

Las competencias de estudiantes como recurso didáctico en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

M^a Dolores López González¹ y Javier Rodrigo Hitos²

¹Departamento de Matemática e Informática Aplicadas a la Ingeniería Civil de la Universidad Politécnica de Madrid, marilo.lopez@upm.es. ²Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Pontificia Comillas, jrodrigo@upcomillas.es.

Resumen: Este trabajo presenta las experiencias del Grupo de Innovación Educativa (GIE) de la Universidad Politécnica de Madrid "Pensamiento Matemático" relativas a la organización de convocatorias de diferentes concursos y competiciones relacionadas con las matemáticas dirigidas a estudiantes de universidad.

Palabras clave: Didáctica de las matemáticas, innovación educativa, actividades docentes en grupo, competiciones de estudiantes.

Title: The students competitions as a didactic resource in the teaching and learning of the mathematics

Abstract: This work presents the experiences of the Innovation Educational Group (GIE) of the Polytechnic University of Madrid "Mathematical Thought", relative to the organization of different mathematic competitions for university students.

Keywords: Didactics of mathematics, Educative innovation, Group learning activities, students competitions.

1. Introducción

Gran número de estudiantes rechazan las matemáticas, no las entienden o no consiguen ver su utilidad. En cambio, pueden verse atraídos por los jeroglíficos, los juegos, los acertijos, la fotografía, las novelas, etc. Desde el Grupo de Innovación Educativa de la UPM 'Pensamiento Matemático' (<http://www.caminos.upm.es/Matematicas/WEBGIE>) se pretenden ofrecer unas estrategias y actividades que contribuyan a incrementar el interés de los estudiantes de todas las edades, pero principalmente de los alumnos de los primeros cursos universitarios, hacia las matemáticas y los conceptos técnicos, además de fomentar mejor ambiente de trabajo y cooperación.

El trabajo que aquí se presenta se centra en la motivación y el acercamiento de los alumnos hacia los temas relativos a las matemáticas. Se pretende divulgar y acercar los conceptos matemáticos que deben conocer y que estudiarán a lo largo de su etapa de aprendizaje, a través de concursos y competiciones. Se trata de actividades abiertas y de carácter divulgativo.

El GIE "Pensamiento Matemático" nació del trabajo que el grupo de investigación de la UPM "Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil (MAIC)"

llevaba realizando desde su creación en temas de didáctica de la matemática. Está formado por profesores de universidad y profesores de enseñanza secundaria. Tiene como propósitos principales, por un lado ayudar a revertir el disgusto y malestar ante las matemáticas que tienen gran número de estudiantes de todas las edades, así como mejorar el rendimiento de los mismos en esta materia que es fundamental para la formación intelectual y para el progreso personal. Por otro el acercamiento de los estudiantes a la universidad.

Su programa educativo es una propuesta de innovación pedagógica en el área de la enseñanza de las matemáticas.

2. Las competiciones y concursos como recurso didáctico

El objetivo de las competiciones y concursos es que los estudiantes completen su formación académica y científica con el desarrollo de aptitudes y habilidades individuales. Otros objetivos que se persiguen con estas actividades son fomentar el trabajo en equipo y los valores profesionales y humanos, así como el espíritu emprendedor, el compromiso personal y la capacidad de comunicación.

La competición se utiliza en muchos entornos educativos, especialmente en el ámbito anglosajón, como medio para contribuir al desarrollo de las habilidades de los alumnos, aspecto éste que se encuentra íntimamente ligado a la adquisición de determinadas competencias profesionales. En el sector de la ingeniería y arquitectura resulta de gran importancia y por ello, la Universidad Politécnica de Madrid está organizando un conjunto de competiciones de estudiantes de lo más variopinto, para divertirse mientras se aprende. En este texto se comentarán algunas de las que el GIE "Pensamiento matemático" ha desarrollado en el marco de la UPM a lo largo de los últimos cursos académicos y se expondrán sus resultados.

2.1. Ventajas de los juegos, competiciones y concursos matemáticos

Es importante considerar al juego en su más amplio significado, como un recurso didáctico. Un juego bien elegido puede servir para introducir un tema, ayudar a comprender mejor los conceptos o procesos, afianzar los ya adquiridos, adquirir destreza en algún algoritmo o descubrir la importancia de una propiedad, reforzar automatismos y consolidar un contenido. Ayuda a los estudiantes a adquirir altos niveles de destreza en el desarrollo del pensamiento matemático. Sirve para enseñar, afianzar y encontrar la utilidad de contenidos y estrategias.

Un juego relacionado con las matemáticas puede convertirse en una sesión motivada desde el comienzo hasta el final, producir entusiasmo, diversión, interés, desbloqueo y gusto por estudiar esta ciencia. Atiende las peculiaridades individuales de cada alumno. Mediante el juego el alumnado no sólo se divierte, sino que desarrolla su personalidad y estado anímico. Un juego conduce al estudiante a la conquista de su autonomía, y a la adquisición de una conducta que le ayudará en sus actividades.

Miguel de Guzmán, relaciona al juego y la enseñanza de las matemáticas mediante el siguiente pensamiento:

El juego y la belleza están en el origen de una gran parte de la matemática. Si los matemáticos de todos los tiempos se la han pasado tan bien jugando y han disfrutado tanto contemplando su juego y su ciencia, ¿por qué no tratar de aprender la matemática a través del juego y de la belleza?

La matemática ha sido y es arte y juego y esta componente artística y lúdica es tan consubstancial a la actividad matemática misma que cualquier campo del desarrollo matemático que no alcanza un cierto nivel de satisfacción estética y lúdica permanece inestable.

Guzmán, M. (1989). Juegos y matemáticas. *Revista SUMA*, 4, 61-64

El juego es un instrumento didáctico que, frente a un aprendizaje pasivo y verbalista, puede ayudarnos en una pedagogía activa, a "hacer y encontrar matemáticas"; a tener en cuenta los procesos intelectuales y los afectivos, al intercambio de actitudes y puntos de vista, a la participación activa, al trabajo colectivo, a propiciar la creatividad y la imaginación.

Los objetivos de los juegos y competiciones que el GIE ha propuesto consisten en que los estudiantes complementen su formación académica, facilitarles la adaptación a la universidad a través del trabajo en equipo, aumentar su capacidad de comunicación y, por supuesto que pasen un buen rato con las matemáticas.

3. Las competiciones realizadas

Se presentan ahora las competiciones y concursos más relevantes que el grupo ha convocado en los últimos años. La finalidad es que estas experiencias puedan servir a otros equipos docentes.

La característica general de todas las propuestas es relacionar las matemáticas con temas atractivos para los estudiantes: narrativa, fotografía, el mundo que les rodea, el arte, la música...

1.- Concurso Encuentra Matemáticas 2010. Curso 2009-2010

Esta propuesta resultó altamente satisfactoria ya que, por su condición abierta permitió la recepción de trabajos muy variados y creativos. La competición pedía que los participantes presentasen trabajos donde se trataran contenidos matemáticos en diversos campos, en principio alejados de esta ciencia: elementos de la naturaleza, esculturas, cuadros, edificios, paneles publicitarios, imágenes y fotografías, relatos, poemas... Los trabajos debían ser originales y podían ser realizados individualmente o en grupos de hasta tres alumnos. Se debía entregar un póster de tamaño A1 apaisado, distribuido de la siguiente manera:

- a) En la parte superior se incluía el título del trabajo y en la parte inferior el nombre y apellidos del autor o autores del trabajo así como la Universidad en la que cursan sus estudios.
- b) En caso de que el trabajo consistiese en la exposición de una imagen (fotografía matemática, arte y matemática, arquitectura y matemática, o cualquier otra disciplina que implique la muestra de una imagen), la mitad izquierda del póster se dedicaría a la exposición de esta imagen y la mitad derecha a comentar la matemática presente en el trabajo.
- c) En caso de que el trabajo consistiese en la presentación de un texto (poesía, relato,...), se presentaría el texto en un máximo de tres columnas distribuidas en todo el póster.

Se recibieron trabajos muy variados y originales, así como de distintos niveles técnicos. Nos encontramos con títulos como Matemáticas y bares, Fractales en las Web de redes sociales, Curvas elípticas en saneamiento y drenaje pluvial, Naturaleza Áurea, Un paseo en Cuádras por la Ciudad de las Ciencias,... En todos ellos se presentaba una visión práctica y cercana de las matemáticas.

A continuación y a modo de ejemplo analizaremos brevemente uno de los trabajos premiados: Matemáticas y bares de Tania Giraldo Sastre alumna de la Universidad Politécnica de Madrid.

En este trabajo se hacía uso de la integración definida para encontrar el recipiente más adecuado a la hora de tomar un refresco o bebida en un bar. Se estudia el volumen de cada una de las copas que se encuentran en los establecimientos: copa de tubo, ancha o balón. Se presenta una comparativa de precios y se tienen en cuenta detalles tan finos como el número de hielos que suele ponerse en cada tipo de recipiente.

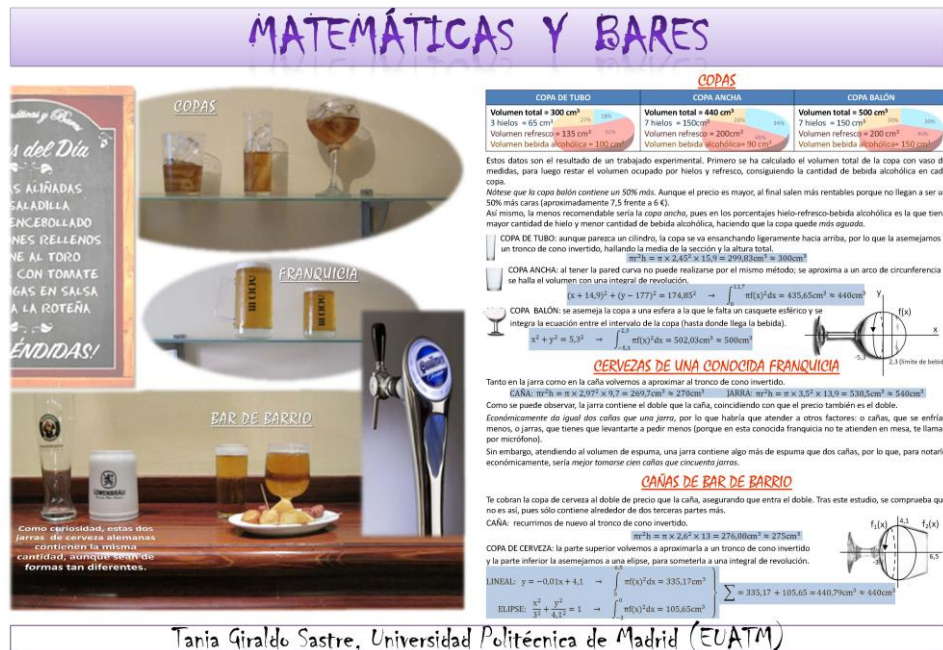


Figura 1. Trabajo presentado al concurso Encuentra Matemáticas 2010 de la UPM

COPA DE TUBO	COPA ANCHA	COPA BALÓN
Volumen total = 300 cm ³ 3 hielos = 65 cm ³ (27%) Volumen refresco = 135 cm ³ (55%) Volumen bebida alcohólica = 100 cm ³ (18%)	Volumen total = 440 cm ³ 7 hielos = 150 cm ³ (34%) Volumen refresco = 200 cm ³ (46%) Volumen bebida alcohólica = 90 cm ³ (20%)	Volumen total = 500 cm ³ 7 hielos = 150 cm ³ (30%) Volumen refresco = 200 cm ³ (40%) Volumen bebida alcohólica = 150 cm ³ (30%)

Estos datos son el resultado de un trabajado experimental. Primero se ha calculado el volumen total de la copa con vaso de medidas, para luego restar el volumen ocupado por hielos y refresco, consiguiendo la cantidad de bebida alcohólica en cada copa.

Nótese que la copa balón contiene un 50% más. Aunque el precio es mayor, al final salen más rentables porque no llegan a ser un 50% más caras (aproximadamente 7,5 frente a 6 €).

Así mismo, la menos recomendable sería la *copa ancha*, pues en los porcentajes hielo-refresco-bebida alcohólica es la que tiene mayor cantidad de hielo y menor cantidad de bebida alcohólica, haciendo que la copa quede *más aguada*.

COPA DE TUBO: aunque parezca un cilindro, la copa se va ensanchando ligeramente hacia arriba, por lo que la asemejamos a un tronco de cono invertido, hallando la media de la sección y la altura total.
 $\pi r^2 h = \pi \times 2,45^2 \times 15,9 = 299,83 \text{ cm}^3 \approx 300 \text{ cm}^3$

COPA ANCHA: al tener la pared curva no puede realizarse por el mismo método; se aproxima a un arco de circunferencia y se halla el volumen con una integral de revolución.
 $(x + 14,9)^2 + (y - 177)^2 = 174,85^2 \rightarrow \int_0^{11,7} \pi f(x)^2 dx = 435,65 \text{ cm}^3 \approx 440 \text{ cm}^3$

COPA BALÓN: se asemeja la copa a una esfera a la que le falta un casquete esférico y se integra la ecuación entre el intervalo de la copa (hasta donde llega la bebida).
 $x^2 + y^2 = 5,3^2 \rightarrow \int_{-5,3}^{2,3} \pi f(x)^2 dx = 502,03 \text{ cm}^3 \approx 500 \text{ cm}^3$

Figura 2. Detalle de las herramientas matemáticas utilizadas en el estudio Matemáticas y bares

Con los trabajos seleccionados considerados más interesantes se ha preparado una exposición con la finalidad de llevarse a diferentes centros para acercar a los estudiantes a las matemáticas y animarles a realizar estudios parecidos.

La página web del concurso contiene la información detallada del desarrollo del mismo: <http://www.caminos.upm.es/matematicas/concursoem2010>

2.- Concurso de fotografía matemática. Curso 2007-2008

En esta convocatoria se buscaba propiciar que los alumnos se acercasen a ciertos conceptos matemáticos a través de su búsqueda en el entorno que los rodea. Que desarrollasen su creatividad para ver los numerosos aspectos de su mundo que se relacionan con las Matemáticas y los plasmaran en una fotografía.

El tema de las fotografías era el de la relación y la búsqueda de las matemáticas en el entorno. Cualquier imagen en conexión con conceptos matemáticos. Para poner de manifiesto esta relación cada fotografía se acompañaba de un título, lema o frase que hiciese alusión a dicho contenido matemático.

Se prepararon dos categorías: alumnos universitarios y centros de educación secundaria de la comunidad de Madrid. Así, por un lado, podían participar los estudiantes de todos los centros universitarios de la comunidad, cada concursante podría presentar una fotografía, y por otro, los centros de enseñanza secundaria que podían presentar un máximo de tres fotografías por centro.

El material a presentar era una fotografía de tamaño A4 montada sobre un papel pluma blanco. En la parte inferior de este marco debía aparecer el título, lema o frase que acompañase a la fotografía. En el reverso aparecería el nombre del autor.

Como resultado de esta convocatoria se cuenta con una exposición de alto contenido didáctico que se ha ido mejorando con el tiempo y que se expone en diversos centros tanto educativos como culturales.

Adjuntamos dos de las fotografías premiadas en el concurso:



Figura 3. Movimiento helicoidal

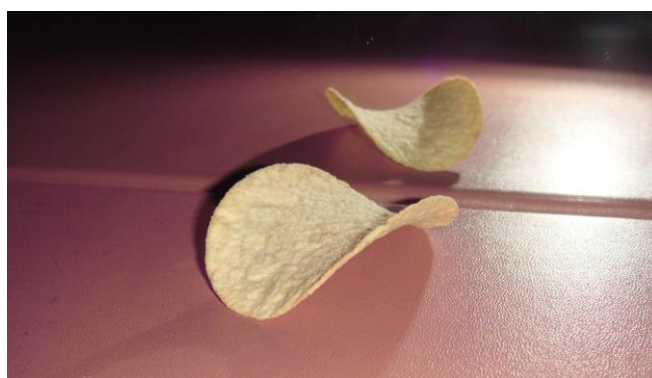


Figura 4. Patataraboloide hiperbólico

Como parte de la exposición, estas fotografías, como todas las que componen la misma, se acompañan de un texto explicativo de la matemática tratada donde en el primer caso se hace una descripción de las curvas en el espacio con especial atención a las hélices y en el segundo se expone la definición de superficie en el espacio tridimensional y se muestran algunos ejemplos de superficies significativas.

Hemos podido comprobar que una exposición como ésta resulta muy atractiva para el público general y los estudiantes en particular. Les pone en contacto con ciertas partes de la matemática de una manera original y atractiva, a la vez que les motiva a la participación en convocatorias parecidas.

La página web del concurso y su información detallada puede consultarse en las actividades realizadas en la página del grupo de investigación MAIC <http://www.caminos.upm.es/matemáticas/Fdistancia/MAIC/investigacion.htm>

3.- Concurso de relatos cortos matemáticos. Curso 2008-2009.

En este caso se pretendía propiciar que los alumnos se acercasen a ciertos conceptos matemáticos a través de un cuento o relato corto, de tema libre, relacionado con las matemáticas. Análogamente al concurso anterior se prepararon dos categorías, en este caso se dividían en menores de 18 (estudiantes de enseñanza secundaria y bachillerato) y mayores de 18 años. Podían participar todas las personas de la comunidad científica, tanto de todos los centros universitarios, como los de los centros de enseñanza secundaria. Cada concursante podrá presentar uno o varios relatos.

El material a presentar consistía en un texto que no sobrepasase las cuatro páginas. Un relato inédito y que no se hubiera presentado anteriormente a ningún otro concurso de cuentos cortos. El tema del mismo era libre con la única condición de que tuviese algún contenido relativo a temas matemáticos.

La página web del concurso y su información detallada puede consultarse en las actividades realizadas en la página del grupo de investigación MAIC <http://www.caminos.upm.es/matemáticas/Fdistancia/MAIC/investigacion.htm>.

Además, algunos de los relatos seleccionados están accesibles en la página web "Aula de Pensamiento Matemático" (dentro de la actividad Matemáticas y Literatura) desarrollada por el GIE: <http://innovacioneducativa.upm.es/pensamientomatematico/>.

4. Resultados obtenidos de las experiencias

Como se ha expuesto en la introducción, al plantearnos acciones como las presentadas en este texto, los objetivos principales que perseguíamos eran, entre otros:

1. Tratar de hacer perder el temor a las Matemáticas al alumnado, haciéndoles ver que éstas no constituyen algo aislado del mundo en el que vivimos y que pueden llegar a ser hasta divertidas.
2. Utilizar los conceptos matemáticos para hacer que los participantes se cuestionen, experimenten, estimen, exploren, hagan conjeturas y sugieran explicaciones para diversas cuestiones.
3. Desarrollar la capacidad de pensar y elaborar estrategias basadas en el razonamiento lógico-matemático.

4. Fomentar entre el alumnado el gusto por las Matemáticas.
5. Contribuir a la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.
6. Apoyar y fomentar entre el profesorado la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

Las experiencias llevadas a cabo, el índice de participación junto con los comentarios de los participantes, nos han permitido concluir que las convocatorias de concursos como los que hemos realizado son una herramienta muy útil y adecuada para conseguirlos.

La participación es excelente todos los años, el grado de satisfacción de los estudiantes es elevado y las aportaciones de los alumnos son muy interesantes. El nivel de sus trabajos es, en general, elevado y original y manifiestan que la experiencia de participación en el concurso es muy buena.

Seguiremos realizando todos los años competiciones en la misma línea y animamos a los diferentes grupos docentes preocupados por la motivación hacia las matemáticas, a convocar acciones parecidas.

En el próximo curso 2011-2012 está previsto el Concurso Encuentra Matemáticas 2011: Una Gymkhana Matemática, dentro de la convocatoria de competiciones de estudiantes de la UPM. La información relativa a la misma podrá ser consultada en la página web del concurso <http://www.caminos.upm.es/matematicas/concursoem2011>

5. Referencias bibliográficas

- Guzmán de, M. (1989). Juegos y matemáticas. *Revista SUMA*, 4, 61-64.
- Guzmán de, M. (1987). Enseñanza de la matemática a través de la resolución de problemas. Esquema de un curso inicial de preparación, Aspectos didácticos de matemáticas 2. Publicaciones del Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Zaragoza, 52-75.
- Guzmán de, M. (1989). Tendencias actuales de la enseñanza de la matemática. *Studia Paedagogica. Revista de Ciencias de la Educación*, 21.
- Lantarón, S. y López, M. D. (2008). Metodologías activas de innovación educativa para el acercamiento de los estudiantes a las matemáticas. Segundo Congreso Internacional de Matemáticas en Ingeniería y Arquitectura (pp. 231-244). Madrid.
- López M. D., Rodrigo, J. y Salvador, A. (2008). Actividades de acercamiento a las matemáticas del alumnado de las escuelas técnicas. V Congreso Iberoamericano de Docencia Universitaria (pp. 179-181). Valencia.
- López M. D., Salvador, A. y Lantarón, S. (2009). Actividades de apoyo al desarrollo de la competencia "pensamiento matemático". III Jornadas Internacionales UPM sobre Innovación Educativa y Convergencia Europea (INECE'09) (pp. 82-89). Madrid.
- López M. D., Rodrigo, J. y Lantarón, S. Una propuesta de acercamiento de las matemáticas a los estudiantes a través de la divulgación científica. III Jornadas Internacionales UPM sobre Innovación Educativa y Convergencia Europea (INECE'09) (pp. 1399-1413). Madrid.

López, M. D., Rodrigo, J. y Lantarón, S. Lecture room web for the improvement of mathematic knowledge. International Conference on Education and New Learning Technologies (EDULEARN10) (pp. 3263-3269). Barcelona.

Páginas web:

Página web del grupo de Innovación Educativa de la UPM Pensamiento matemático <http://www.caminos.upm.es/Matematicas/WEBGIE>

Página web del grupo de investigación de la UPM Matemática Aplicada a la Ingeniería. Civil:

<http://www.caminos.upm.es/matematicas/Fdistancia/MAIC/investigacion.htm>

Página del concurso encuentra matemáticas 2010 de la UPM:

<http://www.caminos.upm.es/matematicas/concursoem2010>

Página del proyecto Aula de Pensamiento Matemático:
<http://innovacioneducativa.upm.es/pensamientomatematico/>