

COLUMNAS LIQUIDAS EN
CONDICIONES DE INGRAVIDEZ

INFORME FINAL 1981

VOLUMEN 1

Lamf-ETSIA, Laboratorio de Aerodinámica,
E.T.S.I.Aeronáuticos, Ciudad Universitaria,
Madrid-3

EXPEDIENTE CONIE 812/81

Madrid, Diciembre 1981

Ref.: Lamf 8112

COLUMNAS LIQUIDAS EN
CONDICIONES DE INGRAVIDEZ

INFORME FINAL 1981

Lamf-ETSIA, Laboratorio de Aerodinámica,
E.T.S.I.Aeronáuticos, Ciudad Universitaria,
Madrid-3

EXPEDIENTE CONIE 812/81

Madrid, Diciembre 1981

Ref.: Lamf 8112

EXPEDIENTE nº 812/81

COLUMNAS LIQUIDAS EN CONDICIONES DE INGRAVIDEZ - 1981

Convenio de Investigación entre la Comisión Nacional de Investigación del Espacio (CONIE) y la Universidad Politécnica de Madrid (UPM), desarrollado por el Laboratorio de Aerodinámica y Mecánica de Fluidos (LAMP) de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos (ETSIA) durante el año 1981.

Responsable del trabajo ... I. Da-Riva de la Cavada
Colaboradores I. Martínez Herranz
J. Meseguer Ruiz
A. Sanz Andrés
M.A. Mamolar Elvira
D. Rivas Rivas



MEMORIA

La Comisión Nacional de Investigación del Espacio viene subvencionando desde 1975 las investigaciones teóricas y experimentales sobre el comportamiento de puentes líquidos en condiciones de gravedad reducida, que han dado lugar a propuestas de experimentación en el programa Spacelab y en el programa de cohetes Texas.

Durante este año de 1981 se ha desarrollado una gran actividad tanto teórica como de simulación numérica y experimental, que ha dado lugar a diversos comunicados a congresos internacionales, publicaciones especializadas, etc.

En primer lugar hay que destacar el gran esfuerzo realizado para la organización de la Reunión de Usuarios del Módulo de Física de Fluidos (FPM) de la Agencia Espacial Europea (ESA), celebrada los días 22, 23 y 24 de Abril en la E.T.S.I. Aeronáuticos bajo el patrocinio de la Universidad Politécnica de Madrid con la colaboración de la Comisión Nacional de Investigación del Espacio. A esta reunión asistieron los investigadores principales de los seis grupos europeos involucrados en el primer vuelo del Spacelab, así como representantes de la ESA y de las compañías encargadas de la integración de los equipos de vuelo. En esta reunión se discutieron los trabajos preparatorios en tierra de los diversos grupos, se reorganizó el programa de verificación de actuaciones del FPM y el entrenamiento de los astronautas, cuyo representante elogió el trabajo del equipo español en este sentido.

En Julio tuvo lugar en Udine (Italia) un Curso de Verano sobre Mecánica de Fluidos en Microgravedad, donde, durante una semana se dieron a conocer parte de los trabajos teóricos realiza

dos este año a jóvenes científicos europeos.

En Septiembre se asistió al XXXII Congreso de la Federación Astronáutica Internacional, celebrado en Roma, presentando los artículos:

Da-Riva, I. & Alvarez, E., "A Regular Perturbation Approach to Surface Tension Driven Flows".

Martínez, I. & Rivas, D., "Plateau Tank Facility for Simulation of Spacelab Experiments".

Este mismo mes se presentó la Tesis Doctoral "Estructura interna de la zona flotante", que mereció la calificación de Sobresaliente Cum Laudae, en la cual se recogen diversos estudios analíticos y numéricos de la dinámica de rotura de las zonas cilíndricas en atmósfera gaseosa.

En Octubre participamos en los ensayos de entrenamiento de los astronautas del Spacelab en ESTEC (Holanda), continuando las jornadas del año anterior. Están previstas dos sesiones de entrenamiento más, antes del vuelo del Spacelab en Septiembre de 1983, la última de las cuales podría tener lugar en España aprovechando las instalaciones experimentales existentes en este Laboratorio.

Con respecto al desarrollo de los estudios teóricos hay que señalar una importante contribución en el análisis de los efectos térmicos en la interfase que parecen ser de mayor trascendencia que los efectos inerciales de puesta en rotación. Con ello se ha conseguido un acercamiento a los demás grupos europeos interesados en la física de fluidos en microgravedad y cuyos problemas fluidotérmicos parecían estar desligados de los problemas hidrodinámicos en que estamos trabajando. La ampliación de las fronte-

ras de esta investigación es provechosa para comprender mejor y
aunar la teoría desarrollada.

I N D I C E

VOLUMEN 1

	Página
1. ESTUDIO ANALITICO Y NUMERICO DE LA ROTURA EN ZONAS LARGAS	1
Lista de símbolos	2
1.1. INTRODUCCION	6
1.1.1. Problemas afines al de la zona flotante ...	11
1.2. ECUACIONES GENERALES DEL MOVIMIENTO ESTRICTAMENTE AXILSIMETRICO DE LA ZONA FLOTANTE	14
1.3. MODELO UNIDIMENSIONAL DE LEE	19
1.3.1. Resolución del problema linealizado	22
1.4. MODELO UNIDIMENSIONAL DE COSSERAT	39
1.4.1. Resolución del problema linealizado no viscoso	41
1.4.2. Efectos de la viscosidad en la evolución de una zona flotante	45
1.5. ANALISIS NUMERICO DE LA ROTURA AXILSIMETRICA DE UNA ZONA FLOTANTE (MODELO DE LEE)	58
1.5.1. Ecuaciones generales	58
1.5.2. Esquema de cálculo	59
1.5.3. Condiciones de contorno numéricas	63
1.5.4. Descripción del programa	66
1.5.5. Resultados	69
1.6. CONCLUSIONES	87
ANEXO: CALCULO DE LAS DERIVADAS TEMPORALES UTILIZADAS EN EL METODO DE LAX-WENDROFF	90
Referencias	94

INDICE (Continuación)

VOLUMEN 2

	Página
2. ESTUDIO EXPERIMENTAL DE LA ROTURA DE ZONAS FLOTANTES EN BAÑO DE PLATEAU	1
2.1. INTRODUCCION	2
2.2. CONSIDERACIONES TEORICAS	5
2.2.1. Efecto de la gravedad residual sobre la forma de una zona cilíndrica	6
2.3. EQUIPO EXPERIMENTAL	10
2.3.1. Tanque	10
2.3.2. Discos	13
2.3.3. Sistema de inyección	15
2.3.4. Visualización	17
2.4. PREPARACION DE LOS LIQUIDOS	18
2.5. DESARROLLO DE LOS ENSAYOS	23
2.5.1. Preparación	24
2.5.2. Operación	26
2.5.3. Limpieza	39
2.6. RESULTADOS	40
2.7. CONCLUSIONES	44
ANEXO I: METODOS PARA LA MEDIDA DE LOS VOLUMENES DE LAS GOTAS PRODUCIDAS EN LA ROTURA	48
ANEXO II: PLATEAU TANK FACILITY FOR SIMULATION OF SPACELAB EXPERIMENTS	55
ANEXO III: A REGULAR PERTURBATION APPROACH TO SURFACE TENSION DRIVEN FLOWS	68

1. ESTUDIO ANALITICO Y NUMERICO DE LA ROTURA
EN ZONAS LARGAS

LISTA DE SIMBOLOS

A_1, A_2, \dots, D_2 , Constantes reales.

A, B, C, D , Constantes complejas.

D , Determinante de los coeficientes del sistema de ecuaciones homogéneo que resulta al imponer las condiciones de contorno.

$D_{aw}, D_{bw}, D_{cw}, D_{dw}$, Constantes reales que definen las soluciones oscilatorias en el problema lineal.

D_{ij} , Término situado en la fila i y la columna j de la matriz de los coeficientes.

D_γ , Constante real que define las soluciones de rotura en el problema lineal.

E , Parámetro de viscosidad adimensional: $E = v \sqrt{\frac{\rho}{\sigma R}}$

F , Radio de la superficie libre [m].

F , Radio adimensional de la superficie libre:
 $F = F/R$.

F_m , Valor del radio adimensional en el cuello de la zona.

I_0, I_1 , Funciones hiperbólicas de Bessel, de orden cero y de primer orden.

L , Longitud de la zona [m].

M_m , Número de estaciones, según z, en que se divide la zona para la integración numérica de las ecuaciones generales del modelo de Lee.

P , Presión [Pa].

P_0 , Presión de referencia [Pa].

P , Presión reducida adimensional: $P = \frac{P - P_0}{\rho} \frac{\rho R}{\sigma}$

- Q , Variable adimensional utilizada en la integración numérica de las ecuaciones generales del modelo de Lee. Definida como $Q=F^2W$.
- Q_M , Valor de la variable Q en el punto M .
- R , Radio de los discos [m].
- $R()$, Parte real de una función compleja.
- S , Variable adimensional utilizada en la integración numérica de las ecuaciones generales del modelo de Lee. Definida como: $S=F^2$.
- S_M , Valor de la variable S en el punto M .
- T , Tensor de esfuerzos [Pa].
- T , Período de oscilación, adimensionalizado con $\sqrt{\rho R^3/\sigma}$.
- U , Componente radial de la velocidad [$m.s^{-1}$].
- U , Componente radial de la velocidad adimensional: $U=U\sqrt{\rho R/\sigma}$.
- U^* , Término dependiente de la variable z en la expresión de la velocidad radial adimensional en el modelo de Cosserat.
- \vec{V} , Campo de velocidades en el interior de la zona [$m.s^{-1}$].
- V_p , Volumen, en tanto por ciento del volumen inicial, de una de las dos gotas en que se divide la zona.
- W , Componente axial de la velocidad [$m.s^{-1}$].
- W , Componente axial de la velocidad adimensional: $W=W\sqrt{\rho R/\sigma}$.
- ω , Término complejo dependiente de la variable espacial z en la solución del problema lineal.
- Z_m , Valor del máximo del término dependiente de la variable z en las soluciones del problema lineal.
- \vec{e}_r , Versor según una dirección radial.
- \vec{e}_z , Versor según la dirección del eje de simetría de la zona.

- f, Primer término en el desarrollo asintótico de la forma de la interfase alrededor de la posición cilíndrica.
- \vec{n} , Normal exterior.
- p, Presión reducida de perturbación, adimensionalizada con $\sigma/\rho R$.
- r, Distancia radial a partir del eje de simetría de la zona [m].
- r, Coordenada radial adimensional: $r = \frac{r}{R}$.
- t, Tiempo [s].
- t, Tiempo adimensional: $t = t \sqrt{\frac{\sigma}{\rho R^3}}$.
- t_b , Tiempo de rotura, adimensionalizado con $\sqrt{\rho R^3/\sigma}$.
- t_{bl} , Tiempo de rotura obtenido a partir de un modelo linealizado, adimensionalizado con $\sqrt{\rho R^3/\sigma}$.
- w, Velocidad axial de perturbación, adimensionalizada con $\sqrt{\sigma/\rho R}$.
- z, Coordenada axial [m].
- z, Coordenada axial adimensional: $z = \frac{z}{R}$.
- z_m , Posición del cuello de la zona, en tanto por ciento de la longitud de la misma.
- Δt , Intervalo de tiempo entre dos iteraciones consecutivas en la integración numérica de las ecuaciones generales del modelo de Lee.
- Δz , Intervalo de discretización según z, $\Delta z = \Lambda/Mm$.
- Λ , Esbeltez de la zona, $\Lambda = \frac{L}{2R}$.
- α , Parte real de las raíces, θ , del polinomio característico de una ecuación diferencial ordinaria.
- β , Parte imaginaria de las raíces, θ , del polinomio característico de una ecuación diferencial ordinaria.

- γ , Amplificación, amortiguamiento.
- δ , Parámetro que define la forma de la perturbación simétrica de la superficie libre. $\delta=0.4934$ radianes.
- ε , Parámetro pequeño que mide, en general, la máxima deformación inicial de la superficie libre.
- θ , Raíz compleja del polinomio característico de una ecuación diferencial ordinaria, $\theta=\alpha+i\beta$.
- ν , Viscosidad cinemática del líquido [$m^2.s$].
- ρ , Densidad del líquido [$kg.m^{-3}$].
- σ , Tensión superficial de la interfase líquido-gas [$N.m^{-1}$].
- τ , Exponente complejo del término dependiente del tiempo en la solución del problema lineal, $\tau=\gamma+i\omega$.
- ω , Pulsación.

1. ESTUDIO ANALITICO Y NUMERICO DE LA ROTURA EN ZONAS LARGAS

1.1. INTRODUCCION

El problema fundamental tratado en estas páginas es el de la estructura interna de la zona flotante, determinándose el campo de velocidades en el interior de una columna líquida anclada a dos discos coaxiales y paralelos entre sí, Fig. 1, en ausencia de fuerzas gravitatorias y sometida a cierto tipo de perturbaciones axilsimétricas. Se estudia además el efecto no lineal más drástico que una perturbación puede provocar en un puente líquido: su rotura. En este sentido, se han integrado numericamente las ecuaciones de un modelo unidimensional no lineal de la zona flotante, obteniéndose, además de la línea de separación de las regiones estable e inestable, los períodos de oscilación y los tiempos de rotura respectivamente.

Para realizar este análisis se han introducido ciertas hipótesis generales de uso común en la literatura y otras particulares, más restrictivas, sobre la naturaleza del campo de velocidades en el interior de la zona, como único camino para abordar un problema que, incluso en el caso linealizado tridimensional, presenta grandes dificultades. Con todo, como se verá posteriormente, estas hipótesis introducidas no restan generalidad a los resultados obtenidos.

La importancia de la zonas líquidas se pone de manifiesto cuando se considera el uso cada vez más extenso que de las mismas se está haciendo en la industria. En efecto, ésta y otras técnicas derivadas se utilizan habitualmente en los procesos de producción de semiconductores, [1], de materiales ultrapurros, [2], o de muy alto punto de fusión [3], así como en la in-

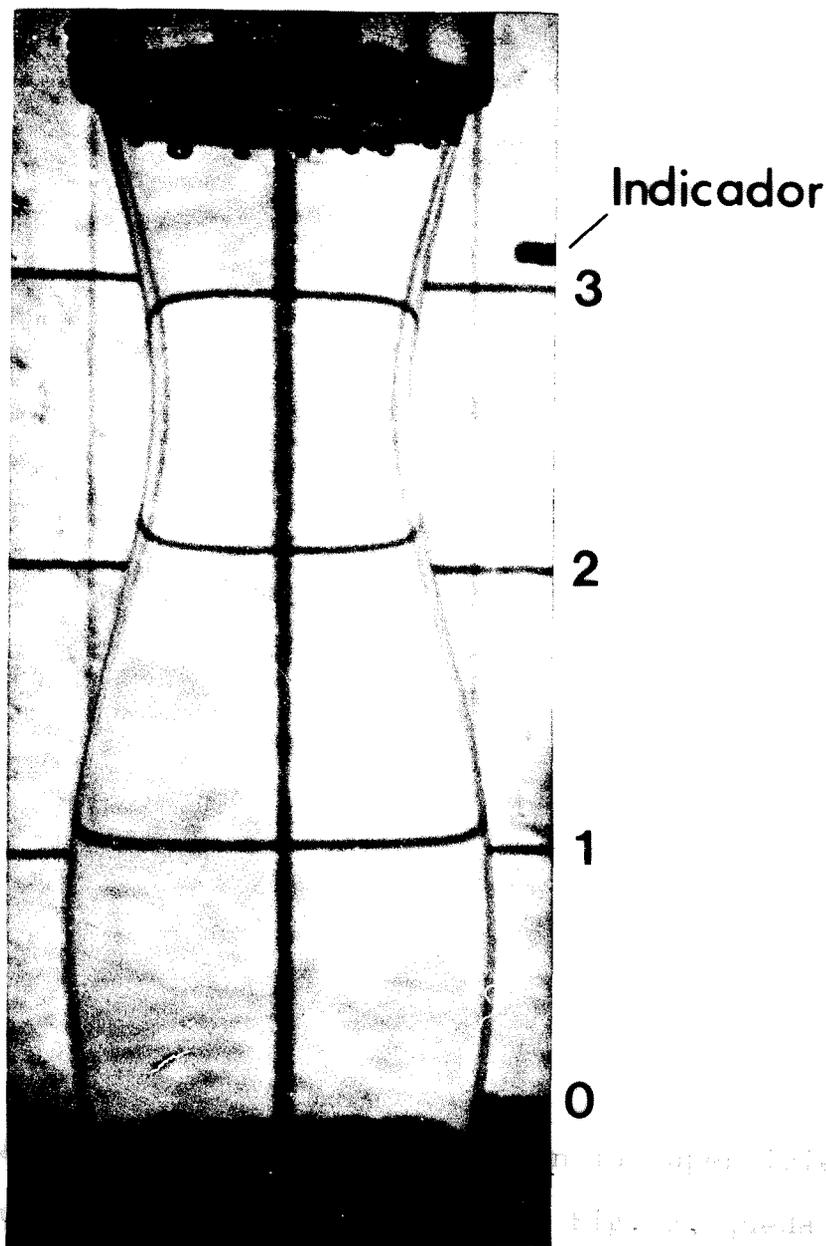


Fig. 1. Zona flotante axilsimétrica de esbeltez 3.1. La fotografía ha sido realizada en el Plateau Tank Facility (PTF) del Laboratorio de Aerodinámica, utilizando Dimetil Silicona (DMS 20) en un baño de alcohol y agua. Para realizar la fotografía se colocó en la cara posterior del tanque una máscara con una cuadrícula de lado igual al diámetro de los discos. La marca en el lado derecho de la imagen corresponde al indicador de desplazamiento del disco superior; la zona parece más esbelta debido a la posición de la cámara.

mente limitada por las fuerzas gravitatorias, de forma que difícilmente se pueden realizar puentes líquidos con una longitud superior a unos pocos milímetros. En la Fig. 1 se muestra un ejemplo de un puente líquido, que es esencialmente limitado por las fuerzas gravitatorias, de forma que difícilmente se pueden realizar puentes líquidos con una longitud superior a unos pocos milímetros. En la Fig. 1 se muestra un ejemplo de un puente líquido, que es esencialmente limitado por las fuerzas gravitatorias, de forma que difícilmente se pueden realizar puentes líquidos con una longitud superior a unos pocos milímetros.

Fig. 1. Zona flotante axilsimétrica de esbeltez 3.1. La fotografía ha sido realizada en el Plateau Tank Facility (PTF) del Laboratorio de Aerodinámica, utilizando Dimetil Silicona (DMS 20) en un baño de alcohol y agua. Para realizar la fotografía se colocó en la cara posterior del tanque una máscara con una cuadrícula de lado igual al diámetro de los discos. La marca en el lado derecho de la imagen corresponde al indicador de desplazamiento del disco superior; la zona parece más esbelta debido a la posición de la cámara.

en condiciones de gravedad reducida permite una mayor libertad ya que, al disminuir las restricciones impuestas a la longitud de la zona, el campo de trabajo es mayor, pudiéndose controlar más cómodamente aspectos críticos actualmente mal conocidos de

dustria farmacéutica, [4]. Sin embargo, en la superficie terrestre la longitud máxima del puente líquido, Fig. 2, queda severamente limitada por las fuerzas gravitatorias, de forma que difícilmente se pueden realizar puentes líquidos con una longitud superior a unos pocos milímetros, lo que acarrea una serie de importantes problemas tecnológicos a la hora de conseguir una fusión y recristalización uniformes, restringiendo fuertemente el tamaño de las muestras a tratar. Por el contrario, el trabajo en condiciones de gravedad reducida permite una mayor libertad ya que, al disminuir las restricciones impuestas a la longitud de la zona, el campo de trabajo es mayor, pudiéndose controlar más cómodamente aspectos críticos actualmente mal conocidos de los procesos en tierra.

Esto ha motivado la aparición de un creciente interés entre la comunidad científica internacional sobre el comportamiento de la zona flotante, principalmente a raíz de los primeros experimentos realizados a bordo del laboratorio espacial norteamericano Skylab, [5]. Es de destacar que, en este campo, Europa parece haber tomado la delantera gracias al ambicioso programa de investigaciones en el área de Física de Fluidos a bordo del laboratorio espacial Spacelab, [6].

Como se deduce de los ejemplos de utilización de zonas flotantes presentados anteriormente, su estudio es muy complejo ya que debería incluir, entre otros, cambios de fase con frentes no planos, propiedades no uniformes del fluido, etc.. Por todo ello es usual que, dependiendo del aspecto a estudiar, se admitan ciertas simplificaciones que faciliten el tratamiento; las más simples son no considerar los cambios de fase, suponiendo

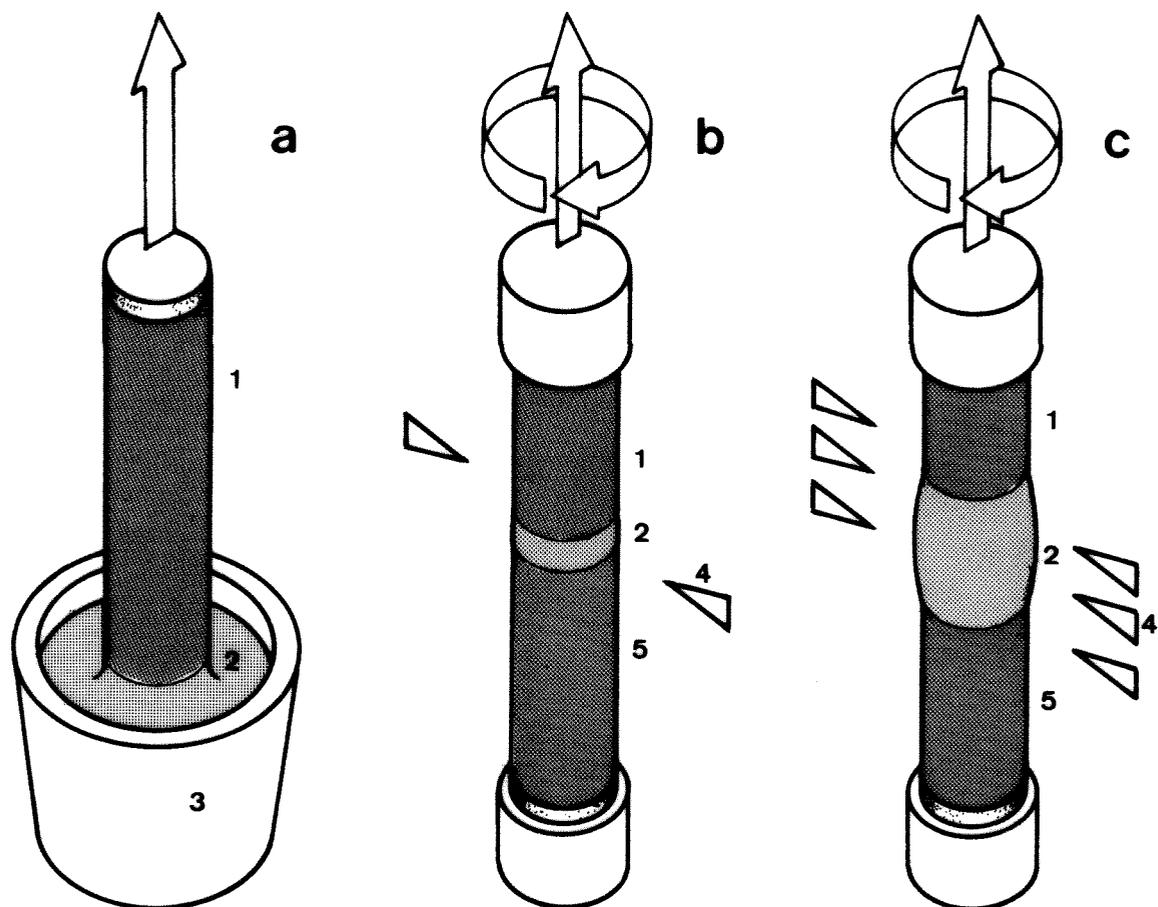


Fig. 2. Métodos de crecimiento cristalino sin crisol.

- a) Método de Czochralski.
- b) Zona líquida (en un campo gravitatorio).
- c) Zona flotante (en gravedad nula).

Los números en las figuras identifican los distintos componentes de acuerdo con la siguiente clave.

- 1: Material recrystalizado
- 2: Fundido
- 3: Crisol
- 4: Fuente térmica (bobina de alta frecuencia o radiación láser)
- 5: Material por fundir.

Las flechas indican los movimientos experimentados por las varillas respecto al crisol, a, o respecto a la fuente térmica, b y c.

que la zona líquida se mantiene entre dos discos sólidos, y separar los problemas térmico e hidrodinámico, lo que parece plenamente justificado cuando la perturbación inicial no es de origen térmico.

El problema tratado aquí representa un importante paso en la explicación del comportamiento de la zona flotante, campo al que en la actualidad al menos una docena de grupos de investigación, repartidos por toda Europa, están dedicando un notable esfuerzo. Parece conveniente pues, aún de un modo breve, reseñar el estado actual de los conocimientos en este área, lo que servirá para establecer más claramente los puntos de partida del presente trabajo.

Cuando se estudian líquidos con superficies libres el primer aspecto a determinar es, obviamente, el de las posiciones de equilibrio. Los trabajos en este campo arrancan a finales del siglo pasado con los experimentos realizados por Plateau, [7], acometiéndose más recientemente el estudio teórico de la hidrostática de la zona flotante, ([8], [9]) cuyo fin es determinar las formas de equilibrio estables, que son las que se presentarán en la realidad. Estos estudios sobre la hidrostática de la zona flotante son completos para puentes líquidos entre discos iguales, habiéndose estudiado también los efectos sobre la estabilidad de la rotación de la zona como sólido rígido y la vibración axial ([10], [11]) quedando aún por tratar la estabilidad de las formas no cilíndricas en rotación y de puentes líquidos con bordes libres.

Un aspecto especial de la hidrostática es el estudio de los efectos macroscópicos de las fuerzas moleculares en pelícu-

las líquidas mediante la técnica de la zona flotante, [12].

En la parte fluidodinámica se puede destacar el estudio del movimiento en las cercanías de los bordes de los discos debido a la rotación impulsiva de los mismos, [13], y en la actualidad el estudio de los movimientos generados por gradientes de tensión superficial inducidos por una diferencia de temperatura entre los discos ([14], [15], [16], [17]) o un calentamiento no uniforme de la superficie libre, [18], así como el efecto adicional de un campo eléctrico, [19].

En el campo experimental, habida cuenta de las limitaciones ya señaladas, las tendencias apuntan hacia la utilización de zonas de muy pequeñas dimensiones, del orden del milímetro, para la experimentación de problemas térmicos, [20], y de baños de Plateau con zonas de gran volumen para estudios hidrostáticos e hidrodinámicos ([21], [22]). Es de esperar que las aportaciones de este área aumenten espectacularmente con el próximo vuelo del laboratorio espacial Spacelab a bordo del cual irá el Fluid Physics Module, que, como ya es sabido, es un equipo diseñado especialmente para la experimentación con zonas flotantes en el espacio ([23], [24]).

1.1.1. Problemas afines al de la zona flotante

Quizás el problema más parecido al de la rotura de una zona flotante, aunque distinto en muchos aspectos, sea el de la rotura de un chorro capilar.

Las mejoras en la técnica de impresión por chorro de tinta, [25], han motivado una concentración de esfuerzos para esclarecer el proceso de rotura de un chorro líquido. El principal

problema es el control de las pequeñas gotas que aparecen entre las gotas mayores en que se fracciona el chorro (las "esférulas" de Rayleigh o satélites en la literatura actual). Estas gotas sa télite, fenómeno también presente en la rotura de la zona flotan te, se forman cuando el ligamento que une las gotas mayores, un instante antes de la rotura, se separa a la vez de ambas.

Aunque el lector puede encontrar en una monografía de Bogy, [26], una completa revisión de los métodos aplicados a la resolución de este problema, parece oportuno incluir aquí una so mera reseña de aquellos trabajos que han significado un avance en el estudio de la rotura de un chorro capilar.

El problema empezó a ser tratado en el segundo tercio del siglo pasado con los trabajos experimentales de Savart y Mag nus, que demostraron que un chorro de líquido, saliendo a través de un orificio circular, se podía romper de una forma regular im poniendo una vibración estacionaria al recipiente o a la boqui-lla de salida.

Posteriormente, Rayleigh, [27], compiló el trabajo de sus predecesores y realizó un análisis lineal de la estabilidad de un chorro infinitamente largo, no viscoso, incompresible y de sección circular, encontrando que las perturbaciones no axilsimétricas son siempre estables y las axilsimétricas, confirmando la suposición de Plateau, son estables o inestables según que la longitud de onda de la perturbación impuesta sea menor o mayor que la longitud de la circunferencia del chorro no perturbado.

Más recientemente, aparte de los trabajos experimentales que han demostrado claramente el carácter no lineal de la ro tura de un chorro ([28], [29], [30]), los trabajos teóricos se

pueden dividir en dos grandes áreas: aquellos que considerando un chorro infinito estudian la inestabilidad temporal, y otros que plantean el problema de un chorro saliendo a través de un orificio, estudiando el crecimiento o decrecimiento de la perturbación con la distancia desde la sección de salida (inestabilidad espacial).

En el primer grupo cabe distinguir entre teorías tridimensionales y unidimensionales. Las primeras parten de un chorro potencial y abordan la inestabilidad temporal mediante métodos asintóticos: dilatación de coordenadas ([31], [32]), o método de las escalas múltiples, [33]. Los modelos unidimensionales tienen su inicio en el modelo lineal de Weber, [34] (obtenido mediante una expansión de la coordenada radial a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes), que generalizó los resultados de Rayleigh al caso de un chorro viscoso, y continúan con el de Lee [35], que genera un sistema no lineal de ecuaciones para chorros no viscosos, y el de Bogy ([36], [37], [38]) basado en la teoría unidimensional de un medio continuo de Cosserat, [39].

Esta distinción también es aplicable al caso de inestabilidad espacial, existiendo al menos un estudio lineal tridimensional de este tipo de inestabilidad en un chorro potencial, [40], y varias aplicaciones de los dos últimos modelos unidimensionales antes citados, ([41], [36], [37] y [38]).

Entre todos los modelos reseñados, los unidimensionales, particularmente los de Lee y Bogy (Cosserat), son fácilmente adaptables a las particularidades de la zona flotante, habiéndose resuelto en las páginas siguientes la primera aproximación para ambos modelos y, como ya se ha dicho, integrando numericamente las ecuaciones completas de Lee.

1.2. ECUACIONES GENERALES DEL MOVIMIENTO ESTRICTAMENTE AXILSIMÉTRICO DE LA ZONA FLOTANTE

Sea una zona líquida cilíndrica, comprendida entre dos discos sólidos de igual diámetro, coaxiales y paralelos entre si, rodeada de un gas con densidad mucho menor que la del líquido, o del vacío.

El problema a resolver trata de la evolución con el tiempo de una zona como la descrita, cuando se la somete a una perturbación estrictamente axilsimétrica de un modo que, en el instante inicial, la forma de la zona, o lo que es lo mismo la interfase líquido-gas, difiere levemente de la forma cilíndrica señalada, Fig. 3. Para ello se supone:

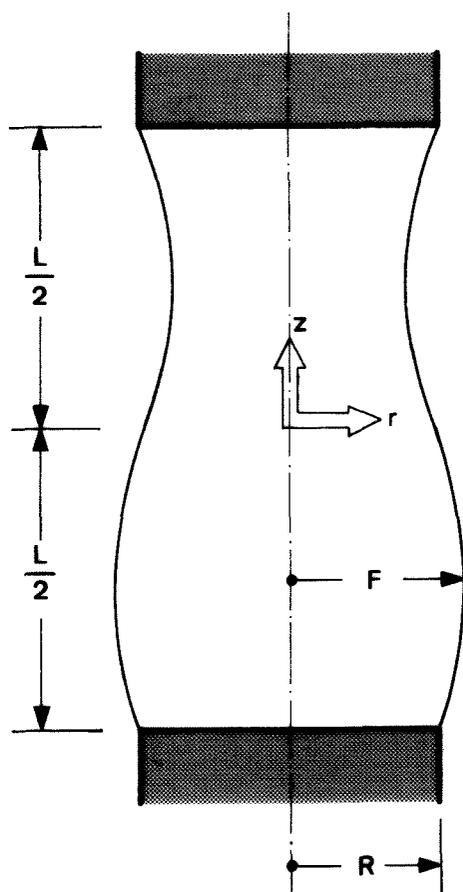


Fig. 3. Geometría y sistema de coordenadas para una zona flotante axilsimétrica.

- a) El movimiento interno de la zona se debe únicamente a los gradientes de presión capilar asociados a la deformación de la superficie libre.
- b) Los efectos en la dinámica de la zona del gas exterior son despreciables.
- c) No existen acciones gravitatorias ni inerciales debidas a un movimiento no uniforme de la zona como sólido rígido.
- d) Dado que sólo se consideran perturbaciones estrictamente axilsimétricas, excluyéndose también la posibilidad de rotación de alguno de los discos, se admite la no existencia de velocidades azimutales. El problema es independiente de esta coordenada.
- e) Las propiedades del líquido, densidad y viscosidad, así como las de la interfase, tensión superficial, se suponen constantes.

Bajo estas circunstancias, las ecuaciones que definen el problema son, [42]:

I) Conservación de la masa:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad . \quad (1)$$

II) Impulso:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = - \nabla \frac{P}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{V} \quad . \quad (2)$$

Junto con las condiciones de contorno e iniciales apropiadas; a saber:

III) En los discos la velocidad ha de ser nula y la zona debe permanecer anclada al borde de los mismos:

$$\vec{V}(r, \pm L/2, t) = 0 \quad . \quad (3)$$

IV) En el eje de la zona, la velocidad radial ha de ser nula:

$$U(0, z, t) = 0 \quad , \quad (4)$$

y la axial debe tener pendiente nula:

$$\frac{\partial}{\partial r} W(0, z, t) = 0 \quad . \quad (5)$$

V) En la superficie libre, la condición de contorno debe expresar el equilibrio según la normal entre la presión capilar, la sobrepresión local y los esfuerzos viscosos normales:

$$\vec{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{n} = \sigma \nabla \cdot \vec{n} \quad , \quad (6)$$

donde \mathbf{T} es el tensor de esfuerzos, \vec{n} la normal exterior y σ la tensión superficial; y además, que la componente tangencial del tensor de esfuerzos se debe anular en la entrefase:

$$\mathbf{T} \cdot \vec{n} - (\vec{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{n}) \vec{n} = 0 \quad . \quad (7)$$

VI) Falta por último, para terminar con las condiciones de contorno, la ecuación que expresa que al no existir flujo de masa a través de la entrefase, ésta es una superficie fluida:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla F = 0 \quad , \quad (8)$$

siendo $F(r, z, t) = 0$ la ecuación de la entrefase. También se podría añadir como comprobación, aunque obviamente está ya incluida en la formulación anterior, la condición de que el volumen ha de permanecer constante con el tiempo:

$$\pi \int_{-L/2}^{L/2} F^2 dz = \pi R^2 L \quad ,$$

representando F en esta fórmula una expresión explícita del radio de la zona: $r = F(z, t)$.

VII) Las condiciones iniciales deben prefijar el valor de las

distintas variables en el instante inicial; por ejemplo, la forma de la zona, $F=F_0$, y/o el campo de velocidades, $\vec{V}=\vec{V}_0$.

Adimensionalizando en las expresiones anteriores las longitudes con el radio de los discos, R , las velocidades con el parámetro $\sqrt{\sigma/\rho R}$, el tiempo con $\sqrt{\rho R^3/\sigma}$ y la presión reducida, $(P-P_0)/\rho$, con $\sigma/\rho R$, y denotando por E al parámetro adimensional $E=v\sqrt{\frac{\rho}{\sigma R}}$, las expresiones (1) a (8) en forma desarrollada resultan:

I) Conservación de la masa:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU) + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad . \quad (9)$$

IIa) Cantidad de movimiento radial:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial r} + W \frac{\partial U}{\partial z} = - \frac{\partial P}{\partial r} + E \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r^2} \right) \quad . \quad (10)$$

IIb) Cantidad de movimiento axial:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial r} + W \frac{\partial W}{\partial z} = - \frac{\partial P}{\partial z} + E \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right) \quad . \quad (11)$$

III) Condición de contorno en los discos:

$$\vec{V}(r, \pm \Lambda, t) = 0 \quad , \quad (12)$$

donde $\Lambda=L/2R$, es la esbeltez de la zona.

IV) En el eje de simetría de la zona:

$$U(0, z, t) = 0 \quad , \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} W(0, z, t) = 0 \quad . \quad (14)$$

V) En la superficie libre, $r=F(z, t)$, equilibrio según la normal:

$$\begin{aligned} P - \frac{2E}{1+(\partial F/\partial z)^2} \left[\frac{\partial U}{\partial r} + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z}\right) \right] = \\ = \frac{1}{[1+(\partial F/\partial z)^2]^{3/2}} \left[\frac{1+(\partial F/\partial z)^2}{F} - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right], \quad (15) \end{aligned}$$

y tangencial:

$$E \left[2 \frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \left[1 - \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] = 0 \quad . \quad (16)$$

VI) Condición de contorno cinemática:

$$\frac{\partial F}{\partial t} - U + W \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad , \quad (17)$$

y la condición, como ya se ha dicho redundante, de conservación del volumen:

$$\pi \int_{-\Lambda}^{\Lambda} F^2 dz = 2\pi\Lambda \quad .$$

VII) Condiciones iniciales: $F=F_0$ y $V=V_0$.

Así planteado el problema, no se conoce ninguna solución analítica del mismo, a excepción de la trivial, ni aún del problema potencial linealizado, donde resulta imposible cumplir la condición de zona anclada a los discos (si se anula esta condición el problema se convierte en el de un chorro). Esto podría significar la existencia de capas límite próximas a los discos, aunque no parece ser el caso pues esta posibilidad está en contradicción con la evidencia experimental.

1.3. MODELO UNIDIMENSIONAL DE LEE

La complejidad del problema general, expresiones (9) a (17), se reduce en parte haciendo uso de la hipótesis introducida por Lee, [35], para el estudio de la rotura de un chorro capilar, consistente en suponer que la velocidad axial, W , es independiente de la coordenada radial r . Bajo esta hipótesis y considerando además el problema no viscoso, la ecuación (11) indica que la presión reducida, P , es también independiente del radio, y en consecuencia la ecuación de la cantidad de movimiento radial (10) queda desacoplada del resto de la formulación.

En estas condiciones, las ecuaciones generales se reducen a:

I) Conservación de la masa:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rU) + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 . \quad (18)$$

IIb) Cantidad de movimiento según el eje z :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + W \frac{\partial W}{\partial z} = - \frac{\partial P}{\partial z} . \quad (19)$$

V) En la entrefase, $r = F(z,t)$, la condición de equilibrio tangencial desaparece al ser $E = 0$, quedando sólo la condición según la normal:

$$P = \frac{1}{[1+(\partial F/\partial z)^2]^{3/2}} \left[\frac{1+(\partial F/\partial z)^2}{F} - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right] , \quad (20)$$

ecuación que en este modelo, habida cuenta de la independencia con r de la presión, constituye la expresión que relaciona la presión con la forma de la zona.

Las condiciones de contorno son ahora:

III) En los discos la velocidad axial es nula:

$$W(\pm\Lambda, t) = 0 , \quad (21)$$

y la radial debe ser nula en los bordes de los discos; sin embargo, dado que esta componente de la velocidad no va a aparecer en los cálculos intermedios, parece conveniente sustituir esta condición por otra análoga: la zona debe permanecer anclada a los bordes de los discos:

$$F(\pm\Lambda, t) = 1 , \quad (22)$$

IV) En el eje de simetría:

$$U(0, z, t) = 0 ,$$

$$\frac{\partial}{\partial r} W(0, z, t) = 0 ,$$

condiciones que se cumplen automáticamente debido a que la velocidad axial, W , se supone independiente de r y por tanto, de la ecuación de continuidad (18), se deduce que la velocidad radial, U , es lineal con r .

VI) La condición de que la interfase sea superficie fluida:

$$U(F, z, t) = \frac{\partial F}{\partial t} + W \frac{\partial F}{\partial z} . \quad (23)$$

Por último, además de las condiciones iniciales necesarias, será útil la comprobación de que el volumen total permanece invariable:

$$\pi \int_{-\Lambda}^{+\Lambda} F^2 dz = 2\pi\Lambda .$$

Para eliminar la velocidad radial U de la formulación propuesta, se pueden sustituir las ecuaciones (18) y (23) por otra que exprese la conservación de la masa de un modo global en cada sección. Por aplicación del teorema de continuidad a una rodaja de la zona, o mediante integración radial de la ecuación (18) teniendo en cuenta la expresión (23), resulta:

$$\frac{\partial F^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(WF^2) = 0 \quad , \quad (24)$$

ecuación que sustituye a las (18) y (23).

Planteado el problema, conviene recapacitar sobre la validez de la hipótesis introducida. Suponer que la velocidad axial es independiente de la coordenada radial está justificado en el caso de chorros si la longitud de onda de la perturbación es razonablemente mayor que el radio del chorro ([30], [41], [43]). Una estimación de los órdenes de magnitud de las variables en juego se puede obtener a partir de la ecuación de continuidad (18) llegándose a que, para deformaciones pequeñas, la velocidad radial, U , es del orden de la axial, W , dividida por el cociente entre la longitud de onda de la perturbación y el radio del chorro. En la zona flotante la longitud de onda típica viene determinada por la distancia entre los discos y por tanto la relación entre ambas velocidades es del orden de la esbeltez de la zona, en torno a 2π en nuestro caso.

Así pues, se puede suponer que, en primera aproximación, la velocidad U varía linealmente con r , al menos mientras el radio del cuello de la zona permanezca de orden unidad, ya que esta componente de la velocidad es nula en el eje de la zona y alcanza su valor máximo en la superficie libre. (este resultado se podría obtener también desarrollando en serie de potencias de r las funciones hiperbólicas de Bessel que aparecen en la teoría clásica de chorros, reteniendo sólo el primer término de desarrollo).

Según esto, el modelo de Lee fallará en la predicción de los fenómenos que tienen lugar en la última etapa de la rotu-

ra (no hay que olvidar que con este modelo no se satisface la ecuación de la cantidad de movimiento radial). Sin embargo, desde un punto de vista pragmático hay que reconocer que la formulación de Lee retiene las principales características del problema real y no es extraño por tanto que los resultados que se obtienen estén en perfecta concordancia, tanto cualitativa como cuantitativamente, con los obtenidos a partir de modelos unidimensionales más sofisticados (teoría de los medios continuos de Cosserat) o, hasta donde se dispone de resultados, con los obtenidos mediante teorías tridimensionales.

1.3.1. Resolución del problema linealizado

Tampoco se conocen soluciones analíticas para las ecuaciones completas de Lee, aunque presentan la ventaja de ser más fácilmente abordables numéricamente que la formulación general de la zona flotante, además de permitir un tratamiento analítico relativamente sencillo del problema lineal.

Sea ϵ un parámetro pequeño que mide, por ejemplo, la máxima deformación de la superficie libre respecto a la forma cilíndrica; si suponemos deformaciones pequeñas y despreciamos términos de orden ϵ^2 , las variables del problema se podrán escribir como:

$$\left. \begin{aligned} F &= 1 + \epsilon f \\ P &= 1 + \epsilon p \\ W &= \epsilon w \end{aligned} \right\} \cdot \quad (25)$$

Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones (19), (20) y (24), y en las condiciones (21) y (22), resulta:

I) Conservación de la masa:

$$2 \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (26)$$

IIb) Impulso:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (27)$$

donde p está relacionada con el radio de la interfase a través de la ecuación:

$$p = -f - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (28)$$

III) Condiciones de contorno:

$$\left. \begin{aligned} w(\pm\Lambda, t) &= 0 \\ f(\pm\Lambda, t) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (29)$$

y además, la conservación del volumen total:

$$\int_{-\Lambda}^{+\Lambda} f dz = 0,$$

y las condiciones iniciales $f(z,0)=f_0$, $w(z,0)=w_0$.

Sustituyendo en (27) la expresión de p dada por (28), y eliminando la variable f entre las ecuaciones (26) y (27), se obtiene:

$$2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} = 0, \quad (30)$$

ecuación diferencial que debe satisfacer la velocidad de perturbación axial, sujeta a las condiciones de contorno:

$$\left. \begin{aligned} w(\pm\Lambda, t) &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=\pm\Lambda} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (31)$$

habiéndose obtenido la segunda de las expresiones (31) de la condición de zona anclada a los discos, condición que en términos

de velocidad se traduce, según la ecuación (26), en que la velocidad debe morir con pendiente nula en los discos.

En vez de f se podría haber eliminado la velocidad w entre las expresiones (26) y (27), resultando una ecuación diferencial idéntica a la (30) para la variable f . Sin embargo, las condiciones de contorno en esta variable serían:

$$\left. \begin{aligned} f(\pm\Lambda, t) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{z=\pm\Lambda} + \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} \Big|_{z=\pm\Lambda} &= 0 \end{aligned} \right\} ,$$

lo que genera un álgebra más complicada debido a la combinación lineal de las derivadas en la segunda expresión.

Por tanto, se calculará en primer lugar la velocidad axial, w , y conocida ésta, la forma de la zona.

Para resolver la ecuación (30) pasamos al plano complejo, [44], buscando soluciones del tipo

$$w = R(Ae^{\tau t} w(z)), \quad (32)$$

donde A y τ son, en general, complejos. Sustituyendo en la ecuación (30), resulta la siguiente ecuación diferencial ordinaria para la función compleja $w(z)$:

$$\frac{d^4 w}{dz^4} + \frac{d^2 w}{dz^2} + 2\tau^2 w = 0 ,$$

cuyas soluciones, $e^{\theta z}$, han de cumplir la ecuación característica:

$$\theta^4 + \theta^2 + 2\tau^2 = 0 . \quad (33)$$

Las raíces de esta ecuación, para distintos valores de $\tau = \gamma + i\omega$ se muestran en la Fig. 4; el plano de las soluciones presenta dos hojas siendo a la vez simétrico respecto al origen. Da

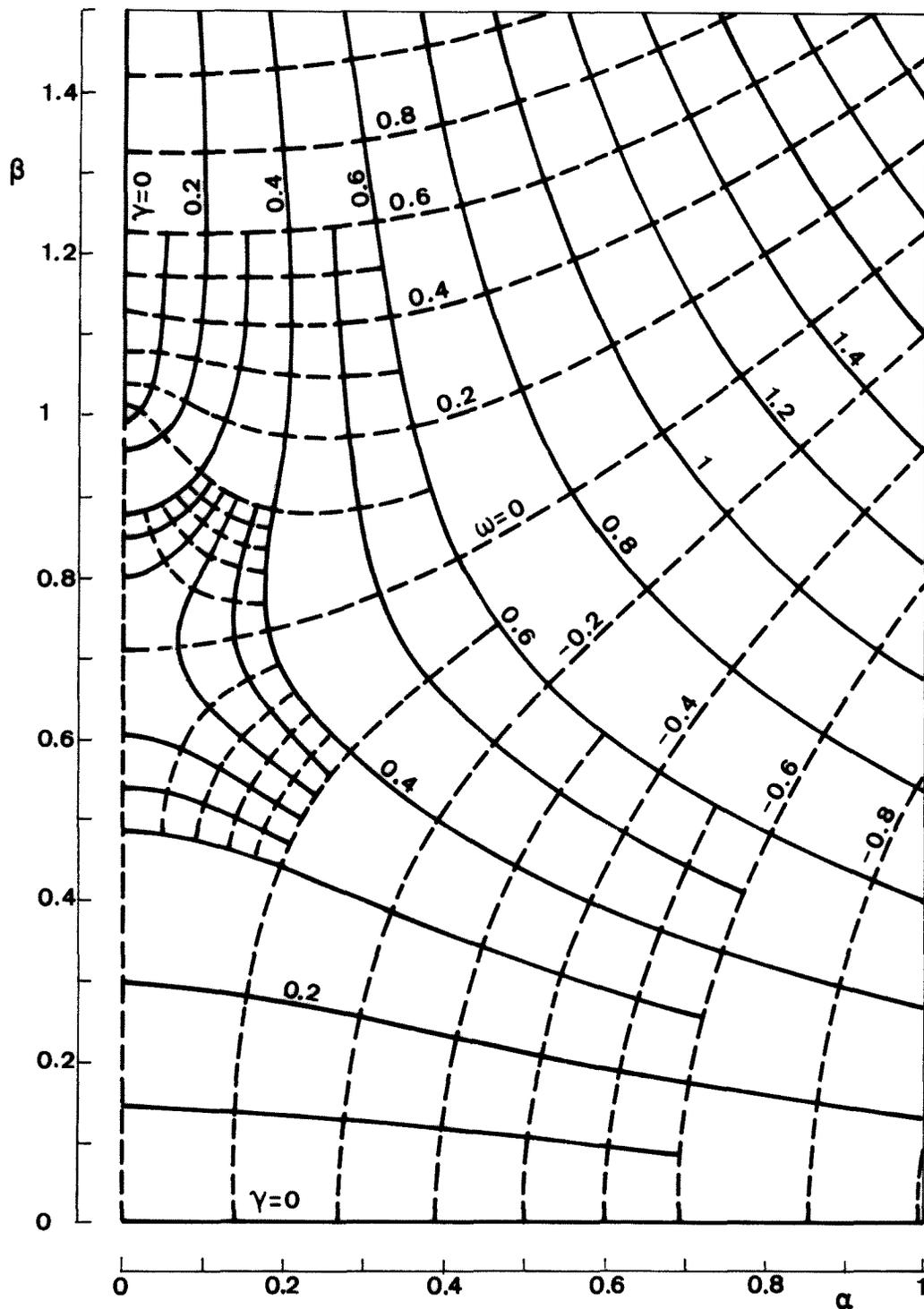


Fig. 4. Plano complejo $\theta(\tau)$, con $\theta=\alpha+i\beta$ y $\tau=\gamma+i\omega$, correspondiente a las soluciones de la ecuación compleja $\theta^4 + \theta^2 + 2\tau^2 = 0$. Las cuatro raíces para un τ dado son $\pm\theta_1$ y $\pm\theta_2$, siendo:

$$\theta_1 = \alpha_1(\gamma, \omega) + i\beta_1(\gamma, \omega)$$

$$\theta_2 = \alpha_2(\gamma, -\omega) - i\beta_2(\gamma, -\omega)$$

do que el modelo en estudio no incluye efectos viscosos sólo interesan soluciones con $\gamma \geq 0$ por lo que en la Fig. 4 sólo se ha representado un cuadrante del plano de las raíces, asignando a las distintas curvas los valores de γ y ω en el entendimiento de que para cada valor de τ las raíces son $\pm\theta_1$ y $\pm\theta_2$, con:

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \alpha_1(\gamma, \omega) + i\beta_1(\gamma, \omega) \\ \theta_2 &= \alpha_2(\gamma, -\omega) - i\beta_2(\gamma, -\omega) \end{aligned} \right\}, \quad (34)$$

siendo α y β reales positivos.

A la vista del plano, se observa que si $\gamma=0$ (soluciones oscilatorias) las raíces son de la forma $(\pm\alpha, \pm i\beta)$ con $\beta > 1$. Si $\omega=0$ (soluciones exponenciales en el tiempo) las raíces son imaginarias puras para $0 < \gamma < \sqrt{2}/4$ y complejas de la forma general (34) para $\gamma > \sqrt{2}/4$. En el caso $\gamma = \sqrt{2}/4$ las raíces son dobles, de valor $\pm i\sqrt{2}/2$.

En el caso más general, la velocidad axial vendrá dada por la expresión:

$$w = R[e^{\tau t}(Ae^{\theta_1 z} + Be^{-\theta_1 z} + Ce^{\theta_2 z} + De^{-\theta_2 z})], \quad (35)$$

donde A , B , C y D serán constantes complejas. Desarrollando, resulta:

$$\begin{aligned} w = e^{\gamma t} \cos \omega t & [e^{\alpha_1 z} (A_1 \cos \beta_1 z - A_2 \sin \beta_1 z) + e^{-\alpha_1 z} (B_1 \cos \beta_1 z + B_2 \sin \beta_1 z) + \\ & + e^{\alpha_2 z} (C_1 \cos \beta_2 z - C_2 \sin \beta_2 z) + e^{-\alpha_2 z} (D_1 \cos \beta_2 z + D_2 \sin \beta_2 z)] - \\ - e^{\gamma t} \sin \omega t & [e^{\alpha_1 z} (A_1 \sin \beta_1 z + A_2 \cos \beta_1 z) + e^{-\alpha_1 z} (-B_1 \sin \beta_1 z + B_2 \cos \beta_1 z) + \\ & + e^{\alpha_2 z} (C_1 \sin \beta_2 z + C_2 \cos \beta_2 z) + e^{-\alpha_2 z} (-D_1 \sin \beta_2 z + D_2 \cos \beta_2 z)]. \quad (36) \end{aligned}$$

Las condiciones de contorno exigen la anulaci3n de la

velocidad y su derivada respecto a z en los discos en todo instante t . Esto se puede cumplir asignando el valor nulo a todas las constantes que aparecen en la expresión (36) (en cuyo caso se obtiene la solución trivial) o bien puede ocurrir que existan ciertas combinaciones de valores de los parámetros γ , ω y Λ de modo que el sistema de ecuaciones homogéneo que resulta de aplicar las condiciones de contorno tenga un determinante nulo y el sistema quede indeterminado (problema de autovalores). Aún más, dada la forma de la solución encontrada, cada una de las condiciones (31) genera dos ecuaciones, ya que se deben anular por separado cada uno de los dos grandes sumandos que contribuyen a la velocidad axial (expresión (36)) y a su derivada. En consecuencia, al aplicar las condiciones de contorno, se obtiene un sistema homogéneo de ocho ecuaciones lineales en las ocho incógnitas $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2$. En la página siguiente (Tabla 1) se muestra el determinante de los coeficientes cuya anulación se persigue:

$$D(\gamma, \omega, \Lambda) = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{18} \\ D_{21} & D_{22} & \cdots & D_{28} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_{81} & D_{82} & \cdots & D_{88} \end{vmatrix} = 0. \quad (37)$$

Dada la magnitud del determinante D , el proceso se ha de continuar numéricamente, fijando valores para γ y ω , resolviendo $\theta(\tau)$ con (33), y analizando si existe algún valor de la esbeltez Λ para el que el determinante se anula. Si así ocurre, tendremos recíprocamente para cada Λ los valores de γ y ω que determinan la evolución de la zona.

Tabla 1
Aplicación de las condiciones de contorno

El cumplimiento de las condiciones de contorno para la velocidad axial de perturbación (expresión (36)):

$$w = e^{\gamma t} \cos \omega t [e^{\alpha_1 z} (A_1 \cos \beta_1 z - A_2 \operatorname{sen} \beta_1 z) + e^{-\alpha_1 z} (B_1 \cos \beta_1 z + B_2 \operatorname{sen} \beta_1 z) + e^{\alpha_2 z} (C_1 \cos \beta_2 z - C_2 \operatorname{sen} \beta_2 z) + e^{-\alpha_2 z} (D_1 \cos \beta_2 z + D_2 \operatorname{sen} \beta_2 z)] - e^{\gamma t} \operatorname{sen} \omega t [e^{\alpha_1 z} (A_1 \operatorname{sen} \beta_1 z + A_2 \cos \beta_1 z) + e^{-\alpha_1 z} (-B_1 \operatorname{sen} \beta_1 z + B_2 \cos \beta_1 z) + e^{\alpha_2 z} (C_1 \operatorname{sen} \beta_2 z + C_2 \cos \beta_2 z) + e^{-\alpha_2 z} (-D_1 \operatorname{sen} \beta_2 z + D_2 \cos \beta_2 z)]$$

exige la anulación de los dos grandes términos dependientes de la variable z que contribuyen a esta velocidad y a su derivada, la aplicación de tales condiciones da lugar al sistema de ecuaciones homogéneo:

$$\left. \begin{array}{l} w(\Lambda) = 0 \\ w(-\Lambda) = 0 \\ \left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{z=\Lambda} = 0 \\ \left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{z=-\Lambda} = 0 \\ w(\Lambda) = 0 \\ w(-\Lambda) = 0 \\ \left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{z=\Lambda} = 0 \\ \left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{z=-\Lambda} = 0 \end{array} \right\} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} & D_{17} & D_{18} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} & D_{27} & D_{28} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} & D_{37} & D_{38} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & D_{45} & D_{46} & D_{47} & D_{48} \\ D_{51} & D_{52} & D_{53} & D_{54} & D_{55} & D_{56} & D_{57} & D_{58} \\ D_{61} & D_{62} & D_{63} & D_{64} & D_{65} & D_{66} & D_{67} & D_{68} \\ D_{71} & D_{72} & D_{73} & D_{74} & D_{75} & D_{76} & D_{77} & D_{78} \\ D_{81} & D_{82} & D_{83} & D_{84} & D_{85} & D_{86} & D_{87} & D_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B_1 \\ B_2 \\ C_1 \\ C_2 \\ D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = 0$$

Habiendo indicado en las expresiones de la izquierda, en correspondencia con las filas de la matriz $[D_{ij}]$, la condición que genera cada ecuación; las cuatro primeras para el primer sumando de w y las cuatro siguientes para el segundo.

Con la nomenclatura: $E_i^+ = e^{\alpha_i \Lambda}$, $E_i^- = e^{-\alpha_i \Lambda}$, $C_i = \cos \beta_i \Lambda$, $S_i = \operatorname{sen} \beta_i \Lambda$, $(\alpha C - \beta S)_i = \alpha_i C_i - \beta_i S_i$, etc., el determinante de la matriz $[D_{ij}]$, D, es:

$$\begin{vmatrix} E_1^+ C_1 & -E_1^+ S_1 & E_1^- C_1 & E_1^- S_1 & E_2^+ C_2 & -E_2^+ S_2 & E_2^- C_2 & E_2^- S_2 \\ E_1^- C_1 & E_1^- S_1 & E_1^+ C_1 & -E_1^+ S_1 & E_2^- C_2 & E_2^- S_2 & E_2^+ C_2 & -E_2^+ S_2 \\ E_1^+ (\alpha C - \beta S)_1 & -E_1^+ (\alpha S + \beta C)_1 & -E_1^- (\alpha C + \beta S)_1 & -E_1^- (\alpha S - \beta C)_1 & E_2^+ (\alpha C - \beta S)_2 & -E_2^+ (\alpha S + \beta C)_2 & -E_2^- (\alpha C + \beta S)_2 & -E_2^- (\alpha S - \beta C)_2 \\ E_1^- (\alpha C + \beta S)_1 & E_1^- (\alpha S - \beta C)_1 & -E_1^+ (\alpha C - \beta S)_1 & E_1^+ (\alpha S + \beta C)_1 & E_2^- (\alpha C + \beta S)_2 & E_2^- (\alpha S - \beta C)_2 & -E_2^+ (\alpha C - \beta S)_2 & E_2^+ (\alpha S + \beta C)_2 \\ E_1^+ S_1 & E_1^+ C_1 & -E_1^- S_1 & E_1^- C_1 & E_2^+ S_2 & E_2^+ C_2 & -E_2^- S_2 & E_2^- C_2 \\ -E_1^- S_1 & E_1^- C_1 & E_1^+ S_1 & E_1^+ C_1 & -E_2^- S_2 & E_2^- C_2 & E_2^+ S_2 & E_2^+ C_2 \\ E_1^+ (\alpha S + \beta C)_1 & E_1^+ (\alpha C - \beta S)_1 & E_1^- (\alpha S - \beta C)_1 & -E_1^- (\alpha C + \beta S)_1 & E_2^+ (\alpha S + \beta C)_2 & E_2^+ (\alpha C - \beta S)_2 & E_2^- (\alpha S - \beta C)_2 & -E_2^- (\alpha C + \beta S)_2 \\ -E_1^- (\alpha S - \beta C)_1 & E_1^- (\alpha C + \beta S)_1 & -E_1^+ (\alpha S + \beta C)_1 & -E_1^+ (\alpha C - \beta S)_1 & -E_2^- (\alpha S - \beta C)_2 & E_2^- (\alpha C + \beta S)_2 & -E_2^+ (\alpha S + \beta C)_2 & -E_2^+ (\alpha C - \beta S)_2 \end{vmatrix}$$

Tabla 1
Aplicación de las condiciones de contorno

El cumplimiento de las condiciones de contorno para la velocidad axial de perturbación (expresión (36)):

$$w = e^{Yt} \cos \omega t [e^{\alpha_1 z} (A_1 \cos \beta_1 z - A_2 \sin \beta_1 z) + e^{-\alpha_1 z} (B_1 \cos \beta_1 z + B_2 \sin \beta_1 z) + e^{\alpha_2 z} (C_1 \cos \beta_2 z - C_2 \sin \beta_2 z) + e^{-\alpha_2 z} (D_1 \cos \beta_2 z + D_2 \sin \beta_2 z)] - e^{Yt} \sin \omega t [e^{\alpha_1 z} (A_1 \sin \beta_1 z + A_2 \cos \beta_1 z) + e^{-\alpha_1 z} (-B_1 \sin \beta_1 z + B_2 \cos \beta_1 z) + e^{\alpha_2 z} (C_1 \sin \beta_2 z + C_2 \cos \beta_2 z) + e^{-\alpha_2 z} (-D_1 \sin \beta_2 z + D_2 \cos \beta_2 z)]$$

exige la anulación de los dos grandes términos dependientes de la variable z que contribuyen a esta velocidad y a su derivada, la aplicación de tales condiciones da lugar al sistema de ecuaciones homogéneo:

$$\left. \begin{array}{l} w(\Lambda) = 0 \\ w(-\Lambda) = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=\Lambda} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=-\Lambda} = 0 \\ w(\Lambda) = 0 \\ w(-\Lambda) = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=\Lambda} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=-\Lambda} = 0 \end{array} \right\} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} & D_{17} & D_{18} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} & D_{27} & D_{28} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} & D_{37} & D_{38} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & D_{45} & D_{46} & D_{47} & D_{48} \\ D_{51} & D_{52} & D_{53} & D_{54} & D_{55} & D_{56} & D_{57} & D_{58} \\ D_{61} & D_{62} & D_{63} & D_{64} & D_{65} & D_{66} & D_{67} & D_{68} \\ D_{71} & D_{72} & D_{73} & D_{74} & D_{75} & D_{76} & D_{77} & D_{78} \\ D_{81} & D_{82} & D_{83} & D_{84} & D_{85} & D_{86} & D_{87} & D_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B_1 \\ B_2 \\ C_1 \\ C_2 \\ D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = 0$$

Habiendo indicado en las expresiones de la izquierda, en correspondencia con las filas de la matriz $[D_{ij}]$, la condición que genera cada ecuación; las cuatro primeras para el primer sumando de w y las cuatro siguientes para el segundo.

Con la nomenclatura: $E_1^+ = e^{\alpha_1 \Lambda}$, $E_1^- = e^{-\alpha_1 \Lambda}$, $C_i = \cos \beta_i \Lambda$, $S_i = \sin \beta_i \Lambda$, $(\alpha C - \beta S)_i = \alpha_i C_i - \beta_i S_i$, etc., el determinante de la matriz $[D_{ij}]$, D, es:

$$\begin{vmatrix} E_1^+ C_1 & -E_1^+ S_1 & E_1^- C_1 & E_1^- S_1 & E_2^+ C_2 & -E_2^+ S_2 & E_2^- C_2 & E_2^- S_2 \\ E_1^- C_1 & E_1^- S_1 & E_1^+ C_1 & -E_1^+ S_1 & E_2^- C_2 & E_2^- S_2 & E_2^+ C_2 & -E_2^+ S_2 \\ E_1^+ (\alpha C - \beta S)_1 & -E_1^+ (\alpha S + \beta C)_1 & -E_1^- (\alpha C + \beta S)_1 & -E_1^- (\alpha S - \beta C)_1 & E_2^+ (\alpha C - \beta S)_2 & -E_2^+ (\alpha S + \beta C)_2 & -E_2^- (\alpha C + \beta S)_2 & -E_2^- (\alpha S - \beta C)_2 \\ E_1^- (\alpha C + \beta S)_1 & E_1^- (\alpha S - \beta C)_1 & -E_1^+ (\alpha C - \beta S)_1 & E_1^+ (\alpha S + \beta C)_1 & E_2^- (\alpha C + \beta S)_2 & E_2^- (\alpha S - \beta C)_2 & -E_2^+ (\alpha C - \beta S)_2 & E_2^+ (\alpha S + \beta C)_2 \\ E_1^+ S_1 & E_1^+ C_1 & -E_1^- S_1 & E_1^- C_1 & E_2^+ S_2 & E_2^+ C_2 & -E_2^- S_2 & E_2^- C_2 \\ -E_1^- S_1 & E_1^- C_1 & E_1^+ S_1 & E_1^+ C_1 & -E_2^- S_2 & E_2^- C_2 & E_2^+ S_2 & E_2^+ C_2 \\ E_1^+ (\alpha S + \beta C)_1 & E_1^+ (\alpha C - \beta S)_1 & E_1^- (\alpha S - \beta C)_1 & -E_1^- (\alpha C + \beta S)_1 & E_2^+ (\alpha S + \beta C)_2 & E_2^+ (\alpha C - \beta S)_2 & E_2^- (\alpha S - \beta C)_2 & -E_2^- (\alpha C + \beta S)_2 \\ -E_1^- (\alpha S - \beta C)_1 & E_1^- (\alpha C + \beta S)_1 & -E_1^+ (\alpha S + \beta C)_1 & -E_1^+ (\alpha C - \beta S)_1 & -E_2^- (\alpha S - \beta C)_2 & E_2^- (\alpha C + \beta S)_2 & -E_2^+ (\alpha S + \beta C)_2 & -E_2^+ (\alpha C - \beta S)_2 \end{vmatrix}$$

Como era de esperar, el determinante no se anula para ningún valor de Λ si son simultáneamente no nulos γ y ω . En la Fig. 5 se ha representado, para cada par γ, ω , el valor de Λ don de es mínimo el determinante de los coeficientes; como se observa, este mínimo alcanza el valor cero únicamente si $\gamma=0$ ó bien si $\omega=0$.

En estos dos casos el problema se simplifica radicalmente pues debido a la naturaleza de las raíces se pueden agrupar las distintas constantes que aparecen en la expresión (36), quedando el problema en función de únicamente cuatro constantes,

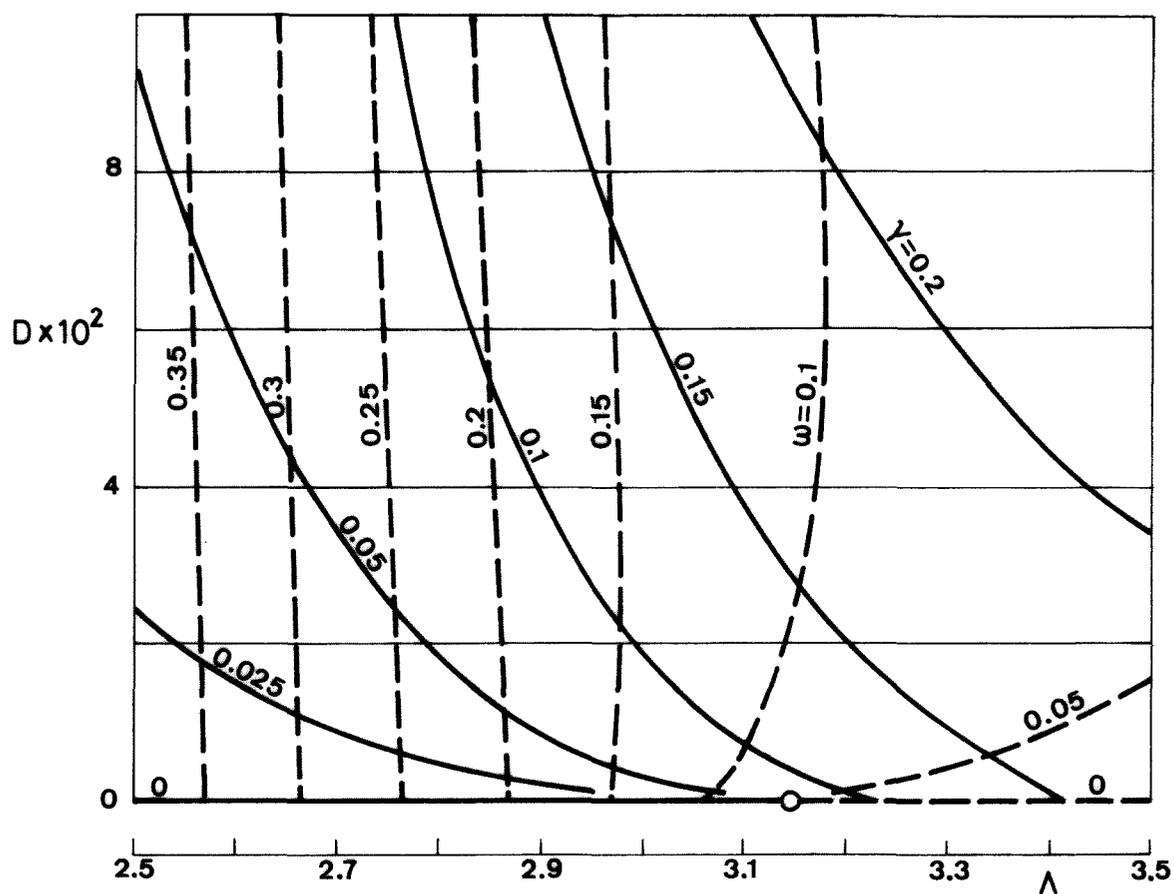


Fig. 5. Valor mínimo del determinante $D(\gamma, \omega, \Lambda)$ en función de Λ para diversos valores de γ y ω . Obsérvese que $D=0$ implica $\gamma=0$ ó $\omega=0$.

lo que facilita el tratamiento analítico de las soluciones.

I) Caso $\gamma=0$, $\omega \neq 0$ (Soluciones oscilatorias)

En este primer caso las raíces de la ecuación característica (33) son dos reales y dos imaginarias puras:

$$\pm\alpha, \pm i\beta,$$

con $\alpha^2 - \beta^2 = -1$, $\alpha\beta = \sqrt{2}\omega$. La velocidad axial y la forma de la zona quedan determinadas por las expresiones:

$$w = \text{sen}\omega t (Ae^{\alpha z} + Be^{-\alpha z} + C\cos\beta z + D\text{sen}\beta z) , \quad (38)$$

$$f = \frac{1}{2\omega} \cos\omega t [\alpha(Ae^{\alpha z} - Be^{-\alpha z}) + \beta(-C\text{sen}\beta z + D\cos\beta z)] , \quad (39)$$

y la aplicación de las condiciones de contorno da lugar al determinante:

$$\begin{vmatrix} e^{\alpha\Lambda} & e^{-\alpha\Lambda} & \cos\beta\Lambda & \text{sen}\beta\Lambda \\ e^{-\alpha\Lambda} & e^{\alpha\Lambda} & \cos\beta\Lambda & -\text{sen}\beta\Lambda \\ \alpha e^{\alpha\Lambda} & -\alpha e^{-\alpha\Lambda} & -\beta\text{sen}\beta\Lambda & \beta\cos\beta\Lambda \\ \alpha e^{-\alpha\Lambda} & -\alpha e^{\alpha\Lambda} & \beta\text{sen}\beta\Lambda & \beta\cos\beta\Lambda \end{vmatrix} = 0 ,$$

cuya anulación conduce a la ecuación de autovalores:

$$\text{ch}\alpha\Lambda \text{sh}\alpha\Lambda \cos\beta\Lambda \text{sen}\beta\Lambda - \sqrt{2}\omega (\text{ch}^2\alpha\Lambda \text{sen}^2\beta\Lambda - \text{sh}^2\alpha\Lambda \cos^2\beta\Lambda) = 0 . \quad (40)$$

En la Fig. 6b se muestran las soluciones de esta ecuación, representándose la pulsación ω en función de Λ .

Respecto a las constantes que aparecen en las ecuaciones (38) y (39), al ser nulo el determinante y quedar indeterminado el sistema de ecuaciones generado por las condiciones de contorno, se puede fijar una de las cuatro, por ejemplo A, y expresar las otras tres, B, C y D, en función de la anterior. Así, si se elimina la cuarta de las ecuaciones, se obtendrá el sistema:

$$\begin{bmatrix} e^{-\alpha\Lambda} & \cos\beta\Lambda & \operatorname{sen}\beta\Lambda \\ e^{\alpha\Lambda} & \cos\beta\Lambda & -\operatorname{sen}\beta\Lambda \\ -\alpha e^{-\alpha\Lambda} & -\beta\operatorname{sen}\beta\Lambda & \beta\cos\beta\Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ C \\ D \end{bmatrix} = -A \begin{bmatrix} e^{\alpha\Lambda} \\ e^{-\alpha\Lambda} \\ \alpha e^{\alpha\Lambda} \end{bmatrix}, \quad (41)$$

y realizados los cálculos apropiados resulta:

$$B = A \frac{D_{b\omega}}{D_{a\omega}}, \quad C = A \frac{D_{c\omega}}{D_{a\omega}}, \quad D = A \frac{D_{d\omega}}{D_{a\omega}}, \quad (42)$$

siendo:

$$\left. \begin{aligned} D_{a\omega} &= -\beta e^{\alpha\Lambda} + e^{-\alpha\Lambda} (\beta\cos 2\beta\Lambda + \alpha\operatorname{sen} 2\beta\Lambda) \\ D_{b\omega} &= \beta e^{-\alpha\Lambda} - e^{\alpha\Lambda} (\beta\cos 2\beta\Lambda - \alpha\operatorname{sen} 2\beta\Lambda) \\ D_{c\omega} &= 4\operatorname{ch}\alpha\Lambda (\beta\cos\beta\Lambda\operatorname{sh}\alpha\Lambda - \alpha\operatorname{sen}\beta\Lambda\operatorname{ch}\alpha\Lambda) \\ D_{d\omega} &= 4\operatorname{sh}\alpha\Lambda (\alpha\cos\beta\Lambda\operatorname{sh}\alpha\Lambda + \beta\operatorname{sen}\beta\Lambda\operatorname{ch}\alpha\Lambda) \end{aligned} \right\},$$

mientras que la constante A queda fijada por las condiciones iniciales. De acuerdo con las expresiones (25), si se quiere que sea ε el parámetro que mida la deformación inicial, se deberá fijar $A=2\omega$.

II) Caso $\omega=0, \gamma \neq 0$ (Rotura de la zona)

En este segundo caso aparecen distintas posibilidades según la amplificación, γ , sea mayor, igual o menor que $\sqrt{2}/4$. Se puede adelantar ya que para γ superior o igual a $\sqrt{2}/4$ la única solución posible es la trivial, $\Lambda=0$, por lo que el área de interés se centra en aquellos valores de γ inferiores a $\sqrt{2}/4$.

Cuando γ cumple esta acotación, las raíces de la ecuación característica son imaginarias puras:

$$\pm i\beta_1, \pm i\beta_2,$$

con $\beta_1^2 + \beta_2^2 = 1$ y $\beta_1\beta_2 = \sqrt{2}\gamma$; por tanto, en las expresiones de la velo

cidad axial y de la forma de la zona sólo aparecen funciones trigonométricas:

$$w = e^{\gamma t} (A \cos \beta_1 z + B \sin \beta_1 z + C \cos \beta_2 z + D \sin \beta_2 z) , \quad (43)$$

$$f = -\frac{1}{2\gamma} e^{\gamma t} [\beta_1 (-A \sin \beta_1 z + B \cos \beta_1 z) + \beta_2 (-C \sin \beta_2 z + D \cos \beta_2 z)] . \quad (44)$$

El cumplimiento de las condiciones de contorno exige que sea nulo el determinante:

$$\begin{vmatrix} \cos \beta_1 \Lambda & \sin \beta_1 \Lambda & \cos \beta_2 \Lambda & \sin \beta_2 \Lambda \\ \cos \beta_1 \Lambda & -\sin \beta_1 \Lambda & \cos \beta_2 \Lambda & -\sin \beta_2 \Lambda \\ -\beta_1 \sin \beta_1 \Lambda & \beta_1 \cos \beta_1 \Lambda & -\beta_2 \sin \beta_2 \Lambda & \beta_2 \cos \beta_2 \Lambda \\ \beta_1 \sin \beta_1 \Lambda & \beta_1 \cos \beta_1 \Lambda & \beta_2 \sin \beta_2 \Lambda & \beta_2 \cos \beta_2 \Lambda \end{vmatrix} = 0 ,$$

cuyo desarrollo genera la ecuación de autovalores:

$$\sin 2\beta_1 \Lambda \sin 2\beta_2 \Lambda - 2\sqrt{2}\gamma (1 - \cos 2\beta_1 \Lambda \cos 2\beta_2 \Lambda) = 0 , \quad (45)$$

cuyas raíces se muestran en la Fig. 6a (en esta figura se ha representado γ en función del primer autovalor no nulo de la esbeltez, pues los siguientes autovalores aparecen para valores de Λ muy alejados de la zona de interés).

También aquí se pueden expresar las constantes B, C y D en función de A, resultando:

$$\begin{bmatrix} \sin \beta_1 \Lambda & \cos \beta_2 \Lambda & \sin \beta_2 \Lambda \\ -\sin \beta_1 \Lambda & \cos \beta_2 \Lambda & -\sin \beta_2 \Lambda \\ \beta_1 \cos \beta_1 \Lambda & -\beta_2 \sin \beta_2 \Lambda & \beta_2 \cos \beta_2 \Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ C \\ D \end{bmatrix} = -A \begin{bmatrix} \cos \beta_1 \Lambda \\ \cos \beta_1 \Lambda \\ -\beta_1 \sin \beta_1 \Lambda \end{bmatrix} , \quad (46)$$

es decir:

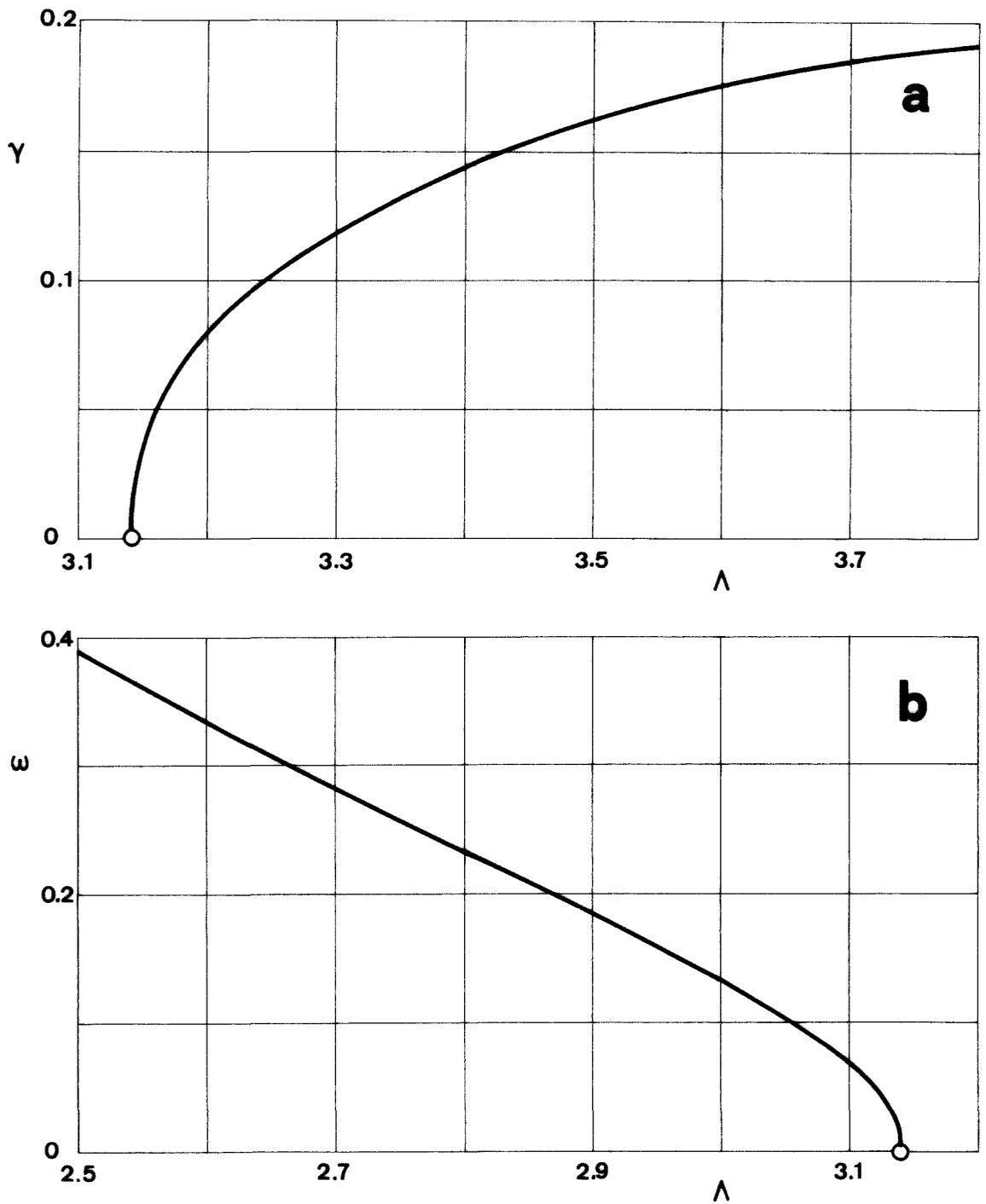


Fig. 6. Variación con la esbeltez, Λ , de dos parámetros que definen la evolución de la zona. a) amplificación, γ , y b) pulsación, ω . Resultados obtenidos a partir del análisis lineal del modelo unidimensional de Lee.

$$\left. \begin{aligned} B &= -AD\gamma \frac{\text{sen}\beta_2\Lambda}{\text{cos}\beta_2\Lambda} \\ C &= -A \frac{\text{cos}\beta_1\Lambda}{\text{cos}\beta_2\Lambda} \\ D &= AD\gamma \frac{\text{sen}\beta_1\Lambda}{\text{cos}\beta_2\Lambda} \end{aligned} \right\}, \quad (47)$$

donde:

$$D\gamma = \frac{\beta_1 \text{sen}\beta_1\Lambda \text{cos}\beta_2\Lambda - \beta_2 \text{cos}\beta_1\Lambda \text{sen}\beta_2\Lambda}{\beta_2 \text{sen}\beta_1\Lambda \text{cos}\beta_2\Lambda - \beta_1 \text{cos}\beta_1\Lambda \text{sen}\beta_2\Lambda},$$

y A, si se fija el mismo criterio que en el caso anterior, valdrá $A = -2\gamma$.

Es importante señalar que, a la vista de la Fig. 6, el modelo lineal resuelto reproduce el límite de estabilidad estática ya conocido para las zonas flotantes cilíndricas, [9]. En efecto, dentro de la validez de un análisis lineal, en la Fig. 6 se observa que si la esbeltez de la zona es inferior a π , una perturbación obliga a que la zona comience a oscilar con una frecuencia propia $\omega/2\pi$, que aumenta conforme disminuye Λ . Por el contrario, si la esbeltez es superior a π la zona evoluciona hacia la rotura, variando el radio del cuello de un modo exponencial con el tiempo. Aunque carece de sentido físico, es usual en la literatura ([35], [36]) introducir un tiempo de rotura lineal, t_{bl} , o tiempo que tardaría en alcanzar el valor cero el diámetro del cuello de la columna líquida.

A diferencia de los resultados obtenidos en chorros, la expresión (44) muestra que la posición del cuello de la zona depende de la esbeltez de la misma. Llamando Z a la parte dependiente de la variable espacial z en la expresión (44), tendremos:

$$f = e^{\gamma t} Z.$$

En la Fig. 7 se muestra la variación con Λ de la posición del cuello de la zona, z_m , así como el valor de Z en el cuello, Z_m .

Recordando las expresiones (25), el tiempo de rotura lineal se alcanzará en el instante en que $1 + \epsilon f \Big|_{z=z_m} = 0$, es decir:

$$1 - \epsilon e^{\gamma t_{bl}} Z_m = 0,$$

y por tanto:

$$t_{bl} = \frac{1}{\gamma} \text{Ln} \frac{1}{\epsilon Z_m}, \quad (48)$$

Se pueden comparar los resultados obtenidos con los co

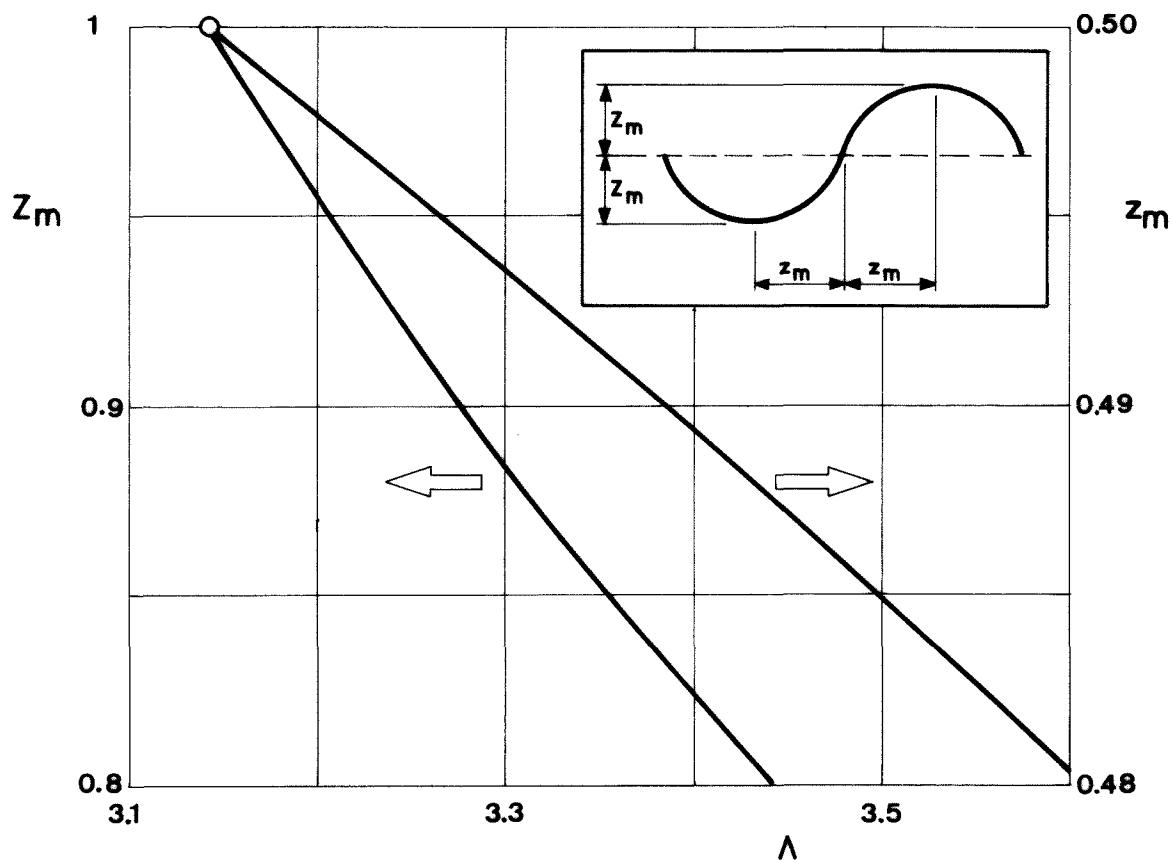


Fig. 7. Variación con la exbeltez, Λ , de la posición, z_m , de la máxima deformación, Z_m , de la zona flotante. Soluciones obtenidas a partir del análisis linealizado del modelo unidimensional de Lee.

rrespondientes a un chorro sometido a una perturbación superficial cuya longitud de onda sea idéntica a la esbeltez de la zona en consideración, lo que proporcionará una idea sobre el efecto que los discos ejercen en el mecanismo de la rotura. En la Fig. 15 se muestran, para un cierto intervalo de valores de Λ , la amplificación, γ , para una zona flotante y para un chorro, calculados en este último caso a partir de tres modelos linealizados distintos: el modelo tridimensional de Rayleigh, [27], y los unidimensionales de Lee y Bogy ([35], [36]).

Evidentemente, γ es mayor para un chorro (lo que significa tiempos de rotura menores) que para la zona flotante, ya que los discos suponen una barrera que frena el paso líquido de unas secciones a otras, obligando a que la velocidad sea nula donde en un chorro es máxima.

Para terminar, en las Figs. 8 y 9 se presentan la evolución con el tiempo del campo de velocidades y de la forma del puente líquido para dos zonas flotantes, una con esbeltez menor que π y la otra mayor, según el modelo lineal desarrollado en las páginas anteriores.

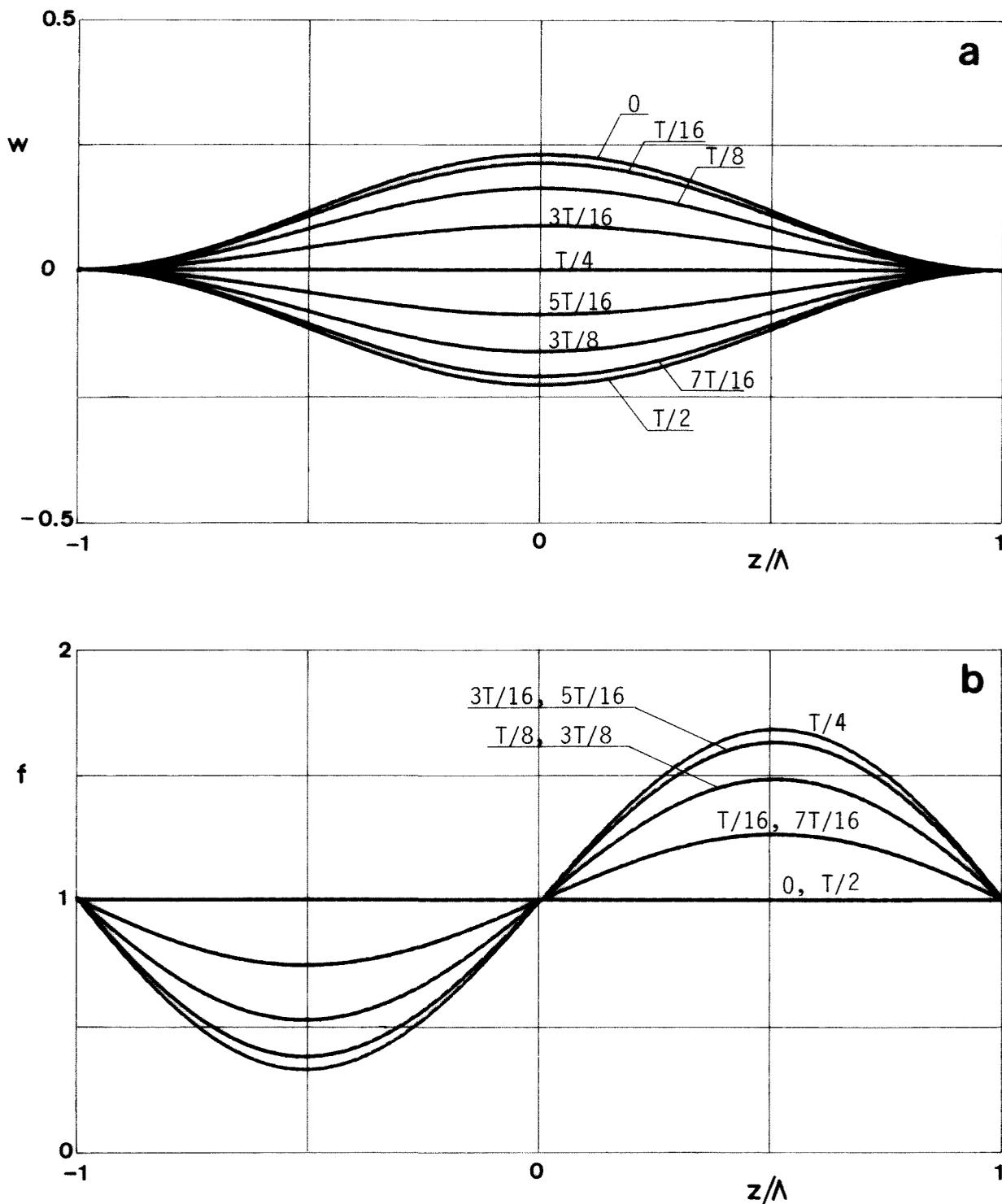


Fig. 8. Variación con el tiempo del campo de velocidades (a) y de la forma externa (b) de una zona flotante de esbeltez $\Lambda=2.9$. Soluciones obtenidas a partir del análisis linealizado del modelo unidimensional de Lee. Los números en las curvas indican el tiempo transcurrido desde el instante inicial en fracciones de período, $T=34.6$.

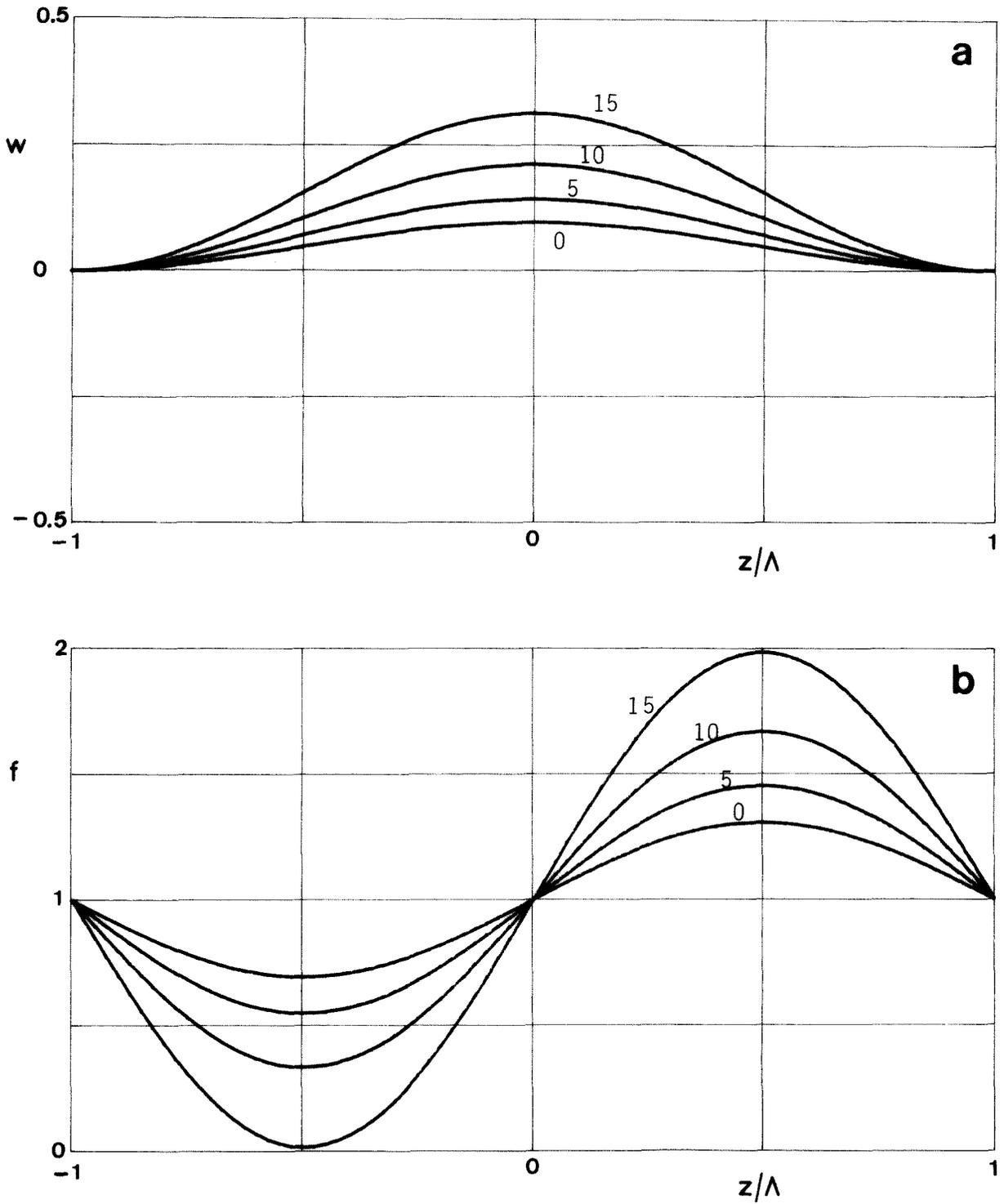


Fig. 9. Variación con el tiempo del campo de velocidades (a) y de la forma externa (b) de una zona flotante de esbeltez $\Lambda=3.2$. Soluciones obtenidas a partir del análisis linealizado del modelo unidimensional de Lee. Los números en las curvas indican el tiempo transcurrido desde el instante inicial.

1.4. MODELO UNIDIMENSIONAL DE COSSERAT

Bajo la teoría de los medios continuos de Cosserat el puente líquido se modela como una curva (el eje de simetría de la zona) a la que se le asignan en cada punto dos magnitudes vectoriales (directores) distintas del vector tangente a la curva, cuyas intensidades varían a lo largo de la misma ([45], [46]). El modelo general conduce a un sistema de infinitas ecuaciones con infinitas incógnitas, [47], que requieren de ulteriores hipótesis simplificadoras para llegar a una formulación tratable.

En su origen la teoría de Cosserat surgió para su aplicación a la mecánica de sólidos, aunque su carácter es completamente general; sin embargo, no se ha empezado a utilizar en el campo de la mecánica de los fluidos hasta finales de la década de los sesenta y en la actualidad constituye una herramienta muy utilizada en una amplia variedad de problemas, como pueden ser el estudio no lineal de chorros ([36], [37], [38], [39]) o el estudio de propagación de ondas en una interfase líquido-gas, [48].

La hipótesis simplificativa usada en las aplicaciones de la teoría de Cosserat al estudio del comportamiento de los chorros capilares, hipótesis que permite generar las ecuaciones constitutivas del modelo, es análoga a la de Lee: la velocidad axial en cualquier punto de la zona es independiente de la coordenada r , mientras que la radial es lineal en esta variable:

$$\vec{V}(r, z, t) = W(z, t)\vec{e}_z + rU^*(z, t)\vec{e}_r. \quad (49)$$

Lógicamente este modelo no reproduce todas las características del problema tridimensional, aunque sí las más importantes (en particular la condición de incompresibilidad, las condiciones de

contorno en la superficie libre y la ecuación de la energía en forma integral). Las ecuaciones del modelo de Cosserat, para una columna de líquido homogéneo, viscoso e incompresible, son ([36], [39]), en forma adimensional:

I) Conservación de la masa:

$$\frac{\partial F^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(F^2 W) = 0 \quad . \quad (50)$$

IIa) Cantidad de movimiento radial:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}F^4 \left[\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial t} + W \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right] = -P + \frac{F}{K} \left(1 - \frac{F}{K^2} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right) + \\ + \frac{1}{8}F^2 E \left(4F \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + F^2 \frac{\partial^3 W}{\partial z^3} - 8 \frac{\partial W}{\partial z} \right) \quad . \quad (51) \end{aligned}$$

IIb) Cantidad de movimiento axial:

$$\begin{aligned} F^2 \left(\frac{\partial W}{\partial t} + W \frac{\partial W}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{2}{K} \frac{\partial F}{\partial z} \left(1 - \frac{F}{K^2} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right) + \\ + 2FE \left(2 \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} + F \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) \quad . \quad (52) \end{aligned}$$

Donde P representa una combinación lineal entre una presión arbitraria función de z (la presión en el eje de la zona) y la presión exterior, constante, y

$$K = \left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2} \quad . \quad (53)$$

La expresión que relaciona la velocidad radial, rU^* , según (49), con la axial, W, es:

$$U^* = - \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial z} \quad , \quad (54)$$

análogamente a lo obtenido con el modelo de Lee.

El sistema de ecuaciones (50) a (54) se debe completar con las condiciones de contorno específicas de la zona flotante,

en los discos:

$$\left. \begin{aligned} W(\pm\Lambda, t) &= 0 \\ F(\pm\Lambda, t) &= 1 \end{aligned} \right\}, \quad (55)$$

y las iniciales:

$$\left. \begin{aligned} W(z, 0) &= W_0 \\ F(z, 0) &= F_0 \end{aligned} \right\}, \quad (56)$$

Las ecuaciones (51) y (52) se pueden reducir a una sola por eliminación de P entre ambas. Derivando respecto a z la (51) y restándola a la (52) resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} + W \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{1}{2} F \frac{\partial F}{\partial z} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial t} + W \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{1}{8} F^2 \left(\frac{\partial^3 W}{\partial z^2 \partial t} + W \frac{\partial^3 W}{\partial z^3} \right) = \\ = \frac{1}{K} \frac{\partial F}{\partial z} \left[\frac{1}{F^2} + \frac{1}{FK^2} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{3}{K^4} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right)^2 \right] + \frac{1}{K^3} \frac{\partial^3 F}{\partial z^3} + \\ + E \left[\frac{6}{F} \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} + \left[3 - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 - \frac{F}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right] \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - F \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial^3 W}{\partial z^3} - \frac{F^2}{8} \frac{\partial^4 W}{\partial z^4} \right] \quad (57) \end{aligned}$$

Ecuación que junto a la (50) y a las condiciones (55) y (56) constituyen la formulación del modelo de Cosserat para la zona flotante.

1.4.1. Resolución del problema linealizado no viscoso

Sea ε un parámetro pequeño que, al igual que en el modelo de Lee, mide la deformación de la superficie libre respecto a la posición cilíndrica. Si ε es suficientemente pequeño se podrán despreciar términos en ε^2 y escribir las variables del problema en la forma:

$$\left. \begin{aligned} F &= 1 + \varepsilon f \\ W &= \varepsilon w \end{aligned} \right\}, \quad (58)$$

introduciendo estas expresiones en las ecuaciones (50) y (57) y en las condiciones (55) y (56), se llega a las siguientes ecuaciones y condiciones linealizadas:

I) Conservación de la masa:

$$2 \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad . \quad (59)$$

II) Cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{8} \frac{\partial^3 w}{\partial z^2 \partial t} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} + E \left(3 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{1}{8} \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} \right) \quad . \quad (60)$$

Las condiciones de contorno son:

$$\left. \begin{aligned} w(\pm \Lambda, t) &= 0 \\ f(\pm \Lambda, t) &= 0 \end{aligned} \right\}; \quad (61)$$

las iniciales:

$$\left. \begin{aligned} w(z, 0) &= w_0 \\ f(z, 0) &= f_0 \end{aligned} \right\}; \quad (62)$$

y la condición (redundante) de conservación del volumen total.

El proceso a partir de ahora es análogo al seguido en 3.1, eliminando la variable f entre las ecuaciones (59) y (60) resulta, para la velocidad de perturbación axial:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1}{8} \frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} - 3E \frac{\partial^3 w}{\partial z^2 \partial t} + \frac{E}{8} \frac{\partial^5 w}{\partial z^4 \partial t} = 0 \quad , \quad (63)$$

con las condiciones de contorno:

$$\left. \begin{aligned} w(\pm \Lambda, t) &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=\pm \Lambda} &= 0 \end{aligned} \right\} , \quad (64)$$

Puesto que buscamos soluciones del mismo tipo que las representadas por la expresión (32), introduciendo ésta en la ecuación (63) se llega a la ecuación diferencial ordinaria:

$$\left(1 + \frac{1}{4}E\tau\right) \frac{d^4 w}{dz^4} + \left(1 - \frac{1}{4}\tau^2 - 6E\tau\right) \frac{d^2 w}{dz^2} + 2\tau^2 w = 0 \quad ,$$

cuyas soluciones, $e^{\theta z}$, deben cumplir la ecuación característica:

$$\left(1 + \frac{1}{4}E\tau\right)\theta^4 + \left(1 - \frac{1}{4}\tau^2 - 6E\tau\right)\theta^2 + 2\tau^2 = 0 \quad , \quad (65)$$

que en el caso no viscoso, $E=0$, se reduce a:

$$\theta^4 + \left(1 - \frac{1}{4}\tau^2\right)\theta^2 + 2\tau^2 = 0 \quad . \quad (66)$$

En la Fig. 10 se muestra el plano de las soluciones de la ecuación (66). Este mapa, al igual que el presentado en la Fig. 4, tiene también dos hojas y es simétrico respecto al origen, por lo que sólo se ha representado un cuadrante del mismo. Con el convenio ya conocido, para cada valor de $\tau = \gamma + i\omega$, las cuatro raíces de (66) son $\pm\theta_1$ y $\pm\theta_2$, siendo:

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \alpha_1(\gamma, \omega) + i\beta_1(\gamma, \omega) \\ \theta_2 &= \alpha_2(\gamma, -\omega) - i\beta_2(\gamma, -\omega) \end{aligned} \right\} \quad , \quad (67)$$

con α y β reales positivos.

Como se ve, en el caso no viscoso ($E=0$) los modelos de Lee y de Cosserat son análogos dentro del rango de valores de γ y ω de interés (por ejemplo, el valor de γ que en el caso $\omega = 0$ separa las soluciones con raíces imaginarias puras de las raíces complejas de la forma general (67) es $\gamma=0.3431$ en el modelo de Cosserat en vez de $\gamma=\sqrt{2}/4=0.3536$, obtenido con las ecuaciones de Lee) por lo que no merece la pena repetir de nuevo todos los desarrollos efectuados en 3.1. Formalmente las expresiones de la velocidad axial y la forma de la zona son las (38) y (39) para el caso $\gamma=0$, $\omega \neq 0$, y las (43) y (44) para el caso de $\gamma \neq 0$, $\omega=0$, las expresiones del determinante de los coeficientes, ecuaciones

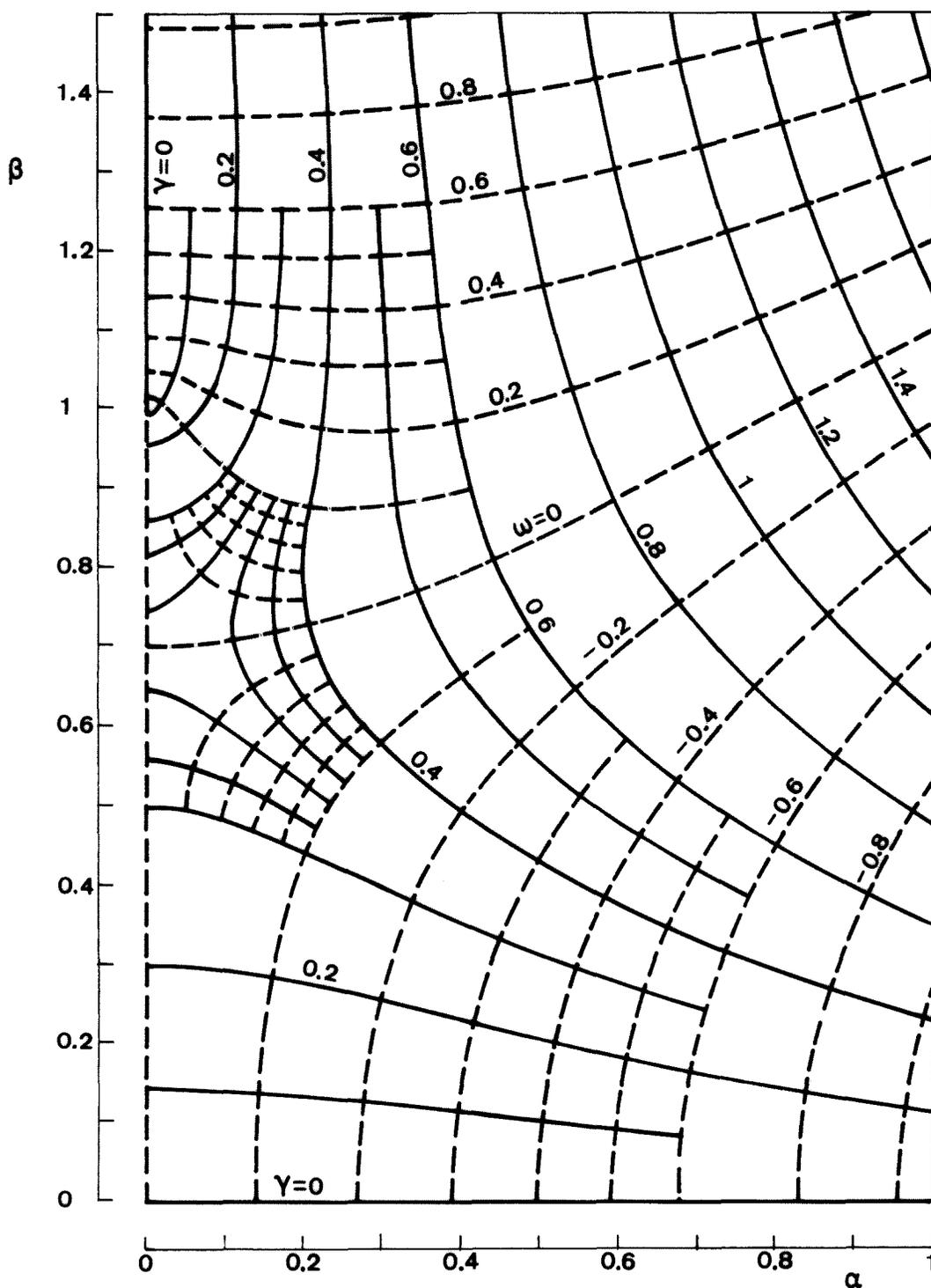


Fig. 10. Plano complejo $\theta(\tau)$, con $\theta=\alpha+i\beta$ y $\tau=\gamma+i\omega$, correspondiente a las soluciones de la ecuación compleja $\theta^4+(1-\frac{1}{4}\tau^2)\theta^2+2\tau^2=0$. Las cuatro raíces para un τ dado son $\pm\theta_1$ y $\pm\theta_2$, siendo:

$$\theta_1 = \alpha_1(\gamma, \omega) + i\beta_1(\gamma, \omega)$$

$$\theta_2 = \alpha_2(\gamma, -\omega) - i\beta_2(\gamma, -\omega).$$

de autovalores y constantes de integración son también las mismas, con la única salvedad de que las raíces que aparecen en estas expresiones lo son ahora de la ecuación característica (66) en vez de la (33).

1.4.2. Efectos de la viscosidad en la evolución de una zona flotante

Al considerar la viscosidad el panorama cambia radicalmente. Al incluir este parámetro, el mapa de las soluciones de la ecuación característica se deforma (aunque sigue siendo simétrico respecto al origen) y las dos hojas que constituyen el plano ya no coinciden. Por cada punto del plano pasan dos parejas de curvas $\gamma = \text{cte}$, $\omega = \text{cte}$.

En la Fig. 11 se esquematizan las diversas posibilidades para el caso en que el parámetro de viscosidad, E , valga 0.1. En esta figura se han representado las raíces de la ecuación (65), dividiendo el mapa en otros cuatro, según $\tau = \gamma + i\omega$ pertenezca a uno y otro cuadrante del plano complejo. Conviene recordar que en este mapa se ha seguido el mismo criterio que el utilizado en las Figs. 4 y 10, la parte real de las raíces de θ está representada por el eje horizontal y la parte imaginaria por el vertical; fijado τ , es decir γ y ω , basta con situar sobre el mapa correspondiente los puntos representativos para obtener por lectura directa las cuatro raíces $\pm\theta_1$ y $\pm\theta_2$. Inversamente, fijada una raíz θ , el mapa proporciona desde qué valores de τ se puede alcanzar esta raíz.

Recordando brevemente el objetivo perseguido, buscamos soluciones a la ecuación diferencial (63) cuya forma general vie

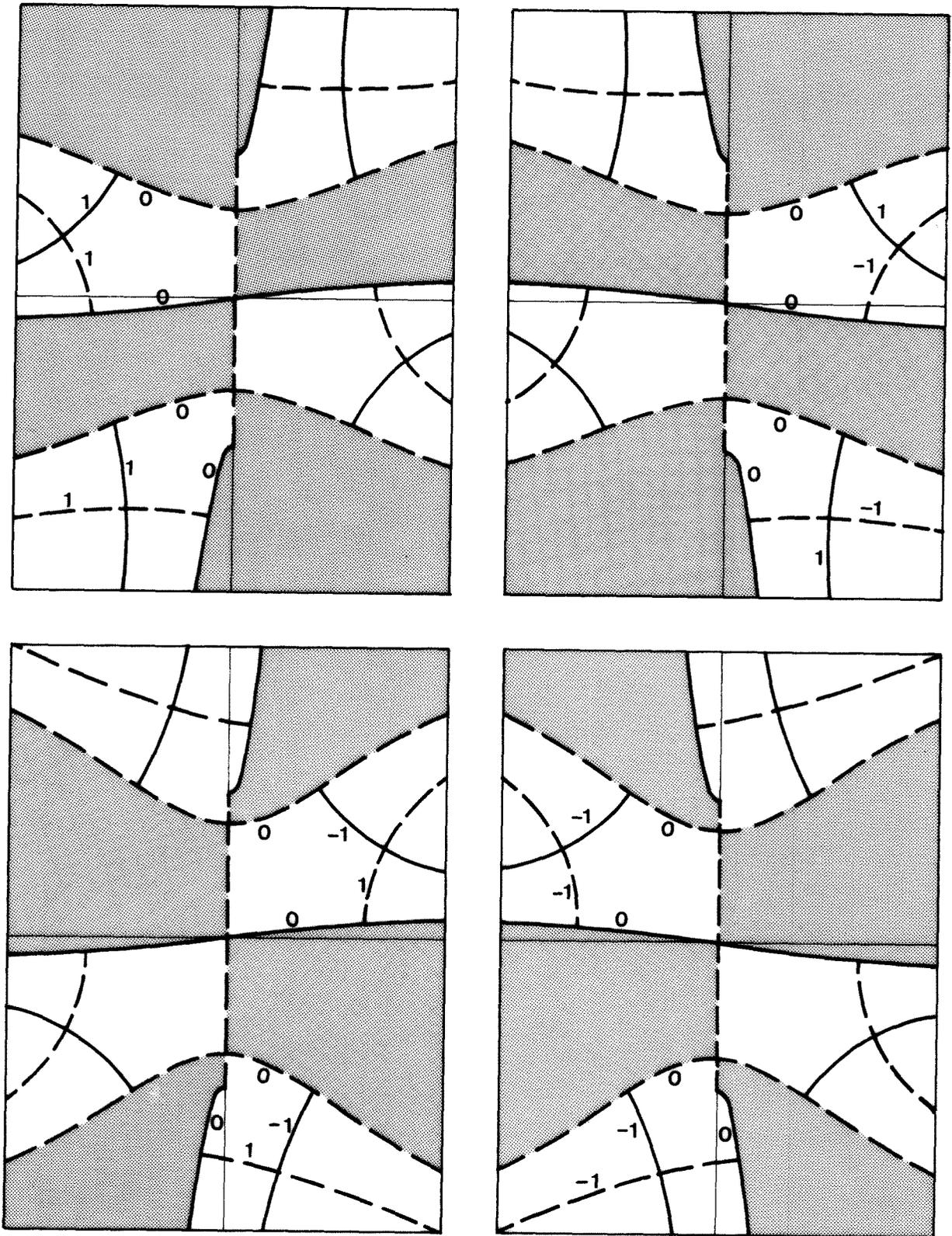


Fig. 11. Esquema del plano de las raíces de la ecuación compleja (65), para un valor del parámetro de viscosidad $E=0.1$, según los signos de las partes real e imaginaria de $\tau=\gamma+i\omega$. Las áreas sombreadas indican zonas inalcanzables para los valores asignados a γ y ω en cada caso.
—— $\gamma=cte.$ - - - - $\omega=cte.$

ne dada por la expresión (36). Estas soluciones deben cumplir las condiciones de contorno (64), lo que implica la anulación del determinante de los coeficientes (37) (véase Tabla 1), que constituye la ecuación de autovalores, es decir, se trata de encontrar ternas de valores γ , ω , Λ tales que

$$D(\gamma, \omega, \Lambda) = 0 .$$

Se puede avanzar un poco más acudiendo a la experiencia adquirida en la resolución de los casos no viscosos e introduciendo ciertas ideas físicas en el razonamiento.

Parece lógico pensar que una vez sobrepasado el límite de estabilidad estático, $\Lambda > \pi$, la viscosidad no altere el carácter de la solución. En esta región es de esperar pues que la zona evolucione hacia la rotura, lo que significa $\gamma > 0$, $\omega = 0$, y raíces imaginarias puras en la ecuación característica (65). La simple inspección del mapa de la Fig. 11 confirma el razonamiento, pues es posible tener este tipo de raíces con $\omega = 0$.

También es lógico pensar que al ser $E \neq 0$, no puedan existir soluciones oscilatorias no amortiguadas, aspecto este que también muestra el mapa de la Fig. 11 ya que, según el problema no viscoso, a este tipo de soluciones ($\gamma = 0$, $\omega \neq 0$) le corresponden raíces de la ecuación característica del tipo $\pm\alpha$, $\pm i\beta$, lo que no puede ocurrir ahora pues las líneas $\gamma = 0$ ya no coinciden con los ejes coordenados. Así, para $\Lambda < \pi$ las soluciones deberán ser amortiguadas ($\gamma < 0$, $\omega = 0$) u oscilatorias amortiguadas ($\gamma < 0$, $\omega \neq 0$) lo que está de acuerdo con la evidencia experimental, habida cuenta que estamos realizando un análisis linealizado.

Ciñéndonos en primer lugar al caso de rotura de la zona ($\gamma \neq 0$, $\omega = 0$), para $E = 0$ desechábamos los valores negativos de γ

por carecer de sentido físico (obviamente, cuando $E=0$, si γ y Λ son soluciones de la ecuación de autovalores (45), $-\gamma$ y Λ también lo son) encontrando además que sólo eran posibles soluciones de este tipo para $\Lambda \geq \pi$.

Para $E \neq 0$ la ecuación de autovalores da también soluciones para $\Lambda < \pi$. En efecto, si se representan las raíces de la ecuación característica (65) en función de γ (con $\omega=0$) para distintos valores del parámetro E se obtienen las curvas incluidas en la Fig. 12. Para cada valor de E las curvas presentan un máximo (en el punto $(0,1)$ para $E=0$) cuya posición corresponde a valores de γ cada vez más negativos conforme aumenta E . Fijado E , si analizamos la respuesta frente a γ , se observa que a partir de un cierto valor $\gamma > 0$ no existe solución (punto que corresponde a un autovalor $\Lambda \rightarrow \infty$); conforme disminuye γ una de las raíces se acerca a la unidad y la otra a cero, alcanzando estos valores en $\gamma=0$ (que corresponde a $\Lambda=\pi$ al resolver la ecuación de autovalores).

Si se disminuye aún más γ (valores negativos) en el caso $E=0$ vuelven a aparecer las mismas raíces y por tanto los autovalores, como ya se ha dicho, son los mismos, pero si $E > 0$, siguen apareciendo raíces distintas que dan lugar a nuevos autovalores cada vez menores hasta llegar al máximo de cada curva en que se alcanza el mínimo Λ . A partir de este punto, si se disminuye aún más γ , los valores de Λ que anulan el determinante aumentan.

En la Fig. 13 se muestran, en términos de la esbeltez Λ y la amplificación γ , los resultados de la discusión anterior (en la figura se han incluido también, como elemento de comparación, los resultados obtenidos con el modelo lineal de Lee). Las

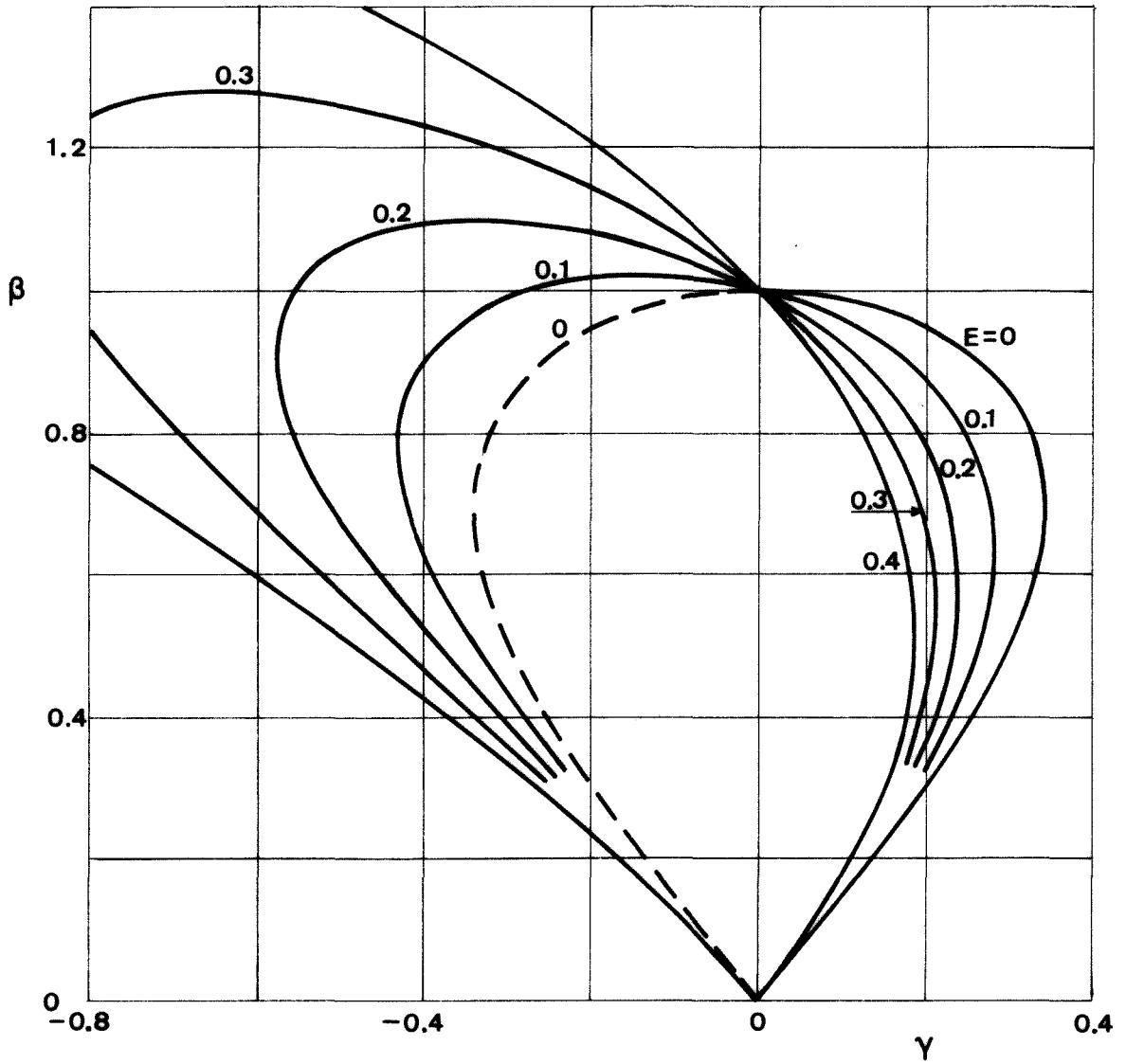


Fig. 12. Soluciones de la ecuación característica (65) para el caso $\omega=0$. Los números en las curvas indican el valor del parámetro de viscosidad E . Fijados γ y E las raíces de la ecuación son:

$$\pm i\beta_1, \pm i\beta_2.$$

La línea etiquetada $E=0$, con $\gamma < 0$, se ha dibujado a trazos pues corresponde a soluciones carentes de sentido físico.

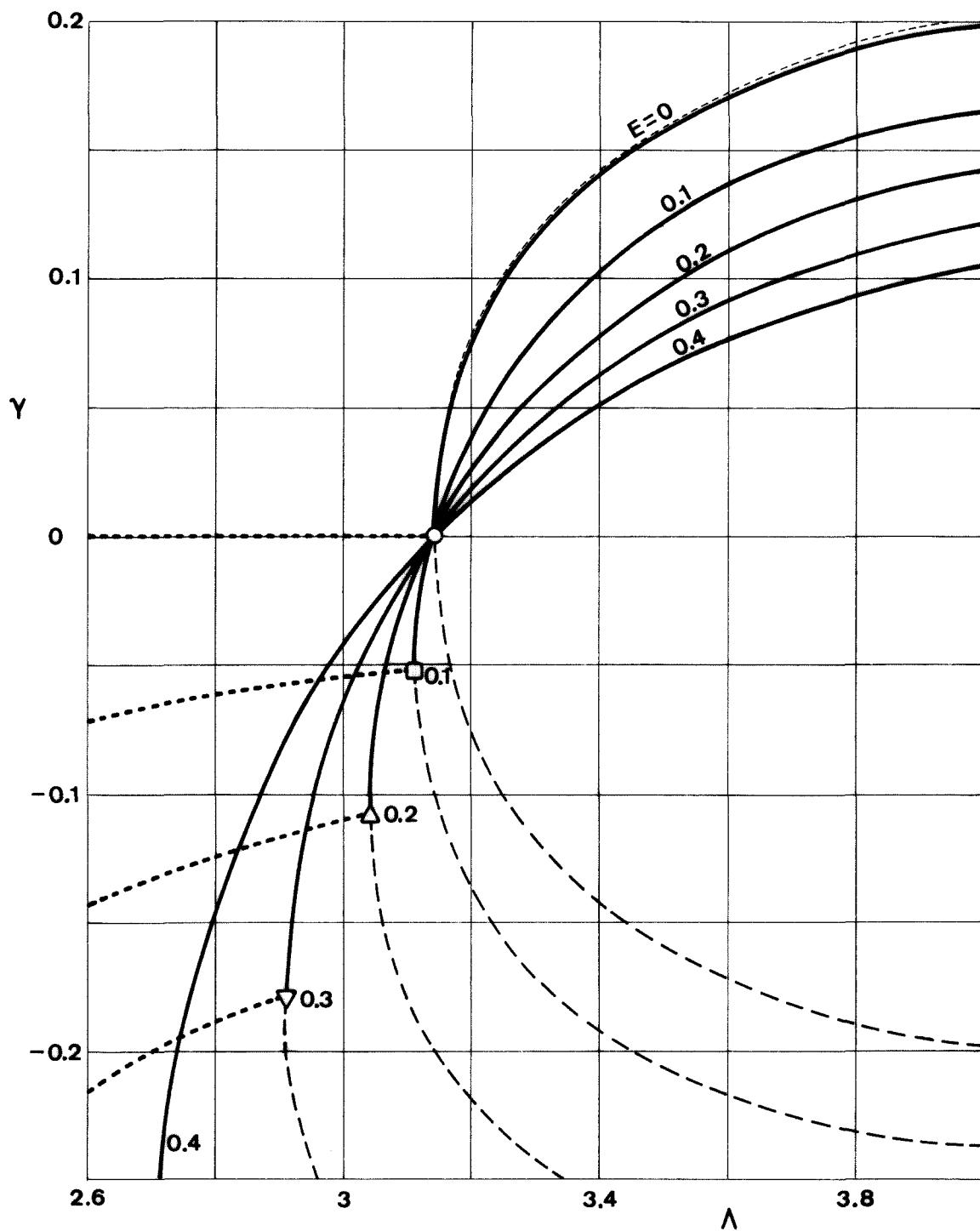


Fig. 13. Amplificación, γ , en función de la esbeltez de la zona, Λ , para distintos valores del parámetro de viscosidad E . Las curvas se han obtenido a partir de un modelo linealizado de las ecuaciones de Cosserat. La línea a trazos finos (superior) representa la solución obtenida con el modelo linealizado de Lee.

curvas se han dibujado con trazo continuo hasta el punto de tangente vertical y discontinuo para las ramas inferiores a partir de dichos puntos (esta parte de las curvas carece de sentido físico pues significan evoluciones amortiguadas incluso para esbelteces superiores al límite de estabilidad estático, π) y las líneas a trazos cortos y gruesos que se desplazan hacia la izquierda, corresponden a soluciones oscilatorias que serán discutidas posteriormente.

A la vista de la Fig. 13 se pueden establecer ciertas conclusiones. En primer lugar, todas las curvas, independientemente del valor de E pasan por el punto $(\pi, 0)$; esto significa que la viscosidad no altera el límite de estabilidad. Además, para cada valor de Λ , un aumento del valor del parámetro de viscosidad E se traduce en una disminución de γ , es decir, el tiempo de rotura aumenta conforme el líquido es más viscoso.

Otro de los resultados a destacar en este análisis lineal es que se pueden tener soluciones amortiguadas no oscilatorias ($\gamma < 0$) si, dependiendo del valor de E , la esbeltez de la zona está suficientemente próxima al valor π .

Antes de seguir, conviene tener una cierta idea de los valores del parámetro de viscosidad E que se pueden presentar en la realidad; así, por ejemplo, considerando el agua y algunas dimetil-siliconas, líquidos con una densidad próxima a 10^3 kg.m^{-3} , la viscosidad puede oscilar entre $10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ y $10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, y la tensión superficial entre 0.007 N.m^{-1} y 0.02 N.m^{-1} . Con estos valores, recordando la definición de $E = v \sqrt{\frac{\rho}{\sigma R}}$, resulta que, para zonas cilíndricas con un radio del orden de 10^{-2} m , el parámetro E oscila entre 10^{-3} y 10^{-1} , correspondiendo el valor inferior al

líquido de menor viscosidad (agua).

Falta aún por estudiar qué comportamiento tendrá la zona para esbelteces más inferiores aún al límite de estabilidad π . Como se ha establecido en las páginas anteriores, no se pueden encontrar raíces de la forma $\pm\alpha$, $\pm i\beta$ para $\gamma=0$, $\omega \neq 0$ fuera del caso $E=0$. Con todo, sabemos que si el modelo reproduce con cierta aproximación la realidad, para cada E deberán existir pares γ , ω (cualesquiera que sean las raíces de la ecuación (65)) que anulen el determinante de los coeficientes para algún valor de la esbeltez.

$$D(\gamma, \omega, \Lambda) = 0. \quad (68)$$

El problema se ha resuelto numéricamente de la forma siguiente: fijados Λ y E , se elijen un par γ , ω iniciales, se calcula numéricamente la dirección de máxima pendiente sobre la superficie $D=D(\gamma, \omega)$ y se incrementan los valores de γ y ω según esa dirección. El proceso continúa hasta que el valor de D se hace inferior a una cierta cota equivalente al cero numérico (del orden de 10^{-9}). Con todo, el proceso requiere cierta intervención manual pues la superficie $D=D(\gamma, \omega)$ presenta también una sima en el origen ($D(0,0)=0$) en la que indefectiblemente se cae si no se eligen γ y ω suficientemente próximos a los valores correspondientes a la segunda sima.

Planteado así el problema, sí se encuentran soluciones de este tipo, con γ y ω a la vez no nulos y $\gamma < 0$. En la Fig. 14 se muestran las soluciones halladas; en la Fig. 14a se han representado, en función de Λ , los valores de la pulsación, ω , para distintos valores del parámetro de viscosidad, E (en esta figura se incluyen también los resultados obtenidos en el análisis li-

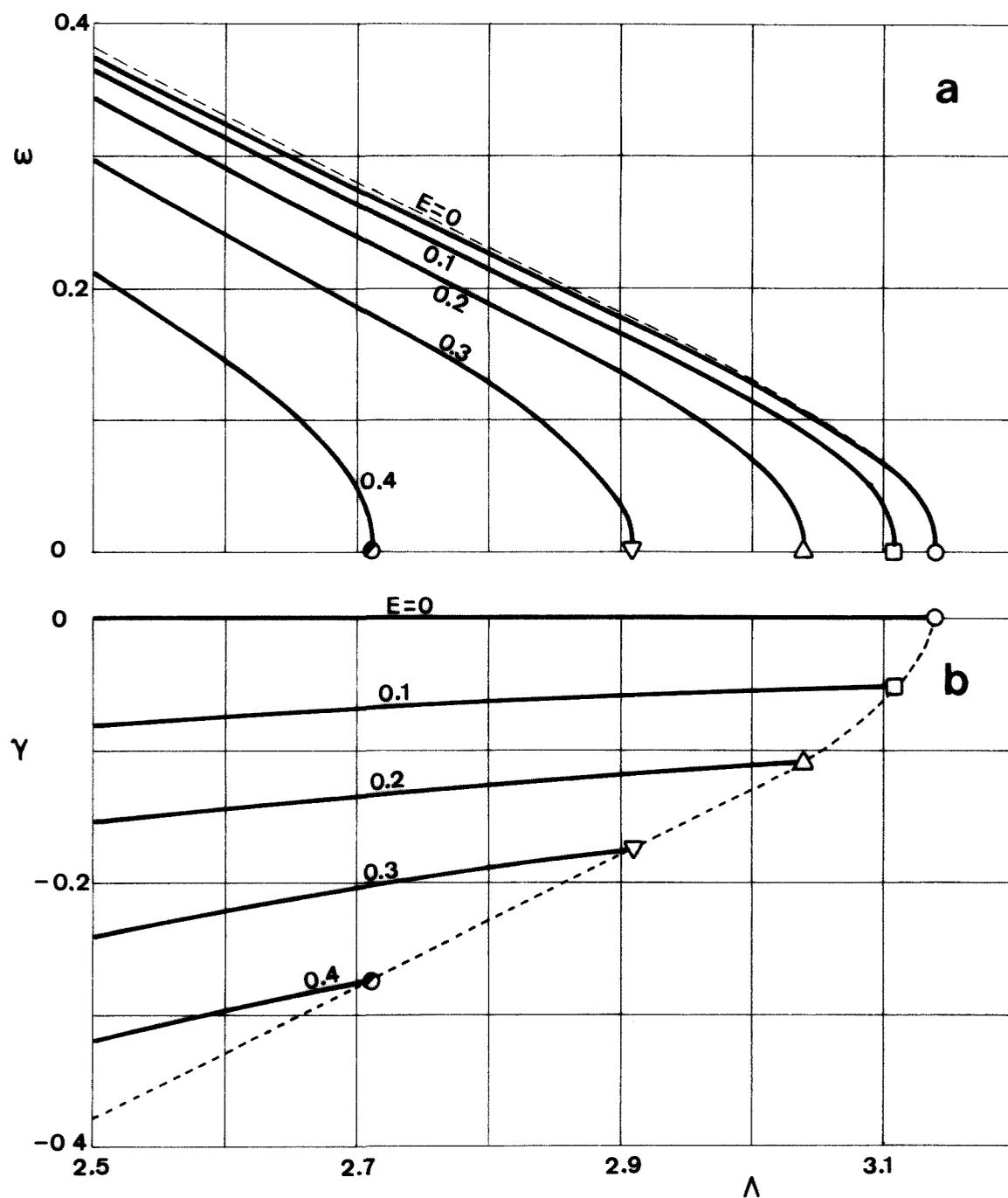


Fig. 14. Variación con la esbeltez, Λ , de los parámetros que definen la evolución de la zona: pulsación, ω , y coeficiente de amortiguación, γ , para distintos valores del parámetro de viscosidad E . Resultados obtenidos a partir del análisis lineal del modelo de Cosserat. La línea a trazos finos en a) representa la solución obtenida con el modelo linealizado de Lee.

neal del modelo de Lee) y en la Fig. 14b se muestra, para los mismos valores de E , la variación con la esbeltez del coeficiente de amortiguación, γ .

Como se puede apreciar, el valor $\omega=0$ se alcanza para esbelteces cada vez menores conforme aumenta E . Estos puntos ($\omega=0$) se han marcado con los mismos símbolos que en la Fig. 13 puesto que, para cada E , a partir de la esbeltez correspondiente a la marca respectiva, las curvas de la Fig. 14 continúan con las representadas en la Fig. 13.

Así pues, si la esbeltez es suficientemente pequeña, el efecto de la viscosidad se traduce en que las frecuencias propias son menores a la par que disminuye el tiempo de amortiguación.

Para terminar con este caso sólo resta añadir que la velocidad de perturbación axial, w , responderá ahora a la expresión general (36) y que la forma de la zona, f , se calcula mediante una sencilla integración a partir de esta expresión haciendo uso de la ecuación de continuidad (59).

Debido al elevado número de constantes de integración que aparecen en la expresión (36) es difícil el tratamiento analítico de las mismas tal como se ha hecho en los diversos casos no viscosos. Estas constantes se calculan numéricamente para cada caso ($E, \Lambda, \gamma, \omega$) resolviendo el sistema de ecuaciones que resulta de suprimir una de las ocho ecuaciones de compatibilidad derivadas de las condiciones de contorno, expresando siete de estas constantes en función de la octava que a su vez se fija por las condiciones iniciales. Con la nomenclatura utilizada en la Tabla 1, si se suprime la última de las ecuaciones y se elige A_1

como constante indeterminada, el sistema a resolver es:

$$\begin{bmatrix} D_{12} & D_{13} & \dots & D_{18} \\ D_{22} & D_{23} & \dots & D_{28} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_{72} & D_{73} & \dots & D_{78} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ B_1 \\ \vdots \\ C_2 \end{bmatrix} = -A_1 \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{21} \\ \vdots \\ D_{71} \end{bmatrix} . \quad (69)$$

Por último, para finalizar el estudio de los modelos linealizados de Cosserat y de Lee, se pueden comparar los resultados obtenidos con estas formulaciones unidimensionales con las obtenidas a partir de modelos tridimensionales. A tal efecto, en la Fig. 15 se muestra la variación de la amplificación, γ , en función de Λ (longitud de onda de la perturbación) para un chorro no viscoso, homogéneo e incompresible, calculada a partir de tres modelos:

a) Modelo unidimensional linealizado de Lee:

$$\gamma^2 = \frac{1}{2}k^2(1 - k^2) ,$$

b) Modelo unidimensional linealizado de Cosserat:

$$\gamma^2 = \frac{4k^2(1 - k^2)}{8 + k^2} ,$$

c) Modelo tridimensional linealizado de Rayleigh:

$$\gamma^2 = k(1 - k^2) \frac{I_1(k)}{I_0(k)} ,$$

donde $k = \pi/\Lambda$, e I_0 e I_1 son las funciones de Bessel hiperbólicas de orden cero y de primer orden respectivamente.

En la Fig. 15 se han incluido también los resultados obtenidos para la zona flotante con los modelos lineales de Lee y Cosserat.

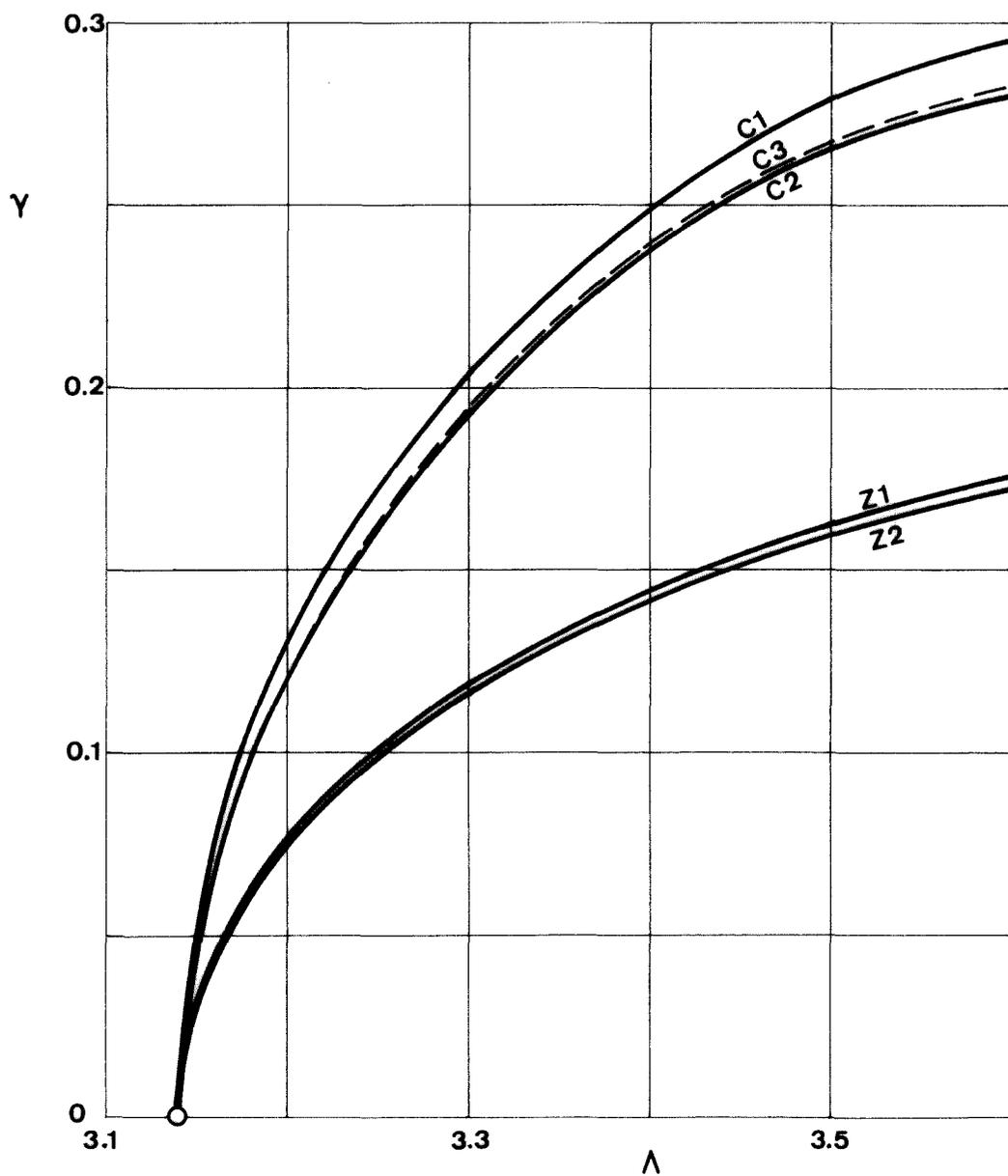


Fig. 15. Amplificación, γ , en función de la esbeltez de la zona, o la longitud de onda de la perturbación para chorros, Λ , obtenida a partir de diversos modelos linealizados.

- C1) Modelo unidimensional de Lee para chorros.
- C2) Modelo unidimensional de Cosserat para chorros.
- C3) Modelo tridimensional de Rayleigh para chorros.
- Z1) Modelo unidimensional de Lee para la zona flotante.
- Z2) Modelo unidimensional de Cosserat para la zona flotante.

Dos aspectos resultan especialmente relevantes a la vista de estas curvas. El primero, que para chorros, los resultados unidimensionales se pueden calificar como excelentes si se comparan con los obtenidos con el modelo clásico de Rayleigh. El segundo, como ya se dijo en 3.1, que el comportamiento de la zona es notablemente distinto al de un chorro, explicación que hay que buscar en la presencia de los discos, que obligan a la zona a permanecer anclada y a que la velocidad axial sea nula, con pendiente también nula, en los puntos homólogos a los de máxima velocidad en un chorro.

1.5. ANALISIS NUMERICO DE LA ROTURA AXILSIMETRICA DE UNA ZONA FLOTANTE (MODELO DE LEE)

Las ecuaciones generales del modelo unidimensional de Lee (expresiones (19), (20) y (24)) se han integrado numéricamente suponiendo que en el instante inicial el campo de velocidades es nulo y que la forma de la zona presenta una perturbación axilsimétrica.

La integración se ha realizado utilizando un método explícito en diferencias finitas (método de Lax-Wendroff) basado en un esquema de diferencias centradas para las derivadas espaciales y de diferencias progresivas para las temporales.

Para los cálculos se ha utilizado un microprocesador Hewlett-Packard 9845B con salida gráfica, habiéndose desarrollado el programa en lenguaje HP-BASIC.

1.5.1. Ecuaciones generales

Como variables de cálculo se han usado $S=F^2$ que representa, salvo el factor π , el área de la zona en cada sección, y $Q=F^2W$, que es proporcional a la cantidad de movimiento axial en cada sección. Con estas variables, las ecuaciones del movimiento son:

I) Continuidad:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \quad . \quad (70)$$

II) Cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q^2}{S} \right) = -S \frac{\partial P}{\partial z} \quad . \quad (71)$$

En términos de las nuevas variables, la expresión que relaciona

la presión con la forma de la zona es ahora:

$$P = \frac{2}{[4S + (\partial S/\partial z)^2]^{1/2}} \left[1 - \frac{2S\partial^2 S/\partial z^2 - (\partial S/\partial z)^2}{4S + (\partial S/\partial z)^2} \right], \quad (72)$$

y las condiciones de contorno:

$$\left. \begin{aligned} Q(\pm\Lambda, t) &= 0 \\ S(\pm\Lambda, t) &= 1 \end{aligned} \right\}, \quad (73)$$

e iniciales:

$$\left. \begin{aligned} S(z, 0) &= 1 + \varepsilon(\varepsilon - 2) \operatorname{sen} \frac{\pi z}{\Lambda} \\ Q(z, 0) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (74)$$

La perturbación inicial se ha impuesto sinusoidal en el área y no en el radio; esto presenta la ventaja de que para cualquier valor del parámetro ε , que mide el radio del cuello de la zona en el instante inicial ($\varepsilon = 1 - F_m$), el volumen inicial coincide con el de la zona cilíndrica de igual esbeltez, y además, que la forma inicial se ajusta más a las formas de equilibrio obtenidas en baños de Plateau cuando las densidades de zona y baño no son exactamente iguales (formas de equilibrio con una pequeña gravedad axial) en el sentido de que la diferencia de radios respecto al cilindro es menor en la parte gruesa de la zona que en el cuello.

1.5.2. Esquema de cálculo

Las ecuaciones (70) a (72) pertenecen a la clase de ecuaciones en derivadas parciales hiperbólicas, en cuya integración numérica se tiene una razonable experiencia.

La filosofía del método de Lax-Wendroff ([49], [50]) es la siguiente: se desarrollan en serie de Taylor respecto al

tiempo las variables a integrar, reteniendo hasta términos de orden $(\Delta t)^2$:

$$\left. \begin{aligned} S(z, t + \Delta t) &= S(z, t) + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} S(z, t) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} S(z, t) + \dots \\ Q(z, t + \Delta t) &= Q(z, t) + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} Q(z, t) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} Q(z, t) + \dots \end{aligned} \right\}, (75)$$

estimándose el valor de las derivadas temporales que aparecen en (75) mediante las ecuaciones (70), (71) y (72). (Véase el Anexo).

Una dificultad presente en los problemas numéricos que incluyen efectos de tensión superficial es el elevado orden de las derivadas espaciales a evaluar. En nuestro caso, éstas se han calculado mediante esquemas clásicos de cinco puntos (Anexo) con la consiguiente desventaja de que el grado de aproximación en las derivadas decrece al aumentar el orden de las mismas, pudiéndose llegar a errores notables en los resultados finales si no se controlan eficientemente los cálculos.

Para evitar este problema son posibles varias alternativas; una de ellas consiste en utilizar algoritmos de cálculo más exactos, basados en la resolución de sistemas de ecuaciones tridiagonales, [51]; sin embargo, al aplicar estos métodos a esquemas de cinco puntos se generan sistemas de ecuaciones que han de resolverse matricialmente, lo que aumenta desmesuradamente el tiempo de cálculo. Otra posibilidad es controlar el intervalo de discretización espacial, Δz , de forma que el error en las derivadas permanezca acotado dentro de un nivel aceptable.

Este último ha sido el criterio adoptado y para ello se ejecutaron en primer lugar varios casos de prueba, en los que se calculó el tiempo de rotura, t_b , para zonas de distintas es-

belteces, variando el número de puntos, Mm , de la malla espacial ($\Delta z = \Lambda / Mm$). Como ejemplo, en la Fig. 16 se muestra la variación del tiempo de rotura adimensional, t_b , con el número de puntos, Mm , para una zona de esbeltez $\Lambda = 3.14$ con un parámetro de deformación inicial $\epsilon = 0.2$ (recuérdese la expresión (74)). Como se observa, el tiempo de rotura es una función creciente del número de puntos de la red, Mm , aunque con derivada tendiendo a cero al aumentar este parámetro.

También se hicieron ensayos para determinar si el valor del número de puntos de la red podía influir en el carácter de la solución numérica: se calculó la evolución de una zona inicialmente próxima al límite de estabilidad estática π , encontrándose que para $Mm = 40$ la zona oscilaba, rompiendo para valores de

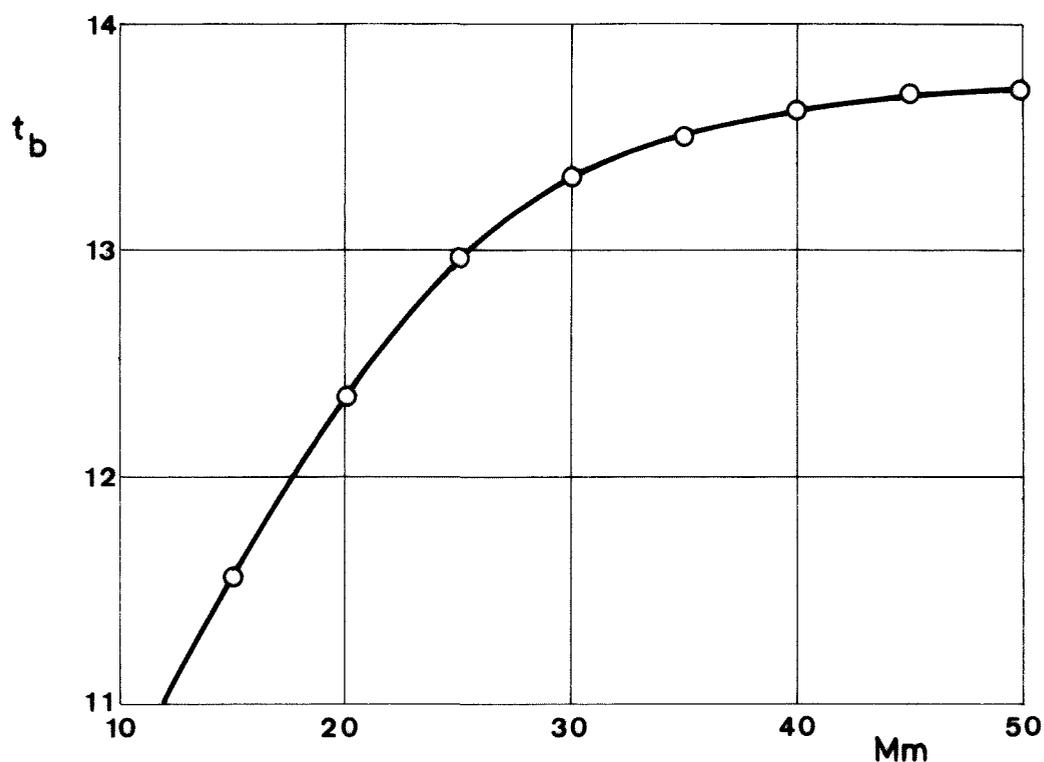


Fig. 16. Variación del tiempo de rotura, t_b , con el número de puntos de la malla, Mm , de una zona de esbeltez 3.14 y una deformación inicial de valor $\epsilon = 0.2$.

Mm inferiores a 40 (los parámetros elegidos fueron $\Lambda=3.11$ y $\epsilon=0.1$, valores para los que, si se extrapolan los resultados del análisis lineal, la zona debe oscilar).

La elección del valor adecuado para Mm es pues un compromiso entre la exactitud requerida y máximo tiempo de cálculo aceptable, tiempo que varía como el cubo de Mm*. Para los cálculos definitivos se fijó Mm=40, valor que, según la Fig. 16, proporciona un tiempo de rotura superior al 99% del tiempo de rotura correspondiente a Mm=50, valor éste para el que la curva es ya, prácticamente, horizontal.

Un aspecto a tener en cuenta en la integración de un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de tipo hiperbólico es que la solución, en un cierto punto z y nivel t, no puede depender de puntos externos a la región encerrada por las características que, partiendo de ese punto y nivel, se extienden hacia niveles anteriores. Dado el carácter no lineal de las ecuaciones integradas, las características varían al avanzar la integración en el tiempo, pudiendo aparecer inestabilidades numéricas, sobre todo durante la última fase en los procesos de rotura.

* Con los métodos de cálculo explícitos el valor del intervalo del tiempo, Δt , viene limitado por criterios de estabilidad y convergencia de la solución de modo que, para sistemas lineales $\Delta t \leq (\Delta z)^2 / 2$. Para sistemas no lineales este límite no está tan claramente definido, y llegar a establecerlo puede ser un problema más complicado que el problema que se pretende resolver. Una forma habitual de proceder es aceptar este límite lineal, controlando posteriormente la evolución de los cálculos. Así pues, duplicar el número de puntos de la red, es decir, dividir Δz por dos, significa dividir Δt por cuatro, y además duplicar, al igual que el número de puntos, el número de cálculos a realizar.

Esta dificultad se ha evitado manteniendo acotada, en cada intervalo de tiempo, la máxima variación de la variable de más rápida evolución, Q , modificando consecuentemente el valor de Δt de modo que esta variación se mantenga, durante todo el cálculo, inferior a una cierta cota.

1.5.3. Condiciones de contorno numéricas

Las condiciones de contorno analíticas: zona anclada y velocidad nula en los discos, se deben traducir en otras adaptadas a las particularidades del cálculo numérico. Dado que para evaluar las derivadas se utilizan cinco puntos, al calcular las derivadas en el contorno aparecen varias opciones según se utilicen algoritmos no centrados, semicentrados o centrados.

La utilización de los dos primeros tipos ocasiona la aparición de inestabilidades numéricas en los discos debido a que, al imponer las condiciones de contorno, el problema queda sobredeterminado en esos puntos, aparte de otras inestabilidades que puedan aparecer asociadas al cambio de algoritmo al pasar de una zona de cálculo donde se usan esquemas centrados a otra donde los esquemas son no centrados, [50].

Por el contrario, el uso de un esquema centrado en los puntos del contorno significa la incorporación al proceso de cálculo de otros cuatro nuevos puntos (exteriores a la zona) en los que es preciso evaluar los valores de S y Q en cada iteración de modo que se cumplan las condiciones de contorno.

A la vista de las ecuaciones (75), supuesto que en el instante t se cumplen las condiciones de contorno ($S(\pm A, t)=1$, $Q(\pm A, t)=0$) el cumplimiento en el instante $t+\Delta t$ exige que sean nu

las las derivadas temporales:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} \Big|_{z=\pm\Lambda} &= 0 \\ \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \Big|_{z=\pm\Lambda} &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} \Big|_{z=\pm\Lambda} &= 0 \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} \Big|_{z=\pm\Lambda} &= 0 \end{aligned} \right\} . \quad (76)$$

Condiciones que, según las expresiones para estas derivadas desarrolladas en el Anexo, se traducen en las siguientes (supuesto que $Q(\pm\Lambda, t)=0$):

$$\frac{\partial S}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 , \quad (77)$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0 \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0 , \quad (78)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{\partial P}{\partial z} = 0 , \quad (79)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = 0 \rightarrow \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial t} = \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 . \quad (80)$$

Así pues los puntos exteriores (dos a cada disco) se calculan de forma que se cumplan las expresiones (77) a (80). Para ello los cálculos se desarrollan en dos etapas, tal como se indica a continuación para uno de los discos (el proceso es análogo en el otro disco).

Sean S_M y Q_M los valores de S y Q en el punto M de la malla y en un instante t . Conocidos estos valores en todos los puntos de la malla (incluidos los puntos externos), es posible calcular los correspondientes al instante siguiente $t+\Delta t$, a excepción de los puntos situados en las posiciones -1 y -2 (véase

la Fig. 17) en los que no es aplicable el algoritmo centrado de cinco puntos utilizado para calcular las derivadas espaciales.

De las condiciones (77) a (80), la (77) depende únicamente de Q_M y las dos últimas de (78) de S_M ; por tanto, si se resuelven en primer lugar las ecuaciones algebraicas que representan estas dos condiciones, se tendrá un sistema no lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left. \begin{aligned} P_z(S_{-2}, S_{-1}, S_0, S_1, S_2) &= 0 \\ P_{zz}(S_{-2}, S_{-1}, S_0, S_1, S_2) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (81)$$

donde P_z y P_{zz} indican derivadas numéricas de acuerdo con la nomenclatura seguida en el Anexo. Nótese que en el sistema (81) S_2 , S_1 y S_0 son conocidos (en particular $S_0=1$) y las incógnitas son S_{-1} y S_{-2} . Este sistema, no lineal, se resuelve por cual-

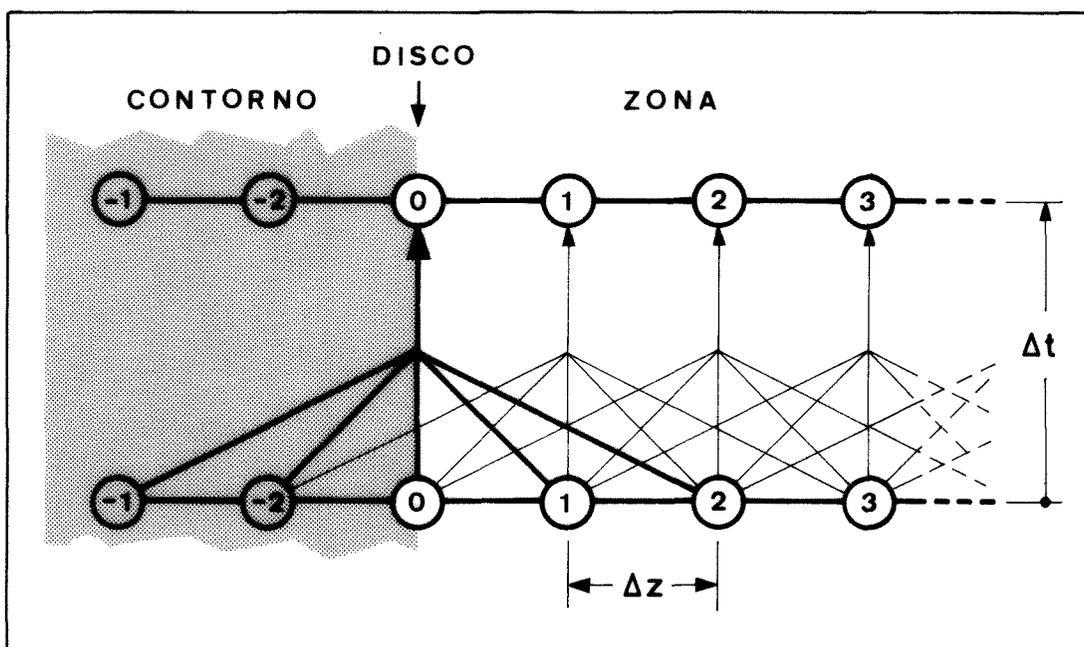


Fig. 17. Esquema del proceso de cálculo con un método numérico implícito de los puntos del contorno de la zona.

quier método iterativo de rápida convergencia, como puede ser el de Newton-Raphson, [52].

Conocidos S_M para todo valor de M en el instante $t+\Delta t$, utilizaremos estos valores para el cálculo de Q_{-1} y Q_{-2} . En efecto, las dos condiciones que faltan por cumplir para que se satisfagan todas las ecuaciones (77) a (80) son:

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial t} = 0,$$

la primera depende tan sólo de Q_M , mientras que la segunda depende de Q_M y S_M , las ecuaciones a resolver son pues:

$$\left. \begin{aligned} Q_z(Q_{-2}, Q_{-1}, Q_0, Q_1, Q_2) &= 0 \\ P_{zt}(Q_{-2}, Q_{-1}, Q_0, Q_1, Q_2, S_{-2}, S_{-1}, S_0, S_1, S_2) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (82)$$

De estas dos ecuaciones, la primera es lineal en Q_M , por lo que es posible expresar una de las incógnitas, por ejemplo Q_{-2} , en función de la otra y sustituir el resultado en la segunda de las ecuaciones (82), resultando una única ecuación no lineal para la incógnita Q_{-1} cuya raíz se calcula también por el método de Newton-Raphson.

Finalizados estos cálculos, quedan completos S_M y Q_M en el nivel $t+\Delta t$, iniciándose una nueva iteración.

1.5.4. Descripción del programa

El programa para el cálculo de la evolución de una zona flotante con el modelo unidimensional de Lee se resume en el organigrama presentado en la Fig. 18. A continuación se incluye una sucinta descripción de las diversas partes en que está dividido:

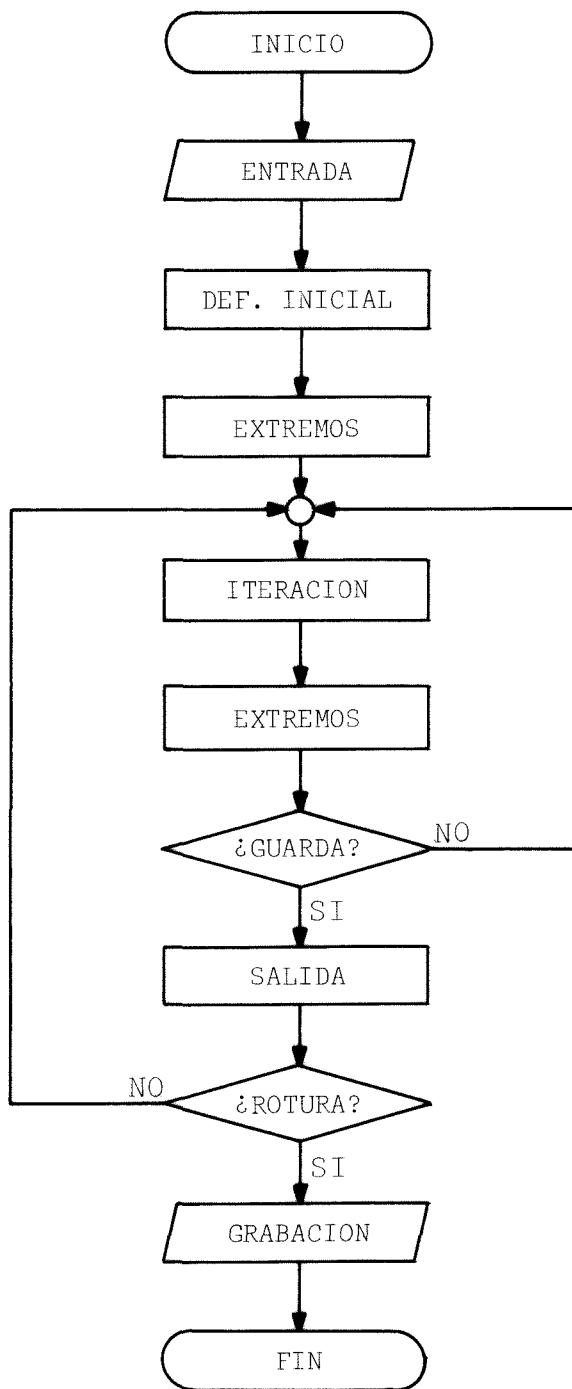


Fig. 18. Organigrama del cálculo y almacenamiento de las secuencias de oscilación y rotura de zonas cilíndricas con una perturbación inicial sinusoidal.

- DEFORMACION A partir de los datos de entrada, Λ y ϵ , calcula la
INICIAL forma inicial de la zona según la expresión (74) y
asigna el valor nulo al campo de velocidades.
- EXTREMOS Calcula los valores de S y Q en los puntos exterior-
res de modo que en el instante considerado se cum-
plan las condiciones de contorno.
- ITERACION Calcula los valores actuales de S y Q para un nuevo
tiempo $t+\Delta t$ según las expresiones (75). Ajusta el in-
cremento de tiempo, Δt , si el máximo incremento de
la variable Q supera cierta cota, disminuyéndolo has-
ta que se cumpla esta acotación.
- SALIDA Si el contador del número de iteraciones realizadas
alcanza un valor múltiplo de un número prefijado, al-
macena los valores del tiempo, radio mínimo, posi-
ción del radio mínimo y volumen de la parte de zona
flotante comprendida entre este mínimo y uno de los
discos. Opcionalmente almacena también la forma de
la zona y el campo de velocidades.
- GRABACION Finalizados los cálculos, los datos almacenados se
transfieren a cinta magnética, quedando el calcula-
dor listo para un nuevo caso.

Formalmente la ejecución del programa debería terminar cuando el radio mínimo alcanza el valor nulo (rotura) o cuando fuera la unidad (oscilación). Obviamente en la ramificación etiquetada ROTURA los límites reales no son éstos, sino valores próximos ($S_{\min}=10^{-2}$ ó $S_{\max}=0.96$). La razón de la primera diferencia es que las curvas de rotura mueren con tangente vertical, y en la última fase del cálculo los valores de Δt son tan pequeños que el tiempo de cálculo se alarga desmesuradamente, y para la

segunda, que cuando la zona se acerca, recuperando, a la forma cilíndrica, la posición del radio mínimo queda indeterminada y, como la velocidad radial es máxima, se corre el peligro de no cortar a tiempo el cálculo y seguir iterando en ciclos sucesivos de las oscilaciones, lo cual es una pérdida de tiempo de ordenador importante.

1.5.5. Resultados

El programa se ha ejecutado para diversos valores de la esbeltez, Λ , y la deformación inicial, ϵ , según se recoge en la Tabla 2. Aunque no se indica en la Tabla, en todos los casos resueltos la rotura ocurre a una distancia comprendida entre el 65% y el 68% de la separación entre los discos, dividiéndose la zona en dos gotas ancladas a los discos (aparte de los satélites) cuya relación de volúmenes, según se deduce de la Fig. 19, dependen fundamentalmente de la esbeltez más que de la deformación inicial.

Respecto a los otros resultados, en las Figs. 20 a 23 se ha representado la variación con el tiempo del radio del cuello de la zona. El tiempo de rotura, t_b , se alcanza cuando dicho radio se anula, en tanto que el período de oscilación, T , será cuatro veces el tiempo tardado por el cuello de la zona en llegar a valer la unidad (zona cilíndrica).

En algunos casos se permitió que los cálculos prosiguieran una vez llegado a la posición cilíndrica, rebasando el valor $T/4$, hasta completar un período completo de oscilación e incluso más. En estos casos se observó que los errores de cálculo son despreciables: para un tiempo $T/2$ la forma de la zona es

Tabla 2

Resultados globales obtenidos en la integración numérica de las ecuaciones generales del modelo de Lee para la zona flotante^a.

$\epsilon=0.1$			$\epsilon=0.2$			$\epsilon=0.3$			$\epsilon=0.4$		
Λ	t_b	V_p									
3.20	20.5	0.8430	3.20	11.5	0.8441	3.20	7.0	0.8447	3.20	4.2	0.8506
3.16	25.0	0.8465	3.14	13.7	0.8494	3.10	8.4	0.8539	3.10	4.8	0.8565
3.13	33.5	0.8495	3.09	17.7	0.8534	3.01	11.7	0.8607	3.00	5.6	0.8622
Λ	T/4		3.07	22.1	0.8553	2.98	15.6	0.8630	2.89	8.5	0.8693
3.11	81.0		Λ	T/4		2.97	19.6	0.8636	2.85	17.7	0.8716
3.09	29.2		3.05	39.7		Λ	T/4		Λ	T/4	
3.03	15.3		3.02	20.0		2.95	20.9		2.83	15.7	
2.92	9.5		2.93	11.4		2.89	12.2		2.82	14.1	
2.80	6.9		2.80	7.3		2.80	8.8		2.80	12.0	

^a Los símbolos en la Tabla indican:

ϵ : Deformación inicial (véase la expresión (74)).

t_b : Tiempo de rotura.

V_p : Volumen, en tanto por ciento del volumen inicial, de la mayor de las gotas de las dos en que se divide la zona.

T/4: Cuarta parte del período de oscilación.

especularmente simétrica a la inicial, recuperando la forma inicial al cabo de un tiempo T. Sin embargo, para deformaciones iniciales grandes no se recupera totalmente la forma inicial debido a que en la evolución de la zona hay superpuestos dos movimientos: uno, principal, de rotura u oscilación y otro, secundario, de corto período, que se podría llamar de acomodación.

En efecto, no se debe olvidar que las formas de parti-

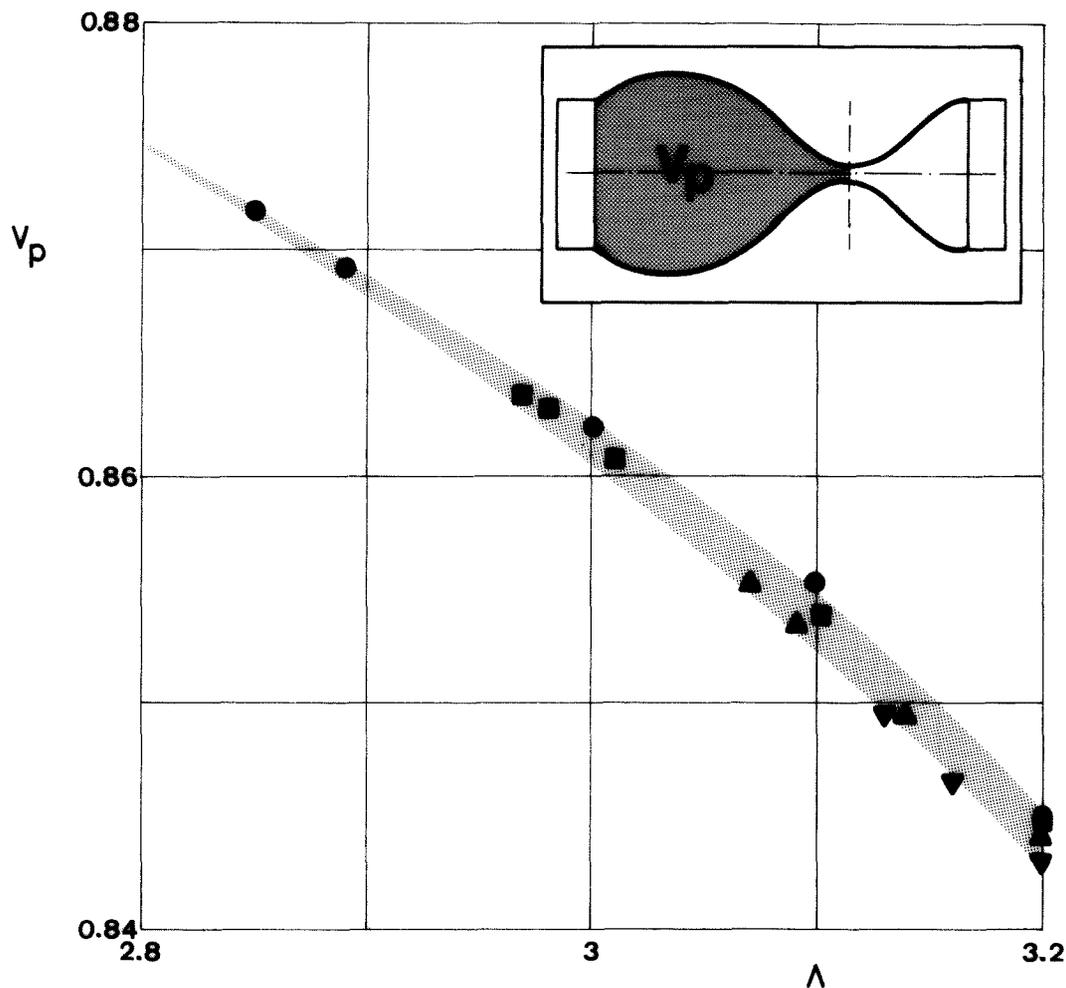


Fig. 19. Variación con la esbeltez, λ , del volumen de rotura, V_p . Este volumen se define como el porcentaje del volumen inicial comprendido entre uno de los discos y el cuello de la zona en el instante de rotura. Los símbolos indican el valor de la deformación inicial, ϵ , de acuerdo con la siguiente clave: 0.1(∇), 0.2(\blacktriangle), 0.3(\blacksquare) y 0.4(\bullet).

da, aunque próximas, no son de equilibrio (inestable) por lo que el campo de presiones inicial no es el que se alcanzaría siguiendo una evolución "natural" de la zona (por ejemplo, el campo de presiones inicial para $\epsilon=0.2$ es distinto del que presenta una zona que, empezando en $\epsilon=0.1$ y con una evolución de rotura, tenga un valor del radio en el cuello igual al de partida con $\epsilon=0.2$). Estos desajustes originan el que en los primeros instantes el campo de velocidades que se genera tienda a modificar muy local-

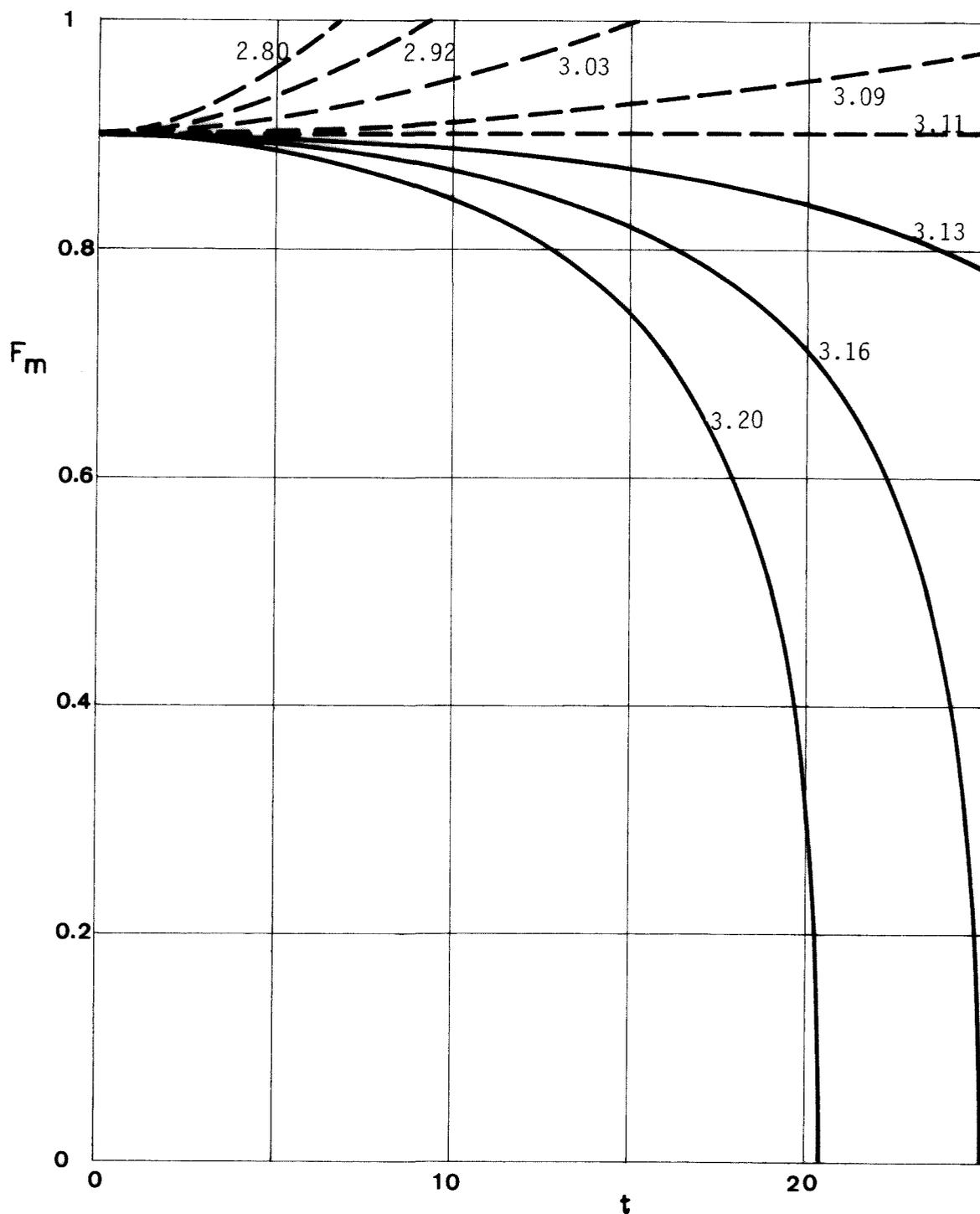


Fig. 20. Variación del radio del cuello de la zona, F_m , con el tiempo, t , para zonas con un parámetro de deformación inicial $\epsilon=0.1$. Los números en las curvas indican el valor de la esbeltez λ .

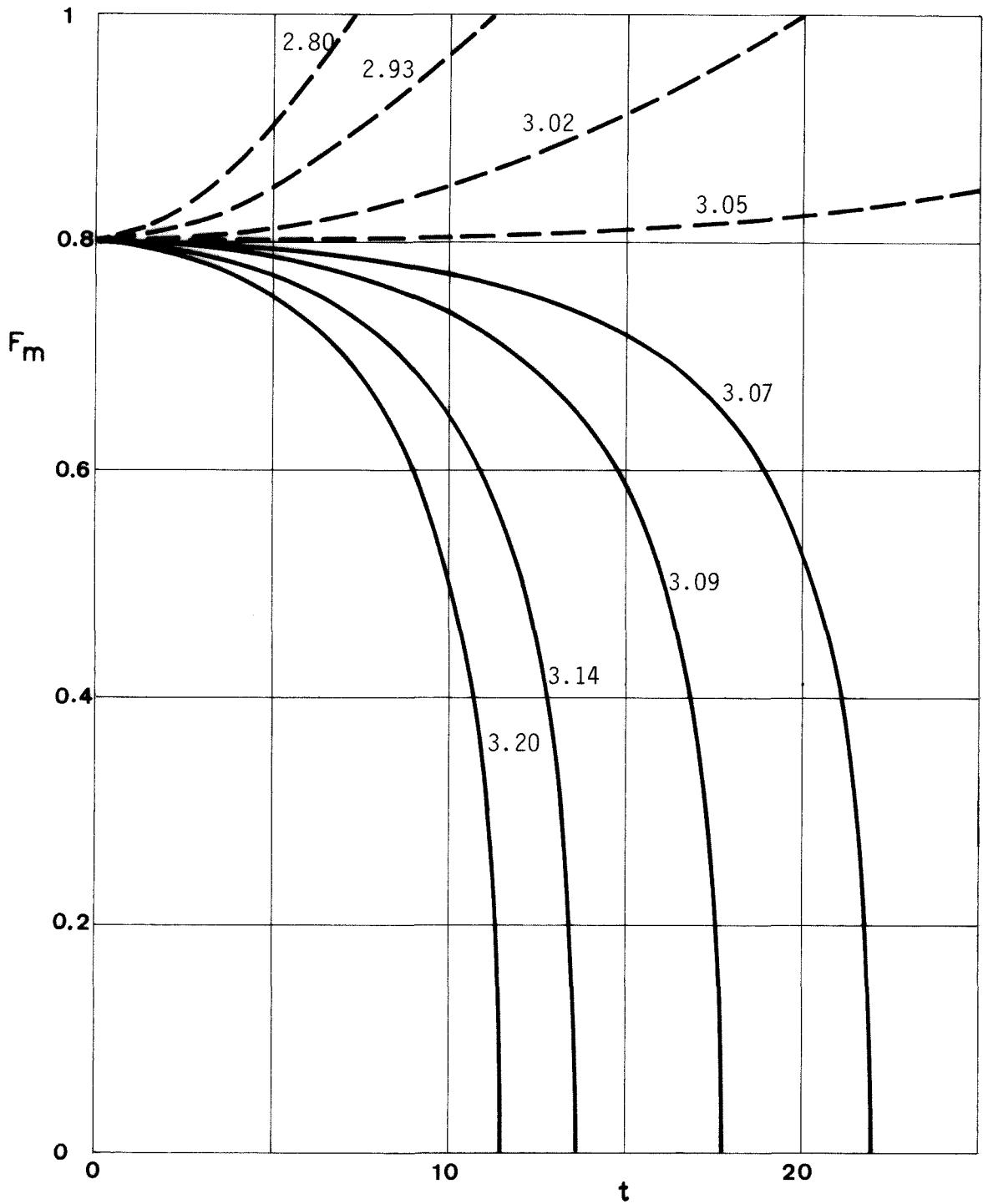


Fig. 21. Variación del radio del cuello de la zona, F_m , con el tiempo, t , para zonas con un parámetro de deformación inicial $\epsilon=0.2$. Los números en las curvas indican el valor de la esbeltez λ .

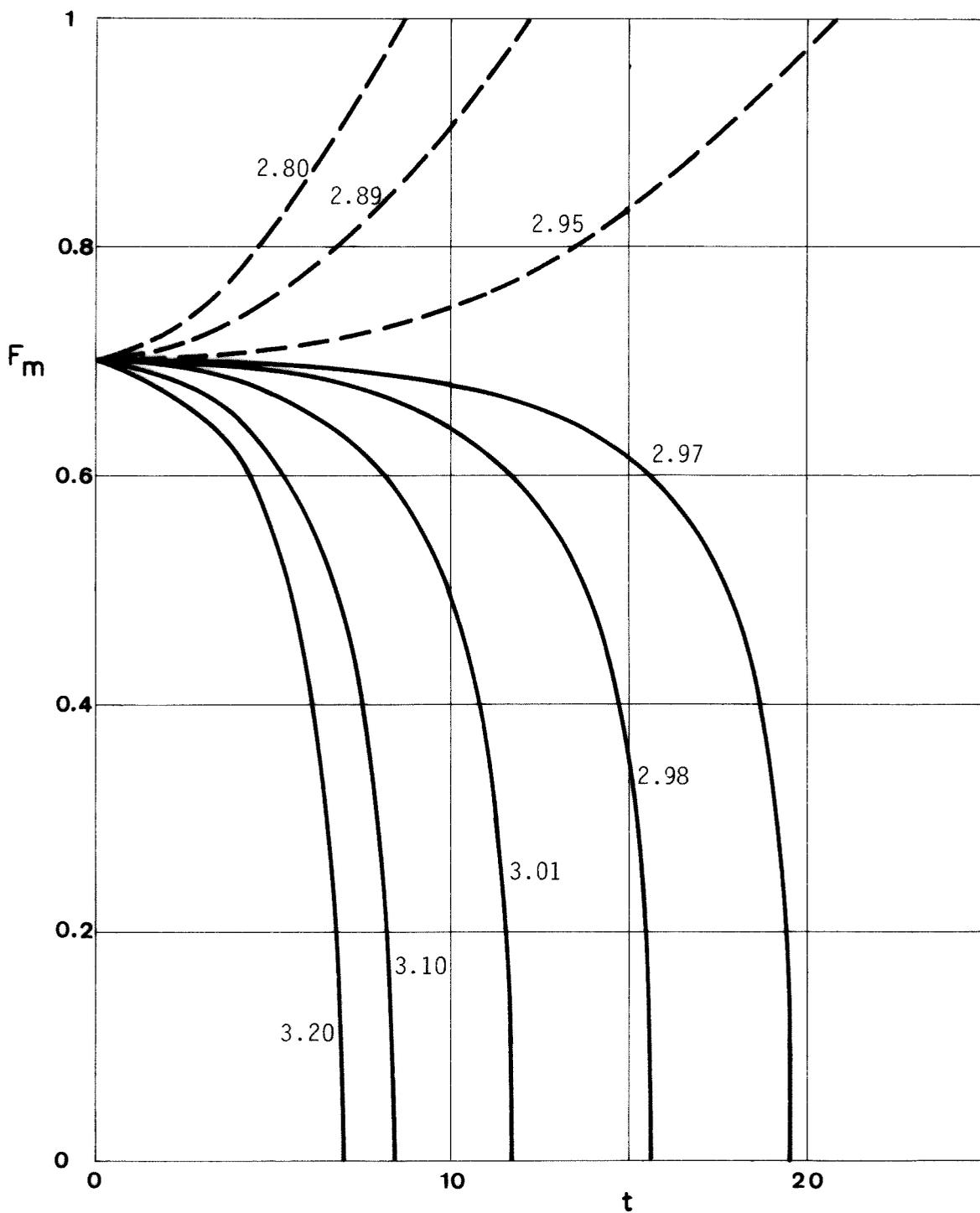


Fig. 22. Variación del radio del cuello de la zona, F_m , con el tiempo, t , para zonas con un parámetro de deformación inicial $\epsilon=0.3$. Los números en las curvas indican el valor de la esbeltez λ .

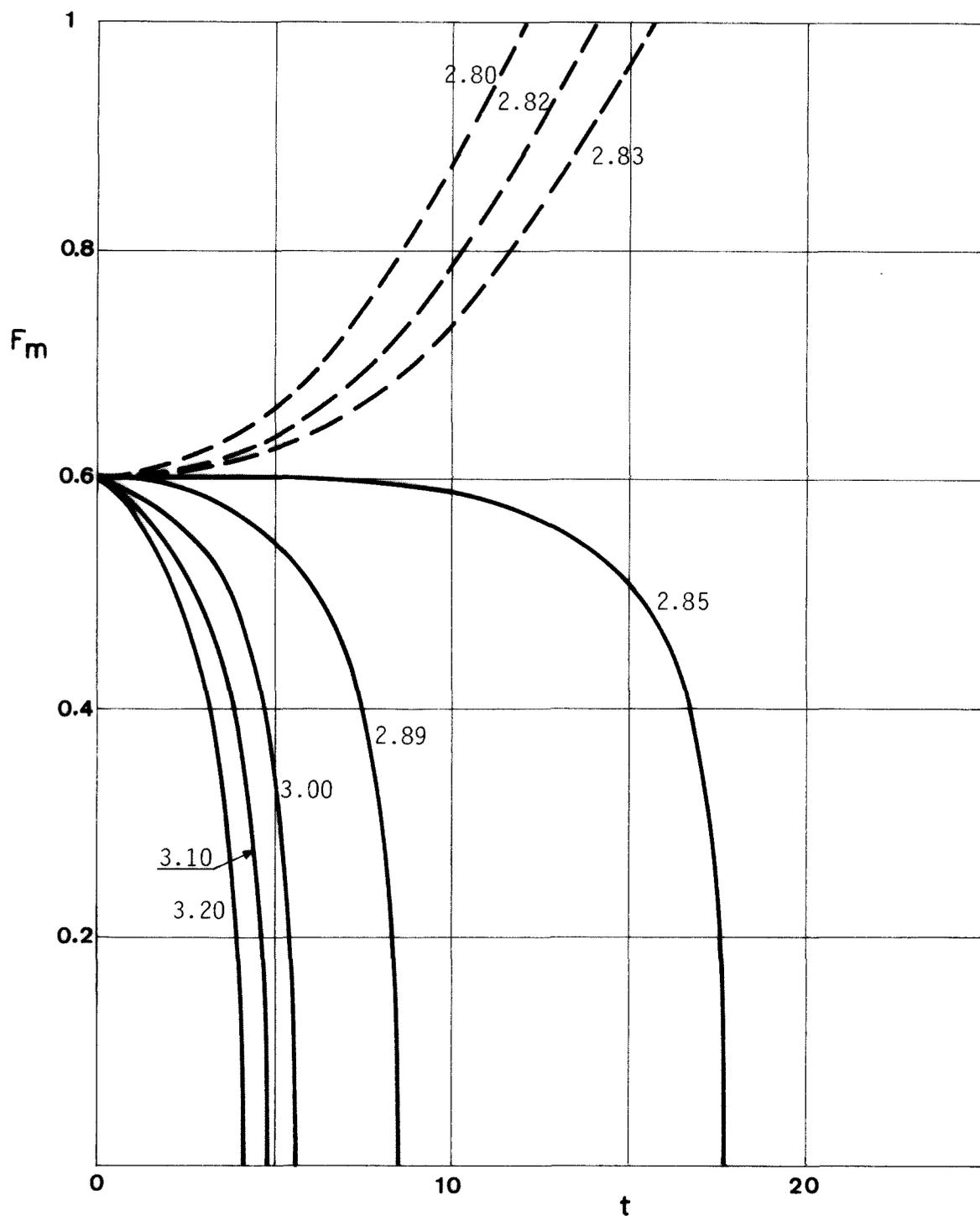


Fig. 23. Variación del radio del cuello de la zona, F_m , con el tiempo, t , para zonas con un parámetro de deformación inicial $\epsilon=0.4$. Los números en las curvas indican el valor de la esbeltez λ .

mente la forma de la zona llevándola a una configuración más real (con menor energía) dentro del campo de validez del modelo considerado. Esto se traduce en una oscilación del radio del cuello, F_m (recuérdese que el modelo de Lee no incluye el amortiguamiento viscoso) alrededor del valor que, en cada instante, le corresponde según el movimiento principal. En otras palabras se puede decir que la zona primero se acomoda a una forma que implique una distribución de presiones más suave y después rompe (u oscila).

El movimiento de oscilación secundario es de muy pequeña amplitud y con un espectro de frecuencias muy alto. Estas fluctuaciones son apenas perceptibles a la escala a la que se han dibujado las Figs. 20 a 23 por lo que en éstas sólo está representado el movimiento principal.

Este fenómeno de acomodación de la zona es, por supuesto, tanto más acusado cuanto mayor es la deformación inicial, ϵ . Como ejemplo, en la Fig. 24 se muestra, a un tamaño muy ampliado, la evolución del radio del cuello, F_m , en los instantes iniciales, considerando ambos movimientos, para dos zonas, de esbelteces 2.83 (oscilación) y 2.85 (rotura) respectivamente, con una deformación inicial $\epsilon=0.4$ (la evolución completa de estas zonas está representada en la Fig. 23). Como se observa, el movimiento de acomodación es el mismo en los dos casos, lo que confirma el razonamiento anterior.

Volviendo al movimiento principal, con los datos presentados en la Tabla 2 se ha dibujado la Fig. 25, donde se representan en función de la esbeltez, Λ , y para cada valor del parámetro de deformación inicial, ϵ , los tiempos de rotura o la cuar

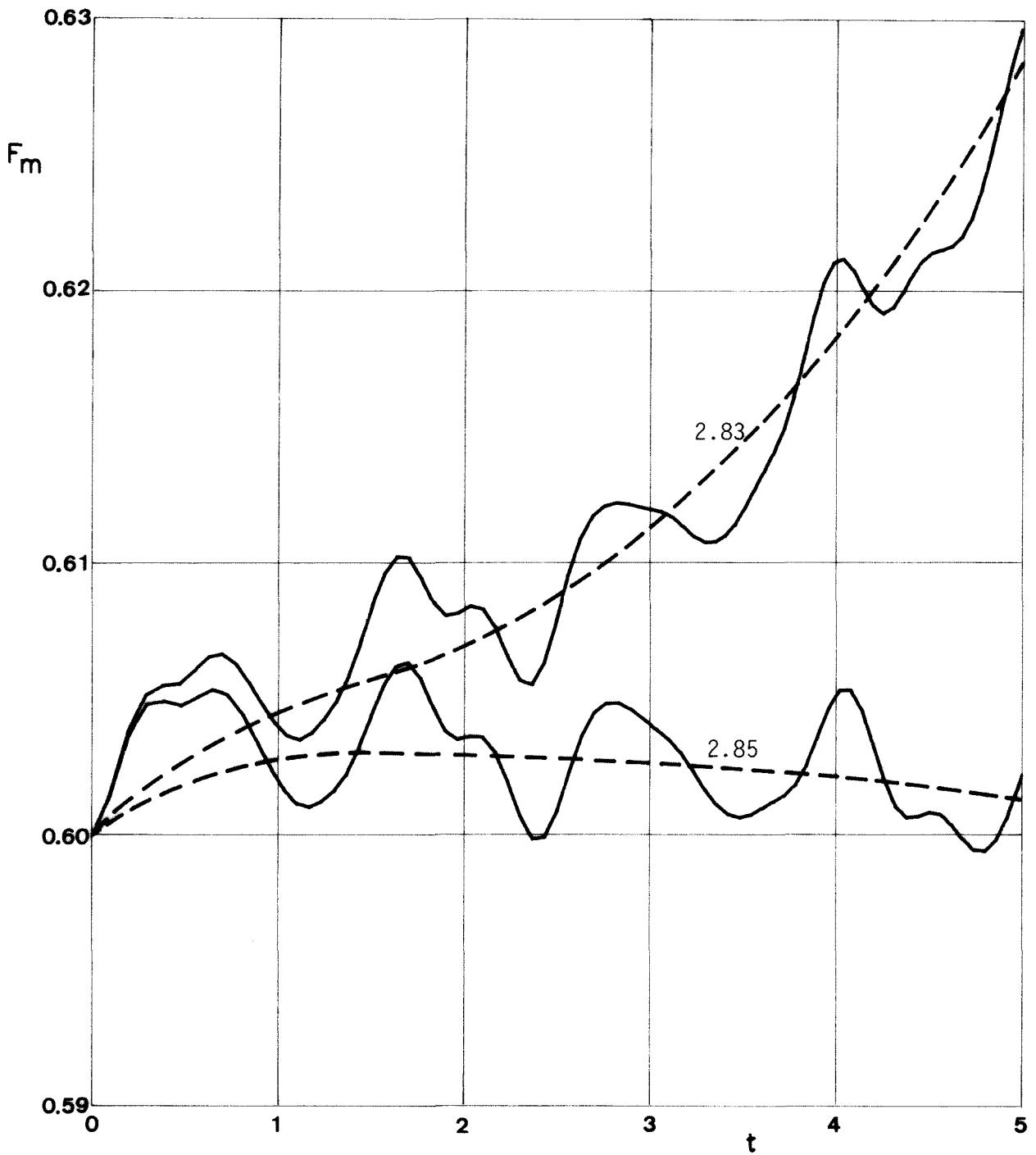


Fig. 24. Variación del radio del cuello de la zona, F_m , con el tiempo, t , para zonas con un parámetro de deformación inicial $\epsilon=0.4$ y esbelteces $\Lambda=2.85$ y $\Lambda=2.83$. Las oscilaciones alrededor de las curvas a trazos muestran el movimiento de acomodación, de corto período, sobreimpuesto al movimiento principal.

ta parte de los períodos de oscilación. Para cada valor de ϵ las curvas respectivas de oscilación y rotura convergen hacia un cierto valor de Λ para el que, formalmente, el tiempo de evolución debería ser infinito. Para valores de Λ superiores a esa esbeltez la zona rompería y para valores menores oscilaría, correspondiendo la frontera, para cada ϵ , al punto de equilibrio (inestable). Ciertamente estos puntos de equilibrio son inalcanzables numéricamente por dos razones: la primera, que la forma inicial impuesta no es de equilibrio, y la segunda, que el tiempo de cálculo tiende al infinito al acercarse a ese límite.

Con todo se pueden obtener aún importantes consecuencias. Si a partir de la Fig. 25 representamos, en función de Λ y ϵ , las curvas de tiempo de rotura o período de oscilación* constantes, se obtiene el gráfico dibujado en la Fig. 26, donde se observa claramente la región de separación de los casos de rotura de los de oscilación; esta frontera fue calculada anteriormente por Martínez, [9], al resolver la bifurcación de formas simétricas a no simétricas que, en el análisis de la hidrostática de la zona flotante, aparece para $\Lambda=\pi$. Esta curva se ha dibujado también en la Fig. 26.

A la vista de la Fig. 26 queda manifiesto que el modelo no lineal de Lee para la zona flotante ofrece muy buenos resultados. Para valores altos de la deformación inicial este modelo no lineal predice la rotura para esbelteces levemente inferior

* Para cada valor $T=cte$ la curva correspondiente muere en $\epsilon=0$ en el valor de Λ proporcionado por el análisis lineal del modelo de Lee.

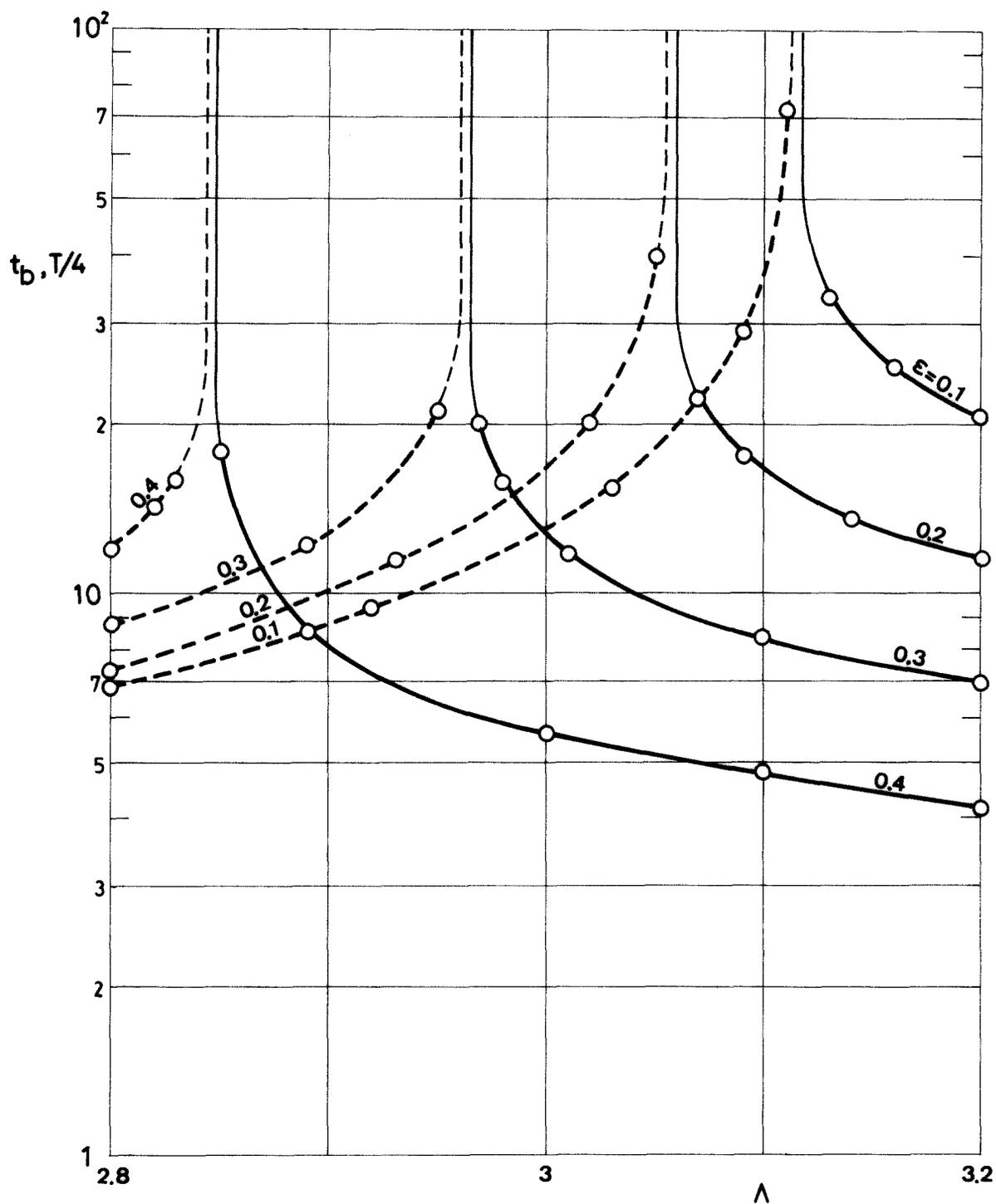


Fig. 25. Tiempo de rotura, t_b , o período de oscilación, T , en función de la esbeltez, λ . Los números en las curvas indican el valor del parámetro de deformación inicial ϵ .

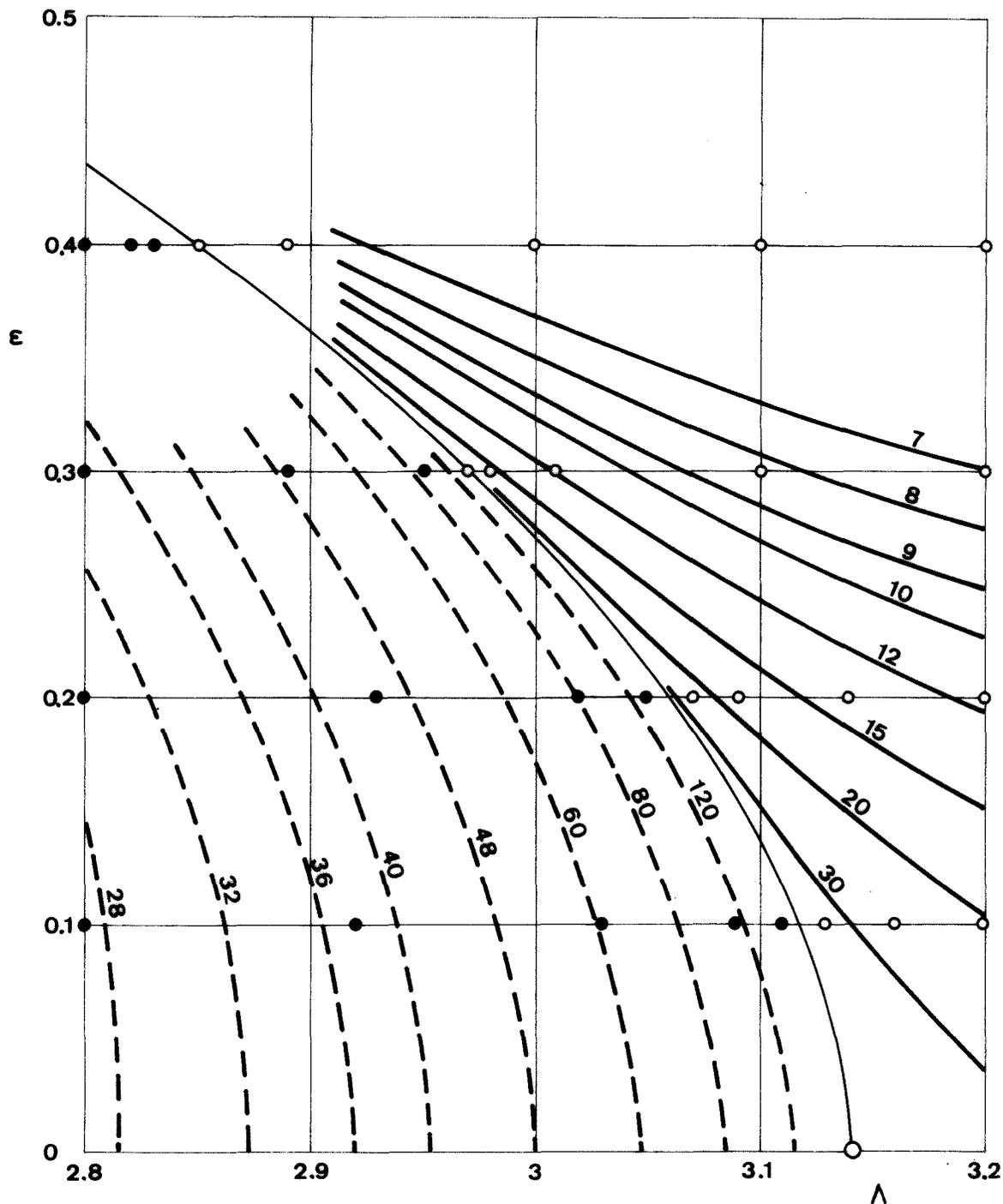


Fig. 26. Variación con la esbeltez, λ , y el parámetro de deformación inicial, ϵ , del tiempo de rotura (líneas continuas) y del período de oscilación (líneas a trazos) de zonas flotantes sometidas a una perturbación sinusoidal no simétrica en la forma. Los círculos indican los casos resueltos numéricamente, señalando si el resultado fue oscilación de la zona (●) o rotura (○). La línea a trazo fino corresponde a las posiciones de equilibrio inestables, [9].

res a las obtenidas en el análisis estático, aunque estas diferencias no son significativas habida cuenta de las limitaciones asociadas al cálculo numérico (en términos relativos la diferencia no es, en ningún caso, superior al 0.3%, dentro del rango de valores de Λ y ϵ considerados). Es posible que la causa de estas diferencias sea la forma de la deformación inicial impuesta.

Así pues, este estudio no lineal de la zona flotante permite completar el plano esbeltez-deformación inicial, fijando las curvas de nivel $t_b = \text{cte}$, $T = \text{cte}$ en dicho plano, del que sólo se conocía la línea de separación entre las regiones estable e inestable.

También se ha comprobado la estabilidad de la zona frente a perturbaciones simétricas (el límite de estabilidad estática para este tipo de deformaciones está próximo a $\Lambda = 4.5$, [9]). En la Fig. 27 se muestra la variación con el tiempo del radio en el cuello, F_m , de zonas a las que se impone una deformación inicial del tipo:

$$S(z,0) = 1 + \frac{\epsilon}{1 - \cos\delta} \left(\cos\delta - \cos\frac{\delta x}{\Lambda} \right) ,$$

con $\delta = 0.4934$ radianes. Este tipo de perturbación es simétrico respecto al punto medio de la zona, cumple la condición de contorno en los discos ($S(\pm\Lambda,0) = 1$) y además, para cualquier valor de Λ y ϵ , el volumen es igual al de una zona cilíndrica con la misma esbeltez.

Los resultados están de acuerdo con el análisis estático: la zona oscila, aún con valores de Λ y ϵ para los que rompería si la perturbación no fuera simétrica, y el período de oscilación aumenta conforme crece la esbeltez.

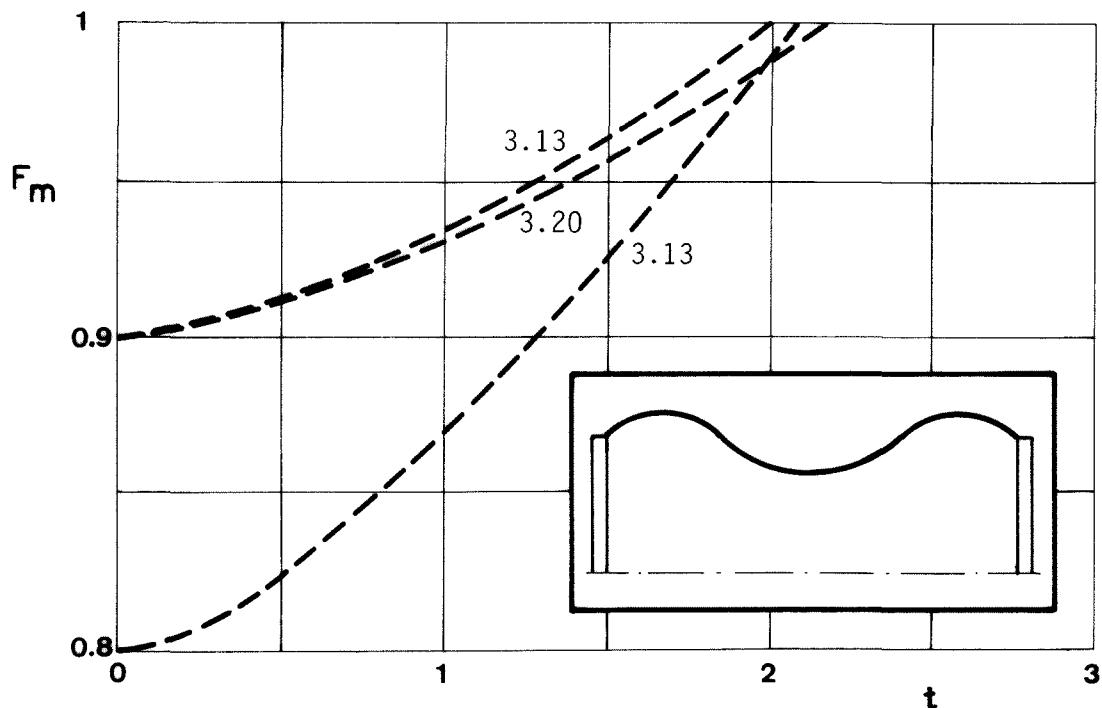


Fig. 27. Variación con el tiempo, t , del radio del cuello, F_m , de zonas con una perturbación inicial simétrica. Los números en las curvas indican el valor de la esbeltez, Λ , correspondiendo a las dos curvas superiores un parámetro de deformación inicial $\epsilon=0.1$, y a la inferior $\epsilon=0.2$.

Sin embargo, los resultados obtenidos en estos casos tienen poco interés práctico: en la realidad cualquier perturbación tendrá siempre una componente no simétrica que forzará la rotura de la zona una vez sobrepasada la curva de separación de las regiones estable e inestable.

Volviendo a los casos de perturbación no simétrica, en las Figs. 28 y 29 se muestra la variación con el tiempo de la forma de la zona (superficie libre) y de la velocidad axial:

$$F(z,t) = \sqrt{S(z,t)} ,$$

$$W(z,t) = \frac{Q(z,t)}{S(z,t)} ,$$

para dos zonas, una con esbeltez 3.03 y otra 3.13, ambas con un

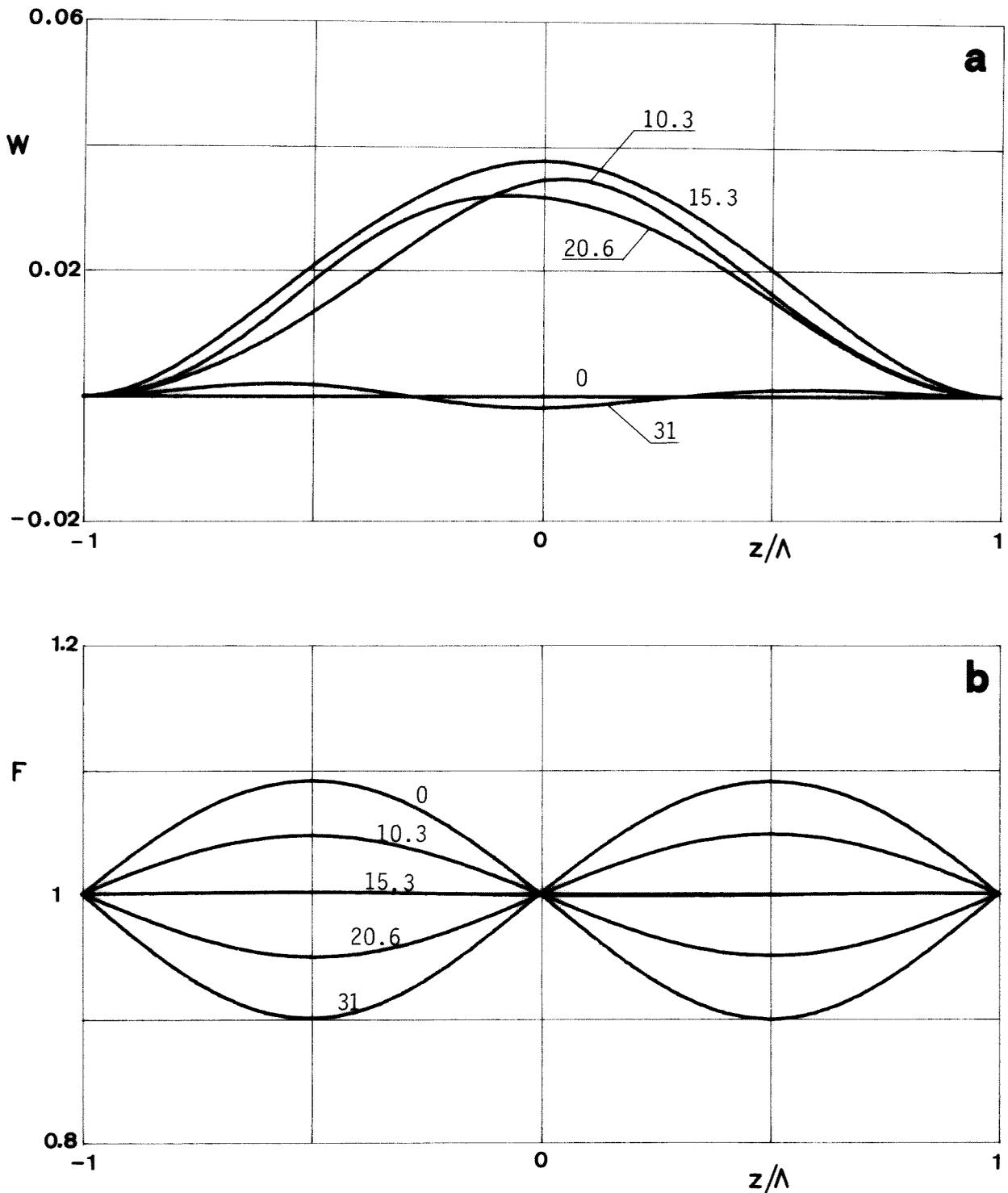


Fig. 28. Variación con el tiempo de la velocidad axial, (a), y de la forma, (b), de una zona con esbeltez $\Lambda=3.03$ y un parámetro de deformación inicial $\epsilon=0.1$. Los números en las curvas indican el tiempo adimensional transcurrido desde el instante inicial. Resultados obtenidos integrando numéricamente las ecuaciones generales del modelo de Lee.

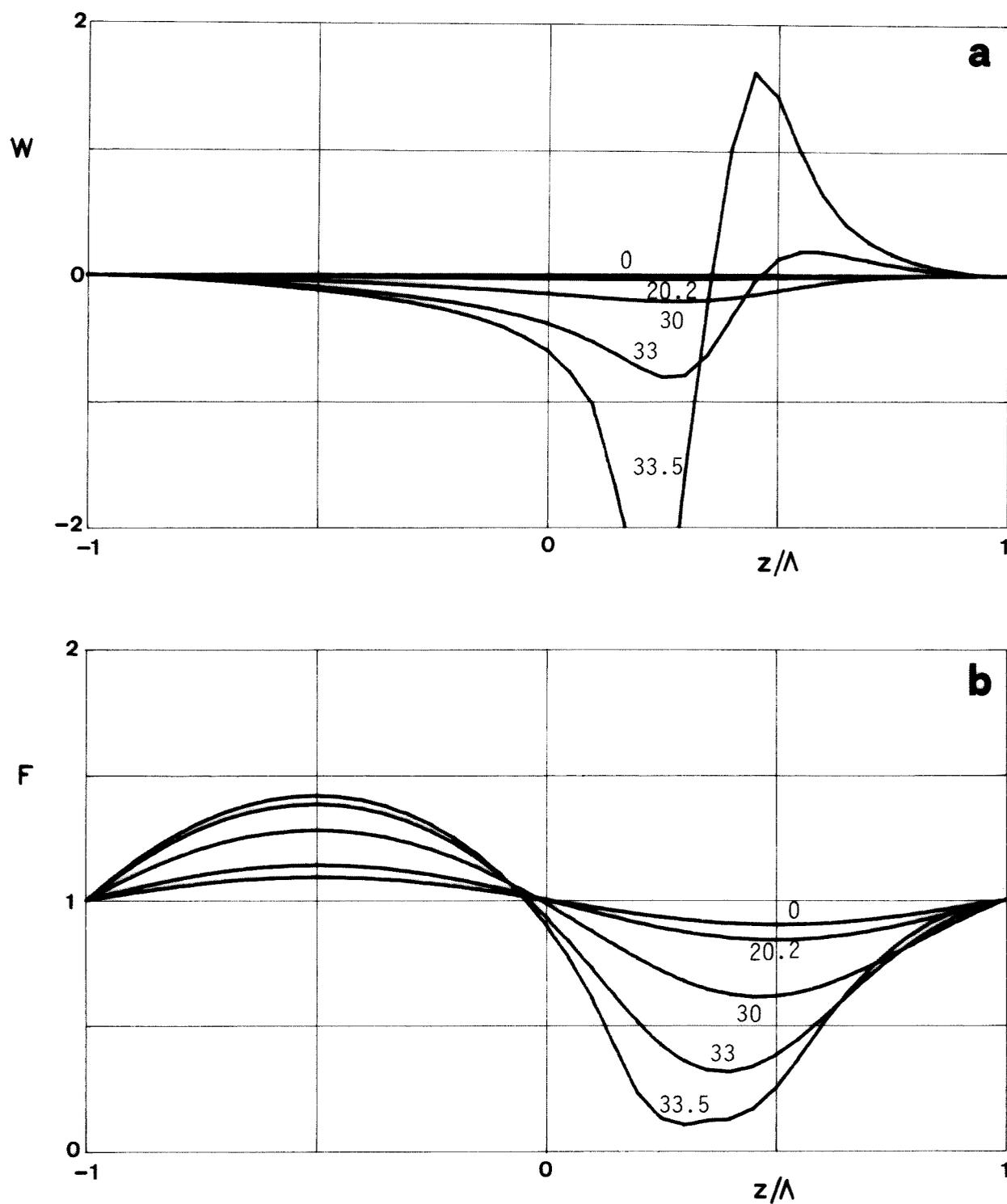


Fig. 29. Variación con el tiempo de la velocidad axial, (a), y de la forma, (b), de una zona de esbeltez $\Lambda=3.13$ y un parámetro de deformación inicial $\varepsilon=0.1$. Los números en las curvas indican el tiempo adimensional transcurrido desde el instante inicial. Resultados obtenidos integrando numéricamente las ecuaciones generales del modelo de Lee.

parámetro de deformación inicial $\epsilon=0.1$ (compárese estos resultados con los correspondientes al análisis lineal, Figs. 8 y 9).

Por último, en la Fig. 30 se ha dibujado, para $\Lambda=3.13$ y $\epsilon=0.1$, la trayectoria que describirían trazadores situados en un plano meridiano paralelo al observador, en la superficie de la zona. Las trayectorias no coinciden sin embargo con las que vería un observador debido a que, en el caso real, la posición de los trazadores queda falseada por la forma de la superficie libre, que distorsiona notablemente la imagen, por lo que es necesario introducir correcciones en la imagen a fin de obtener la posición real de los trazadores.

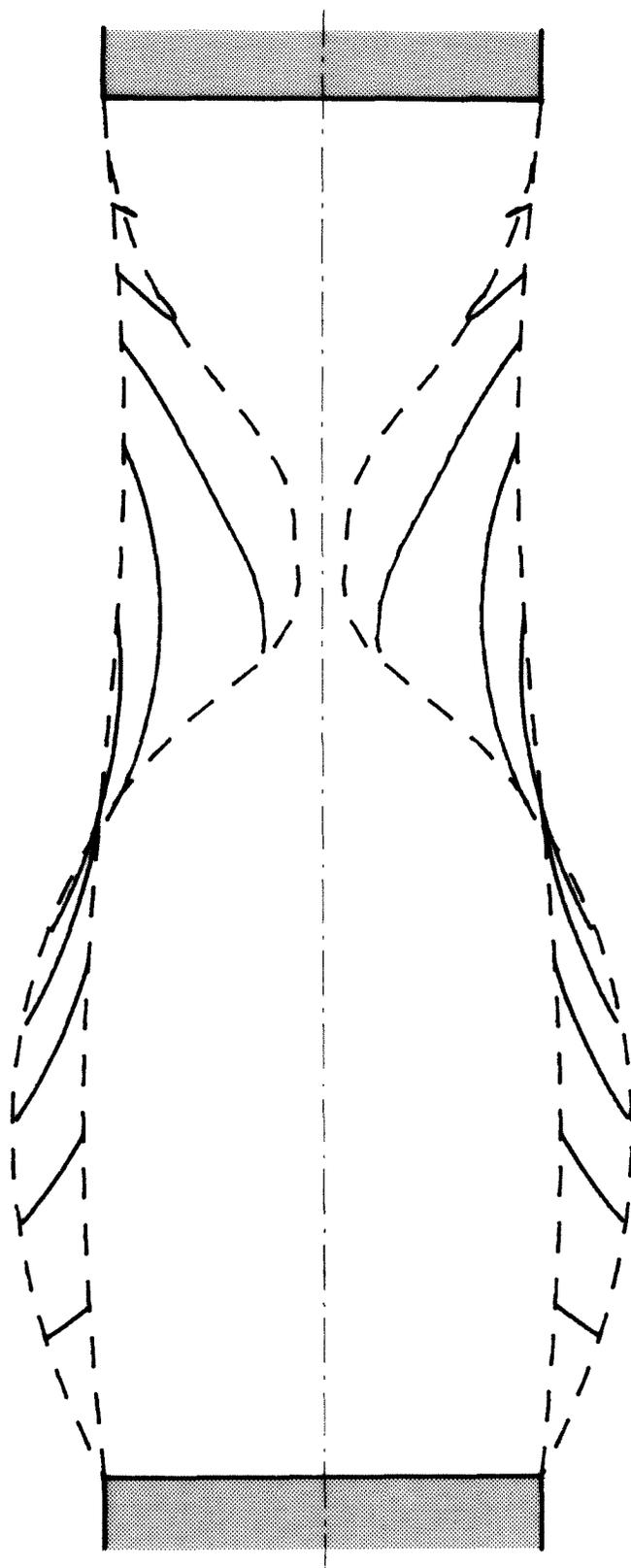


Fig. 30. Rotura de una zona flotante de esbeltez $\Lambda=3.13$ y deformación inicial $\epsilon=0.1$. Los trazos continuos indican las trayectorias seguidas por trazadores situados en la interfase. Resultados obtenidos integrando numéricamente las ecuaciones generales del modelo de Lee.

1.6. CONCLUSIONES

En esta parte se ha abordado el problema de la rotura de zonas flotantes esbeltas, resolviéndose la estructura interna de las mismas, es decir, la evolución de la superficie libre y del campo de velocidades frente a ciertos tipos de perturbaciones en la forma inicial de la zona.

Para estudiar el comportamiento dinámico de la zona flotante ha sido necesario establecer ciertas hipótesis de uso común en este campo (propiedades uniformes del líquido, interfase líquido-sólido plana, etc.) y acudir a modelos unidimensionales que permitan el tratamiento matemático del problema. En este sentido, se ha resuelto la primera aproximación del modelo unidimensional de Lee y de un modelo basado en la teoría de los medios continuos de Cosserat. Este análisis lineal permite encontrar estimadores para la predicción del comportamiento dinámico de la zona flotante (factor de amplificación o amortiguamiento, frecuencias propias) tanto para el caso no viscoso como para el viscoso, así como expresiones analíticas para el campo de velocidades y deformación de la interfase.

El siguiente paso ha sido la integración numérica, por el método de Lax-Wendroff, de las ecuaciones generales (no lineales) del modelo de Lee, calculando los tiempos de rotura u oscilación de zonas líquidas esbeltas, no viscosas, la evolución seguida por la interfase y las velocidades durante estos procesos.

Como consecuencia de este análisis numérico se ha podido completar el plano esbeltez-deformación inicial, plano del que hasta ahora sólo se conocía la línea de separación de las regiones estable e inestable, pero no las particularidades de cada

una de las regiones señaladas.

Así pues, se ha avanzado notablemente en el conocimiento de la estructura interna de la zona flotante aunque aquí, como en todos los problemas de interés, cada paso hacia adelante significa el descubrimiento de un panorama cada vez más amplio, y a la vez sugerente, cuya exploración requiere más y más recursos científicos. En el horizonte inmediato aparecen tres grandes áreas que, sin ánimo de establecer clasificaciones, podríamos denominar básica, auxiliar y experimental.

En el área básica se puede incluir la búsqueda de más potentes métodos de análisis con el fin de abordar el problema tridimensional completo en zonas cortas y la extensión del análisis numérico, bien a la integración de modelos unidimensionales que, como el de Cosserat, incluyen los efectos viscosos en la formulación, o la integración de las ecuaciones generales del modelo tridimensional con esquemas de cálculo especialmente adaptados a movimientos fluidos con superficies libres, como pueden ser el denominado MAC (Marker and Cell) u otros derivados del anterior.

Bajo el calificativo de auxiliares se pueden englobar aquellos aspectos que, sin ser específicos de la zona flotante, son fundamentales para la contrastación de los resultados teóricos y para el análisis y comprensión de los experimentales. En este sentido, es totalmente necesario un estudio profundo de los fenómenos ópticos asociados a la zona flotante, como único camino para fijar la correspondencia entre la realidad y los registros gráficos que se obtienen de los ensayos experimentales. Esto constituye un difícil problema de geometría diferencial cuya

solución sólo se posee en la actualidad para algunas geometrías sencillas, y que deberá estar resuelto antes del próximo vuelo del laboratorio espacial Spacelab.

En el área experimental es mucha la labor por realizar. El volumen de los trabajos teóricos sobre la zona flotante empieza a ser tan grande que no parece posible que se pueda contrastar más que una pequeña parte durante la primera misión Spacelab. Por ello, es necesario acudir también a programas espaciales más modestos, pero efectivos, como el programa alemán Texus (Cohetes de sondeo), y potenciar la investigación experimental en tierra, con zonas milimétricas y baños de Plateau.

ANEXO: CALCULO DE LAS DERIVADAS TEMPORALES UTILIZADAS EN EL METODO DE LAX-WENDROFF

Este anexo trata de las ecuaciones algebraicas utilizadas en la integración numérica de las ecuaciones generales del modelo unidimensional de Lee para la zona flotante por el método de Lax-Wendroff.

Por economía de escritura, y para simplificar lo más posible las expresiones finales, se han introducido algunas variables auxiliares, presentando los resultados con una nomenclatura análoga a la utilizada en el programa de cálculo.

Aunque la mayoría de los símbolos utilizados están incluidos en la lista de símbolos general, los específicos de este Anexo no lo están, pero son fácilmente identificables. A lo largo de estas páginas las derivadas espaciales se indicarán con el subíndice z , y las temporales con el subíndice t .

De acuerdo con la expresión (75), el método de Lax-Wendroff requiere la evaluación, en el instante t , de las derivadas

$$S_t, S_{tt}, Q_t, Q_{tt} ,$$

para poder calcular las variables S y Q en el instante $t+\Delta t$.

Con el convenio establecido, las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento son (ecuaciones (70) y (71)):

$$S_t = -Q_z , \quad (A-1)$$

$$Q_t = -SP_z - 2\frac{Q}{S}Q_z + \left(\frac{Q}{S}\right)^2 S_z , \quad (A-2)$$

expresiones que directamente proporcionan los valores de S_t y Q_t en función de las derivadas espaciales una vez calculado P_z .

Derivando (A-1) respecto al tiempo:

$$S_{tt} = -Q_{zt} , \quad (A-3)$$

y Q_{zt} se obtiene de (A-2), derivando Q_t respecto a z :

$$S_{tt} = [SP_z + 2\frac{Q}{S}S_z - (\frac{Q}{S})^2 S_z]_z ,$$

es decir:

$$S_{tt} = \frac{2}{S}[(Q_z)^2 + QQ_{zz}] - \frac{Q}{S^2}[4S_z Q_z + QS_{zz}] + \frac{2Q^2}{S^3}(S_z)^2 + S_z P_z + SP_{zz} , \quad (A-4)$$

donde faltan aún por calcular P_z y P_{zz} .

Derivando ahora (A-2) respecto al tiempo, y haciendo uso de (A-1), (A-2) y (A-3), resulta:

$$Q_{tt} = -\frac{2}{S}[Q_t Q_z - QS_{tt}] + \frac{Q}{S^2}[-2(Q_z)^2 + 2Q_t S_z - QQ_{zz}] + \frac{2Q^2}{S^3}Q_z S_z + Q_z P_z - SP_{zt} , \quad (A-5)$$

donde todo es conocido a excepción de P_z y P_{zt} .

Para calcular las derivadas de P , partimos de la expresión (72):

$$P = \frac{2}{[4S + (S_z)^2]^{1/2}} \left[1 - \frac{2SS_{zz} - (S_z)^2}{4S + (S_z)^2} \right] , \quad (A-6)$$

o bien llamando:

$$A = 4S + (S_z)^2 , \quad B = 2SS_{zz} - (S_z)^2 ,$$

la expresión anterior se podrá escribir como:

$$P = 2A^{-1/2} \left(1 - \frac{B}{A} \right) ,$$

y derivando:

$$P_z = -A^{-3/2}(A_z + 2B_z) + 3A^{-5/2}A_z B , \quad (A-7)$$

$$P_{zz} = -A^{-3/2}(A_{zz} + 2B_{zz}) + A^{-5/2}\left[\frac{3}{2}(A_z)^2 + 3A_{zz}B + 6A_zB_z\right] - \frac{15}{2}A^{-7/2}(A_z)^2B, \quad (A-8)$$

$$P_{zt} = -A^{-3/2}(A_{zt} + 2B_{zt}) + 3A^{-5/2}(A_{zt}B + A_zB_t + \frac{1}{2}A_tA_z + A_tB_z) - \frac{15}{2}A^{-7/2}A_zA_tB, \quad (A-9)$$

donde las diversas derivadas de A y B vienen dadas por las expresiones:

$$\begin{aligned} A_z &= 2S_z(2 + S_{zz}), \\ A_{zz} &= 2S_{zz}(2 + S_{zz}) + 2S_zS_{zzz}, \\ A_t &= -2(2Q_z + S_zQ_{zz}), \\ A_{zt} &= 2Q_{zz}(2 + S_{zz}) - 2S_zQ_{zzz}, \\ B_z &= 2SS_{zzz}, \\ B_{zz} &= 2(S_zS_{zzz} + SS_{zzzz}), \\ B_t &= -2(Q_zS_{zz} + SQ_{zzz} - Q_{zz}S_z), \\ B_{zt} &= -2(Q_zS_{zzz} + SQ_{zzzz}). \end{aligned}$$

Según esto, es posible calcular las derivadas S_t , S_{tt} , Q_t y Q_{tt} en función, únicamente, de las derivadas espaciales de S y Q en el instante t.

Falta por último, evaluar numéricamente las derivadas respecto a z. Para ello, si desarrollamos en serie en el entorno de un punto genérico M (recuérdese la Fig. 17), llamando X a cualquiera de las variables S o Q, y h al intervalo de discretización espacial ($h=\Delta z$), será:

$$X_{M+2} - X_M = 2X_z h + 2X_{zz} h^2 + \frac{4}{3}X_{zzz} h^3 + \frac{2}{3}X_{zzzz} h^4 + \dots$$

$$X_{M+1} - X_M = X_z h + \frac{1}{2} X_{zz} h^2 + \frac{1}{6} X_{zzz} h^3 + \frac{1}{24} X_{zzzz} h^4 + \dots$$

$$X_{M-1} - X_M = -X_z h + \frac{1}{2} X_{zz} h^2 - \frac{1}{6} X_{zzz} h^3 + \frac{1}{24} X_{zzzz} h^4 + \dots$$

$$X_{M-2} - X_M = -2X_z h + 2X_{zz} h^2 - \frac{4}{3} X_{zzz} h^3 + \frac{2}{3} X_{zzzz} h^4 + \dots$$

Despreciando términos de orden superior y resolviendo el sistema de ecuaciones resulta:

$$\left. \begin{aligned} X_z &= \frac{1}{12h} [8(X_{M+1} - X_{M-1}) - X_{M+2} + X_{M-2}] \\ X_{zz} &= \frac{1}{12h^2} [16(X_{M+1} + X_{M-1}) - X_{M+2} - X_{M-2} - 30X_M] \\ X_{zzz} &= \frac{1}{2h^3} [-2(X_{M+1} - X_{M-1}) + X_{M+2} - X_{M-2}] \\ X_{zzzz} &= \frac{1}{h^4} [-4(X_{M+1} + X_{M-1}) + X_{M+2} - X_{M-2} + 6X_M] \end{aligned} \right\} ,$$

expresiones que constituyen los algoritmos de cálculo de las derivadas espaciales con un esquema de cinco puntos.

REFERENCIAS

1. Chalmers, B., "Generación fotovoltaica de electricidad", Investigación y Ciencia, Dic. 1976, pp. 16-26.
2. Provost, P. & Joyal, M., "Thermodynamique", Masson, Paris, 1972.
3. LEYBOLD-HERAEUS, "Floating Zone Melting of Refractory Metal Rods", 61S1.210e, Leybold-Heraeus GmbH & Co KG, Bonner Strasse 504, 0-5000 Köln 51, Alemania, Nov. 1977.
4. Lewis, G., Foster, P.R. & White, B., "Preliminary Study of a General-Purpose Floating-Zone Electrophoresis Facility for Spacelab", en "Material Sciences in Space", ESA SP 114, ESA, Paris, pp. 167-174.
5. Carruthers, J.R., Gibson, E.G., Klett, M.G. & Facemire, B.R., "Studies of Rotating Liquid Zones on Skylab IV", AIAA paper 75-692, 1972.
6. Martínez, I. & Meseguer, J., "Investigación Espacial. Experimento 1-ES-331", IAA, No. 201, Enero 1980, pp. 9-26.
7. Plateau, J., "Statique Experimentale et Theorique des Liquides Soumis aux Seules Forces Moléculaires", Vol. II, Gauthier-Villars, Paris, 1873.
8. Gillette, R.D. & Dyson, D.C., "Stability of Fluid Interface of Revolution between Equal Solid Circular Plates", Chemical Engineering J., Vol. 2, 1971, pp. 44-54.
9. Martínez, I., "Hidrostatica de la Zona Flotante", Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, 1978.
10. Gillis, J., "Stability of a Column of Rotating Viscous Liquid", Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 57, 1961, pp. 152-159.

11. Martínez, I., "Floating Zone - Equilibrium Shapes and Stability Criteria", Cospar: Space Research, Vol. XVIII, M.J. Rycroft & A.C. Stickland, Eds., Pergamon Press, Oxford, 1978, pp. 519-522.
12. Padday, J.F., "Capillary Forces and Stability in Zero-Gravity Environments", en "Material Sciences in Space", ESA SP 114, ESA, Paris, 1976.
13. Da Riva, I. & Meseguer, J., "On the Structure of the Floating Zone in Melting", Acta Astronautica, Vol. 5, 1978, pp. 637-653.
14. Da Riva, I., "Stability of Liquid Bridges", IAF-80-C-108, XXXI IAF Congress, Tokio, Sep. 1980.
15. Da Riva, I. & Alvarez, E., "A Regular Perturbation approach to Surface Tension Driven Flows", IAF-81-127, XXXII IAF Congress, Roma, Sep. 1981.
16. Schwabe, D., Scharmann, A., Preisser, F. & Oeder, R., "Experiments on Surface Tension Driven in Floating Zone Melting", J. Crystal Growth, Vol. 43, 1978, pp. 305-312.
17. Napolitano, L.G., "Microgravitational Fluid Dynamics", 2nd Levich Conference, Washington, 1978.
18. Wuest, W. & Chun, C.H., "Oscillatory Marangoni Convection", IAF 80-C-113, XXXI IAF Congress, Tokio, Sep. 1980.
19. Chun, C.H. & Wuest, W., "Flow Phenomena in Gravitationless Melting Zone in the Presence of Electromagnetic Fields", Cospar: Space Research, Vol. XVIII, M.J.Rycroft & A.C. Stickland, Eds., Pergamon Press, Oxford, 1978.
20. Wuest, W., "A Micro-Gravity Simulation of the Marangoni Convection", IAF 77-203, XXVIII IAF Congress, Praga, 1977.

21. Mason, G., "An Experimental Determination of the Stable Length of Cylindrical Liquid Bubbles", J. Colloid Interface Sci., Vol. 32, 1979.
22. Fowle, A.A., Wang, C.A. & Strong, P.F., "Experiments on the Stability of Conical and Cylindrical Liquid Columns at Low Bond Numbers", ADL Ref. C-82435, Arthur D. Little, Inc., Cambridge, Massachusetts, Feb. 1979.
23. Ceronetti, G., "The Fluid Physics Module: a Contribution to Material Sciences on Physics in Space", en "Material Sciences in Space", ESA SP 142, ESA, Paris, 1979, pp. 137-148.
24. Martínez, I., "Fluid Physics Module Utilization Brochure", ESA-LAMF, 1979.
25. Kuhn, L. & Myers, R., "Ink-Jet Printing", Scientific American, April 1979, p. 120.
26. Bogy, D.B., "Drop Formation in a Circular Liquid Jet", Ann. Rev. Fluid. Mech., Vol. 11, 1979, pp. 207-228.
27. Strutt, J.W., (Baron Rayleigh), "The Theory of Sound", Vol. 2, Dover Publications, New York, 1945.
28. Goedde, E.F. & Yuen, M.C., "Experiments on Liquid Jet Instability", J. Fluid Mech., Vol. 40, Part 3, 1970, pp. 495-511.
29. Bruce, C.A. "Dependence of Ink Jet Dynamics on Fluid Characteristics", IBM J. Res. Develop., Vol. 20, May 1976, pp. 258-270.
30. Pimbley, W.T. & Lee, H.C., "Satellite Droplet Formation in a Liquid Jet", IBM J. Res. Develop., Vol. 21, Jan. 1977, pp. 21-30.

31. Wang, D.P., "Finite Amplitude Effect on the Stability of a Jet of Circular Cross-Section", *J. Fluid Mech.*, Vol. 34, Part 2, 1968, pp. 299-313.
32. Yuen, M.C., "Non-Linear Capillary Instability of a Liquid Jet", *J. Fluid Mech.*, Vol. 33, Part 1, 1968, pp. 151-163.
33. Nayfeh, A.H., "Nonlinear Stability of a Liquid Jet", *Phys. Fluids*, Vol. 13, No. 4, April 1970, pp. 841-847.
34. Weber, C., "Zum Zerfall eines Flussigkeitsstrahles", *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 11, 1931, pp. 136-154.
35. Lee, H.C., "Drop Formation in a Liquid Jet", *IBM J. Res. Develop.* Vol. 18, July 1974, pp. 364-369.
36. Bogy, D.B., "Use of One-Dimensional Cosserat Theory to Study Instability in a Viscous Liquid Jet", *Phys. Fluids*, Vol. 21, No. 2, Feb. 1978, pp. 190-197.
37. Bogy, D.B., "Break-Up of a Liquid Jet: Second Perturbation Solution for One-Dimensional Cosserat Theory", *IBM J. Res. Develop.*, Vol. 22.
38. Bogy, B.D., "Break-Up of a Liquid Jet: Third Perturbation Cosserat Solution", *Phys. Fluids*, Vol. 22, No. 2, Feb. 1979, pp. 224-230.
39. Green, A.E., "On the Non-Linear Behaviour of Fluid Jets", *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 14, 1976, pp. 49-63.
40. Keller, J.B., Rubinow, S.I. & Tu, Y.O., "Spatial Instability of a Jet", *Phys. Fluids*, Vol. 16, No. 12, Dec. 1973, pp. 2052-2055.
41. Pimbley, W.T., "Drop Formation from a Liquid Jet: A Linear One-dimensional Analysis Considered as a Boundary Value Problem", *IBM J. Res. Develop.*,

Vol. 20, March 1976, pp. 148-156.

42. Landau, L.D. & Lifshitz, E.M., "Fluid Mechanics", Pergamon Press, London, 1959.
43. Levich, V.I., "Physicochemical Hydrodynamics", Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1962, p. 361.
44. Arnold, V., "Equations Differentielles Ordinaires", Editions MIR, Moscou, 1974.
45. Green, A.E. & Laws, N., "A General Theory of Rods", Proc. R. Soc. Lond., A. 293, July 1966, pp. 145-155.
46. Green, A.E., Naghdi, P.M. & Wenner, M.L., "On the Theory of Rods. II. Developments by Direct Approach", Proc. R. Soc. Lond., A. 337, April 1974, pp. 485-507.
47. Green, A.E., Naghdi, P.M. & Wenner, M.L., "On the Theory of Rods. I. Derivations from the Three-Dimensional Equations", Proc. R. Soc. Lond., A. 337, April, 1974, pp. 451-483.
48. Green, A.E. & Naghdi, P.M., "A Derivation of Equations for Wave Propagation in Water of Variable Depth", J. Fluid Mech., Vol. 78, Part 2, 1976, pp. 237-246.
49. Mitchell, A.R. & Griffiths, D.F., "The Finite Difference Method in Partial Differential Equations", John Wiley & Sons Ltd., New York, 1980.
50. Roache, P.J., "Computational Fluid Dynamics", Hermosa Publishers, Albuquerque, N.M. 87108, 1972.

51. Fasel, H., "Recent Developments in the Numerical Solutions of the Navier-Stokes Equations and Hydrodynamics Stability Problems", en "Computational Fluid Dynamics", Vol. 1, W. Kollman, Ed., Hemisphere Publishing Corporation, Washington, 1980, p. 176.
52. Carnahan, B., Luther, H.A. & Wilkes, J., "Applied Numerical Methods", John Wiley & Sons, Inc., New York, 1969.