

Congress on Numerical Methods in Engineering 2011
Coimbra, 14 a 17 de June 2011
©APMTAC, Portugal 2011

ANÁLISIS DE LOS PARÁMETROS QUE DEFINEN UN MODELO DE DAÑO APLICADO AL DETERIORO DE LA CAPACIDAD RESISTENTE DE PAREDES ARTERIALES

S. Blanco*, C. Polindara y J.M. Goicolea

Depto. de Mecánica de Medios Continuos y Estructuras
Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Madrid
C/ Profesor Aranguren s/n, 28040 Madrid, España
e-mail: {sblanco, cpolindara, goicolea}@mecnica.upm.es

Palabras clave: Tejidos blandos, daño continuo, materiales fibrados, paredes arteriales, hiperelasticidad

Resumen. *El comportamiento mecánico de las paredes arteriales constituye un ingrediente fundamental para entender enfermedades cardiovasculares como las disecciones aórticas o la fisuración de placas de aterosclerosis. El fenómeno mecánico que subyace en estas enfermedades es el fallo constitutivo del material, que puede deberse a la degradación de las propiedades mecánicas del tejido, a la aplicación de una carga excesiva o la concentración de tensiones que tiene lugar en traumatizaciones de la íntima. Un modelo que busque reproducir este comportamiento biomecánico debe incorporar además la información histológica de las paredes arteriales, formadas en una primera aproximación por una matriz acuosa incompresible y dos familias de fibras dispuestas helicoidalmente. De entre los modelos mecánicos existentes cabe destacar los modelos de daño, que con un conjunto pequeño de parámetros son capaces de reproducir la degradación de la capacidad resistente tanto en la matriz como en las fibras. Esta simplicidad convierte a esta clase de modelos en una herramienta muy útil para estudiar este fenómeno. En este trabajo se presenta un estudio para un modelo de daño de los parámetros que lo definen, asociados a la imposición de la incompresibilidad de la matriz acuosa y a las evoluciones del daño en dicha matriz y en las dos familias de fibras. Se incluye una revisión de las técnicas existentes para imponer la incompresibilidad, un resumen bibliográfico de la caracterización experimental de los parámetros materiales y un análisis de su influencia en el comportamiento estructural de la aorta, analizada mediante ensayos de tracción.*

1. INTRODUCCIÓN

La respuesta mecánica del tejido arterial posee diversas características que la convierten en un fenómeno cuyo modelado requiere una consideración cuidadosa de diversos aspectos [14]. Entre estos cabe citar las grandes deformaciones incluso bajo cargas fisiológicas; la fuerte no linealidad de la respuesta; la anisotropía del tejido; la estructura basada en capas (endotelio, media y adventicia, y subcapas de las mismas); la microestructura de la matriz extracelular constituida principalmente por elastina y colágeno; la incompresibilidad debida a la fase acuosa; la respuesta reológica o viscoelasticidad; la pseudoelasticidad que ocasiona distintas ramas de carga y descarga incluso en condiciones cuasi-estáticas; el crecimiento y remodelación correspondiente a un tejido vivo, y por último los distintos estímulos mecánicos o biológicos. Una descripción más completa de algunas de estas cuestiones puede encontrarse en [20], [19], [5].

La capacidad portante del tejido aórtico está acotada y un conjunto de fenómenos de degradación tiene lugar cuando las deformaciones impuestas a la pared arterial alcanza un cierto límite. Podemos asumir que la evolución de esta degradación se caracteriza como una función del máximo histórico de una norma de las deformaciones. Este comportamiento mecánico se puede reproducir usando modelos no lineales, que deben ser físicamente motivados para reproducir el comportamiento fisiológico y matemáticamente bien definidos para poder ser usados dentro del esquema de la mecánica del medio continuo [18].

La base de los modelos aquí considerados es la elasticidad no lineal (hiperelasticidad). El orden de magnitud del módulo elástico secante es del orden de las tensiones aplicadas y se producen por tanto grandes deformaciones en el material. La forma funcional de los modelos que mejor caracterizan la respuesta del tejido arterial es la exponencial [3], [7], [6], [13]. Esto se debe a que la contribución mecánica de las fibras de colágeno en el tejido se produce mediante un reclutamiento progresivo, a medida que las cadenas de estos polímeros quedan extendidas y empiezan a colaborar.

Por otra parte la predominancia mecánica de las fibras de colágeno establece una marcada anisotropía, que puede interpretarse mediante modelos de isotropía transversal, basada en los invariantes extendidos de [32]. La ley propuesta en [18] incorpora estos invariantes en una función de energía exponencial y constituye el modelo de referencia para tejido arterial. Es posible incorporar leyes de distribución de las fibras de colágeno, como se propone en [37] para la longitud de activación, aunque en la práctica no resulta de fácil incorporación en cálculos de elementos finitos. Sin embargo, la consideración de la distribución de orientaciones de las fibras propuesta en [11] representa una extensión que proporciona un modelo más realista y es de fácil implementación.

Los fenómenos inelásticos asociados al fallo material de las paredes arteriales han sido reproducidos numéricamente siguiendo dos aproximaciones: utilizando modelos de daño continuo, basados en la definición de una determinada función de energía de deformación [2] o basados en el análisis estadístico del daño mesoscópico en las fibras de colágeno [27], y utilizando modelos cohesivos de fisura discreta, en el que la separación de las superficies materiales de una fisura se regula mediante una ley cohesiva de tracción [9].

En este trabajo se presenta un estudio de la modelización de las paredes arteriales frente a sollicitaciones que provocan un deterioro de su capacidad resistente. La sección 2 hace un pequeño resumen de los ensayos experimentales existentes que caracterizan el fallo material de las paredes arteriales. En la sección 3 se resume los modelos de elasticidad no lineal incompresible para materiales fibrados y en la sección 3.3 se estudia la imposición numérica de la incompresibilidad. La sección 4 particulariza el modelo descrito en la sección 3 para un modelo de daño regularizado, que considera de forma desacoplada los fenómenos de degradación que tienen lugar en la matriz y en cada una de las fibras. Finalmente la sección 5 presenta un ejemplo de aplicación.

2. CARACTERIZACIÓN MECÁNICA DEL FALLO MATERIAL DE PAREDES ARTERIALES

La mayor parte de los estudios experimentales que buscan determinar las características mecánicas de las paredes arteriales han sido realizados en animales. Sin embargo, estos estudios pueden ser deficientes cuando se extrapolan al estudio de paredes arteriales humanas [17]. Como ejemplo de estas deficiencias se puede destacar la inexistencia en animales de la capa íntima en las arterias coronarias [34], que sí aparece en humanos desarrollándose en los primeros años de vida y que continuamente crece en espesor.

Tal como se describe en [30], los ensayos existentes para caracterizar las propiedades mecánicas de las paredes arteriales frente a rotura son los ensayos de tracción uniaxial en dirección radial [22], circunferencial y axial [23][36], ensayos de inflado en especímenes circulares incorporando técnicas de inflado de burbuja [24], ensayos de inflado en arterias intactas [15] y ensayos de rasgado en tiras arteriales [26].

Estos ensayos buscan caracterizar el comportamiento de las paredes arteriales más allá del rango de las acciones fisiológicas hasta el total agotamiento del material. Podemos distinguir tres fases en un ensayo de tracción típico: una fase 1 en la que estamos dentro del rango elástico del material y que engloba al rango fisiológico de las acciones, una fase 2 en la que se inician los procesos inelásticos con degradación del material pero sin alcanzar la tensión última y una fase 3 en la que, tras alcanzar la tensión última, se produce una caída brusca de la capacidad resistente.

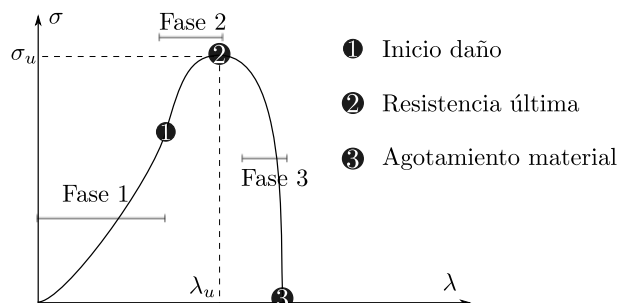


Figura 1: Fases ensayo a tracción uniaxial en curva tensión vs. estiramiento.

Dado que las paredes arteriales son un material compuesto y que la familia de fibras se alinean al desarrollarse el ensayo, el comportamiento macroscópico de la figura 1 se obtendrá a partir de la contribución del comportamiento mesoscópico de cada uno de los componentes. Por lo tanto será necesario caracterizar, para cada una de las fases, una tensión de comparación que permita determinar el inicio de los procesos inelásticos, la energía que se liberará (energía de fractura) debido a estos procesos inelásticos hasta el agotamiento del material y la tasa a la que se libera dicha energía. Sin embargo, cuantificar la energía de fractura a partir de experimentos es difícil debido a que el fallo asociado a la fase 3 es inestable en los ensayos de tracción y la caída que se produce en la curva es tan brusca que no puede ser capturada. El cuadro 1, tomado de Sommer *et al.* [30], enumera los ensayos existentes para la caracterización mecánica de paredes arteriales frente a rotura.

Ensayo de tracción			
Tejido	σ_u^{circ} (MPa)	σ_u^{axial} (MPa)	σ_u^{radial} (MPa)
Aorta humana mediotorácica descendiente [23]	$1,72 \pm 0,89$	$1,47 \pm 0,91$	–
Aorta abdominal humana [35]	–	$1,21 \pm 0,33$	–
Aorta descendiente torácica humana [1]	$1,76 \pm 0,22$	$1,95 \pm 0,6$	–
Aorta torácica porcina [22]	–	–	$0,061 \pm 0,004$
Aorta torácica ascendente humana [36]	$1,80 \pm 0,24$	$1,71 \pm 0,14$	–
Aorta abdominal humana [30]	–	–	$0,14 \pm 0,016$
Ensayo de inflado			
Tejido	σ_u (MPa)		
Aorta humana mediotorácica descendiente [24]	$0,114 \pm 0,032$		
Aorta humana torácica descendiente [15]	$2,7 \pm 1,5$		
Ensayo de rasgado (<i>peeling</i>)			
Tejido	Energía disecc. circ (mJ/cm^2)	Energía disecc. axial (mJ/cm^2)	
Aorta humana abdominal [30]	$5,1 \pm 0,6$	$7,6 \pm 2,7$	

Cuadro 1: Resumen caracterización mecánica fractura paredes arteriales

En general los resultados obtenidos por los ensayos experimentales son dependientes del sitio anatómico donde se ha tomado la muestra de ensayo, pudiéndose afirmar que la resistencia a tracción de la aorta humana se reduce al aumentar la distancia desde el corazón [30]. A su vez, los ensayos sobre las distintas capas de la arteria muestran que su comportamiento es anisotrópico, mostrando una resistencia última en la dirección axial algo menor que en la dirección circunferencial. Sin embargo, la dispersión en los resultados y el pequeño número de muestras válidas que se utilizan en los ensayos existentes hace que estas conclusiones tengan un importante grado de incertidumbre [17].

3. MODELOS DE ELASTICIDAD NO LINEAL INCOMPRESIBLE

3.1. Cinemática

Sea un medio continuo cuya configuración de referencia en el instante $t_0 = 0$ es Ω_0 . Definimos el movimiento del cuerpo mediante la aplicación $\boldsymbol{\chi}(\bullet, t) : \Omega_0 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ que transforma un punto material $\mathbf{X} \in \Omega_0$ a una posición $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t) \in \Omega$ en la configuración deformada Ω , siendo $[0, T]$ el intervalo de tiempo de estudio. Sea también $\mathbf{F} = \partial \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t) / \partial \mathbf{X}$ el tensor gradiente de deformaciones y $J = \det \mathbf{F} > 0$ su determinante, que representa la razón volumétrica. Siguiendo la propuesta de Flory [8] el tensor \mathbf{F} puede descomponerse en una parte volumétrica y una parte isocórica:

$$\mathbf{F} = J^{1/3} \bar{\mathbf{F}} \quad (1)$$

lo que permite definir los tensores de Cauchy-Green por la izquierda y por la derecha:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = J^{-2/3} \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}} = J^{-2/3} \bar{\mathbf{C}} \quad (2)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = J^{-2/3} \bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{F}}^T = J^{-2/3} \bar{\mathbf{b}} \quad (3)$$

siendo $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}}$ y $\bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{F}}^T$ los tensores modificados asociados a las deformaciones isocóricas del material.

La dirección de cada una de las dos familias de fibras en un punto material $\mathbf{X} \in \Omega_0$ se define mediante un vector unidad \mathbf{a}_{0i} , con $i = \{1, 2\}$, siendo $\|\mathbf{a}_{0i}\| = 1$. Si asumimos que durante la deformación las fibras se mueven con los puntos materiales del medio continuo, se obtiene la relación entre la configuración inicial y deformada de estas dos direcciones:

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{F} \mathbf{a}_{0i}; \quad \bar{\mathbf{a}}_i = \bar{\mathbf{F}} \mathbf{a}_{0i}; \quad \|\mathbf{a}_{0i}\| = 1; \quad i = 1, 2 \quad (4)$$

donde $\bar{\mathbf{a}}_i = \bar{\mathbf{F}} \mathbf{a}_{0i}$ se refiere a la configuración espacial debida sólo a las deformaciones isocóricas y siendo el estiramiento en la dirección \mathbf{a}_{0i} igual a $\|\mathbf{a}_i\|$.

3.2. Función densidad de energía de deformación y respuesta tensional

Para poder describir la respuesta inelástica anisotrópica del material, compuesto por una matriz acuosa y dos familias de fibras, asumimos la existencia de una función de densidad de energía de deformación en forma desacoplada del tipo:

$$W = U(J) + \bar{W}(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2) \quad (5)$$

donde la función $U(J)$ es una contribución puramente volumétrica y $\bar{W}(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$ una contribución puramente isocórica. La dependencia de la parte isocórica respecto de la dirección de cada familia de fibras \mathbf{a}_{0i} se realiza a través del tensor de estructura generalizado \mathbf{H}_i , que debe tener en cuenta tanto la orientación como la dispersión de la familia de fibras. Gasser *et al.* [11] proponen un tensor de estructura generalizado de la forma:

$$\mathbf{H}_i = \kappa \mathbf{1} + (1 - 3\kappa) \mathbf{a}_{0i} \otimes \mathbf{a}_{0i} \quad i = 1, 2 \quad (6)$$

donde el parametro material $\kappa \in [0, 1/3]$ representa la dispersión de la familia de fibras, valiendo $\kappa = 0$ para el caso de fibras perfectamente orientadas y $\kappa = 1/3$ para el caso de dispersión máxima (comportamiento isótropo).

Las tensiones resultantes (segundo tensor de Piola-Kirchhoff \mathbf{S}) quedan igualmente descompuestas en términos volumétrico e isocórico:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{\text{VOL}} + \bar{\mathbf{S}}_{\text{ISO}} = Jp\mathbf{C}^{-1} + 2\frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{C}} \quad \text{con} \quad p = \frac{dU(J)}{dJ} \quad (7)$$

siendo el tensor de elasticidad en la descripción material

$$\mathbb{C} = 2\frac{\partial \mathbf{S}_{\text{VOL}}}{\partial \mathbf{C}} + 2\frac{\partial \bar{\mathbf{S}}_{\text{ISO}}}{\partial \mathbf{C}}. \quad (8)$$

3.3. Resolución Numérica de la Incompresibilidad

Como se ha comentado arriba los tejidos blandos biológicos son en general incompresibles, es decir se verifica con bastante aproximación la condición $J = 1$. Esta restricción introduce una dificultad numérica importante para la solución numérica por elementos finitos. En primer lugar, desde el punto de vista de las ecuaciones de comportamiento del material, la respuesta mecánica del tejido queda indeterminada a partir de la ley constitutiva únicamente: en la ecuación (7) el valor de p es arbitrario. Es necesario considerar las ecuaciones adicionales de las condiciones de contorno para resolver dicha indeterminación.

En la aproximación de elementos finitos esta indeterminación exigiría en principio la introducción de un multiplicador de Lagrange que represente la presión p indeterminada, y en consecuencia un conjunto mixto de incógnitas a interpolar. Las aproximaciones de elementos finitos mediante métodos estándar en desplazamientos son inservibles para materiales incompresibles o cuasi-incompresibles. Una de las soluciones más eficaces es la propuesta en [29] que desarrolla *elementos mixtos* (Q1-P0, B1-P0) basados en un principio variacional multicampo $\mathbf{u} - p - \theta$, que funciona adecuadamente para comportamiento cuasi-incompresible. Estos elementos están disponibles en FEAP [33] y han sido empleados en este trabajo. En ellos se considera una energía de deformación volumétrica $U(J)$ pero con una muy baja compresibilidad (módulo volumétrico muy elevado). Estos elementos resuelven el problema de la elastoplasticidad con flujo plástico incompresible pero en la cual la elasticidad proporciona una pequeña compresibilidad. Para materiales elásticos incompresibles como es el caso aquí una opción es introducir una energía de deformación volumétrica como una penalización, con un coeficiente de penalización tan elevado como sea posible ($K_p \gg 1$):

$$U(J) = K_p \frac{1}{2}(J-1)^2; \quad p = \frac{dU(J)}{dJ} = K_p(J-1), \quad (9)$$

de esta forma se aproximaría la condición de incompresibilidad, $J \approx 1$, y el valor de p no tendría significado físico sino que representaría la fuerza de penalización.

Este procedimiento tiene varios inconvenientes. En primer lugar, la elección de la constante de penalización K_p a menudo debe hacerse de forma manual, es difícil de seleccionar automáticamente de forma que el error en la incompresibilidad sea suficientemente pequeño. Por otra parte, un valor alto de la constante K_p puede provocar mal condicionamiento de las ecuaciones y dar lugar a inestabilidad numérica. Una alternativa que evita estos problemas consiste en introducir un esquema iterativo para la obtención del multiplicador p de forma que se verifique con la tolerancia $\varepsilon \ll 1$ deseada la condición de incompresibilidad ($J - 1 < \varepsilon$), el método denominado *Lagrangiano aumentado* [12]. En nuestro caso se modifica la función de energía de deformación volumétrica (9), aumentándola de la forma:

$$U(J) = K_p \frac{1}{2} (J - 1)^2 + pH(J) \quad (10)$$

donde p es el multiplicador buscado, con el significado físico de la presión, y $H(J)$ se denomina *función aumentada*, siendo $H(1) = 0$. Esta función debe cumplir que $K_p H(J) = dU(J)/dJ$ para que el esquema sea convergente. El valor de p que hace $H(J) < \varepsilon$ se alcanza mediante iteraciones, que pueden ser anidadas o simultáneas con el bucle de Newton:

$$p^{k+1} = p^k + K_p H(J). \quad (11)$$

Ejemplo de estudio de influencia de la incompresibilidad.— Se ha implementado el modelo de [11] en el programa de elementos finitos FEAP [33] y se ha definido una prueba de carga uniaxial en deformación homogénea con las constantes elásticas tomadas de [11]. Se usa un único elemento hexaedro de 8 nodos, en el cual se impone un alargamiento en la dirección 1. Las fibras están sobre el plano 1-2 orientadas a 45° con respecto al eje 1 y las tensiones se limitan al rango fisiológico de la aorta humana ascendente que no sobrepasa los 5 MPa [16]. El objetivo de esta prueba es verificar el comportamiento del esquema de Lagrangiano aumentado con un número máximo de iteraciones de 100. Se ha repetido el ensayo con dos valores diferentes para el parámetro que mide la dispersión de las fibras, $\kappa = 0,000$ y $\kappa = 0,226$, los resultados se observan en las figuras 2 y 3.

La constante de penalización K_p define el valor inicial del multiplicador p . Cuanto menor sea K_p mayor será número de iteraciones necesarias en el bucle de Lagrangiano aumentado. En caso de que se alcance el máximo número de iteraciones permitido no se habrá logrado satisfacer la incompresibilidad y la solución numérica no corresponderá con la solución buscada.

En la figura 2 la línea negra sólida representa la respuesta analítica del problema. Se observa que al aumentar la dispersión (κ) la curva tensión-alargamiento se traslada hacia la izquierda, lo cual es consistente: al aumentar la dispersión algunas fibras empiezan a trabajar antes, es decir que el reclutamiento de las fibras empieza a cobrar importancia mucho antes que cuando no hay dispersión. El alargamiento máximo para $\kappa = 0,000$ es $\lambda_1 = 1,45$, para $\kappa = 0,226$ es $\lambda_1 = 1,26$, marcados por una línea negra punteada.

La figura 3 por otra parte muestra la evolución de la función aumentada $H(J)$ en uno de los puntos de Gauss del elemento, cada curva se corta en el instante en que se alcanza 100

iteraciones en el bucle del lagrangiano aumentado. Allí se observa claramente que para un penalizador bajo ($K_p = 0,035$ MPa) el esquema de Lagrangiano deja de converger antes de alcanzar el alargamiento máximo, lo que explica porqué para este valor la solución numérica no corresponde con la analítica (ver figura 2). En esta misma figura se observa que el esquema de Lagrangiano también falla para un penalizador algo mayor $K_p = 0,379$ MPa, sin embargo en este caso no hay una diferencia apreciable con la solución analítica.

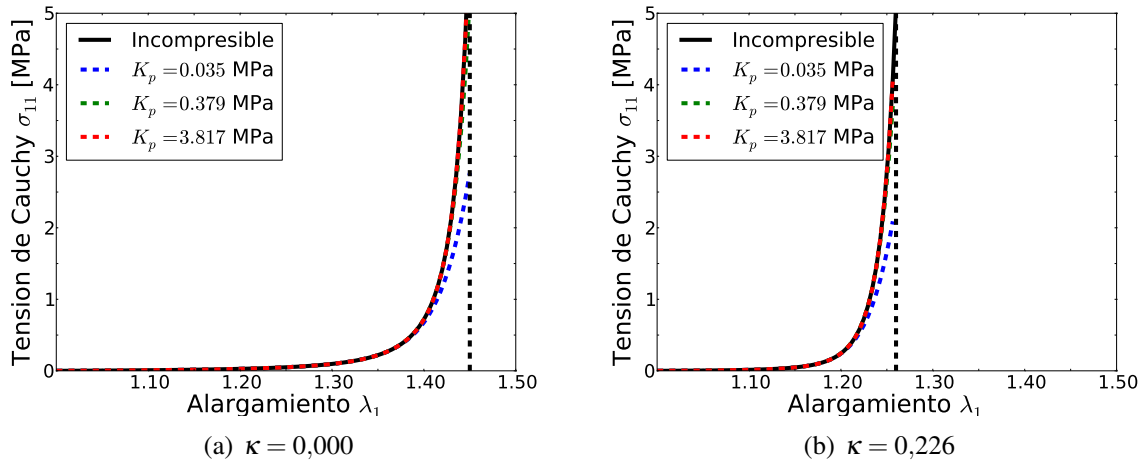


Figura 2: Curvas tensión-alargamiento para prueba de carga uniaxial. La línea negra punteada marca el alargamiento máximo.

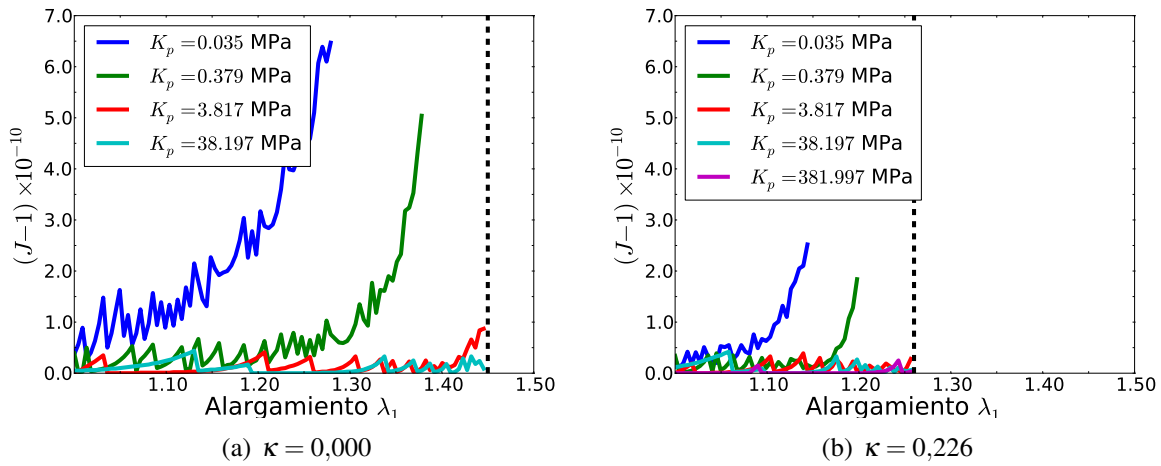


Figura 3: Evolución de la restricción en prueba de carga uniaxial. La línea negra punteada marca el alargamiento máximo.

4. MODELOS DE DAÑO CONTINUO CON ABLANDAMIENTO REGULARIZADO

4.1. Función densidad de energía de deformación y respuesta tensional

La contribución isocórica de la expresión de la energía de deformación definida en (5), particularizada para el modelo de daño, puede descomponerse en una parte isótropa asociada al comportamiento de la matriz acuosa y una parte anisotrópica asociada al comportamiento de las fibras:

$$W = U(J) + (1 - d_g)\bar{W}_g(\bar{\mathbf{C}}) + (1 - d_{f1})\bar{W}_{f1}(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{H}_1) + (1 - d_{f2})\bar{W}_{f2}(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{H}_2) \quad (12)$$

donde los términos \bar{W}_g , \bar{W}_{f1} y \bar{W}_{f2} son las funciones de energía de deformación efectivas de los materiales hipotéticos no dañados matriz y fibras respectivamente, que deben cumplir las condiciones de objetividad. Los factores $(1 - d_g)$, $(1 - d_{f1})$ y $(1 - d_{f2})$ son los factores de reducción, inicialmente propuestos por Kachanov [21], que incorporan los fenómenos inelásticos de degradación que tienen lugar de forma separada en la matriz y en cada una de las familias de fibras, siendo $0 \leq d_\alpha \leq 1$ para $\alpha = \{g, f1, f2\}$.

La expresión (12) admite ser expresada en término de los invariantes [31] de la forma:

$$W = U(J) + (1 - d_g)\bar{W}_g(\bar{I}_1, \bar{I}_2) + (1 - d_{f1})\bar{W}_{f1}(\bar{I}_1, \bar{I}_4) + (1 - d_{f2})\bar{W}_{f2}(\bar{I}_1, \bar{I}_6) \quad (13)$$

siendo:

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= \text{tr}(\bar{\mathbf{C}}) = \text{tr}(\bar{\mathbf{b}}) = J^{-2/3}\text{tr}(\mathbf{C}) = J^{-2/3}\text{tr}(\mathbf{b}) = J^{-2/3}I_1 \\ \bar{I}_2 &= \frac{1}{2} \left[\text{tr}(\bar{\mathbf{C}})^2 - \text{tr}(\bar{\mathbf{C}}^2) \right] = \frac{1}{2} \left[\text{tr}(\bar{\mathbf{b}})^2 - \text{tr}(\bar{\mathbf{b}}^2) \right] \\ &= J^{-4/3} \frac{1}{2} \left[\text{tr}(\mathbf{C})^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2) \right] = J^{-4/3} \frac{1}{2} \left[\text{tr}(\mathbf{b})^2 - \text{tr}(\mathbf{b}^2) \right] = J^{-4/3}I_2 \\ \bar{I}_3 &= \det \bar{\mathbf{C}} = \det \bar{\mathbf{b}} = 1; \quad J = (\det \mathbf{C})^{1/2} = (\det \mathbf{b})^{1/2} \\ \bar{I}_4 &= \bar{\mathbf{C}} : (\mathbf{a}_{01} \otimes \mathbf{a}_{01}); \quad \bar{I}_6 = \bar{\mathbf{C}} : (\mathbf{a}_{02} \otimes \mathbf{a}_{02}) \end{aligned}$$

Para reproducir el comportamiento de la matriz acuosa utilizaremos la función de densidad de energía del modelo neohookeano, y para reproducir el comportamiento de cada familia de fibras la función tipo Demiray [7] propuesta por Gasser *et al.* en [11] de forma que la ecuación (13) pasa a expresarse como:

$$\begin{aligned} W &= \underbrace{\frac{1}{2}K(J-1)^2}_{U(J)} + (1 - d_g) \underbrace{\frac{1}{2}c(\bar{I}_1 - 3)}_{\bar{W}_g} + (1 - d_{f1}) \underbrace{\frac{k_{11}}{2k_{21}} \left(e^{k_{21}\bar{E}_1^2} - 1 \right)}_{\bar{W}_{f1}} \\ &\quad + (1 - d_{f2}) \underbrace{\frac{k_{12}}{2k_{22}} \left(e^{k_{22}\bar{E}_2^2} - 1 \right)}_{\bar{W}_{f2}} \end{aligned} \quad (14)$$

donde K hace las veces de penalizador de las deformaciones volumétricas, los parámetros $\{c, k_{11}, k_{21}, k_{12}, k_{22}\}$ son parámetros materiales y las cantidades E_1 y E_2 valen:

$$\bar{E}_1 = \bar{\mathbf{C}} : \mathbf{H}_1 - 1 = \kappa \bar{I}_1 + (1 - 3\kappa) \bar{I}_4 - 1 \quad (15)$$

$$\bar{E}_2 = \bar{\mathbf{C}} : \mathbf{H}_2 - 1 = \kappa \bar{I}_1 + (1 - 3\kappa) \bar{I}_6 - 1 \quad (16)$$

que caracterizan la deformación en la dirección de las orientaciones medias \mathbf{a}_{01} y \mathbf{a}_{02} .

Aplicando el método de Coleman y Noll [4], se obtiene la respuesta tensional y la disipación interna del modelo a partir de la desigualdad de Clausius-Planck para procesos isoterms:

$$\mathcal{D}_{\text{INT}} = \mathbf{S} : \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}} - \dot{W} \quad (17)$$

siendo

$$\dot{W} = \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{C}} + (1 - d_g) \frac{\partial \bar{W}_g}{\partial \mathbf{C}} + (1 - d_{f1}) \frac{\partial \bar{W}_{f1}}{\partial \mathbf{C}} + (1 - d_{f2}) \frac{\partial \bar{W}_{f2}}{\partial \mathbf{C}} \right) : \dot{\mathbf{C}} \quad (18)$$

$$- \dot{d}_g \bar{W}_g - \dot{d}_{f1} \bar{W}_{f1} - \dot{d}_{f2} \bar{W}_{f2} \quad (19)$$

lo que nos permite obtener la respuesta tensional y la disipación interna del modelo:

$$\mathbf{S} = 2 \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{C}} + (1 - d_g) \frac{\partial \bar{W}_g}{\partial \mathbf{C}} + (1 - d_{f1}) \frac{\partial \bar{W}_{f1}}{\partial \mathbf{C}} + (1 - d_{f2}) \frac{\partial \bar{W}_{f2}}{\partial \mathbf{C}} \right) \quad (20)$$

$$\mathcal{D}_{\text{INT}} = \dot{d}_g \bar{W}_g + \dot{d}_{f1} \bar{W}_{f1} + \dot{d}_{f2} \bar{W}_{f2} \geq 0 \quad (21)$$

Aplicando la regla de la cadena y utilizando las dependencias expresadas en (14) obtenemos la expresión para el segundo tensor de Piola-Kirchhoff:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{S}_{\text{VOL}} + (1 - d_g) \bar{\mathbf{S}}_g + (1 - d_{f1}) \bar{\mathbf{S}}_{f1} + (1 - d_{f2}) \bar{\mathbf{S}}_{f2} \\ &= \mathbf{S}_{\text{VOL}} + (1 - d_g) J^{-2/3} \mathbb{P} : \tilde{\mathbf{S}}_g + (1 - d_{f1}) J^{-2/3} \mathbb{P} : \tilde{\mathbf{S}}_{f1} + (1 - d_{f2}) J^{-2/3} \mathbb{P} : \tilde{\mathbf{S}}_{f2} \end{aligned} \quad (22)$$

con

$$\mathbb{P}^T = \left(\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} \right)$$

$$\mathbf{S}_{\text{VOL}} = J p \mathbf{C}^{-1}; \quad \tilde{\mathbf{S}}_g = c \mathbf{1}$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_{f1} = 2k_1 \bar{E}_1 e^{k_2 \bar{E}_1^2} \mathbf{H}_1; \quad \tilde{\mathbf{S}}_{f2} = 2k_1 \bar{E}_2 e^{k_2 \bar{E}_2^2} \mathbf{H}_2$$

siendo \mathbb{P} el operador desviador en la descripción lagrangiana.

A partir de la expresión (22) podemos obtener el tensor de tensiones de Cauchy aplicando la transformación de Piola según:

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \quad (23)$$

con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= J^{-1}\boldsymbol{\tau}_{\text{VOL}} + J^{-1}(1-d_g)\mathbb{P} : \tilde{\boldsymbol{\tau}}_g + J^{-1}(1-d_{f1})\mathbb{P} : \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{f1} + J^{-1}(1-d_{f2})\mathbb{P} : \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{f2} \\ &= J^{-1}\boldsymbol{\tau}_{\text{VOL}} + J^{-1}(1-d_g)\bar{\boldsymbol{\tau}}_g + J^{-1}(1-d_{f1})\bar{\boldsymbol{\tau}}_{f1} + J^{-1}(1-d_{f2})\bar{\boldsymbol{\tau}}_{f2}\end{aligned}\quad (24)$$

siendo

$$\begin{aligned}\mathbb{P} &= \mathbb{I} - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}; \quad \boldsymbol{\tau}_{\text{VOL}} = Jp\mathbf{1}; \quad \tilde{\boldsymbol{\tau}}_g = \bar{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{S}}_g\bar{\mathbf{F}}^T = c\bar{\mathbf{b}} \\ \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{f1} &= \bar{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{S}}_{f1}\bar{\mathbf{F}}^T = 2k_1\bar{E}_1e^{k_2\bar{E}_1^2} \underbrace{\left(\kappa\bar{\mathbf{b}} + (1-3\kappa)\bar{\mathbf{a}}_1 \otimes \bar{\mathbf{a}}_1\right)}_{\bar{\mathbf{h}}_1} = 2k_1\bar{E}_1e^{k_2\bar{E}_1^2}\bar{\mathbf{h}}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{f2} &= \bar{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{S}}_{f2}\bar{\mathbf{F}}^T = 2k_1\bar{E}_2e^{k_2\bar{E}_2^2} \underbrace{\left(\kappa\bar{\mathbf{b}} + (1-3\kappa)\bar{\mathbf{a}}_2 \otimes \bar{\mathbf{a}}_2\right)}_{\bar{\mathbf{h}}_2} = 2k_1\bar{E}_2e^{k_2\bar{E}_2^2}\bar{\mathbf{h}}_2\end{aligned}$$

donde \mathbb{P} es el operador desviador en la descripción euleriana.

4.2. Ingredientes del modelo de daño

Se ha asumido que el mecanismo de daño está asociado a los procesos isocóricos y que es independiente de la presión hidrostática. La ecuación de la disipación interna del material obtenida en (21) y que se reproduce a continuación

$$\mathcal{D}_{\text{INT}} = \dot{d}_g\bar{W}_g + \dot{d}_{f1}\bar{W}_{f1} + \dot{d}_{f2}\bar{W}_{f2} \geq 0 \quad (25)$$

permite definir a las funciones \bar{W}_α como las funciones de estado conjugadas de las variables internas d_α , con $\alpha = \{g, f1, f2\}$, y que dichas variables internas deben cumplir:

$$d_\alpha \in [0, 1], \quad \dot{d}_\alpha \geq 0 \quad \text{con } \alpha = \{g, f1, f2\} \quad (26)$$

Definamos para cada paso de tiempo t una variable tipo deformación r_α como el máximo histórico de una norma de las deformaciones

$$r_\alpha = \max_t \sqrt{2\bar{W}_\alpha} \quad (27)$$

y una variable interna tipo tensión q_α que se relaciona con la variable interna tipo deformación r_α de forma incremental como

$$\dot{q}_\alpha = H_\alpha(r_\alpha)\dot{r}_\alpha, \quad H_\alpha(r_\alpha) = \frac{\partial q_\alpha}{\partial r_\alpha}, \quad \text{siendo } q_\alpha^0 = r_\alpha^0 \quad (28)$$

para $\alpha = \{g, f1, f2\}$, siendo $H_\alpha(r_\alpha) > 0$ para el caso en que se produzca endurecimiento por deformación y $H_\alpha(r_\alpha) < 0$ para ablandamiento por deformación y siendo r_α^0 la norma que

define el tamaño inicial del dominio elástico en el espacio de las deformaciones. Las variables de daño se definen entonces como

$$d_g = 1 - \frac{q_g}{r_g}, \quad d_{f1} = 1 - \frac{q_{f1}}{r_{f1}}, \quad d_{f2} = 1 - \frac{q_{f2}}{r_{f2}} \quad (29)$$

Siguiendo el trabajo de Simó [28] definimos para cada una de las fases una función de fluencia que proporcione un criterio de daño en el espacio de las deformaciones

$$\Phi_g(\bar{I}_1, \bar{I}_2, r_g) = \sqrt{2\bar{W}_g} - r_g \leq 0 \quad (30)$$

$$\Phi_{f1}(\bar{I}_1, \bar{I}_4, r_{f1}) = \sqrt{2\bar{W}_{f1}} - r_{f1} \leq 0 \quad (31)$$

$$\Phi_{f2}(\bar{I}_1, \bar{I}_6, r_{f2}) = \sqrt{2\bar{W}_{f2}} - r_{f2} \leq 0 \quad (32)$$

Las ecuaciones (30)-(32) definen el espacio admisible de las deformaciones teniendo que cumplirse las condiciones de carga-descarga o de Kuhn-Tucker y la llamada condición de persistencia:

$$\dot{r}_\alpha \geq 0, \quad \Phi_\alpha \leq 0, \quad \dot{r}_\alpha \Phi_\alpha = 0; \quad \dot{r}_\alpha \dot{\Phi}_\alpha = 0 \quad (33)$$

con $\alpha = \{g, f1, f2\}$. El modelo así definido admite una integración cerrada para la variable \dot{r}_α , pudiéndose integrar a lo largo del tiempo como:

$$r_\alpha(t) = \max_{s \in [0, t]} \left[r_\alpha^0, \sqrt{2\bar{W}_\alpha(s)} \right] \quad (34)$$

de nuevo con $\alpha = \{g, f1, f2\}$.

4.3. Disipación y regularización del ablandamiento

El modelo de daño definido en el anterior apartado permite particularizar, utilizando (27) y (28), el valor de la disipación dado en la expresión (25) como:

$$\mathcal{D}_{\text{INT}} = \sum_{\alpha=g, f1, f2} d_\alpha \dot{\bar{W}}_\alpha = \sum_{\alpha=g, f1, f2} \frac{1}{2} (q_\alpha \dot{r}_\alpha - \dot{q}_\alpha r_\alpha) \quad (35)$$

La tasa de la variable interna tipo tensión \dot{q}_α , con $\alpha = \{g, f1, f2\}$, puede ser definida en una forma general como:

$$\dot{q}_\alpha = -H_\alpha(q_\alpha) \dot{r}_\alpha = -A_\alpha q_\alpha^\beta \dot{r}_\alpha \quad (36)$$

donde A_α es un valor que debe ser definido imponiendo que la disipación total venga dada por un parámetro material y β es un parámetro que indica el tipo ablandamiento/endurecimiento, siendo dos casos particulares $\beta = 0$ para el caso lineal y $\beta = 1$ para el caso exponencial. De

esta forma el parámetro β , que caracteriza el tipo de ablandamiento, pasa a ser un parámetro más del material.

A partir del trabajo de Gasser y Holzapfel [10], en el que se utilizan modelos cohesivos para simular la disección de paredes arteriales, se utiliza el parámetro material G^f , densidad superficial de energía de fractura, para regularizar la energía disipada por el modelo de daño continuo en el proceso de agotamiento del material. Sea un medio cuyo volumen Ω puede expresarse como $\Omega = Sh$, con S una sección media y h un tamaño característico. Asumiendo un proceso monótono de carga y que el material sufre ablandamiento por deformación, la energía disipada total W_{tot} desde el inicio de los procesos inelásticos hasta el agotamiento del material se calcula como:

$$\begin{aligned} W_{TOT} &= \int_{\Omega} d\Omega \left(\int_{t=t_d}^{\infty} \mathcal{D}_{int} dt \right) = \int_{\Omega} d\Omega \left(\int_{t=t_d}^{\infty} \sum_{\alpha=g,f1,f2} \frac{1}{2} (q_{\alpha} \dot{r}_{\alpha} - \dot{q}_{\alpha} r_{\alpha}) dt \right) \\ &= \sum_{\alpha=g,f1,f2} \int_{\Omega} d\Omega \left(\int_{t=t_d}^{\infty} \frac{1}{2} (q_{\alpha} \dot{r}_{\alpha} - \dot{q}_{\alpha} r_{\alpha}) dt \right) \end{aligned} \quad (37)$$

Operando en la ecuación (37) y utilizando la expresión (36) se llega a la expresión:

$$W_{TOT} = \sum_{\alpha=g,f1,f2} \int_{\Omega} d\Omega \left[\frac{1}{A_{\alpha}} \frac{(q_{\alpha}^0)^{2-\beta}}{(2-\beta)} \right] = \sum_{\alpha=g,f1,f2} Sh \left[\frac{1}{A_{\alpha}} \frac{(q_{\alpha}^0)^{2-\beta}}{(2-\beta)} \right] = \sum_{\alpha=g,f1,f2} SG_{\alpha}^f \quad (38)$$

lo que nos permite obtener el valor A_{α} de la ecuación (36) como:

$$A_{\alpha} = \frac{(q_{\alpha}^0)^{2-\beta}}{(2-\beta)} \frac{1}{G_{\alpha}^f} h \quad (39)$$

pudiendo obtener finalmente el módulo de ablandamiento regularizado

$$H_{\alpha}(q_{\alpha}(t)) = - \frac{(q_{\alpha}^0)^{2-\beta}}{(2-\beta)} \frac{1}{G_{\alpha}^f} q_{\alpha}^{\beta}(t) h \quad (40)$$

siendo h , para el caso de un dominio discretizado por elementos finitos, la longitud característica de dicho elemento [25].

4.4. Tensor constitutivo tangente

Las condiciones de carga-descarga y la condición de persistencia nos permite definir el operador constitutivo tangente para el caso en el que nos encontremos en un caso de carga inelástica o descarga elástica. A partir de la definición del operador constitutivo tangente

$$\mathbb{C} = 2 \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{C}} \quad (41)$$

obtenemos:

$$\mathbb{C}^{des} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}_{VOL}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{q_g}{r_g} 2 \frac{\partial \bar{\mathbf{S}}_g}{\partial \mathbf{C}} + \frac{q_{f1}}{r_{f1}} 2 \frac{\partial \bar{\mathbf{S}}_{f1}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{q_{f2}}{r_{f2}} 2 \frac{\partial \bar{\mathbf{S}}_{f2}}{\partial \mathbf{C}} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{car} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}_{VOL}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{q_g}{r_g} 2 \frac{\partial \bar{\mathbf{S}}_g}{\partial \mathbf{C}} + \frac{q_{f1}}{r_{f1}} 2 \frac{\partial \bar{\mathbf{S}}_{f1}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{q_{f2}}{r_{f2}} 2 \frac{\partial \bar{\mathbf{S}}_{f2}}{\partial \mathbf{C}} \\ + 2 \frac{\partial \left(\frac{q_g}{r_g} \right)}{\partial \mathbf{C}} \otimes \bar{\mathbf{S}}_g + 2 \frac{\partial \left(\frac{q_{f1}}{r_{f1}} \right)}{\partial \mathbf{C}} \otimes \bar{\mathbf{S}}_{f1} + 2 \frac{\partial \left(\frac{q_{f2}}{r_{f2}} \right)}{\partial \mathbf{C}} \otimes \bar{\mathbf{S}}_{f2} \end{aligned} \quad (43)$$

donde (siendo $\alpha = \{g, f1, f2\}$)

$$2 \frac{\partial \bar{\mathbf{S}}_\alpha}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial (J^{-2/3} \mathbb{P} : \tilde{\mathbf{S}}_\alpha)}{\partial \mathbf{C}} = \mathbb{P} : \tilde{\mathbb{C}}_\alpha : \mathbb{P}^T + \frac{2}{3} \text{Tr}(J^{-2/3} \tilde{\mathbf{S}}_\alpha) \hat{\mathbb{P}} - \frac{2}{3} (\mathbf{C}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{S}}_\alpha + \bar{\mathbf{S}}_\alpha \otimes \mathbf{C}^{-1})$$

con

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\bullet) = (\bullet) : \mathbf{C}; \quad \hat{\mathbb{P}} = \underbrace{\mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1}}_{-\frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}}} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \\ \tilde{\mathbb{C}}_\alpha = 2J^{-4/3} \frac{\partial \tilde{\mathbf{S}}_\alpha}{\partial \mathbf{C}} = 4J^{-4/3} \frac{\partial^2 \bar{W}_\alpha}{\partial \mathbf{C} \partial \bar{\mathbf{C}}} \end{aligned}$$

y para el caso de carga inelástica, utilizando que $r_\alpha = \sqrt{2\bar{W}_\alpha}$, se tiene que

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial \left(\frac{q_\alpha}{r_\alpha} \right)}{\partial \mathbf{C}} \otimes \bar{\mathbf{S}}_\alpha = 2 \left(\frac{\dot{q}_\alpha r_\alpha - q_\alpha}{r_\alpha^2} \right) \frac{\partial r_\alpha}{\partial \mathbf{C}} \otimes \bar{\mathbf{S}}_\alpha = 2 \left(\frac{\dot{q}_\alpha r_\alpha - q_\alpha}{r_\alpha^2} \right) \frac{\partial \sqrt{2\bar{W}_\alpha}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \bar{\mathbf{S}}_\alpha \\ = \left(\frac{\dot{q}_\alpha r_\alpha - q_\alpha}{r_\alpha^2} \right) \frac{1}{\sqrt{2\bar{W}_\alpha}} \frac{\partial \bar{W}_\alpha}{\partial \mathbf{C}} \otimes \bar{\mathbf{S}}_\alpha = \left(\frac{\dot{q}_\alpha r_\alpha - q_\alpha}{r_\alpha^3} \right) \bar{\mathbf{S}}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{S}}_\alpha \end{aligned}$$

A continuación se particulariza cada término de las ecuaciones (42)-(43) para la parte volumétrica, la matriz acuosa y cada una de las fibras:

$$2 \frac{\partial \mathbf{S}_{VOL}}{\partial \mathbf{C}} = J \underbrace{\left(p + J \frac{\partial p}{\partial J} \right)}_{\bar{p}} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} - 2Jp \mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1}$$

$$2 \frac{\partial (J^{-2/3} \mathbb{P} : \tilde{\mathbf{S}}_g)}{\partial \mathbf{C}} = \mathbb{P} : \tilde{\mathbb{C}}_g : \mathbb{P}^T + \frac{2}{3} \text{Tr}(J^{-2/3} \tilde{\mathbf{S}}_g) \hat{\mathbb{P}} - \frac{2}{3} (\mathbf{C}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{S}}_g + \bar{\mathbf{S}}_g \otimes \mathbf{C}^{-1})$$

$$\tilde{\mathbb{C}}_g = 2J^{-4/3} \frac{\partial \tilde{\mathbf{S}}_g}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{0}$$

$$2 \frac{\partial (J^{-2/3} \mathbb{P} : \tilde{\mathbf{S}}_{f1})}{\partial \mathbf{C}} = \mathbb{P} : \tilde{\mathbb{C}}_{f1} : \mathbb{P}^T + \frac{2}{3} \text{Tr}(J^{-2/3} \tilde{\mathbf{S}}_{f1}) \hat{\mathbb{P}} - \frac{2}{3} (\mathbf{C}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{S}}_{f1} + \bar{\mathbf{S}}_{f1} \otimes \mathbf{C}^{-1})$$

$$\tilde{\mathbb{C}}_{f1} = 2J^{-4/3} \frac{\partial \tilde{\mathbf{S}}_{f1}}{\partial \mathbf{C}} = 2J^{-4/3} \frac{\partial \tilde{\mathbf{S}}_{f1}}{\partial \bar{E}_1} \frac{\partial \bar{E}_1}{\partial \mathbf{C}} = 4J^{-4/3} k_1 e^{k_2 \bar{E}_1} (1 + 2k_2 \bar{E}_1) \mathbf{H}_1 \otimes \mathbf{H}_1$$

$$2 \frac{\partial (J^{-2/3} \mathbb{P} : \tilde{\mathbf{S}}_{f2})}{\partial \mathbf{C}} = \mathbb{P} : \tilde{\mathbb{C}}_{f2} : \mathbb{P}^T + \frac{2}{3} \text{Tr}(J^{-2/3} \tilde{\mathbf{S}}_{f2}) \hat{\mathbb{P}} - \frac{2}{3} (\mathbf{C}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{S}}_{f2} + \bar{\mathbf{S}}_{f2} \otimes \mathbf{C}^{-1})$$

$$\tilde{\mathbb{C}}_{f2} = 2J^{-4/3} \frac{\partial \tilde{\mathbf{S}}_{f2}}{\partial \mathbf{C}} = 2J^{-4/3} \frac{\partial \tilde{\mathbf{S}}_{f2}}{\partial \bar{E}_2} \frac{\partial \bar{E}_2}{\partial \mathbf{C}} = 4J^{-4/3} k_1 e^{k_2 \bar{E}_2} (1 + 2k_2 \bar{E}_2) \mathbf{H}_2 \otimes \mathbf{H}_2$$

Finalmente, obtenemos el operador constitutivo tangente en configuración espacial aplicando la transformación de Piola a \mathbb{C}

$$\mathbb{C}^{des} = \mathbb{C}_{VOL} + J^{-1} \left(\frac{q_g}{r_g} \bar{\mathbb{C}}_g \right) + J^{-1} \left(\frac{q_{f1}}{r_{f1}} \bar{\mathbb{C}}_{f1} \right) + J^{-1} \left(\frac{q_{f2}}{r_{f2}} \bar{\mathbb{C}}_{f2} \right) \quad (44)$$

$$\mathbb{C}^{car} = \mathbb{C}_{VOL} + J^{-1} \left(\frac{q_g}{r_g} \bar{\mathbb{C}}_g + \frac{\dot{q}_g r_g - q_g}{r_g^3} \bar{\boldsymbol{\tau}}_g \otimes \bar{\boldsymbol{\tau}}_g \right) \quad (45)$$

$$+ J^{-1} \left(\frac{q_{f1}}{r_{f1}} \bar{\mathbb{C}}_{f1} + \frac{\dot{q}_{f1} r_{f1} - q_{f1}}{r_{f1}^3} \bar{\boldsymbol{\tau}}_{f1} \otimes \bar{\boldsymbol{\tau}}_{f1} \right)$$

$$+ J^{-1} \left(\frac{q_{f2}}{r_{f2}} \bar{\mathbb{C}}_{f2} + \frac{\dot{q}_{f2} r_{f2} - q_{f2}}{r_{f2}^3} \bar{\boldsymbol{\tau}}_{f2} \otimes \bar{\boldsymbol{\tau}}_{f2} \right)$$

siendo la contribución de la parte volumétrica

$$\mathbb{C}_{VOL} = \tilde{p} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - 2p \mathbb{I} \quad \text{with } \tilde{p} = p + J \frac{dp}{dJ}$$

y la contribución de la parte isocórica para $\alpha = g, f1, f2$

$$\bar{\mathbb{C}}_\alpha = \mathbb{P} : \tilde{\mathbb{C}}_\alpha : \mathbb{P} + \frac{2}{3} \text{tr}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha) \mathbb{P} - \frac{2}{3} (\mathbf{1} \otimes \bar{\boldsymbol{\tau}}_\alpha + \bar{\boldsymbol{\tau}}_\alpha \otimes \mathbf{1})$$

con

$$\mathbb{P} = \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}; \quad \text{tr}(\bullet) = (\bullet) : \mathbf{1}$$

$$\tilde{\mathbb{C}}_\alpha = 4\bar{\mathbf{b}} \frac{\partial^2 \bar{W}_\alpha(\bar{\mathbf{b}})}{\partial \bar{\mathbf{b}} \partial \bar{\mathbf{b}}} \bar{\mathbf{b}}$$

A continuación se particulariza las contribuciones de la parte isocórica para la matriz y las fibras:

$$\bar{\mathbb{C}}_g = \frac{2}{3} \text{tr}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_g) \mathbb{P} - \frac{2}{3} (\mathbf{1} \otimes \bar{\boldsymbol{\tau}}_g + \bar{\boldsymbol{\tau}}_g \otimes \mathbf{1})$$

$$\bar{\mathbb{C}}_{f1} = 4J^{-4/3}k_1e^{k_2\bar{E}_1^2}(1 + 2k_2\bar{E}_1^2)(\mathbb{P} : \bar{\mathbf{h}}_1) \otimes (\mathbb{P} : \bar{\mathbf{h}}_1) + \frac{2}{3}\text{tr}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{f1})\mathbb{P} - \frac{2}{3}(\mathbf{1} \otimes \bar{\boldsymbol{\tau}}_{f1} + \bar{\boldsymbol{\tau}}_{f1} \otimes \mathbf{1})$$

$$\bar{\mathbb{C}}_{f2} = 4J^{-4/3}k_1e^{k_2\bar{E}_2^2}(1 + 2k_2\bar{E}_2^2)(\mathbb{P} : \bar{\mathbf{h}}_2) \otimes (\mathbb{P} : \bar{\mathbf{h}}_2) + \frac{2}{3}\text{tr}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{f2})\mathbb{P} - \frac{2}{3}(\mathbf{1} \otimes \bar{\boldsymbol{\tau}}_{f2} + \bar{\boldsymbol{\tau}}_{f2} \otimes \mathbf{1})$$

5. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Como ejemplo de aplicación se muestran los resultados obtenidos para un ensayo de tracción uniaxial tal como indica la figura 5a utilizando el modelo de daño definido en el apartado 4. Los parámetros materiales utilizados se definen en el cuadro 2.

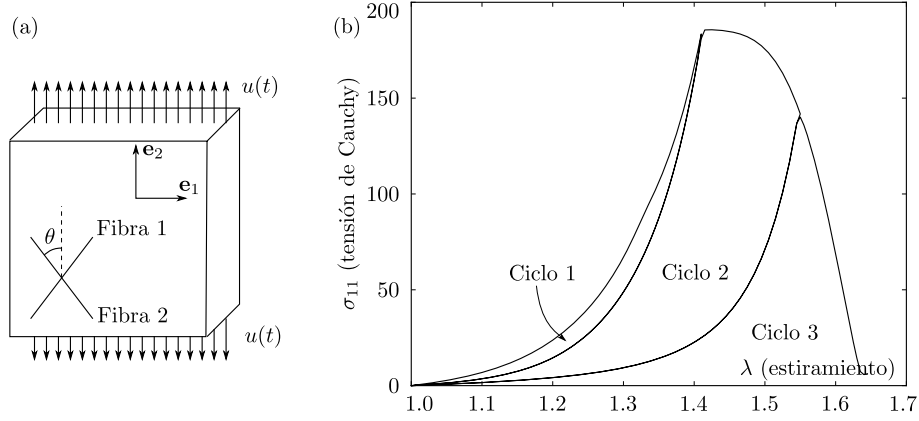


Figura 4: Ensayo de tracción uniaxial: (a) descripción, (b) Curva tensión vs. estiramiento.

	Matriz	Fibras
Parámetros que definen la energía de deformación efectiva	$c = 7,64 \text{ kPa}$	$k_{1_i} = 100 \text{ kPa}$ $k_{2_i} = 10$ $\theta = 40,02^\circ$ $\kappa_i = 0$
Parámetros que definen el modelo de daño	$\sigma_g^u = 15 \text{ kPa}$ $G_g^f = 10 \frac{\text{KNm}}{\text{m}^2}$ $\beta_g = 1,0$	$\sigma_{f_i}^u = 100 \text{ kPa}$ $G_{f_i}^f = 16 \frac{\text{KNm}}{\text{m}^2}$ $\beta_{f_i} = 1,0$

Cuadro 2: Parametros materiales.

Este problema admite solución analítica que servirá para comprobar la validez de la implementación en el código de elementos finitos FEAP [33]. Asumiendo que el material es incom-

presible, el tensor gradiente de deformaciones tiene la forma:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_x \lambda_y)^{-1} \end{bmatrix} \quad (46)$$

siendo las direcciones de las fibras en la configuración material $\mathbf{a}_1^0 = \{a_{1x}, a_{1y}, a_{1z}\}$ y $\mathbf{a}_2^0 = \{a_{2x}, a_{2y}, a_{2z}\}$. Las cantidades E_1 y E_2 definidas en (15) y (16) se particularizan como:

$$E_1 = \lambda_x^2 a_{1x}^2 + \lambda_y^2 a_{1y}^2 - 1 \quad (47)$$

$$E_2 = \lambda_x^2 a_{2x}^2 + \lambda_y^2 a_{2y}^2 - 1 \quad (48)$$

Utilizando la definición del tensor de Cauchy de la ecuación (24) y sabiendo que $\sigma_{xx} = \sigma_x$ y $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones que relaciona las cantidades σ_x , λ_x y λ_y :

$$\sigma_x = c \left(\lambda_x^2 - \frac{1}{\lambda_x^2 \lambda_y^2} \right) + 2k_1 E_1 e^{k_2 E_1^2} \lambda_x^2 a_{1x}^2 + 2k_1 E_2 e^{k_2 E_2^2} \lambda_x^2 a_{2x}^2 \quad (49)$$

$$0 = c \left(\lambda_y^2 - \frac{1}{\lambda_x^2 \lambda_y^2} \right) + 2k_1 E_1 e^{k_2 E_1^2} \lambda_y^2 a_{1y}^2 + 2k_1 E_2 e^{k_2 E_2^2} \lambda_y^2 a_{2y}^2 \quad (50)$$

El ensayo de tracción se ha llevado a cabo imponiendo tres ciclos de carga-descarga, siendo los intervalos utilizados $[0, \lambda_1]$, $[0, \lambda_2]$ y $[0, \lambda_3]$, con $\lambda_1 = 1,41$, $\lambda_2 = 1,55$ y $\lambda_3 = 1,65$. Los resultados obtenidos se muestran en la figura 5b, donde los ciclos de carga-descarga se reproducen según lo esperado debido a que el modelo guarda memoria de la degradación que sufre el material.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta un modelo constitutivo para tejidos fibrosos que considera la degradación de forma desacoplada de la matriz y de las familias de fibras. Se realiza una descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformaciones entre una parte volumétrica y una parte isocórica, que se descompone a su vez en una parte isotrópica asociada a la matriz acuosa y una parte anisotrópica asociada a las fibras.

El modelo de daño contiene tres parámetros para cada una de las fases (nueve en total asumiendo diferentes características para cada familia de fibras). Los parámetros necesarios son una tensión de comparación que permite definir el tamaño inicial del dominio elástico, una densidad superficial de energía de fractura que permite regularizar el modelo y un parámetro que define el tipo de ablandamiento que sufre el material. La regularización del modelo hace que la disipación venga dada por un parámetro material y que sea independiente de la discretización geométrica que se realice.

Finalmente se ha presentado un estudio del tratamiento de la incompresibilidad utilizando el método de penalización y el método del lagrangiano aumentado, junto con un resumen de los ensayos experimentales existentes que caracterizan el comportamiento constitutivo del fallo material de paredes arteriales.

Agradecimientos

El soporte financiero para esta investigación ha sido proporcionado por el ministerio español de Ciencia e Innovación a través del proyecto de investigación DPI-2008-03130/DPI.

REFERENCIAS

- [1] M. Adham, J. Gournier, J. Favre, E. De La Roche, C. Ducerf, J. Baulieux, X. Barral, and M. Pouyet. Mechanical characteristics of fresh and frozen human descending thoracic aorta. *Journal of Surgical Research*, 64(1):32–34, 1996.
- [2] B. Calvo, E. Pena, M. Martinez, and M. Doblaré. An uncoupled directional damage model for fibred biological soft tissues. Formulation and computational aspects. *International journal for numerical methods in engineering*, 69(10):2036–2057, 2007.
- [3] C. J. Chuong and Y. C. Fung. Three-dimensional stress distribution in arteries. *Journal of Biomechanical Engineering*, 105(3):268–274, 1983.
- [4] B. Coleman and W. Noll. The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 13(1):167–178, 1963.
- [5] S. Cowin and S. Doty. *Tissue mechanics*. Springer, 2007.
- [6] A. Delfino, N. Stergiopoulos, J. E. Moore, and J. J. Meister. Residual strain effects on the stress field in a thick wall finite element model of the human carotid bifurcation. *Journal of Biomechanics*, 30(8):777 – 786, 1997.
- [7] H. Demiray. A note on the elasticity of soft biological tissues. *Journal of Biomechanics*, 5(3):309–311, 1972.
- [8] P. Flory. Thermodynamic relations for high elastic materials. *Trans. Faraday Soc.*, 57:829–838, 1961.
- [9] T. Gasser and G. Holzapfel. Modeling the propagation of arterial dissection. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 25(4):617–633, 2006.
- [10] T. Gasser and G. Holzapfel. Modeling the propagation of arterial dissection. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 25(4):617–633, 2006.
- [11] T. C. Gasser, R. W. Ogden, and G. A. Holzapfel. Hyperelastic modelling of arterial layers with distributed collagen fibre orientations. *Journal of The Royal Society Interface*, 3(6):15–35, 2006.

- [12] R. Glowinski and P. Le Tallec. *Augmented Lagrangian and operator-splitting methods in nonlinear mechanics*. Society for Industrial Mathematics, 1989.
- [13] J. M. Goicolea. Modelos constitutivos para el tejido de arterias. In S. APMTAC, editor, *Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*, Granada, 4 – 7 julio 2005. Sociedad Española de Métodos Numéricos en Ingeniería.
- [14] J. M. Goicolea Ruigómez. Factores biomecánicos y su influencia en la función cardiovascular. *Revista Española de Cardiología*, 58(02):121–125, 2005.
- [15] M. Groenink, S. Langerak, E. Vanbavel, E. Van Der Wall, B. Mulder, A. Van Der Wal, and J. Spaan. The influence of aging and aortic stiffness on permanent dilation and breaking stress of the thoracic descending aorta. *Cardiovascular research*, 43(2):471, 1999.
- [16] C. G. Herrera. *Comportamiento mecánico de la aorta ascendente: Caracterización experimental y simulación numérica*. PhD thesis, Universidad Politecnica de Madrid, 2008.
- [17] G. Holzapfel. Arterial Tissue in Health and Disease: Experimental Data, Collagen-Based Modeling and Simulation, Including Aortic Dissection. *Biomechanical Modelling at the Molecular, Cellular and Tissue Levels*, pages 259–344, 2009.
- [18] G. Holzapfel, T. Gasser, and R. Ogden. A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models. *Journal of Elasticity*, 61:1–48, 2000. 10.1023/A:1010835316564.
- [19] G. Holzapfel and R. Ogden. *Mechanics of biological tissue*. Springer, 2006.
- [20] J. Humphrey. *Cardiovascular solid mechanics: cells, tissues, and organs*. Springer, 2002.
- [21] L. Kachanov. Time of the rupture process under creep conditions. *Isv. Akad. Nauk. SSR. Otd Tekh. Nauk*, 8:26–31, 1958.
- [22] N. MacLean, N. Dudek, and M. Roach. The role of radial elastic properties in the development of aortic dissections. *Journal of vascular surgery*, 29(4):703–710, 1999.
- [23] D. Mohan and J. Melvin. Failure properties of passive human aortic tissue. I—uniaxial tension tests. *Journal of Biomechanics*, 15(11):887–893, 1982.
- [24] D. Mohan and J. Melvin. Failure properties of passive human aortic tissue. II—Biaxial tension tests. *Journal of Biomechanics*, 16(1):31–37, 1983.
- [25] J. Oliver. A consistent characteristic length for smeared cracking models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28(2):461–474, 1989.
- [26] P. Purslow. Positional variations in fracture toughness, stiffness and strength of descending thoracic pig aorta. *Journal of biomechanics*, 16(11):947–953, 1983.

- [27] J. Rodríguez, F. Cacho, J. Bea, and M. Doblaré. A stochastic-structurally based three dimensional finite-strain damage model for fibrous soft tissue. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 54(4):864–886, 2006.
- [28] J. Simo and J. Ju. Strain-and stress-based continuum damage models–I. Formulation. *International Journal of Solids and Structures*, 23(7):821–840, 1987.
- [29] J. C. Simo and R. L. Taylor. Quasi-incompressible finite elasticity in principal stretches. continuum basis and numerical algorithms. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 85:273–310, February 1991.
- [30] G. Sommer, T. Gasser, P. Regitnig, M. Auer, and G. Holzapfel. Dissection properties of the human aortic media: an experimental study. *Journal of biomechanical engineering*, 130:021007, 2008.
- [31] A. Spencer. Theory of invariants. *Continuum physics*, 1(Part III), 1971.
- [32] A. Spencer. *Continuum Theory of the Mechanics of Fibre-Reinforced Composites*. Springer-Verlag, 1984.
- [33] R. L. Taylor. *FEAP – A Finite Element Analysis Program, User Manual*. Department of Civil and Environmental Engineering University of California at Berkeley, California 94720-1710, version 8.3 edition, June 2009.
- [34] C. Velican and D. Velican. Study of coronary intimal thickening. *Atherosclerosis*, 56(3):331–344, 1985.
- [35] D. Vorp, M. Raghavan, S. Muluk, M. Makaroun, D. Steed, R. Shapiro, and M. Webster. Wall strength and stiffness of aneurysmal and nonaneurysmal abdominal aorta. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 800(1):274–276, 1996.
- [36] D. Vorp, B. Schiro, M. Ehrlich, T. Juvonen, M. Ergin, and B. Griffith. Effect of aneurysm on the tensile strength and biomechanical behavior of the ascending thoracic aorta. *The Annals of thoracic surgery*, 75(4):1210–1214, 2003.
- [37] M. A. Zulliger, P. Fridez, K. Hayashi, and N. Stergiopoulos. A strain energy function for arteries accounting for wall composition and structure. *Journal of Biomechanics*, 37(7):989 – 1000, 2004.