Conjunto de valores asintóticos de funciones meromorfas enteras

Alicia Cantón, David Drasin, Ana Granados

Universidad Politécnica de Madrid

XIII EARCO
5–7 de mayo, 2011

El objetivo

Teorema (C., Drasin, Granados)

Dado un conjunto analítico $\mathcal{A} \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y un número $0 \leq \rho \leq \infty$ existe una función meromorfa f, definida en $\mathbb{C}$ de orden de crecimiento ρ tal que el conjunto de valores asintóticos de f es precisamente $\mathcal{A}$.

El objetivo

Teorema (C., Drasin, Granados)

Dado un conjunto analítico $\mathcal{A} \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y un número $0 \leq \rho \leq \infty$ existe una función meromorfa f, definida en $\mathbb{C}$ de orden de crecimiento ρ tal que el conjunto de valores asintóticos de f es precisamente $\mathcal{A}$.

El objetivo

Teorema (C., Drasin, Granados)

Dado un conjunto analítico $\mathcal{A} \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y un número $0 \leq \rho \leq \infty$ existe una función meromorfa f, definida en $\mathbb{C}$ de orden de crecimiento ρ tal que el conjunto de valores asintóticos de f es precisamente $\mathcal{A}$.

El objetivo

Teorema (C., Drasin, Granados)

Dado un conjunto analítico $\mathcal{A} \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y un número $0 \leq \rho \leq \infty$ existe una función meromorfa f, definida en $\mathbb{C}$ de orden de crecimiento ρ tal que el conjunto de valores asintóticos de f es precisamente $\mathcal{A}$.

El objetivo

Teorema (C., Drasin, Granados)

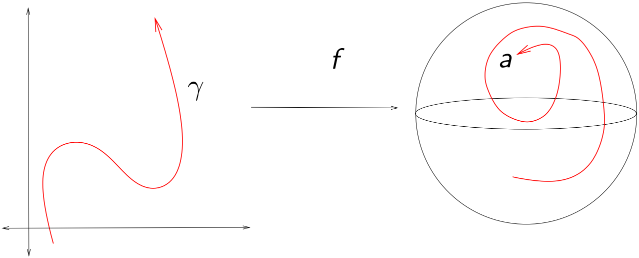
Dado un conjunto analítico $\mathcal{A} \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y un número $0 \leq \rho \leq \infty$ existe una función meromorfa f, definida en $\mathbb{C}$ de orden de crecimiento ρ tal que el conjunto de valores asintóticos de f es precisamente $\mathcal{A}$.

Diremos que una función holomorfa o meromorfa definida en $\mathbb{C}$, es una función entera.

Valores asintóticos

Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ una función meromorfa. El punto a es un valor asintótico para f si existe una curva continua γ tal que

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in \gamma}} f(z) = a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

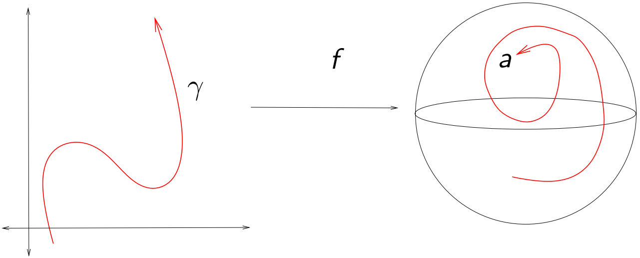


γ es una curva asintótica para a.

Valores asintóticos

Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ una función meromorfa. El punto a es un valor asintótico para f si existe una curva continua γ tal que

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in\gamma}} f(z) = a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

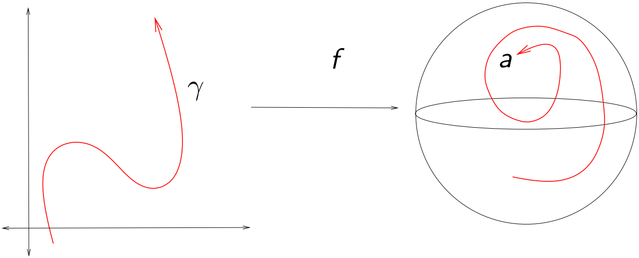


γ es una curva asintótica para a. Curvas asintóticas tangentes en ∞ tienen el mismo valor asintótico.

Valores asintóticos

Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ una función meromorfa. El punto a es un valor asintótico para f si existe una curva continua γ tal que

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in \gamma}} f(z) = a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$



γ es una curva asintótica para a. Curvas asintóticas tangentes en ∞ tienen el mismo valor asintótico. $\mathrm{As}(f)$ conjunto de valores asintóticos.

Caso holomorfo

Valores asintóticos

Si f entera y holomorfa entonces $\infty \in \mathrm{As}(f)$ (Teorema de Liouville)

Ejemplos

- $f(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ un polinomio, $\mathrm{As}(f) = \{\infty\}$.
- $f(z) = e^z$, $\mathrm{As}(f) = \{0, \infty\}$.
- $f(z) = \sin z$, $\mathrm{As}(f) = \{\infty\}$.
- $f(z) = \displaystyle\int_0^z e^{-w^N} |dw| \Longrightarrow \sharp \mathrm{As}(f) = N + 1$.

Caso holomorfo

Orden de crecimiento

Parece que mayor $\sharp\mathrm{As}(f)$ cuanto más crece la función en ∞. Sea

$$M_f(r) = \max_{|z|\leq r} |f(z)|$$

$M_f(r) \nearrow \infty$ cuando $r \nearrow \infty$.

Ejemplos

- $f(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ un polinomio, $M_f(r) \sim r^n$
- $f(z) = e^z$, $M_f(r) = e^r$
- $f(z) = \sin z$, $M_f(r) \sim e^r$
- $f(z) = \displaystyle\int_0^z e^{-w^N} |dw|$, $M_f(r) \sim e^{r^{N/2}}$

Caso holomorfo

Orden de crecimiento

Parece que mayor $\sharp\mathrm{As}(f)$ cuanto más crece la función en ∞. Sea

$$M_f(r) = \max_{|z|\le r} |f(z)|$$

$M_f(r) \nearrow \infty$ cuando $r \nearrow \infty$.

Ejemplos

- $f(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ un polinomio, $M_f(r) \sim r^n$
- $f(z) = e^z$, $M_f(r) = e^r$
- $f(z) = \sin z$, $M_f(r) \sim e^r$
- $f(z) = \displaystyle\int_0^z e^{-w^N} |dw|$, $M_f(r) \sim e^{r^{N/2}}$

Orden de crecimiento ρ

Es el número más pequeño que para $\varepsilon > 0$ verifica,

$$M_f(r) \le e^{r^{\rho+\varepsilon}}, \quad r \text{ suficientemente grande}$$

Caso holomorfo

Orden de crecimiento

Parece que mayor $\sharp\mathrm{As}(f)$ cuanto más crece la función en ∞. Sea

$$M_f(r) = \max_{|z|\leq r} |f(z)|$$

$M_f(r) \nearrow \infty$ cuando $r \nearrow \infty$.

Ejemplos

- $f(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ un polinomio, $M_f(r) \sim r^n$
- $f(z) = e^z$, $M_f(r) = e^r$
- $f(z) = \sin z$, $M_f(r) \sim e^r$
- $f(z) = \displaystyle\int_0^z e^{-w^N} |dw|$, $M_f(r) \sim e^{r^{N/2}}$

Orden de crecimiento ρ

$$\rho = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log \log M_f(r)}{\log r}$$

Caso holomorfo

Orden de crecimiento

Parece que mayor $\sharp\mathrm{As}(f)$ cuanto más crece la función en ∞. Sea

$$M_f(r) = \max_{|z|\leq r} |f(z)|$$

$M_f(r) \nearrow \infty$ cuando $r \nearrow \infty$.

Ejemplos

- $f(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ un polinomio, $M_f(r) \sim r^n$, $\rho = 0$.
- $f(z) = e^z$, $M_f(r) = e^r$, $\rho = 1$.
- $f(z) = \sin z$, $M_f(r) \sim e^r$, $\rho = 1$.
- $f(z) = \displaystyle\int_0^z e^{-w^N} |dw|$, $M_f(r) \sim e^{r^{N/2}}$, $\rho = N/2$.

Orden de crecimiento ρ

$$\rho = \lim_{r\to\infty} \sup \frac{\log \log M_f(r)}{\log r}$$

Caso holomorfo

Teorema (Ahlfors)

Si f es holomorfa y entera de orden ρ entonces,

$$\sharp \mathrm{As}(f) \leq 2\rho + 1.$$

Caso holomorfo

Teorema (Ahlfors)

Si f es holomorfa y entera de orden ρ entonces,

$$\sharp \mathrm{As}(f) \leq 2\rho + 1.$$

Consecuencia: Si f es de orden finito, $\mathrm{As}(f)$ es finito.

Caso holomorfo

Teorema (Ahlfors)

Si f es holomorfa y entera de orden ρ entonces,

$$\sharp \mathrm{As}(f) \leq 2\rho + 1.$$

Consecuencia: Si f es de orden finito, $\mathrm{As}(f)$ es finito.

Preguntas

- ¿Qué pasa si f meromorfa?
- ¿Qué pasa si $\rho = \infty$?

Caso meromorfo

Una función f es meromorfa si $f = f_1/f_2$, con f_1, f_2 holomorfas. Los polos de f corresponden a los ceros de f_2, y forman un conjunto aislado.

Caso meromorfo

Una función f es meromorfa si $f = f_1/f_2$, con f_1, f_2 holomorfas. Los polos de f corresponden a los ceros de f_2, y forman un conjunto aislado.

Ejemplo

- $f(z) = \dfrac{a_n z^n + \cdots + a_0}{b_m z^m + \cdots + b_0}$ racional, $\sharp \mathrm{As}(f) = 1$.
- $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$, $\mathrm{As}(f) = \{0, \infty\}$.
- $f(z) = \tan(z)$, $\mathrm{As}(f) = \{-i, i\}$.

Caso meromorfo

Orden de crecimiento

Para el orden de crecimiento hay que tener en cuenta los polos. La **característica de Nevanlinna** se define como

$$T_f(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta + \int_0^r \frac{n(t)}{t}\, dt$$

donde $n(t) = \sharp\{\text{polos en } D(0,t)\}$. $T_f(r) \nearrow \infty$ cuando $r \nearrow \infty$.

Caso meromorfo

Orden de crecimiento

Para el orden de crecimiento hay que tener en cuenta los polos. La **característica de Nevanlinna** se define como

$$T_f(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta + \int_0^r \frac{n(t)}{t}\, dt$$

donde $n(t) = \sharp\{\text{polos en } D(0,t)\}$. $T_f(r) \nearrow \infty$ cuando $r \nearrow \infty$.
Orden de crecimiento:

$$\rho = \lim_{r\to\infty} \sup \frac{\log T_f(r)}{\log r}$$

Caso meromorfo

Orden de crecimiento

Para el orden de crecimiento hay que tener en cuenta los polos. La **característica de Nevanlinna** se define como

$$T_f(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta + \int_0^r \frac{n(t)}{t}\, dt$$

donde $n(t) = \sharp\{\text{polos en } D(0,t)\}$. $T_f(r) \nearrow \infty$ cuando $r \nearrow \infty$.
Orden de crecimiento:

$$\rho = \lim_{r\to\infty} \sup \frac{\log T_f(r)}{\log r}$$

Si f es holomorfa, $T_f(r) \leq \log M_f(r) \leq 3T_f(2r)$.

Caso meromorfo

Orden de crecimiento

Para el orden de crecimiento hay que tener en cuenta los polos. La **característica de Nevanlinna** se define como

$$T_f(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta + \int_0^r \frac{n(t)}{t}\, dt$$

donde $n(t) = \sharp\{\text{polos en } D(0,t)\}$. $T_f(r) \nearrow \infty$ cuando $r \nearrow \infty$.
Orden de crecimiento:

$$\rho = \lim_{r\to\infty} \sup \frac{\log T_f(r)}{\log r}$$

Si f es holomorfa, $T_f(r) \leq \log M_f(r) \leq 3T_f(2r)$.
Si f racional, $\rho = 0$ y si $f(z) = \tan z$ o $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$, $\rho = 1$

Caso meromorfo

Teorema (Valiron)

Existen funciones meromorfas con ρ finito (o cero) con $\sharp \mathrm{As}(f) = \infty$ (incluso con la cardinalidad del continuo).

Caso meromorfo

Teorema (Valiron)

Existen funciones meromorfas con ρ finito (o cero) con $\sharp \mathrm{As}(f) = \infty$ (incluso con la cardinalidad del continuo).

Teorema (Valiron)

Si f entera meromorfa, tal que $T_f(r) = O(\log^2 r)$, entonces $\sharp \mathrm{As}(f) = 1$.

Caso meromorfo

Teorema (Valiron)

Existen funciones meromorfas con ρ finito (o cero) con $\sharp\mathrm{As}(f) = \infty$ (incluso con la cardinalidad del continuo).

Teorema (Valiron)

Si f entera meromorfa, tal que $T_f(r) = O(\log^2 r)$, entonces $\sharp\mathrm{As}(f) = 1$.

Teorema (Eremenko)

Para cualquier $0 \leq \rho \leq \infty$ existe una función meromorfa y entera f de orden ρ tal que $\mathrm{As}(f) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Caso meromorfo

Teorema (Valiron)

Existen funciones meromorfas con ρ finito (o cero) con $\sharp \mathrm{As}(f) = \infty$ (incluso con la cardinalidad del continuo).

Teorema (Valiron)

Si f entera meromorfa, tal que $T_f(r) = O(\log^2 r)$, entonces $\sharp \mathrm{As}(f) = 1$.

Teorema (Eremenko)

Para cualquier $0 \leq \rho \leq \infty$ existe una función meromorfa y entera f de orden ρ tal que $\mathrm{As}(f) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Más aún, para cualquier función creciente $\psi(r) \nearrow \infty$ $(r \to \infty)$ existe f meromorfa y entera tal que $T_f(r) = O(\psi(r) \log^2 r)$ y $\mathrm{As}(f) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Conjuntos analíticos

Salvo la condición de Valiron, no hay restricción en el crecimiento de f para tener $\mathrm{As}(f)$ grande. ¿Se puede decir algo más de cómo es $\mathrm{As}(f)$?

Conjuntos analíticos

Salvo la condición de Valiron, no hay restricción en el crecimiento de f para tener $\mathrm{As}(f)$ grande. ¿Se puede decir algo más de cómo es $\mathrm{As}(f)$?

Teorema (Mazurkiewicz)

f meromorfa y entera, entonces $\mathrm{As}(f) \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es un conjunto analítico (en el sentido de Suslin).

Conjuntos analíticos

Salvo la condición de Valiron, no hay restricción en el crecimiento de f para tener $\mathrm{As}(f)$ grande. ¿Se puede decir algo más de cómo es $\mathrm{As}(f)$?

Teorema (Mazurkiewicz)

f meromorfa y entera, entonces $\mathrm{As}(f) \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es un conjunto analítico (en el sentido de Suslin).

Los conjuntos analíticos fueron introducidos por Suslin al observar que la imagen continua de un conjunto de Borel no es Borel.

Conjuntos analíticos

Salvo la condición de Valiron, no hay restricción en el crecimiento de f para tener $\mathrm{As}(f)$ grande. ¿Se puede decir algo más de cómo es $\mathrm{As}(f)$?

Teorema (Mazurkiewicz)

f meromorfa y entera, entonces $\mathrm{As}(f) \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es un conjunto analítico (en el sentido de Suslin).

Los conjuntos analíticos fueron introducidos por Suslin al observar que la imagen continua de un conjunto de Borel no es Borel.

La imagen continua de un conjunto analítico es un conjunto analítico.

Conjuntos analíticos

- Los conjuntos analíticos generalizan los conjuntos de Borel. Todo conjunto de Borel es analítico. Los conjuntos de Borel se caracterizan por ser los únicos conjuntos analíticos cuyo complementario también es analítico.

Conjuntos analíticos

- Los conjuntos analíticos generalizan los conjuntos de Borel. Todo conjunto de Borel es analítico. Los conjuntos de Borel se caracterizan por ser los únicos conjuntos analíticos cuyo complementario también es analítico.

En un espacio métrico completo y separable, los conjuntos analíticos también se pueden definir como

- la imagen continua de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (o equivalentemente, la imagen continua de los irracionales en el intervalo unidad).

Conjuntos analíticos

- Los conjuntos analíticos generalizan los conjuntos de Borel. Todo conjunto de Borel es analítico. Los conjuntos de Borel se caracterizan por ser los únicos conjuntos analíticos cuyo complementario también es analítico.

En un espacio métrico completo y separable, los conjuntos analíticos también se pueden definir como

- la imagen continua de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (o equivalentemente, la imagen continua de los irracionales en el intervalo unidad).
- el núcleo de la operación de Suslin, i.e. A analítico sii

$$A = \bigcup_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{k} S_{n_1 \ldots n_k}$$

donde $\{S_{n_1 \ldots n_k}\}$ es una familia de conjuntos cerrados indexada con las sucesiones finitas de naturales.

Conjuntos analíticos y valores asintóticos

Caso holomorfo y cualquier orden

Teorema (Heins)

Dado un conjunto analítico $\mathcal{A}$ tal que $\infty \in \mathcal{A}$ existe una función holomorfa y entera tal que
$$\mathrm{As}(f) = \mathcal{A}.$$

Conjuntos analíticos y valores asintóticos

Caso holomorfo y cualquier orden

Teorema (Heins)

Dado un conjunto analítico $\mathcal{A}$ tal que $\infty \in \mathcal{A}$ existe una función holomorfa y entera tal que

$$\mathrm{As}(f) = \mathcal{A}.$$

Si $\mathcal{A}$ es infinito, el orden de crecimiento de f es infinito (por el teorema de Ahlfors).

Teorema (Heins)

Dado un conjunto analítico $\mathcal{A}$ tal que $\infty \in \mathcal{A}$ existe una función holomorfa y entera tal que

$$\mathrm{As}(f) = \mathcal{A}.$$

Si $\mathcal{A}$ es infinito, el orden de crecimiento de f es infinito (por el teorema de Ahlfors).

Los conjuntos analíticos caracterizan el conjunto de valores asintóticos de funciones holomorfas y enteras ([Mazurkiewicz] y [Heins]).

Conjuntos analíticos y valores asintóticos

Caso meromorfo y cualquier orden

Teorema

Dado un conjunto analítico $\mathcal{A} \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y un número $0 \leq \rho \leq \infty$ existe una función meromorfa y entera, f, de orden de crecimiento ρ tal que $\mathrm{As}(f) = \mathcal{A}$.

Conjuntos analíticos y valores asintóticos

Caso meromorfo y cualquier orden

Teorema

Dado un conjunto analítico $\mathcal{A} \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y un número $0 \leq \rho \leq \infty$ existe una función meromorfa y entera, f, de orden de crecimiento ρ tal que $\mathrm{As}(f) = \mathcal{A}$.

Más aún, para cualquier función creciente $\psi(r) \nearrow \infty$ $(r \to \infty)$ existe f meromorfa y entera tal que

$$T_f(r) = O(\psi(r) \log^2 r) \quad \text{y} \quad \mathrm{As}(f) = \mathcal{A}.$$

Conjuntos analíticos y valores asintóticos

Caso meromorfo y cualquier orden

Teorema

Dado un conjunto analítico $\mathcal{A} \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y un número $0 \leq \rho \leq \infty$ existe una función meromorfa y entera, f, de orden de crecimiento ρ tal que $\mathrm{As}(f) = \mathcal{A}$.

Más aún, para cualquier función creciente $\psi(r) \nearrow \infty$ $(r \to \infty)$ existe f meromorfa y entera tal que

$$T_f(r) = O(\psi(r) \log^2 r) \quad \text{y} \quad \mathrm{As}(f) = \mathcal{A}.$$

Junto con el teorema de Mazurkiewicz, este resultado caracteriza los conjuntos de valores asintóticos de funciones enteras con cualquier orden.

Ingredientes de la prueba

Hay dos ingredientes fundamentales en la prueba:

- Aproximación de funciones subarmónicas.
- Aproximación de puntos del conjunto analítico.

Aproximación de funciones subarmónicas

Si f holomorfa y entera,

$$\log f = \log |f| + \mathrm{i} \arg(f)$$

Aproximación de funciones subarmónicas

Si f holomorfa y entera,

$$\log f = \log |f| + \mathrm{i} \arg(f)$$

Si f no tiene ceros $\Longrightarrow \log |f|$ es armónica.

Aproximación de funciones subarmónicas

Si f holomorfa y entera,

$$\log f = \log|f| + \mathrm{i}\arg(f)$$

Si f no tiene ceros $\Longrightarrow \log|f|$ es armónica.

Si f sí tiene ceros $\Longrightarrow \log|f|$ es subarmónica.

Aproximación de funciones subarmónicas

Si f holomorfa y entera,

$$\log f = \log|f| + \mathrm{i}\arg(f)$$

Si f no tiene ceros $\Longrightarrow \log|f|$ es armónica.

Si f sí tiene ceros $\Longrightarrow \log|f|$ es subarmónica. Sean $\{a_j\}$ ceros de f:

$$f(z) = \Pi_j \left(1 - \frac{z}{a_j}\right) g(z), \quad g(z) \neq 0, z \in \mathbb{C}$$

Aproximación de funciones subarmónicas

Si f holomorfa y entera,

$$\log f = \log|f| + \mathrm{i}\arg(f)$$

Si f no tiene ceros $\Longrightarrow$ $\log|f|$ es armónica.

Si f sí tiene ceros $\Longrightarrow$ $\log|f|$ es subarmónica. Sean $\{a_j\}$ ceros de f:

$$f(z) = \Pi_j \left(1 - \frac{z}{a_j}\right) g(z), \quad g(z) \neq 0, z \in \mathbb{C}$$

y por tanto,

$$\log|f(z)| = \sum_j \log\left|1 - \frac{z}{a_j}\right| + \log|g(z)|$$

Aproximación de funciones subarmónicas

Tenemos:

$$\log|f(z)| = \sum_j \log\left|1 - \frac{z}{a_j}\right| + \log|g(z)|$$

que reescribimos como

$$\log|f(z)| = \int_{\mathbb{C}} \log\left|1 - \frac{z}{\zeta}\right| \, d\mu(\zeta) + \log|g(z)|$$

con

- $\log|g(z)|$ armónica
- y $d\mu(\zeta) = \sum_j \delta_{a_j}(\zeta)$, la densidad de **masa de Riesz** de $\log|f|$.

En general, si U es subarmónica en $\mathbb{C}$, y $K \subset \mathbb{C}$ relativamente compacto:

$$U(z) = \int_K \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| \, d\mu(\zeta) + V(z)$$

con

- $V(z)$ armónica en el interior de K,
- y $d\mu(\zeta) = \Delta U \, dxdy$, la densidad de **masa de Riesz** de U que mide lo "lejos" que está U de ser armónica.

Aproximación de funciones subarmónicas

Estrategia

- Se construye una función subarmónica U con las propiedades deseadas (e.g. $T_U(r)$ controlada)

Aproximación de funciones subarmónicas

Estrategia

- Se construye una función subarmónica U con las propiedades deseadas (e.g. $T_U(r)$ controlada)
- Se aproxima la masa de Riesz de U, mediante masas puntuales, que corresponden a la masa de Riesz de una función subarmónica del tipo $\log|f|$ con f holomorfa en $\mathbb{C}$.

Aproximación de funciones subarmónicas

Estrategia

- Se construye una función subarmónica U con las propiedades deseadas (e.g. $T_U(r)$ controlada)
- Se aproxima la masa de Riesz de U, mediante masas puntuales, que corresponden a la masa de Riesz de una función subarmónica del tipo $\log|f|$ con f holomorfa en $\mathbb{C}$.
- Si los centros de la masa bien elegidos, $\log|f|$ aproxima bien a U y las propiedades de U se reflejan en $\log|f|$, e.g. $T_f(r)$ controlada (Yulmukhametov, Liubarskii, Malinnikova,..)

Aproximación de funciones subarmónicas

Estrategia

- Se construye una función subarmónica U con las propiedades deseadas (e.g. $T_U(r)$ controlada)
- Se aproxima la masa de Riesz de U, mediante masas puntuales, que corresponden a la masa de Riesz de una función subarmónica del tipo $\log|f|$ con f holomorfa en $\mathbb{C}$.
- Si los centros de la masa bien elegidos, $\log|f|$ aproxima bien a U y las propiedades de U se reflejan en $\log|f|$, e.g. $T_f(r)$ controlada (Yulmukhametov, Liubarskii, Malinnikova,..)
- En general, ¡¡¡problemas en la aproximación!!! en entornos de los centros de las masas puntuales (conjunto excepcional)

Aproximación de puntos del conjunto analítico

Tenemos que $A = \bigcup_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_k S_{n_1 \ldots n_k}$ con,

- $S_{n_1 \ldots n_k}$ conjuntos cerrados (no vacíos),
- $S_{n_1 \ldots n_{k+1}} \subset S_{n_1 \ldots n_k}$,

Aproximación de puntos del conjunto analítico

Tenemos que $A = \bigcup_{\mathbb{N}^\mathbb{N}} \bigcap_k S_{n_1 \dots n_k}$ con,

- $S_{n_1 \dots n_k}$ conjuntos cerrados (no vacíos),
- $S_{n_1 \dots n_{k+1}} \subset S_{n_1 \dots n_k}$,

y los podemos elegir

- $\mathrm{diam}(S_{n_1 \dots n_k}) \leq \delta_k$ para una sucesión dada $\delta_k \searrow 0$.

Aproximación de puntos del conjunto analítico

Tenemos que $A = \bigcup_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_k S_{n_1 \dots n_k}$ con,

- $S_{n_1 \dots n_k}$ conjuntos cerrados (no vacíos),
- $S_{n_1 \dots n_{k+1}} \subset S_{n_1 \dots n_k}$,

y los podemos elegir

- $\operatorname{diam}(S_{n_1 \dots n_k}) \leq \delta_k$ para una sucesión dada $\delta_k \searrow 0$.

Para $n_1 \dots n_k$ elegimos $a_{n_1 \dots n_k} \in S_{n_1 \dots n_k}$.

Cada $a \in A$ se escribe como $a = \bigcap_k S_{n_1 \dots n_k}$ y por tanto hay una sucesión $\{a_{n_1 \dots n_k}\}$ tal que

$$a_{n_1 \dots n_k} \to a \quad (k \to \infty) \text{ y } |a_{n_1 \dots n_k} - a| \leq \delta_k.$$

Conjunto analítico y expansiones binarias

Identificación de A con los irracionales de $[0,1]$

A una sucesión finita $n_1, \ldots, n_k$ se asocia una sucesión finita $\xi_1, \ldots, \xi_N$ de 0's y 1's (y finalmente, asociaremos esta a una rama (finita) de un árbol diádico) de la manera siguiente:

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\xi_j}{2^j} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^{n_1+\cdots+n_j}}$$

con $N = n_1 + \cdots + n_k$.

Conjunto analítico y expansiones binarias

Identificación de A con los irracionales de $[0,1]$

A una sucesión finita $n_1, \dots, n_k$ se asocia una sucesión finita $\xi_1, \dots, \xi_N$ de 0's y 1's (y finalmente, asociaremos esta a una rama (finita) de un árbol diádico) de la manera siguiente:

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\xi_j}{2^j} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^{n_1+\cdots+n_j}}$$

con $N = n_1 + \cdots + n_k$.

Ejemplo

$$1,3,1 \longleftrightarrow \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} \quad \longleftrightarrow 1,0,0,1,1$$

Conjunto analítico y expansiones binarias

Identificación de A con los irracionales de $[0, 1]$

A una sucesión finita $n_1, \ldots, n_k$ se asocia una sucesión finita $\xi_1, \ldots, \xi_N$ de 0's y 1's (y finalmente, asociaremos esta a una rama (finita) de un árbol diádico) de la manera siguiente:

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\xi_j}{2^j} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^{n_1+\cdots+n_j}}$$

con $N = n_1 + \cdots + n_k$.

Ejemplo

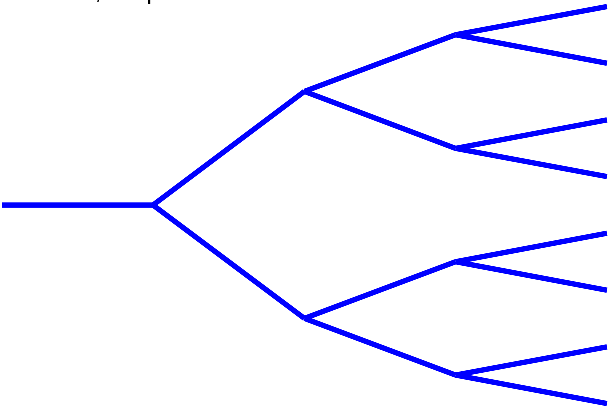
$$1, 3, 1 \longleftrightarrow \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} \quad \longleftrightarrow 1, 0, 0, 1, 1$$

$$\updownarrow$$

$$1, 0, 0, 1, 1, 0$$

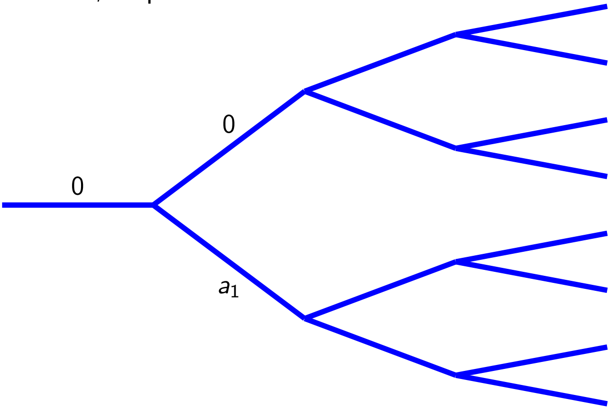
Conjunto analítico y árbol diádico

Supongamos que $0 \in \mathcal{A}$, y que a 0 le asociamos cualquier sucesión finita de 0's. La asociación entre puntos del conjunto analítico y expansiones binarias, se puede reescribir como



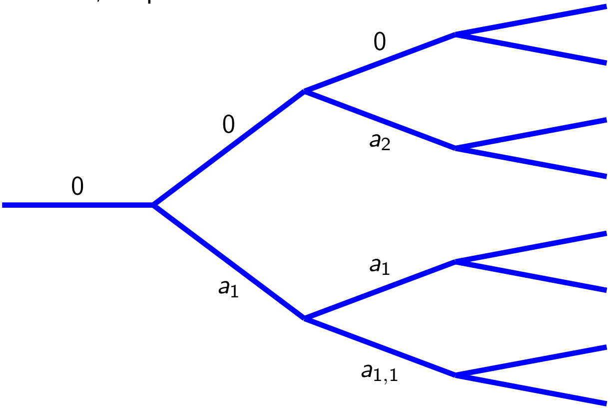
Conjunto analítico y árbol diádico

Supongamos que $0 \in \mathcal{A}$, y que a 0 le asociamos cualquier sucesión finita de 0's. La asociación entre puntos del conjunto analítico y expansiones binarias, se puede reescribir como



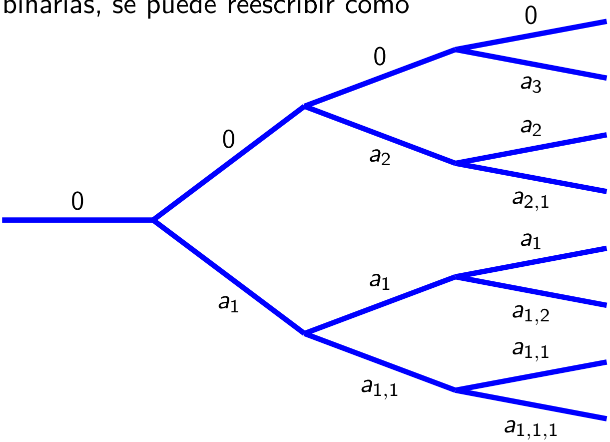
Conjunto analítico y árbol diádico

Supongamos que $0 \in \mathcal{A}$, y que a 0 le asociamos cualquier sucesión finita de 0's. La asociación entre puntos del conjunto analítico y expansiones binarias, se puede reescribir como



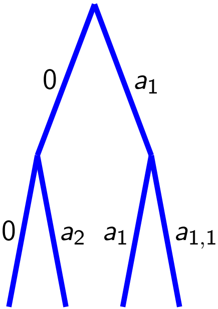
Conjunto analítico y árbol diádico

Supongamos que $0 \in \mathcal{A}$, y que a 0 le asociamos cualquier sucesión finita de 0's. La asociación entre puntos del conjunto analítico y expansiones binarias, se puede reescribir como



Conjunto analítico y árbol diádico

Con esta asociación, la distancia entre puntos adyacentes (en el árbol) de generaciones consecutivas no decrece con la generación.

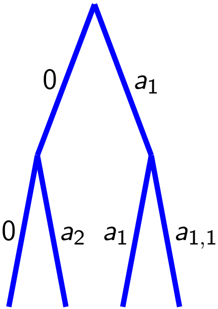


Segunda generación:

- $|a_1 - a_{1,1}| \leq \delta_1$ porque $a_1, a_{1,1} \in S_1$
- $|a_2| \leq \mathrm{diam}(\mathcal{A})$ ya que $0, a_1 \in \mathcal{A}$

Conjunto analítico y árbol diádico

Con esta asociación, la distancia entre puntos adyacentes (en el árbol) de generaciones consecutivas no decrece con la generación.



Segunda generación:

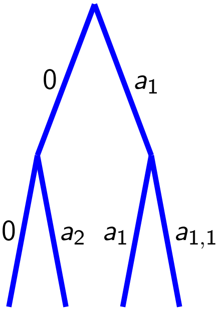
- $|a_1 - a_{1,1}| \leq \delta_1$ porque $a_1, a_{1,1} \in S_1$
- $|a_2| \leq \operatorname{diam}(\mathcal{A})$ ya que $0, a_1 \in \mathcal{A}$

Tercera:

- $|a_{1,1} - a_{1,1,1}| \leq \delta_2$ porque $a_{1,1}, a_{1,1,1} \in S_{1,1}$
- $|a_2 - a_{2,1}| \leq \delta_1$ porque $a_2, a_{2,1} \in S_2$ y
  $|a_1 - a_{1,2}| \leq \delta_1$ porque $a_1, a_{1,2} \in S_1$
- $|a_3| \leq \operatorname{diam}(\mathcal{A})$ porque $0, a_3 \in A$

Conjunto analítico y árbol diádico

Con esta asociación, la distancia entre puntos adyacentes (en el árbol) de generaciones consecutivas no decrece con la generación.



Segunda generación:

- $|a_1 - a_{1,1}| \leq \delta_1$ porque $a_1, a_{1,1} \in S_1$
- $|a_2| \leq \mathrm{diam}(\mathcal{A})$ ya que $0, a_1 \in \mathcal{A}$

Tercera:

- $|a_{1,1} - a_{1,1,1}| \leq \delta_2$ porque $a_{1,1}, a_{1,1,1} \in S_{1,1}$
- $|a_2 - a_{2,1}| \leq \delta_1$ porque $a_2, a_{2,1} \in S_2$ y $|a_1 - a_{1,2}| \leq \delta_1$ porque $a_1, a_{1,2} \in S_1$
- $|a_3| \leq \mathrm{diam}(\mathcal{A})$ porque $0, a_3 \in A$

No hay uniformidad en la aproximación de una generación del árbol a la siguiente.

Pasos de la demostración

Caso $\rho = 0$

Sea $\mathcal{A}$ un conjunto analítico que contiene 0 y ∞. Supongamos que $A := \mathcal{A} \setminus \{\infty\} \subset D(0,1)$ (i.e. $\mathrm{diam}(A) \leq 2$).
Sea ψ una función creciente cualquiera (caso $\rho = 0$).

Pasos de la demostración

Caso $\rho = 0$

Sea $\mathcal{A}$ un conjunto analítico que contiene 0 y ∞. Supongamos que $A := \mathcal{A} \setminus \{\infty\} \subset D(0,1)$ (i.e. $\mathrm{diam}(A) \leq 2$).
Sea ψ una función creciente cualquiera (caso $\rho = 0$).

1. Se construye una función δ-subarmónica U para la que $T_U(r)$ está controlada en términos de ψ y $\mathrm{As}(U) = \{-\infty, \infty\}$ en las ramas de dos árboles diádicos.

Pasos de la demostración

Caso $\rho = 0$

Sea $\mathcal{A}$ un conjunto analítico que contiene 0 y ∞. Supongamos que $A := \mathcal{A} \setminus \{\infty\} \subset D(0,1)$ (i.e. $\operatorname{diam}(A) \leq 2$).
Sea ψ una función creciente cualquiera (caso $\rho = 0$).

1. Se construye una función δ-subarmónica U para la que $T_U(r)$ está controlada en términos de ψ y $\mathrm{As}(U) = \{-\infty, \infty\}$ en las ramas de dos árboles diádicos.
2. Se aproxima la masa de Riesz de U mediante masas puntuales, que formarán la masa de Riesz de $\log|g|$, con g meromorfa y entera.

Pasos de la demostración

Caso $\rho = 0$

Sea $\mathcal{A}$ un conjunto analítico que contiene 0 y ∞. Supongamos que $A := \mathcal{A} \setminus \{\infty\} \subset D(0,1)$ (i.e. $\operatorname{diam}(A) \leq 2$).
Sea ψ una función creciente cualquiera (caso $\rho = 0$).

1. Se construye una función δ-subarmónica U para la que $T_U(r)$ está controlada en términos de ψ y $\mathrm{As}(U) = \{-\infty, \infty\}$ en las ramas de dos árboles diádicos.
2. Se aproxima la masa de Riesz de U mediante masas puntuales, que formarán la masa de Riesz de $\log|g|$, con g meromorfa y entera.
3. La aproximación $\log|g|$ de U será buena fuera de un conjunto pequeño E (conjunto excepcional), y en E, $\log|g|$ será grande (o pequeño) si U lo es, de manera que $\log|g|$ reproduce el comportamiento de U en $\mathbb{C}$.

Pasos de la demostración

4. $T_g(r)$ está controlada in términos de ψ y $\mathrm{As}(g) = \{0, \infty\}$ con curvas asintóticas, las ramas de dos árboles diádicos.

Pasos de la demostración

4. $T_g(r)$ está controlada in términos de ψ y $\mathrm{As}(g) = \{0, \infty\}$ con curvas asintóticas, las ramas de dos árboles diádicos.
5. Se modifica g mediante translaciones cuasiconformes cerca de las ramas del árbol diádico que son curvas asintóticas para $\{0\}$. Estas translaciones cuasiconformes, llevan 0 a $a \in A$ en la rama asociada al valor asintótico $a \in A$.

Pasos de la demostración

4. $T_g(r)$ está controlada in términos de ψ y $\mathrm{As}(g) = \{0, \infty\}$ con curvas asintóticas, las ramas de dos árboles diádicos.
5. Se modifica g mediante translaciones cuasiconformes cerca de las ramas del árbol diádico que son curvas asintóticas para $\{0\}$. Estas translaciones cuasiconformes, llevan 0 a $a \in A$ en la rama asociada al valor asintótico $a \in A$.
6. Con la modificación anterior se obtiene $F = \Phi \circ g$. La función F es cuasirregular (cuasimeromorfa) con dilatación σ_F y $\mathrm{As}(F) = A \cup \{\infty\} = \mathcal{A}$.

Pasos de la demostración

4. $T_g(r)$ está controlada in términos de ψ y $\mathrm{As}(g) = \{0, \infty\}$ con curvas asintóticas, las ramas de dos árboles diádicos.
5. Se modifica g mediante translaciones cuasiconformes cerca de las ramas del árbol diádico que son curvas asintóticas para $\{0\}$. Estas translaciones cuasiconformes, llevan 0 a $a \in A$ en la rama asociada al valor asintótico $a \in A$.
6. Con la modificación anterior se obtiene $F = \Phi \circ g$. La función F es cuasirregular (cuasimeromorfa) con dilatación σ_F y $\mathrm{As}(F) = A \cup \{\infty\} = \mathcal{A}$.
7. Se resuelve la ecuación de Beltrami $\overline{\partial}\phi = \sigma_F \partial\phi$ para encontrar otra aplicación cuasiconforme, ϕ, de tal manera que $f = F \circ \phi$ sea meromorfa con $T_f(r) = O(\psi(r) \log^2 r)$ y $\mathrm{As}(f) = \mathcal{A}$.