f \in \mathbf{M}$.

Para facilitar las operaciones en el álgebra $\mathbf{M}$, se presentan las siguientes operaciones auxiliares.

Definición 4. ([8, 16]) Para $f \in \mathbf{M}$, se definen $f^L, f^R \in \mathbf{M}$ como

$$f^L(x) = sup\{f(y) : y \leq x\}, \; f^R(x) = sup\{f(y) : y \geq x\}.$$

En este estudio nos centraremos en el conjunto de las funciones de $[0,1]^{[0,1]}$ normales y convexas.

Definición 5. ([8, 11, 16]) Una función $f \in \mathbf{M}$ es normal si $sup\{f(x) : x \in [0,1]\} = 1$, o equivalentemente, si $f^L \vee f^R = 1$.

Definición 6. ([8, 11, 16]) Una función $f \in \mathbf{M}$ es convexa, si para cualquier $x \leq y \leq z$, se tiene que $f(y) \geq f(x) \wedge f(z)$, o equivalentemente, si $f = f^L \wedge f^R$.

El espacio $\mathbf{L}$ de las funciones de $[0,1]^{[0,1]}$ normales y convexas, es un subálgebra de $\mathbf{M}$; y es un retículo acotado y completo, con una negación que satisface las leyes de Morgan, ver [8, 11, 16]. En $\mathbf{L}$, los órdenes parciales de $\mathbf{M}$ (ver definición 3) son equivalentes, es decir $\sqsubseteq \, \equiv \, \preceq$. Por otra parte, tenemos la siguiente caracterización, que nos ayudará a establecer nuevos resultados:

Teorema 1. ([8]) Sean $f, g \in \boldsymbol{L}$. $f \sqsubseteq g$ si y sólo si $g^L \leq f^L$ y $f^R \leq g^R$.

Si f es normal, evidentemente $f^L(x) = 1$, o $f^R(x) = 1$, para todo $x \in [0,1]$; además, $f^L(1) = 1$ y $f^R(0) = 1$, ver [8, 16]. Si f es convexa, se satisface $f(x) = f^L(x)$, o $f(x) = f^R(x)$, para todo $x \in [0,1]$, ver [8]. En virtud de lo anterior, se puede afirmar que si f es normal y convexa, entonces en cada $x \in [0,1]$, ocurren únicamente dos posibilidades:

$$f^L(x) = f(x) \leq 1, \; f^R(x) = 1$$

o

$$f^R(x) = f(x) \leq 1, \; f^L(x) = 1.$$

Definición 7. ([8]) Sea $h : [0,1] \to [0,1]$. Se define $h^* : [0,1] \to [0,2]$ por

$$h^*(x) = \begin{cases} 2 - h(x) & \text{si } h(x) = h^L(x) \\ h(x) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Esta definición 7 nos permite establecer una caracterización del orden parcial en L

Teorema 2. ([8]) Sean $f, g \in \mathbf{L}$. $f \sqsubseteq g \Leftrightarrow f^* \leq g^*$.

3. SOBRE LA AUTOCONTRADICCIÓN

Debido a que el análisis a realizar emplea negaciones fuertes, empezamos recordando este concepto en los FSs, así como algunas de sus propiedades.

Definición 8. ([7, 15]) Una función decreciente $n : [0,1] \to [0,1]$ tal que $n(0) = 1, n(1) = 0$, se dice que es una negación. Si además satisface que $n(n(x)) = x$, para todo $x \in [0,1]$, se le dice negación fuerte o involución.

En [15] se demuestra que n es una negación fuerte en $[0,1]$, si y sólo si existe un automorfismo de orden $g : [0,1] \to [0,1]$, tal que $n(x) = g^{-1}(1 - g(x))$, para todo $x \in [0,1]$. Toda negación fuerte n es estrictamente decreciente, continua y biyectiva. Por otra parte, cada negación fuerte n tiene un único punto fijo $p \in (0,1)$, tal que $n(p) = p$, donde $p = g^{-1}(1/2)$.

Extendiendo el concepto de negación al álgebra **M**, tenemos la siguiente definición de negación de tipo 2:

Definición 9. Una función decreciente $N : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$, tal que $N(\bar{0}) = \bar{1}, N(\bar{1}) = \bar{0}$, es una negación. Si además satisface que $N(N(f)) = f$, para todo $f \in \mathbf{M}$, se le dice negación fuerte o involución.

La función N de la definición 2 satisface algunos axiomas para definir negación fuerte. Por ejemplo, $N(\bar{0}) = \bar{1}, N(\bar{1}) = \bar{0}$ y $N(N(f)) = f$, para todo $f \in \mathbf{M}$, ver [16]; sin embargo, no es decreciente en cada orden parcial, ya que en [16] se demuestra que $f \sqsubseteq g$ si y sólo si $\neg g \preceq \neg f$, o equivalentemente, $f \preceq g$ si y sólo si $\neg g \sqsubseteq \neg f$, para todo $f, g \in \mathbf{M}$. Sin embargo, si nos limitamos al subálgebra **L**, dicha función N asociada a cualquier negación fuerte de tipo 1, cumple con todos los axiomas de negación fuerte; por este motivo decidimos estudiar, por el momento, la contradicción en **L**, y no en todo **M**.

En [16] se presenta la siguiente propiedad de la negación de tipo 2, para todo $f \in \mathbf{M}$

$$(\neg f)^L = \neg(f^R),\ (\neg f)^R = \neg(f^L),$$

y como $(N(f))(x) = f(n(x))$, entonces, $\forall x \in [0,1]$,

$$(N(f))^L(x) = f^R(n(x)),\ (N(f))^R(x) = f^L(n(x)). \qquad (1)$$

Cabe destacar que todo el estudio de ahora en adelante se hará exclusivamente considerando negaciones fuertes de tipo 1 y de tipo 2, las cuales llamaremos negaciones, simplemente.

En cuanto a los conceptos de n-autocontradicción y autocontradicción en los FSs, tenemos:

Definición 10. [14] Sea $\mu \in [0,1]^X$ y sea $n : [0,1] \to [0,1]$ una negación. Diremos que μ es *n-autocontradictorio* si y sólo si $\mu(x) \leq n(\mu(x))$, para todo $x \in X$. Decimos que μ es *autocontradictorio*, si es n-autocontradictorio respecto a alguna negación n.

En el álgebra **L**, la n-autocontradicción y autocontradicción las definimos de la siguiente manera:

Definición 11. Sea $f \in \mathbf{L}$ y sea $N : \mathbf{L} \to \mathbf{L}$ una negación. Diremos que f es *N-autocontradictorio* si y sólo si $f(x) \sqsubseteq N(f(x))$, para todo $x \in X$. Decimos que f es *autocontradictorio*, si es N-autocontradictorio respecto a alguna negación N.

En general, un conjunto borroso de tipo 2 (ver definición 1), B, cuyos grados de pertenencias f_x están en **L**, es N-autocontradictorio si todos sus grados f_x lo son. Igualmente, B es autocontradictorio si todos sus grados f_x lo son.

4. CRITERIOS DE AUTOCONTRADICCIÓN EN L

En esta sección se presentan los principales resultados, correspondientes a los criterios para verificar las propiedades de N-autocontradicción y de autocontradicción en **L**. En toda esta sección 4, entre otros aspectos, tendremos presente que toda negación fuerte de tipo 1, n, es estrictamente decreciente, continua y biyectiva.

Proposición 1. Sea $f \in \mathbf{L}$, y sea $N : \mathbf{L} \to \mathbf{L}$ una negación. Entonces f es N-autocontradictorio si y sólo si

$$f^* \leq (N(f))^*.$$

Demostración. Directa, aplicando la definición 11 y el teorema 2. □

Observación 1. Basta que $(N(f))^*(x) > f^*(x)$ en algún $x \in [0,1]$, para que f no sea N-autocontradictorio.

Ejemplo 1.

1) Sea $f \in \mathbf{L}$, $f(x) = 1 - x$, la cual es estrictamente decreciente, por tanto $f^*(x) = f(x) = 1 - x$ (ver definición 7). Sea la negación $N : \mathbf{L} \to \mathbf{L}$, $(N(f))(x) = f(n(x)) = f(1 - x) = x$, la cual es estrictamente creciente, por tanto $(N(f))^*(x) = 2 - (N(f))(x) = 2 - x$ (ver definición 7). Evidentemente, $f^*(x) \leq (N(f))^*(x)$, para todo $x \in [0,1]$, en consecuencia, f es N-autocontradictorio.

2) Sea $f \in \mathbf{L}$, $f(x) = x^2$, la cual es estrictamente creciente, por ende $f^*(x) = 2 - f(x) = 2 - x^2$. Sea la negación $N : \mathbf{L} \to \mathbf{L}$, $(N(f))(x) = f(n(x)) = f(\sqrt{1 - x^2}) = 1 - x^2$, la cual es estrictamente decreciente, por tanto $(N(f))^*(x) = (N(f))(x) = 1 - x^2$. Obviamente, $f^*(x) > (N(f))^*(x)$, para todo $x \in [0,1]$, por consiguiente, f no es N-autocontradictorio.

Proposición 2. Sean $f \in \mathbf{L}$, y sea $N : \mathbf{L} \to \mathbf{L}$ una negación, asociada a una negación de tipo 1, n. Entonces f es N-autocontradictorio si y sólo si

$$(N(f))^L \leq f^L,\ f^R \leq (N(f))^R.$$

Equivalentemente, si y sólo si

$$f^R(n(x)) \leq f^L(x),\ f^R(x) \leq f^L(n(x)), \forall x \in [0,1]$$

.

Demostración. f es N-autocontradictorio si y sólo si

$$f \sqsubseteq N(f).$$

Es decir (ver teorema 1), si y sólo si

$$(N(f))^L \leq f^L,\ f^R \leq (N(f))^R.$$

Tomando en cuenta (1), esto equivale a

$$f^R(n(x)) \leq f^L(x),\ f^R(x) \leq f^L(n(x)), \forall x \in [0,1].$$

□

Corolario 1. f es N-autocontradictorio si y sólo si

$$f^R(x) \leq f^L(n(x)), \forall x \in [0,1].$$

Equivalentemente, si y sólo si

$$f^R(n(x)) \leq f^L(x), \forall x \in [0,1].$$

Observación 2. Basta que $(N(f))^L(x) > f^L(x)$, o $f^R(x) > (N(f))^R(x)$ en algún $x \in [0,1]$, para que f no sea N-autocontradictorio. En otros términos, es suficiente que $f^R(x) > f^L(n(x))$ en algún $x \in [0,1]$, para que f no sea N-autocontradictorio. O equivalentemente, basta que $f^R(n(x)) > f^L(x)$ en algún $x \in [0,1]$, para que f no sea N-autocontradictorio.

Ejemplo 2. Sean los elementos $\bar{0}, \bar{1} \in \mathbf{L}$, en donde $N(\bar{0}) = \bar{1}$ y $N(\bar{1}) = \bar{0}$, para cualquier $N : \mathbf{L} \to \mathbf{L}$.

1) $\bar{0}$ es N-autocontradictorio respecto a cualquier negación N, ya que $(N(\bar{0}))^L(x) = \bar{1}^L(x) = \bar{1}(x) \leq \bar{0}^L(x) = 1$, y $\bar{0}^R(x) = \bar{0}(x) \leq (N(\bar{0}))^R(x) = \bar{1}^R(x) = 1$, para todo $x \in [0,1]$. De acuerdo a la definición 11, también podemos decir que $\bar{0}$ es autocontradictorio.

2) $\bar{1}$ no es N-autocontradictorio respecto a ninguna N, ya que, por ejemplo, en $x = 0$, $(N(\bar{1}))^L(0) = \bar{0}^L(0) = 1 > \bar{1}^L(0) = 0$. Según la definición 11, $\bar{1}$ no es autocontradictorio.

Corolario 2. Sea $f \in \mathbf{L}$. Si $f(0) < f(1)$ entonces f no es N-autocontradictorio respecto a ninguna negación $N : \mathbf{L} \to \mathbf{L}$, es decir, f no es autocontradictorio.

Demostración. Sea $f(0) < f(1)$, y sabiendo que

$$f^L(0) = f(0),\ f^R(0) = 1,\ f^L(1) = 1,\ f^R(1) = f(1);$$

$$\Rightarrow \text{ en } x = 1,\ f^L(0) = f^L(n(1)) = f(0) < f(1) = f^R(1);$$

para toda negación de tipo 1, n. Por tanto, decimos que f no es autocontradictorio. □

Observación 3.

1) Si $f \in \mathbf{L}$ es monótona creciente, excluyendo la función constante $f = 1$, entonces sucede que $f(0) < f(1) = 1$, por tanto, según corolario 2, f no es autocontradictorio.

2) Si f no es autocontradictorio, generalmente no implica que $f(0) < f(1)$. Por ejemplo, la función presentada en la figura 1(a) no es autocontradictoria, sin embargo $f(0) > f(1)$.

3) Si $f(0) \geq f(1)$, generalmente no implica que f es autocontradictoria. Por ejemplo, en la función de la figura 1(a), $f(0) > f(1)$, sin embargo no es autocontradictoria.

Una de las propiedades a emplear en el siguiente teorema, es: En toda $f \in \mathbf{L}$ existe un conjunto no vacío $W \subseteq [0,1]$, tal que, para todo $w \in W$

$$\lim_{x \to w^+} f(x) = 1, \text{ o } \lim_{x \to w^-} f(x) = 1, \text{ o } f(w) = 1.$$

Además, cualquier x entre dos elementos de W, presenta $f(x) = 1$, por tanto también está en W. Esto es así por que si $y < u < z$, para todo $y, z \in W$, entonces $f^L(u) = 1$ y $f^R(u) = 1$. Y debido a que f es convexa, resulta $f(u) = f^L(u) \wedge f^R(u) = 1$. En este caso, decimos que f es normalizado, ya que $f(x) = 1$ en algún $x \in [0,1]$.

El siguiente teorema proporciona una caracterización de los conjuntos N-contradictorios.

Teorema 3. Sean $f \in \mathbf{L}$, $N : \mathbf{L} \to \mathbf{L}$ una negación, asociada a una negación de tipo 1, n, con punto fijo p. Sea $\alpha = inf\{w : w \in W\}$. Entonces f es N-autocontradictorio si y sólo si

$$p \geq \alpha \text{ y } \forall x \leq \alpha,\ es\ f(n(x)) \leq f(x). \tag{2}$$

Demostración. Para la demostración utilizaremos el hecho de que f es N-autocontradictorio si y sólo si

$$f^R(n(x)) \leq f^L(x), \forall x \in [0,1].$$

"⇒" Supongamos que (2) no es cierto y veamos que entonces f no es N-autocontradictorio.

Si (2) no es cierto, se pueden dar dos casos:

I) $p < \alpha$, entonces $\exists t$, tal que $p < t < \alpha$, y $n(t) < p < \alpha$. En consecuencia,

$$f^R(n(t)) = 1,\ f^L(t) = f(t) < 1.$$

Luego,

$$f^R(n(t)) > f^L(t),$$

y no es N-autocontradictorio.

II) $p \geq \alpha$, y $\exists x \leq \alpha$ con $f(n(x)) > f(x)$. En este caso, $x \neq n(x)$. Si $x < \alpha$, $n(x) > \alpha$, entonces tenemos

$$f^R(n(x)) = f(n(x)) > f(x) = f^L(x),$$

y no es N-autocontradictorio.

Sea $x = \alpha$, $n(x) > \alpha$. Para $x = \alpha$, puede ocurrir que:

$$a)\ f^L(\alpha) = f(\alpha) < 1,\ f^R(\alpha) = 1;$$

o

$$b)\ f^R(\alpha) = f(\alpha) \le 1,\ f^L(\alpha) = 1.$$

Como $f(n(\alpha)) > f(\alpha) < 1$, y $f^R(\alpha) = sup\{f(x) : x \ge \alpha\} \ge f(n(\alpha)) > f(\alpha)$, entonces solamente puede ocurrir el apartado a); luego,

$$f^R(n(\alpha)) = f(n(\alpha)) > f(\alpha) = f^L(\alpha),$$

y no es N-autocontradictorio.

"$\Leftarrow$" Comprobemos que para todo $x \in [0,1]$, $f^R(n(x)) \le f^L(x)$. En este sentido, se pueden presentar cuatro posibilidades:

i) $x < \alpha$, entonces $n(x) > n(\alpha) \ge \alpha$, lo cual implica que

$$f^R(x) = 1 = f^L(n(x)),$$

$$f^R(n(x)) = f(n(x)) \le f(x) = f^L(x).$$

ii) $x = \alpha$, por tanto $n(x) = n(\alpha) \ge \alpha$. Si $x = \alpha = n(x) = p \in (0,1)$, entonces no puede darse el apartado a), ya que aquí $\exists t$, $t < \alpha$ y $n(t) > \alpha$, tal que

$$f(t) \le f^L(\alpha) = f(\alpha) < f(n(t)) \le f^R(\alpha) = 1,$$

lo cual contradice la hipotesis inicial. En cuanto al apartado b), tenemos

$$f^R(\alpha) = f^R(n(\alpha)) = f(\alpha) \le f^L(\alpha) = f^L(n(\alpha)) = 1.$$

Por otra parte, si $x = \alpha$ y $n(\alpha) > \alpha$, y se da el apartado a), entonces

$$f^R(n(\alpha)) = f(n(\alpha)) \le f(\alpha) = f^L(\alpha),$$

$$f^L(n(\alpha)) = 1 = f^R(\alpha).$$

Y si se cumple el apartado b), tenemos

$$f^R(n(\alpha)) = f(n(\alpha)) \le 1 = f^L(\alpha),$$

$$f^R(\alpha) \le 1 = f^L(n(\alpha)).$$

iii) $\alpha < x < n(\alpha)$, entonces $\alpha < n(x) < n(\alpha)$. Aquí se cumple que

$$f^R(x) = f(x) \le 1 = f^L(n(x)),$$

$$f^R(n(x)) = f(n(x)) \le 1 = f^L(x).$$

iv) $x \ge n(\alpha) \ge \alpha$, en consecuencia $n(x) \le \alpha$. Haciendo el cambio de variable $u = n(x)$, con $n(u) = n(n(x)) = x$, y $f(n(u)) = f(n(n(x))) = f(x) \le f(n(x)) = f(u)$, entonces, este caso iv) equivale a la unión de los casos i) y ii).

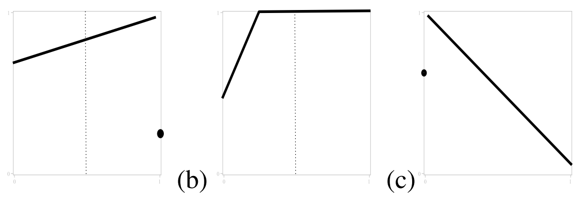
Por tanto, $f^R(n(x)) \le f^L(x)$, $\forall x \in [0,1]$; luego, f es N-autocontradictorio.

$\square$

Corolario 3. f no es N-autocontradictorio si y sólo si

$$p < \alpha,\ \text{o}\ \exists x \le \alpha \text{ tal que } f(n(x)) > f(x).$$

Ejemplo 3. Sea la negación $N : \mathbf{L} \to \mathbf{L}$, $(N(f))(x) = f(1-x)$, $\forall x \in [0,1]$, asociada a la negación $n(x) = 1-x$, con punto fijo $p = 0.5$. Y sean tres funciones diferentes de $[0,1]^{[0,1]}$ normales y convexas, mostradas en la siguiente figura.



(a) (b) (c)

Figura 1: Ejemplos de funciones en **L**.

1) La función dibujada en la figura 1(a), no es N-autocontradictoria respecto a la negación dada, ya que 0.5 $= p < \alpha = 1$. Además, esa función no es autocontradictoria porque $p < \alpha = 1, \forall p \in (0,1)$.

2) La función en la figura 1(b), no es N-autocontradictoria respecto a la negación dada, porque, por ejemplo, en $x = 0 < \alpha = 0.25$; $f(n(0)) = f(1) > f(0)$. Nótese que lo mismo sucede para cualquier negación $N : \mathbf{L} \to \mathbf{L}$, por lo que no es autocontradictoria.

3) La función presentada en la figura 1(c) es N-autocontradictoria respecto a cualquier negación $N : \mathbf{L} \to \mathbf{L}$, ya que $p > \alpha = 0$ y $\forall x \le \alpha$, es $f(n(x)) < f(x)$.

Observación 4.

1) Si $f \in \mathbf{L}$ es monótona decreciente, incluyendo la función constante $f = 1$, entonces f es N-autocontradictorio respecto a cualquier negación N, y por tanto, f es autocontradictorio. Esto es así porque en este caso, $f(0) = 1$, entonces $x = 0 = \alpha$, con $f(n(0)) \le 1 = f(0)$. Es decir, para toda negación $N : \mathbf{L} \to \mathbf{L}$, se cumple que $p \ge \alpha$ y $\forall x \le \alpha$, es $f(n(x)) \le f(x)$.

2) Que f sea N-autocontradictorio respecto a cualquier negación N, generalmente no implica que f sea monótona decreciente. Por ejemplo, la función en la gráfica 1(c) es N-autocontradictoria respecto a cualquier negación N, no obstante, la función no es monótona decreciente.

5. CONCLUSIONES

En este artículo se ha extendido los conceptos de N-autocontradicción y autocontradicción establecidos previamente en los FSs y los AIFSs, al marco de los conjuntos tipo 2 con grados de pertenencia en el conjunto de funciones **L**. A partir de dichos conceptos, han presentado algunos criterios que permiten verificar las propiedades de

N-autocontradicción y autocontradicción de un elemento en **L**, llegando a una caracterización. Desde el punto de vista práctico, tales resultados permiten analizar las posibles consecuencias contradictorias en los procesos de inferencia borrosa, en los que aparecen predicados modelizados mediante conjuntos tipo 2. Otros aspectos que merecen ser abordados en futuras investigaciones podrían ser: Estudiar la contradicción entre conjuntos en **L** y establecer los criterios para verificar dicha propiedad; finalmente, proporcionar métodos para medir la autocontradicción, *N*-autocontradicción, y la contradicción entre conjuntos en **L**.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la CICYT dentro del proyecto TIN2008-06890-C02-01, por la UPM-CAM, por el FONACIT, y por el Decanato de Investigación de la UNET. Los autores también agradecen a los árbitros por las valiosas sugerencias, las cuales mejoran la calidad del presente artículo.

Referencias

[1] E. Castiñeira, S. Cubillo, S. Bellido: Contradicción entre dos conjuntos. En: *Actas ESTYLF'02*, León (España), pp. 379–383, 2002.

[2] E. Castiñeira, S. Cubillo: Measures of self-contradiction in Atanassov's fuzzy sets: An Axiomatic Model. *International Journal of Intelligent Systems* 24, pp. 863–888, 2009.

[3] E. Castiñeira, S. Cubillo, C. Torres: Searching degrees of self-contradiction in Atanassov's fuzzy sets. *Mathware and Soft-Computing* 13(3), pp. 136–156, 2006.

[4] E. Castiñeira, C. Torres, S. Cubillo: Un modelo para medir la N-contradicción de conjuntos borrosos. En: *Actas ESTYLF 2008*, Mieres (España), pp. 113–119, 2008.

[5] S. Cubillo, E. Castiñeira: Contradiction in intuitionistic fuzzy sets. En: *Proceedings IPMU*, Perugia (Italia), pp. 2180–2186, 2004.

[6] S. Cubillo, C. Torres, E. Castiñeira: Self-contradiction and contradiction between two intuitionistic fuzzy sets. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* 16(3), pp. 283–299, 2008.

[7] F. Esteva, X. Domingo: Sobre funciones de negación en [0,1]. *Stochastica* 4(2), pp. 141–165, 1980.

[8] J. Harding, C. Walker, E. Walker: Lattices of convex normal functions. *Fuzzy Sets and Systems* 159, pp. 1061–1071, 2008.

[9] J. Mendel, R. Jhon: Type-2 fuzzy sets made Simple. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 10(2), pp. 117–127, 2002.

[10] M. Mizumoto, K. Tanaka: Fuzzy sets of type-2 under algebraic product and algebraic sum. *System* 5, pp. 277–290, 1981

[11] M. Mizumoto, K. Tanaka: Some properties of fuzzy sets of type-2. *Inform. Control* 31, pp. 312–340, 1976.

[12] C. Torres-Blanc, S. Cubillo, E. Castiñeira: A axiomatic model for measuring contradiction and N-contradiction between two AIFSs. *Information Sciences* 180, pp. 834–845, 2010.

[13] E. Trillas, C. Alsina, J. Jacas: On contradiction in fuzzy logic. *Soft Computing* 3(4), pp. 197–199, 1999.

[14] E. Trillas, S. Cubillo: On non-contradictory input/output couples in Zadeh's CRI. En: *Proceedings NAFIPS*, New York (USA), pp.28–32, 1999.

[15] E. Trillas: Sobre funciones de negación en la teoría de conjuntos difusos. *Stochastica* 3(1), pp. 47–60, 1979.

[16] C. Walker, E. Walker: The algebra of fuzzy truth values. *Fuzzy Sets and Systems* 149, pp. 309–347, 2005.

[17] L. Zadeh: The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. *Information Sciences* 8, pp. 199–249, 1975.