Considerations in Determining the Cost of Measurement Uncertainty Associated with Dimensional Tolerances Verification

A. Sanz-Lobera(1), M. Villeta(2), M. A. Sebastián(3)

(1) Department of Aerospace Materials and Production. ETSI Aeronáuticos-UPM.
Plaza Cardenal Cisneros 3, 28040 Madrid, Spain, a.slobera@upm.es.
(2)Department of Statistics and Operational Research III, Complutense University of Madrid (UCM).
Av. Puerta de Hierro, s/n, 28040, Madrid, Spain.
(3)Department of Manufacturing Engineering, ETSI Industriales-UNED.
Juan del Rosal, 12, 28040-Madrid, Spain.

RESUMEN

La instrumentación metrológica requerida en la verificación de una especificación de diseño durante el proceso de fabricación lleva asociada una incertidumbre de medida cuyo valor debe estar relacionado con el valor de la tolerancia a comprobar. La mayoría de los trabajos que tratan conjuntamente la tolerancia y la incertidumbre de medida se centran fundamentalmente en el establecimiento de una relación tolerancia-incertidumbre sin prestar demasiada atención a la repercusión que, desde el punto de vista de coste de proceso, supone la existencia de dicha relación. El presente trabajo analiza la relación coste-incertidumbre de medida, considerando ésta última como un factor productivo incidente en el resultado final del proceso. Para ello se parte de un modelo de coste-tolerancia asociado al proceso y a partir de él se calcula en términos cuantitativos el coste que supone la existencia de una incertidumbre de medida analizando la repercusión que tiene sobre el proceso.

Palabras clave: incertidumbre de medida, coste, tolerancias dimensionales, medición, metrología

ABSTRACT

The verification of compliance with a design specification in manufacturing requires the use of metrological instruments to check if the magnitude associated with the design specification is or not according with tolerance range. Such instrumentation and their use during the measurement process, has associated an uncertainty of measurement whose value must be related to the value of tolerance tested. Most papers dealing jointly tolerance and measurement uncertainties are mainly focused on the establishment of a relationship uncertainty-tolerance without paying much attention to the impact from the standpoint of process cost. This paper analyzes the cost-measurement uncertainty, considering uncertainty as a productive factor in the process outcome. This is done starting from a cost-tolerance model associated with the process. By means of this model the existence of a measurement uncertainty is calculated in quantitative terms of cost and its impact on the process is analyzed.

Keywords: uncertainty, cost, dimensional tolerance, measurement, metrology

1. Introducción

La búsqueda de la adecuación entre las especificaciones de un proceso y la instrumentación metrológica empleada para su comprobación es un tema de gran interés en la ingeniería de los procesos de fabricación. Normalmente los trabajos que versan sobre el tema [1-3] se centran es cuestiones de tipo conceptual analizando la relación entre tolerancia y la incertidumbre de medida, siendo menos frecuente los análisis que incorporan la repercusión económica que la elección de un tipo u otro de instrumentación suponga sobre el coste final por pieza. La determinación del coste asociado a la realización de una medida empleando una determinada instrumentación metrológica puede realizarse independientemente del proceso de fabricación que materializa la magnitud medida. En efecto, en una primera aproximación, el coste asociado a cada medición puede obtenerse sumando el coste de operación y el coste de adquisición de los equipos empleados repartido entre el número de mediciones previstas. El valor del coste así obtenido deberá sumarse al coste por pieza del proceso y en principio es independiente del valor de la incertidumbre de medida *U* con el que se realicen las medidas. Esta última afirmación no es del todo cierta ya que, los costes de adquisición y de operación están ligados al valor de la incertidumbre de los equipos. Sin embargo, una vez adquiridos los equipos, para unas condiciones operativas prefijadas, su utilización genera un valor constante del coste para cada medida y para cada pieza.

Además del coste asociado a la medición propiamente dicha, la existencia de una incertidumbre *U* en cada medida realizada genera un coste adicional que va ligado a la amplitud *T* del intervalo de tolerancia de la magnitud medida. Dicho coste es tanto mayor cuanto mayor sea el valor de la incertidumbre de medida *U*. En efecto, tal y como muestra la figura 1, la existencia de la incertidumbre de medida *U* produce la aparición de piezas dudosas (no se puede afirmar si son o no correctas) en la proximidad de los extremos del intervalo de tolerancia. Estas piezas no existirían en el caso ideal *U=0* y su existencia supone un coste adicional al proceso de fabricación.

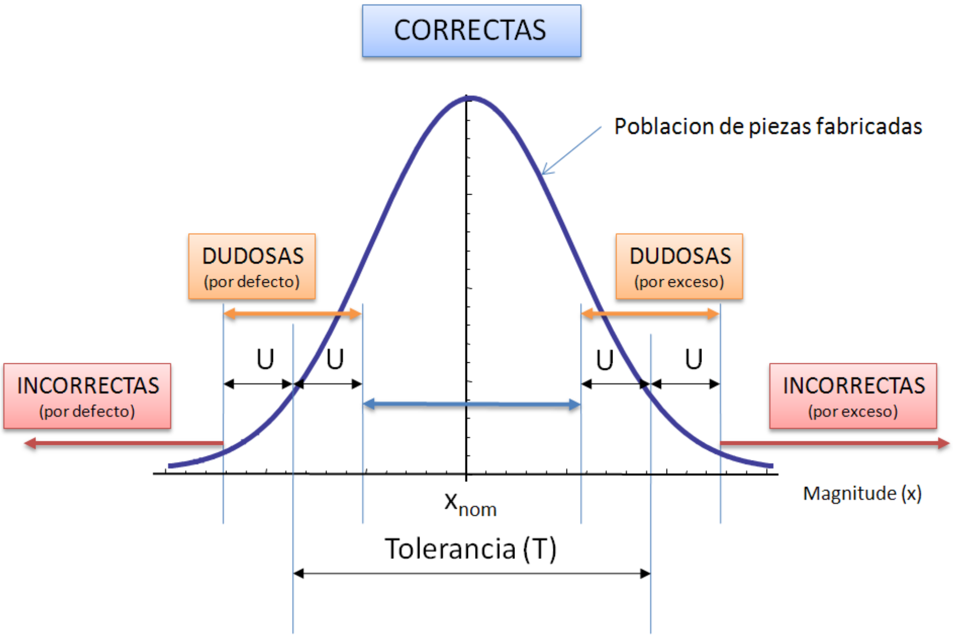

Figura 1. *Distribución de la población de piezas fabricadas*

El coste adicional debido a la aparición de piezas dudosas depende de la amplitud del intervalo de tolerancia *T*. Si dicho intervalo es relativamente "grande" respecto al valor de la incertidumbre *U*, la incidencia de las piezas dudosas en términos de coste es pequeña. Esta incidencia aumenta progresivamente a medida que la incertidumbre crece hasta alcanzar un valor máximo para $U=T/2$, por encima del cual todas las piezas fabricadas serían dudosas o incorrectas. La cuantificación del coste originado por la existencia de piezas dudosas depende del intervalo de tolerancia de la magnitud fabricada y por este motivo para su cuantificación es necesario partir de un modelo que establezca una relación entre el coste y la tolerancia del proceso.

2. Modelo de coste basado en el proceso

Cualquier especificación mecánica que comprometa la funcionalidad o la intercambiabilidad de una pieza debe ir acompañada un intervalo de tolerancia que establezca los valores admisibles de la magnitud asociada a la especificación. La materialización de dicha magnitud durante el proceso de fabricación supone un coste, tanto mayor cuanto menor sea la amplitud del intervalo de tolerancia, siendo un objetivo prioritario de todo proceso la minimización del coste dentro del margen admitido por la tolerancia.

A pesar de su importancia, la determinación de la relación entre el coste y la tolerancia asociados a un proceso de fabricación no es un problema que haya sido resuelto de forma satisfactoria, tal y como demuestran las diversas publicaciones que a lo largo del tiempo han abordado el tema [4-6].

Independientemente del modelo coste-tolerancia utilizado, uno de los principales problemas que supone el establecimiento de una relación entre coste y tolerancia, deriva de la existencia de un nivel de correspondencia bajo entre de los datos de entrada del modelo y la realidad del proceso de fabricación. Cada máquina y cada proceso concreto actúan en unas determinadas condiciones que no pueden ser extrapoladas entre máquinas o procesos sin una repercusión negativa en la validez de los resultados. Por ello, en la medida de lo posible, es muy importante trabajar con modelos de coste-tolerancia que reflejen adecuadamente las características específicas del proceso [7].

Como modelo de coste-tolerancia se utilizará el propuesto por [7] cuya principal ventaja frente a otros modelos previamente propuestos radica en el hecho de basarse en parámetros obtenidos a partir del propio proceso y no requerir el conocimiento de datos de producción externos que en la mayoría de los casos no son fácilmente extrapolables al proceso considerado.

El modelo considerado parte del supuesto de que el proceso se encuentra en un régimen estacionario y que por lo tanto la variabilidad para obtener un determinado valor en la magnitud que está siendo fabricada puede ser cuantificada a partir de la desviación típica de la población de piezas fabricadas en las condiciones consideradas. En principio se define sobre una única especificación, aunque puede ser aplicado de forma recurrente sobre una serie de especificaciones. Asimismo se asume que la comprobación del cumplimiento de la especificación se realiza mediante un sistema de medición ideal con incertidumbre cero.

En estas condiciones, supóngase un proceso en el que se obtiene una determinada magnitud x cuyos valores admisibles fijados por el diseño están contenidos en un intervalo de amplitud T centrado en un valor nominal de la magnitud x_{nom}. Sean asimismo $F(x)$ y $f(x)$ respectivamente las funciones de distribución y de densidad de la población de piezas fabricadas, de forma tal que la proporción de piezas a cuyo valor de magnitud se encuentra contenido en un intervalo I puede determinarse mediante

$$\alpha = \int_I f(t)dt = F\left(x_{\text{sup}}\right) - F\left(x_{\text{inf}}\right) \tag{1}$$

Donde x_{sup} y x_{inf} representan los extremos superior e inferior del intervalo I respectivamente.

Si α representa la proporción de piezas correctas (dentro del intervalo de tolerancia) entonces $1-\alpha$ representa la proporción de piezas incorrectas o defectuosas. En estas condiciones, si se fabrica una serie de N piezas, $N\alpha$ piezas serán correctas y $N(1-\alpha)$ piezas serán incorrectas. Llamando C_0 al coste que supone la fabricación de una pieza (sea o no correcta), el coste C_N que supondrá la obtención de un cierto número N de piezas correctas será

$$C_N = C_0 N/\alpha \tag{2}$$

ya que será necesario fabricar un número N/α de piezas.

3. Determinación del coste asociado a la incertidumbre de medida

Si no existiese incertidumbre de medida (U=0), la medición de la magnitud x sobre cualquier pieza permitiría establecer su condición de correcta/incorrecta, y la aplicación de las expresiones (1) y (2) se podría realizar considerando el intervalo I como el intervalo de tolerancia, es decir,

$$I = [x_{nom}-T/2,\ x_{nom}+T/2] \tag{3}$$

La existencia de incertidumbre de medida (U>0) supone, tal y como se ha indicado, la aparición de piezas dudosas. En estas piezas la determinación de la condición de correcta/incorrecta requiere la utilización de recursos de medida adicionales o el establecimiento de un criterio de aceptación/rechazo que, normalmente implicará un incremento en el coste de fabricación de cada pieza.

Para determinar el coste asociado a la incertidumbre de medida se van a considerar dos modelos. El primero de ellos no requiere la utilización de recursos adicionales, sin embargo reduce la proporción de piezas correctas, mientras que el segundo requiere la utilización de recursos de medida adicionales.

3.1 Modelo sin realización de mediciones adicionales

En el modelo sin realización de mediciones adicionales, la única opción admisible desde el punto de vista de fabricación consiste en considerar como defectuosas las piezas dudosas. Este proceder conlleva el rechazo de un número relativamente alto de piezas potencialmente correctas, por lo que su aplicación es inadecuada en términos de coste y no debe ser realizado salvo que el coste de mediciones adicionales supere el coste de fabricación de una pieza nueva. Pese a ello su planteamiento resulta interesante para tener un elemento de referencia con el que poder comparar otras posibles alternativas.

En términos matemáticos, el planteamiento del modelo puede realizarse considerando un intervalo de tolerancia modificado T_M cuyo valor sea

$$T_M = T - 2U \tag{4}$$

donde T es la amplitud del intervalo de tolerancia establecido para la magnitud fabricada y U es la incertidumbre de medida.

3.2 Modelo con realización de mediciones adicionales

En este modelo se considera la posibilidad de realización de medidas adicionales, bien utilizando la misma instrumentación de medida, bien utilizando una instrumentación con menor incertidumbre de medida que la utilizada en la medición inicial. En este caso el modelo requiere la inclusión de un nuevo parámetro asociado al coste necesario para la realización de una medición adicional. Esta medición adicional lleva asociada una incertidumbre de medida, por lo que su realización permitirá la detección de un porcentaje de piezas correctas e incorrectas dentro de las inicialmente consideradas como dudosas, aunque seguirá existiendo un porcentaje de piezas dudosas a las que habrá que dar un tratamiento en el modelo. Lo más habitual, y en el supuesto de que la aplicación de un tercer proceso de medición no sea rentable, es considerar las piezas dudosas como incorrectas.

4. Resultados

Para poder aplicar los dos modelos presentados en el apartado anterior a una situación productiva concreta, es necesario establecer, además de los valores del intervalo de tolerancia (T, x_{nom}) y de la incertidumbre de medida U, los valores de los costes de fabricación de cada pieza C_0 y el coste necesario para la realización de una medición adicional de las piezas dudosas C_{MA}. Asimismo debe ser conocida la distribución de la población de las piezas fabricadas, que se supondrá Normal, hipótesis comúnmente aceptada en la mayoría de los procesos de fabricación.

4.1 Resultados del modelo sin realización de mediciones adicionales

Tal y como muestra la Figura 2, para un valor fijo del intervalo de tolerancia con los mismos recursos productivos, la proporción de piezas correctas disminuye como consecuencia de la aparición de una proporción de piezas dudosas.

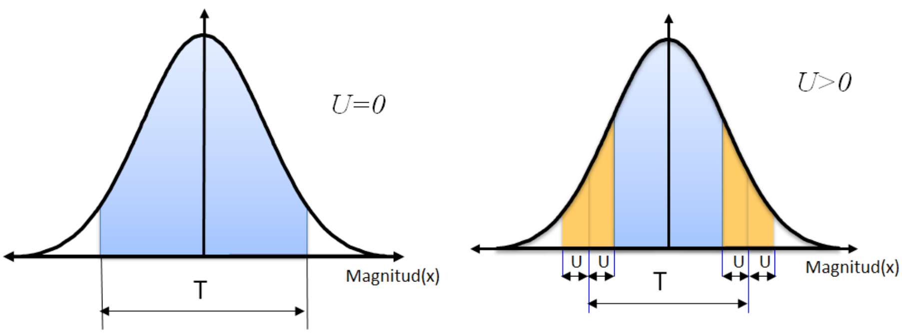

Figura 2. *Porcentaje de piezas correctas con U=0 y U>0*

Sea x_{nom} el valor nominal de la magnitud fabricada y T la amplitud del intervalo de tolerancia centrado respecto al valor nominal. Si la población de piezas fabricadas responde a una población Normal $N(\mu, \sigma)$ en la que la media μ es ajustable y la desviación típica σ tiene un valor conocido, la probabilidad de fabricar una pieza correcta considerando U>0 será.

$$\alpha = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_{nom}-T/2+U}^{x_{nom}+T/2-U} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-t}{\sigma}\right)^2} dt \tag{5}$$

Tipificando la variable aleatoria asociada a la distribución Normal dicha probabilidad podrá determinarse mediante

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T/2\sigma+U/\sigma}^{+T/2\sigma-U/\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \tag{6}$$

Llamando $\Phi(x)$ a la función de distribución de la Normal $N(0;1)$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \tag{7}$$

el coste unitario por pieza C_u podrá expresarse como

$$C_u = \frac{C_0}{\alpha} = \frac{C_0}{2\Phi\left(\frac{T}{2\sigma} - \frac{U}{\sigma}\right) - 1} \tag{8}$$

cuya representación gráfica es la indicada en la figura 3.

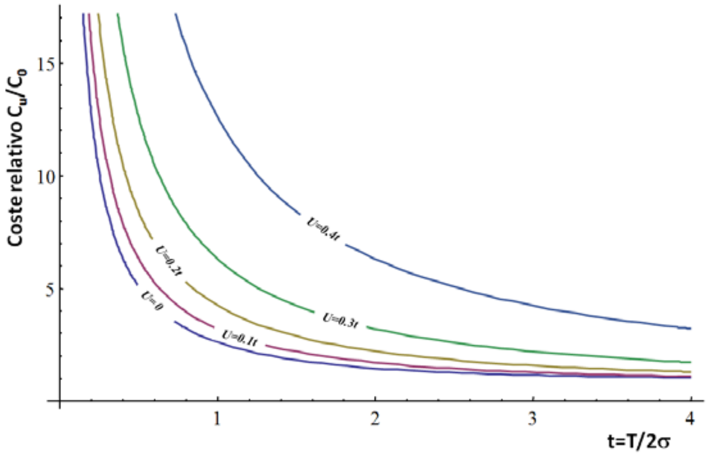

Figura 3. *Coste relativo en función de la tolerancia y la incertidumbre*

Puede observarse como se produce un incremento significativo del coste en el intervalo comprendido entre 2.5≤ $T/2U$ <10 debido a la aparición de piezas dudosas.

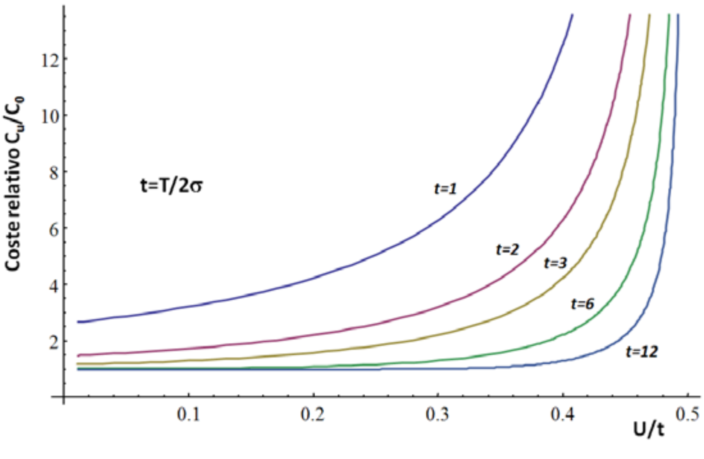

Figura 4. *Valores de coste en función de la incertidumbre U*

En la Figura 4 se representa el coste en función de la incertidumbre de medida utilizando el valor de la tolerancia como parámetro de variación. Puede observarse que existe un valor asintótico para U/T=0.5 que representa la situación en la que todas las piezas fabricadas son dudosas y por lo tanto no pueden ser aceptadas como correctas. También puede observarse como la incidencia de la incertidumbre es menor a medida que crece el intervalo de tolerancia.

4.2 Resultados del modelo con realización de mediciones adicionales

En este caso el planteamiento que se propone consiste en la reducción de la incertidumbre de medida, bien recurriendo a otro método de medida más exacto (y por lo tanto más costoso) o bien reiterando el número de medidas realizadas sobre cada pieza a fin de reducir el valor de la incertidumbre. Las variables de partida son las mismas que en el supuesto anterior, es decir, x_{nom} es el valor nominal de la magnitud fabricada, T es la amplitud del intervalo de tolerancia centrado respecto al valor nominal y la población de piezas fabricadas se distribuye de acuerdo con una población Normal $N(\mu, \sigma)$ en la que la media μ es ajustable y la desviación típica σ tiene un valor conocido. En estas condiciones, probabilidad de fabricar una pieza correcta considerando U>0 será la expresada en (5). La proporción de piezas dudosas δ en el extremo superior del intervalo de tolerancia vendrá dada por

$$\delta = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_{nom}+T/2-U}^{x_{nom}+T/2+U} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-t}{\sigma}\right)^2} dt \tag{9}$$

Expresión cuya tipificación conduce a

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{T/2\sigma-U/\sigma}^{T/2\sigma+U/\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \tag{10}$$

Obteniéndose una expresión semejante para las piezas dudosas próximas al extremo inferior del intervalo. Para determinar la proporción de piezas correctas en este caso, debe sumarse al valor de α obtenido mediante la expresión (6) la proporción de piezas que podrán ser consideradas correctas dentro del conjunto de piezas inicialmente dudosas $\Delta\alpha$. Para determinar esta proporción es necesario conocer la distribución de las piezas dudosas así como el valor de la incertidumbre de medida del nuevo proceso de medición empleado $U_{MA.}$

La función de distribución de las piezas dudosas $D(x)$ es la correspondiente a una distribución Normal truncada en los intervalos de aparición de piezas dudosas. La representación gráfica de la función de densidad $d(x)$ de dicha s distribución es la indicada en la Figura 5(a).

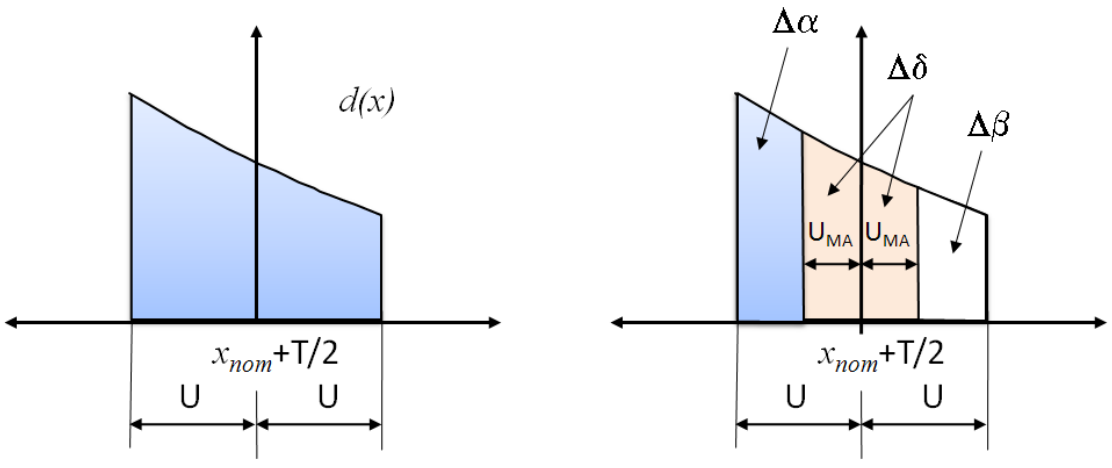

Figura 5. *Distribución de las piezas inicialmente dudosas (extremo superior)*

Por cuestión de sencillez se analiza la proporción de piezas en el entorno del extremo superior del intervalo de tolerancia, esperándose un comportamiento análogo en términos de probabilidad en el extremo inferior siempre y cuando el intervalo de tolerancia esté centrado respecto a la distribución Normal de partida y que la incertidumbre de medida puede ser considerada la misma en la medición de las piezas situadas en las proximidades de ambos extremos. En la figura 5(b) aparecen las proporciones de piezas correctas $\Delta\alpha$, dudosas $\Delta\delta$ y defectuosas $\Delta\beta$ que se obtienen en la población de piezas inicialmente dudosas cuando se realiza una nueva medición con incertidumbre U_{MA}.

La expresión matemática de *D(x)* viene dada por

$$D(x)\begin{cases} =0 & x<T/2-U \\ =\dfrac{\Phi(x)-\Phi(T/2-U)}{\Phi(T/2+U)-\Phi(T/2-U)} & x\in\left[T/2-U,T/2+U\right] \\ =1 & x>T/2+U \end{cases} \tag{11}$$

y el valor de $\Delta\alpha$ buscado puede obtenerse mediante

$$\Delta\alpha=\frac{\Phi(T/2-U_{MA})-\Phi(T/2-U)}{\Phi(T/2+U)-\Phi(T/2-U)} \tag{12}$$

En la Figura 6 se muestran gráficamente valores de $\Delta\alpha$ para distintos valores de *T*, *U* y u_{MA}.

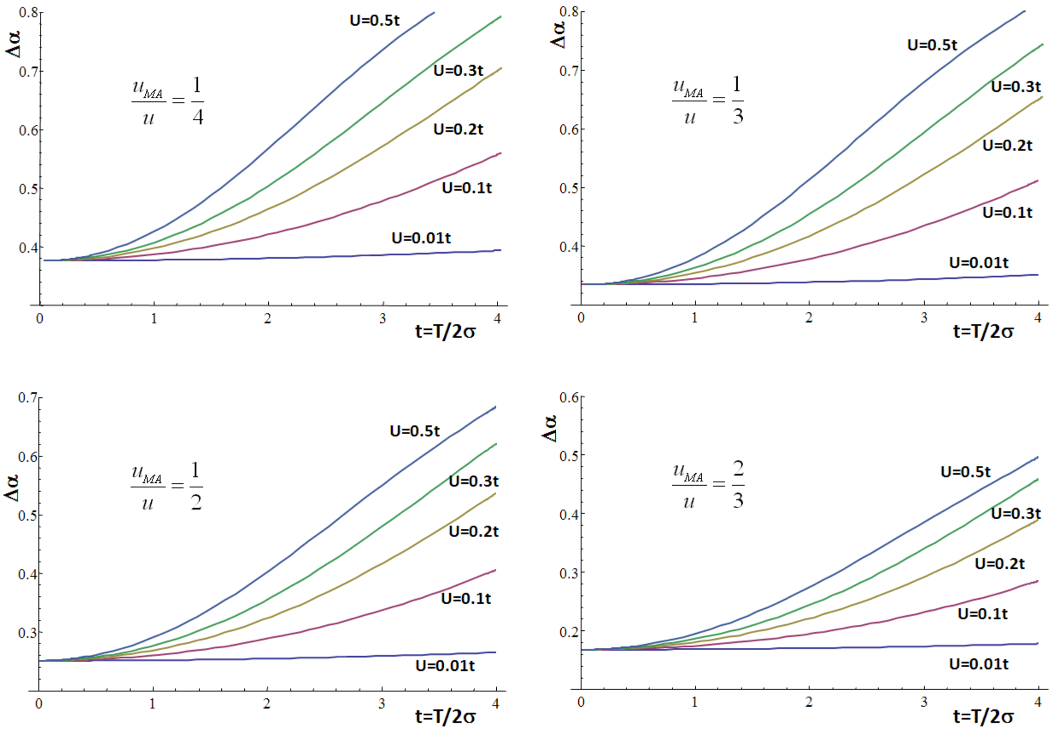

Figura 6. *Proporción de piezas correctas $\Delta\alpha$ tras la medición adicional*

En estas condiciones el coste unitario por pieza C_u podrá expresarse como

$$C_u=\frac{C_0^{'}}{\alpha+2\Delta\alpha} \tag{13}$$

ya que se ha supuesto una distribución centrada en el valor nominal y por lo tanto existirá una proporción de piezas correctas en las inmediaciones del extremo inferior del intervalo de tolerancia. El valor del coste $C_0^{'}$ es ligeramente superior al de C_0 ya que debe incluir el coste de las medidas que adicionalmente es necesario realizar para detectar las piezas correctas entre las inicialmente dudosas. En la Figura 7 se proporciona una representación gráfica del coste unitario dado por (13). En dicha representación se han utilizado valores similares a los empleados en la representación gráfica de la figura 4. Aunque ambas gráficas no son comparables de una manera exacta ya que el número de parámetros empleado en ambas es diferente, puede observarse como la utilización de medidas adicionales suaviza la tendencia asintótica de las curvas en el valor *U*=0.5 ya que la realización de dichas medidas elimina la condición de que todas las piezas fabricadas son dudosas.

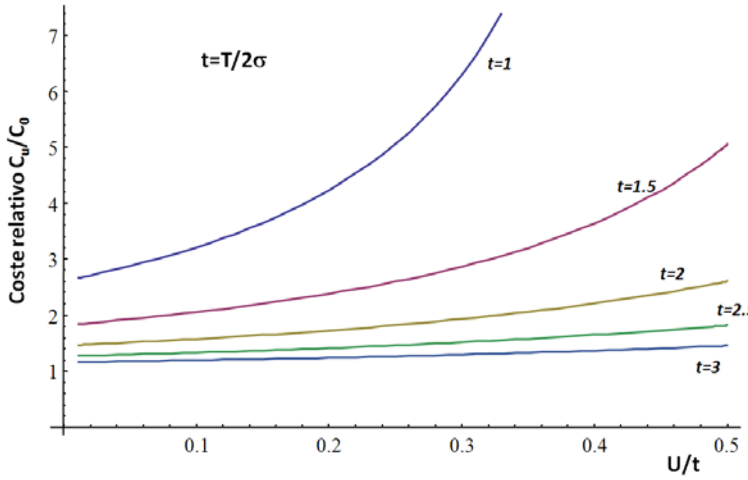

Figura 7. *Valores de coste en función de la incertidumbre U (u_{MA}=0.5u)*

5. Conclusiones

El coste de medición por pieza en la fabricación de una serie puede determinarse repartiendo la inversión de los equipos de medida entre un número determinado de mediciones y sumando a éste el valor el coste de operación imputable a cada medición. Además de este valor fijo por pieza, la existencia de una incertidumbre de medida *U* asociada a cada medición genera la aparición de una proporción de piezas "dudosas" en las que no es posible establecer su conformidad o no con un determinado intervalo de tolerancia *T* centrado en un valor nominal x_{nom}, cuya presencia genera la aparición de un coste adicional en el proceso. El presente trabajo ha desarrollado una metodología para determinar el coste imputable a la existencia de piezas "dudosas" basándose en un modelo de coste-tolerancia asociado a la variabilidad del proceso. En los resultados mostrados se han asumido diversas hipótesis simplificadoras tales como la normalidad de la población de piezas fabricadas o la posición centrada del intervalo de tolerancia respecto a la media poblacional. Dichas hipótesis han sido asumidas con el fin de posibilitar la presentación gráfica de unos resultados que ilustren la aplicación del modelo propuesto, sin embargo, su asunción no resulta estrictamente necesaria ya que el modelo permite la incorporación de situaciones en las que la población de piezas se ajuste a otro tipo de distribución, el intervalo de tolerancia no se encuentre centrado, o incluso que se realicen mediciones adicionales con diferentes equipos en función de la situación relativa de las piezas dudosas respecto al intervalo de tolerancia. El valor del coste obtenido es adicional al coste de adquisición y mantenimiento de los equipos empleados en la medición, por lo que, a partir de la información presentada, es posible complementar los criterios de adecuación empleados en la elección de la instrumentación de medida a utilizar en cada proceso.

6. Referencias

[1] S. Bordignon, M. Scagliarini, *Statistical analysis of process capability indices with measurement errors*, Qual. Reliab. Eng. Int. 18 (2002) 321 – 332.

[2] M. Scagliarini, *Estimation of C_p for autocorrelated data and measurement errors*, Commun. Statist. Theor. Meth. 31(9) (2002) 1647- 1664.

[3] M.Villeta, A. Sanz-Lobera, C. Gonzalez, M.A. Sebastian, *Evaluation of Dimensional Measurement Systems Applied to Statistical Control of the Manufacturing Process*, 3rd Manufacturing Engineering Society International Conference, 1181(2009)287-298, AIP Conference Proceedings.

[4] F.H. Speckhart, *Calculation of tolerance based on a minimum cost approach*, J. Eng. Ind., ASME, May-(1972) 447-453.

[5] M.F. Spotts, *Allocation of tolerances to minimize cost of assembly*, J. Eng. Ind., ASME, 95-(1973) 762-764.

[6] K.W. Chase, W.H. Greenwood, B.G. Loosli, L.F. Hauglund, *Least Cost Tolerance Allocation for Mechanical Assemblies with Automated Process Selection*. Manuf. Rev. 3(1990) 49-59.

[7] A. Sanz-Lobera, M.A. Sebastián, J.M. Pérez, *New cost-tolerance model for mechanical part design* Int. J. Adv. Manuf. Tech. 51 (2010) 421–430.