





# ACUEDUCTO DE SEGOVIA COMPORTAMIENTO MECANICO

JAIME CERVERA BRAVO,  
JUAN FRANCISCO DE LA TORRE,  
JOSÉ IGNACIO HERNANDO.

Departamento de Estructuras de Edificación  
Escuela Técnica Superior de Arquitectura  
Universidad Politécnica de Madrid

## **Introducción: Objetivos y aportaciones.**

Un monumento de la categoría del Acueducto de Segovia constituye un Patrimonio de tal importancia que es inevitable saber que, tanto la reflexión sobre su ser —su identidad, su historia o su estado de conservación . . . — como las actuaciones sobre él mismo o su entorno han de repetirse y prolongarse durante generaciones.

Por dicha razón, debiera considerarse que cualquier análisis —ya sea mecánico o de cualquier otro tipo— que se realice sobre tal monumento sólo constituye una aportación parcial que forma parte de un proceso de conocimiento acumulativo en el tiempo, cuyo resultado constituirá un corpus de conocimiento creciente asociado al ser mismo del monumento. No se trata, por tanto de resolver todas las incógnitas en un solo trabajo descomunal, sino de aportar modelos que permitan explicar en forma cada vez más precisa los diversos aspectos de comportamiento del monumento.

En este trabajo se tratan de aportar alguna luz sobre varias incógnitas de la mecánica del Acueducto, una vez conocidas las características generales de su comportamiento — desde el análisis realizado por Fernández Casado de 1966<sup>1</sup> o desde los resultados de la investigación dirigida por Mas-Guindal Lafarga en 1985–86<sup>2</sup>—, que, por otra parte, no ofrecen dificultad, y que pueden ser reproducidas en análisis análogos: El comportamiento básico del Acueducto en su plano está determinado por la carga vertical que soportan las pilas, y fuera de su plano, por el comportamiento en ménsula frente a las acciones horizontales, básicamente de viento, que alteran en pequeña medida su estado tensional frente a carga gravitatoria.

Se trata de aportar elementos para la comprensión de:

- (1) los fenómenos de tensión y deformación impuestos por las variaciones térmicas, tanto entre estaciones, como a lo largo de las días extremos, y su influencia global sobre la obra entera, o local, sobre las superficies de la misma.

---

<sup>1</sup>y que puede conocerse por la obra de Aurelio Ramírez Gallardo: Supervivencia de una obra hidráulica. El Acueducto de Segovia. Segovia 1975

<sup>2</sup>publicada por este mismo autor: Antonio Mas-Guindal Lafarga: Los métodos informáticos en el diagnóstico de edificios antiguos: El Acueducto de Segovia. Madrid 1992

- (2) las alteraciones a los campos de tensiones medias que pueden derivarse de las degradaciones más típicas de entre las que existen entre las juntas de la fábrica.
- (3) las características dinámicas básicas del monumento<sup>3</sup>

Alguno de los resultados obtenidos en este trabajo, que más adelante se describen en detalle, y que merecen citarse son:

- (1) una explicación a la abundante aparición de fisuras que prolongan a juntas entre sillares, asimétricas respecto del plano de la junta que las origina.
- (2) la comprobación de la marginalidad en los movimientos transversales del monumento derivados de cambios térmicos estacionales
- (3) la comprobación de la importancia marginal en la rigidez transversal del acueducto de la rigidez transversal —en flexión— de los arcos, frente a la importancia de la rigidez de las pilas.
- (4) la presentación de alguno de los fenómenos mecánicos que coadyuvan en el proceso de desescamación de los sillares degradados.

Se comprueban y ratifican además conclusiones de trabajos anteriores, como son los niveles medios en los estados tensionales, o las características dinámicas básicas, y que igualmente se reseñan más adelante.

Este trabajo se divide en base a los apartados siguientes, que pueden entenderse independientemente, y que conforman capítulos separados:

- (1) Estados de tensión y deformación generales en arcos y pilas.
- (2) Concentraciones de tensión —y fisuración— derivadas de la degradación de juntas entre sillares. a
- (3) Estados de tensión y deformación derivados de las diferencias térmicas entre estaciones.
- (4) Estados de tensión y deformación derivados de las diferencias térmicas diarias.
- (5) Rigidez transversal del monumento y comportamiento dinámico básico.

Este trabajo se realiza en paralelo a un extenso análisis estático realizado por el Arquitecto D. Felipe Fernández, por lo que no se consideran cuestiones que quedan ampliamente revisadas en dicho trabajo.

Madrid 2 de febrero de 1994

Fdo. Jaime Cervera Bravo.  
Catedrático.  
Escuela T. S. de Arquitectura.

---

<sup>3</sup>Respecto a éstas, debe reseñarse el trabajo que está desarrollando el Catedrático de Ingeniería Mecánica de la E.T.S. de Ingenieros Industriales de Valladolid, D. Felipe Montoya, pese a las discrepancias entre los datos y resultados de su estudio con los que nosotros hemos empleado y obtenido, y que se detallarán en su momento.

## ACUEDUCTO DE SEGOVIA

CAPÍTULO I  
ANÁLISIS DE LOS ESTADOS DE TENSIÓN  
Y DEFORMACIÓN DE LAS PILAS

**Introducción.**

En una primera aproximación al estado de tensiones y de deformaciones del Acueducto de Segovia, sometido a cargas en su plano, se puede suponer un comportamiento uniforme en su espesor, y tratar la secuencia de pilas y arcos como un entramado bidimensional, suponiendo estados planos de tensión. Sólo el viento requiere la consideración del propio espesor del acueducto para poder diferenciar entre los estados que se producen a sotavento y a barlovento. El análisis de tensiones debidas a las variaciones térmicas estacionales, supuesta la perfecta alineación entre pilas, y la imposibilidad de desplazamientos transversales, tiene también cabida bajo los anteriores supuestos. Sin embargo los efectos de la variación térmica diaria, los debidos a las imperfecciones en el sentido longitudinal del acueducto, la posibilidad de relajación y desplazamientos laterales bajo efectos térmicos, de corto o largo plazo, o el comportamiento dinámico de la construcción, deben observarse con modelos diferentes a los que en este apartado se recogen. Básicamente se trata de considerar la estructura como elemento plano, analizando un comportamiento que asegure tanto el equilibrio como la compatibilidad de deformaciones.

Para este modelo, como para los demás que en esta memoria se recogen, las características mecánicas de los materiales se han especificado, a partir de los datos de que se disponía, según dos zonas de distinta naturaleza: hasta la altura de la coronación primitiva del acueducto éste está constituido por sillería de granito, y a partir de dicha cota, un cauce posterior se levantó en mampostería. Puesto que se ha supuesto que cada material es homogéneo e isótropo, sin alteraciones locales, y despreciando el efecto de las juntas entre sillares o mampuestos<sup>4</sup>, se han empleado para cada una de las fábricas los siguientes valores:

	SILLERÍA	MAMPOSTERÍA
$E$	50.000 kp/cm <sup>2</sup>	20.000 kp/cm <sup>2</sup>
$\nu$	0,15	0,15
$\rho$	2.600 kg/m <sup>3</sup>	1.800 kg/m <sup>3</sup>
$\alpha$	0,5e-5°C <sup>-1</sup>	0,5e-5°C <sup>-1</sup>

donde  $E$  es el módulo de rigidez longitudinal,  $\nu$  es el coeficiente de Poisson,  $\rho$  es la densidad, y  $\alpha$  es el coeficiente de dilatación térmica. En principio no se ha hecho ninguna suposición acerca de la resistencia de la sillería o la mampostería, por la escasa concordancia de los datos que se poseían inicialmente. De todos modos sólo habría sido necesaria su consideración detallada en el caso de haber supuesto —o haber conocido *a priori*— que en algún caso existían tensiones excesivas para la resistencia del material. De hecho, como puede comprobarse en este capítulo, no se alcanza nunca a un estado de

---

<sup>4</sup>los estados de concentración de tensiones debidos a las juntas entre sillares se tratan en el correspondiente apartado de esta memoria

tensiones que permita suponer la falta de capacidad resistente de la piedra en su estado teórico de ausencia de degradación.

El análisis lineal es una buena aproximación al comportamiento de estructuras de fábrica en la medida en que los estados de tensiones sean básicamente de compresión. En este caso el modelo se ve escasamente afectado por la incapacidad de las juntas entre piedras para transmitir tracciones, o por la poca resistencia relativa en tracción que presentan los materiales pétreos. Pues en dicho caso la no aparición de discontinuidades en el comportamiento descrito por el modelo se corresponde con su no aparición en el objeto real, justificando las condiciones de continuidad básicas para justificar la isotropía, homogeneidad y linealidad del modelo. El análisis permite en este caso describir campos de tensión que sólo existirán en la realidad si, además, la continuidad física existe. Ahora bien, en caso de existir discontinuidades locales, bien puede analizarse por separado la influencia local de tal tipo de discontinuidades en el campo obtenido para el medio continuo, antes de embarcarse en un modelado más realista? del objeto real.

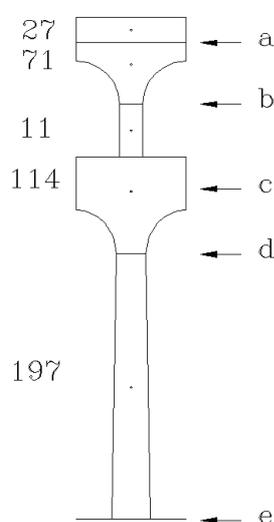
En cuanto al procedimiento, los resultados que aquí aparecen se deben a dos tipos de herramientas para un mismo análisis elástico–lineal: la estimación *manual*, por los procedimientos habituales de la resistencia de materiales<sup>5</sup> y mediante modelos planos de elementos finitos formados partiendo de la geometría real. Para el modelo de elementos finitos se han empleados mallas de elementos planos no conformes de cuatro nodos, y triangulares de tres nodos, adaptándose donde era posible al despiece real de la fábrica del acueducto, respetando su contorno real. Esto es irrelevante desde el punto de vista del análisis si se aborda un análisis lineal con un material homogéneo e isótropo. La pretensión ha sido exclusivamente poder emplear como ejes de referencia para las tensiones ya sean los generales de la estructura, ya los de la geometría del aparejo de la fábrica real, es decir, los de los elementos. Esto permite —hay otros medios de hacerlo— obtener los estados de tensiones de los arcos según su directriz, permitiendo comparar los resultados con los que se obtendrían por los métodos de la estática gráfica, ligados a los conceptos de polígonos de fuerzas, funiculares, líneas de presiones, etc. En cuanto al hecho de ceñirse a la geometría real —a partir de dibujos realizados por fotogrametría— no interpolando con líneas elegidas a priori —rectas, arcos de círculo— entre puntos de posición conocida, la intención es mostrar la relativa marginalidad de las pequeñas alteraciones de los campos de tensiones, o en sus alteraciones locales debido a tales imperfecciones.

Las hipótesis de carga exploradas en estos modelos son las siguientes: peso propio y acción térmica estacional. El análisis frente a esfuerzos transversales requiere, bien un modelo plano ortogonal al plano del acueducto —el evidente modelo de ménsula, ya utilizado por Fernández Casado—, bien un modelo tridimensional, como el utilizado más adelante para establecer el comportamiento transversal. No se han considerado efectos de segundo orden en estos modelos, dado el bajo nivel de las tensiones de trabajo de la estructura, —y consecuentemente el bajo nivel de las deformaciones— y dada la escasa rigidez de los elementos que la constituyen. En cualquier caso, los efectos de segundo orden en el comportamiento del acueducto en su conjunto se abordan en el apartado destinado a analizar las alteraciones térmicas entre estaciones.

---

<sup>5</sup>que permite calibrar la validez de los resultados obtenidos por otros procedimientos, y comparar con los determinados por otros autores

**Pila 107.** No existen grandes diferencias entre la geometría de las pilas 107 y la pila tipo, ni tampoco en su comportamiento. Aparte de leves diferencias en las dimensiones de la pila en el arco alto, la diferencia fundamental reside en el sotabanco sobre la primera línea de arcos. A partir de la geometría, y de las densidades de los materiales, pueden estimarse con precisión los pesos de los distintos tramos en que se divide cada pila. La figura aporta algunos de los datos. Las divisiones responden exclusivamente a criterios geométricos. Las dimensiones de la sección empleadas a efectos de la estimación pesos y tensiones son las de la tabla siguiente, enumeradas como anchura y profundidad. Por anchura se entiende la dimensión paralela al plano del acueducto y por profundidad la dimensión transversal.



**Fig. 1.1** Pila 107. Se incluyen los pesos propios por tramo

### Peso propio.

Una primera estimación de las tensiones verticales  $\sigma_y$  medias debidas al peso propio es inmediata, y sus valores figuran en la misma tabla, junto a los de posiciones próximas, extraídas de las anotaciones del dibujo de Fernández Casado publicado por D. Aurelio Ramírez Gallardo. Dichas tensiones servirán para validar los resultados del análisis por elementos finitos.

SECCIÓN	anchura	profundidad	tensión $\sigma_y$	tensión. Fdez. Casado
	<i>cm</i>	<i>cm</i>	<i>kp/m<sup>2</sup></i>	<i>kp/m<sup>2</sup></i>
<i>a</i>	610	170	0,25	0,37
<i>b</i>	120	170	4,70	4,44
<i>c</i>	610	170	5,33	5,60
<i>d</i>	150	170	8,75	5,87
<i>e</i>	220	350	5,45	5,10

Las leves discrepancias pueden entenderse por la elección de la pila y por el diferente criterio en la elección de la sección analizada. En particular, para la sección 2, Fernández Casado parece haber empleado una sección de dimensión mayor a la de la geometría

descrita más arriba. Asimismo los aproximadamente 13 metros cúbicos adicionales que supone el sotabanco explican básicamente la diferencia en 33 T. entre la masa de 387 T. de su dibujo y las 420 del de la figura precedente.

Debe considerarse que en cortes intermedios como los **c** y **d** no debe considerarse la totalidad de la sección, siendo más real considerar una columna de sección igual a la de la pila, y, de hecho es así como aparecen las tensiones verticales concentradas en el modelo de elementos finitos. Aceptando una cierta distribución contigua a la columna pueden estimarse los valores de 7 y 13,5  $kp/cm^2$  para dichas secciones respectivamente. El análisis por elementos finitos arroja unos valores máximos próximos a 10  $kp/cm^2$  localizados efectivamente en los arranques de los arcos y la base de la pila, secciones **d** y **e**. Los valores medios en ambos análisis no superan en ningún caso tensiones que justifiquen el agotamiento del material por falta de resistencia.

El análisis por elementos finitos pone de manifiesto varias cuestiones conocidas, que cuantifica.

- (1) En primer lugar las muy leves asimetrías que se producen en el campo de tensiones dada la leve asimetría de la forma real —desplazamiento  $u_x$  y tensiones  $\sigma_y$ —.
- (2) En segundo lugar la potencial aparición de leves tracciones junto al apoyo de la segunda familia de arcos por necesidades de compatibilidad de deformación entre el lado cargado y descargado del sillar en que éstos apoyan.
- (3) Asimismo la aparición de más leves aún tensiones de tracción en dirección horizontal en la masa que apoya en el encuentro entre dovelas, a partir de una altura doble a la de las dovelas, derivadas del doble abanico que abre y cierra, de arriba abajo, las direcciones principales de las tensiones que son verticales en las pilas.
- (4) Los resultados permiten confirmar que las tensiones siguen en los arcos los trazados de éstos, puesto que las direcciones principales de las tensiones, y la distribución de tensiones en cada sección indican que, efectivamente, la línea de presiones representaría con bastante precisión lo que sucede en el arco<sup>6</sup>.

### Cambio térmico estacional.

Esta hipótesis, se utiliza en el correspondiente apartado, pero que se describe aquí por haberse empleado el mismo modelo que en el análisis anterior.

Un cambio térmico con un incremento uniforme de temperatura de 1° C llevaría, en el caso de confinamiento del material en una de sus direcciones a la aparición de tensiones de 0,25  $kp/cm^2$  en dicha dirección, desapareciendo sin el confinamiento. Como los arcos provocan una asimetría respecto de cualquier horizontal, el confinamiento horizontal puede relajarse levemente mediante flexiones verticales, con el ascenso del centro del vano, fenómeno que es el que se analiza en el modelo. Las flexiones alteran el campo de tensiones horizontales, que se distribuyen asimétricamente, y que son iguales a 0,25 sólo para una

---

<sup>6</sup>Puede comprobarse de modo aproximado que el antifunicular de la carga sobre el arco superior es cercano a una semicircunferencia, por lo que las tensiones deberían seguir el trazado del mismo, o formas de algo más de altura si se considera la posibilidad de formación de arcos de descarga en la masa que apoya sobre las dovelas. En el arco inferior, la carga de la pila, mucho mayor que la del sotabanco, habría de forzar un funicular más elíptico que en el caso anterior si se mantiene la geometría del arco, lo que, para un trazado general parecido al del arco superior, exige sin embargo una llegada a los apoyos más próxima al vano que en aquél, cosa que, efectivamente sucede.

sección intermedia —en los riñones— creciendo donde disminuye la sección, —sobre el vano— y decreciendo donde aumenta —sobre la pila. La asimetría y la concentración sobre el vano provocan conjuntamente unos esfuerzos máximos menores a dos veces los esfuerzos medios en el intradós del arco, precisamente en la clave del mismo. La relajación horizontal de tensiones no existe, o es marginal, y de menor orden a los efectos derivados de la geometría no recta sobre las dos familias de arcos, tal y como cabe prever con un vistazo al alzado del acueducto, que revela la muy baja esbeltez, y por tanto la altísima rigidez de los tramos sobre los vanos.

### Pila 105.

Los resultados de la pila 105 son del mismo tipo que los ya considerados para la 107: tanto la asimetría de forma, como las leves tracciones que pueden aparecer bien en el asiento de la segunda fila de arcos, bien para desviar los campos de tensiones son conclusiones que se confirman en el modelo de la pila tipo. En ésta, además, dada la menor sección que puede emplearse en la formación de arcos de descarga, la trayectoria de las tensiones en el arco bajo sigue con mayor precisión la forma del mismo que en el caso anterior.

Puede observarse el ajuste en los valores de las tensiones respecto de las que pueden obtenerse manualmente, que seran, con idénticos criterios que en el caso anterior:

SECCIÓN	anchura	profundidad	tensión $\sigma_y$	tensión. Fdez. Casado
	<i>cm</i>	<i>cm</i>	<i>kp/m<sup>2</sup></i>	<i>kp/m<sup>2</sup></i>
<i>a</i>	610	170	0,25	0,37
<i>b</i>	120	170	4,70	4,44
<i>c</i>	120	170	5,88	5,60
<i>d</i>	150	170	7,65	5,87
<i>e</i>	220	350	5,10	5,10

Aparece alguna diferencia en la sección d, por la interpolación entre espesores del modelo de elementos finitos.

Aparecen, al igual que en el modelo anterior, leves desajustes locales en la base de la pila, que pueden atribuirse a exceso de rigidez local en las condiciones de contorno, y que no influyen apreciablemente en el comportamiento general.

No cabe reseñar diferencia alguna en los resultados de la dilatación térmica correspondiente a un grado, siendo los resultados repetición de los del análisis del modelo anterior.

### Gráficas.

Se adjuntan a continuación las gráficas más significativas del comportamiento de ambas pilas, central, 107 y tipo, 105, para carga gravitatoria —peso propio— y dilatación térmica de un grado.

En éstas quedan representadas

- (1) el modelo, con la deformada correspondiente al caso de carga considerado
- (2) las componentes de desplazamiento horizontal UX y vertical UY.
- (3) las tensiones correspondientes al tensor en ejes horizontal y vertical, SX, SY y SXY.
- (4) las tensiones en los arcos medidas en sentido circunferencial SX y radial SY, en las direcciones de los ejes de elementos, que siguen el trazado del arco.

Las unidades correspondientes a este grupo de gráficas son kp para fuerzas y cm para longitudes, por lo que las tensiones constan en  $\text{kp}/\text{cm}^2$ .

## ACUEDUCTO DE SEGOVIA

CAPÍTULO II  
ANÁLISIS DE LOS ESTADOS DE  
CONCENTRACIÓN DE TENSIÓN  
DEBIDOS A  
DEGRADACIÓN DE LAS JUNTAS

**Introducción.**

En la comprobación del estado de tensiones de una fábrica de sillares es, en general, muy sencillo obtener muy buenas estimaciones de las tensiones medias que pueden aparecer en determinadas regiones de la fábrica. En el caso del Acueducto es, en efecto, de gran sencillez la obtención del estado medio de tensiones de las pilas y de los arcos, tanto para estados de carga derivados del propio peso, como para estados de combinación del peso con otras cargas, como pueden ser las de viento. De hecho, los valores obtenidos por Fernández Casado en 1966<sup>7</sup> mediante el empleo de reglas muy simples son valores totalmente válidos, como ya se ha visto.

Sin embargo, para la obtención de tales valores han de suponerse condiciones de isotropía y homogeneidad de la fábrica que no se dan en la realidad, y que son tanto más alejadas de las condiciones reales de trabajo de la fábrica cuanto mayor es el estado de degradación —sea superficial o profundo— de las juntas de ésta.

En efecto, la existencia de juntas, y su diverso estado de degradación, provocan la existencia de discontinuidades, cambios en la forma de los contornos externos de los sillares, etc., cambios que provocan la alteración local del estado de tensiones, concentraciones de las tensiones de compresión, y tracciones asociadas al cambio de dirección de las anteriores, aun cuando puedan mantenerse básicamente las condiciones globales del comportamiento de la fábrica.

De este modo el conocimiento acertado del comportamiento general, y de los valores medios de las tensiones derivados de ese comportamiento no impide que se desconozca la existencia de importantes gradientes en dichos valores, en regiones del tamaño del sillar, gradientes producidos por dichas discontinuidades.

Por otro lado no es posible, ni razonable desde la perspectiva de comprender el estado de esfuerzos existente, modelar y analizar el estado correspondiente a una región concreta y precisa de la fábrica: las peculiaridades geométricas y mecánicas de dicha región pueden aportar información sobre fenómenos que se repiten en otras, pero a la vez pueden oscurecer parcialmente las razones del estado final de esfuerzos. Es más adecuado proponer modelos teóricos de mayor abstracción que representen casos generales de dichas alteraciones en la continuidad geométrica —o mecánica— y obtener deducciones a partir del análisis de dichos modelos, mediante —si es posible— la combinación de los efectos derivados de cada tipo de alteración detectado.

El objetivo de este tipo de análisis es doble:

- (1) De un lado conocer las alteraciones generales que se producen respecto del modelo isótropo, de cara a comprender la modificación global producida en dicho modelo

---

<sup>7</sup>citado por Aurelio Ramírez Gallardo, [op. cit. 1975].

- (2) De otro lado establecer los problemas de tipo local que aparecen al alterarse la uniformidad en el campo tenso-deformacional.

Se proponen aquí dos modelos tipo de degradación geométrica en las juntas entre sillares —que son las zonas en las que se originan las alteraciones en la continuidad geométrica de la fábrica— y se han parametrizado ambos modelos para realizar el análisis de la alteración del campo de tensiones que se derivan de tales tipos de degradación. Hay que hacer constar que, dentro de dichas alteraciones, y en tanto están asociadas a la existencia de discontinuidades geométricas, deberán producirse singularidades en regiones de muy pequeño tamaño cercanas a la discontinuidad. Se trata de un tipo de singularidad análogo que analiza la mecánica de fractura. Sin embargo aquí no se trata de describir en detalle el comportamiento de dichas áreas singulares, para lo que sería necesario un análisis teórico y experimental mucho más refinado en el detalle del comportamiento físico del material degradado propio del Acueducto. Dichas singularidades serán sólo detectadas por el análisis que aquí se propone, pero no profundizaremos en ellas. Interesa, en cambio, en este análisis comprobar la modificación general de los estados de esfuerzo en las regiones exteriores a dichas singularidades.

### Modelos propuestos.

Los dos modelos bidimensionales propuestos corresponden a dos casos de degradación geométrica en las juntas.

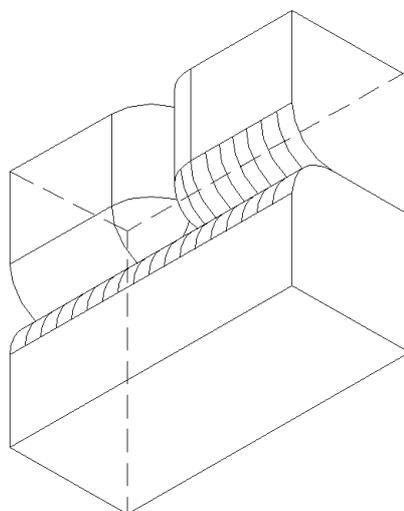
El primero de ellos corresponde al encuentro de una junta paralela a las compresiones dominantes con la junta transversal de la hilada de sillares siguiente. Se trata de un caso presente en el alzado de las pilas, y también en el intradós de los arcos, si se observan éstos desde el centro de su curvatura. Se trata con este modelo de comprobar la existencia de esfuerzos de tracción de relativa importancia, que tenderán a provocar la prolongación de la junta que es paralela a las compresiones, mediante la formación de una fisura en continuidad a la junta, y en el sillar que la cierra.

El segundo de ellos corresponde a la junta transversal al estado de compresiones, en su encuentro con el exterior de la fábrica. Corresponde a casi cualquier sección de la fábrica normal a la cara externa de la misma, y dada por un plano paralelo a las direcciones principales de compresión, como pueden ser secciones verticales en las pilas, o secciones de los arcos por planos que contienen al centro de curvatura —planos osculadores—.

Ambos modelos corresponden a dos secciones tipo de un modelo de junta entre tres sillares, tal y como se dibuja en —**Fig. 1**—, que representa dicho grupo visto desde una cota inferior, y para el que los modelos bidimensionales considerados corresponden a las dos secciones verticales ocultas del mismo dibujo. Podemos llamar al primer modelo de junta *junta central* por reflejar un estado que corresponde al interior del alzado de la fábrica, y a la segunda *junta de borde*, por representar las juntas en el contorno externo de la fábrica. Veremos que las denominaciones coinciden con dos modelos clásicos de fisura en mecánica de fractura.

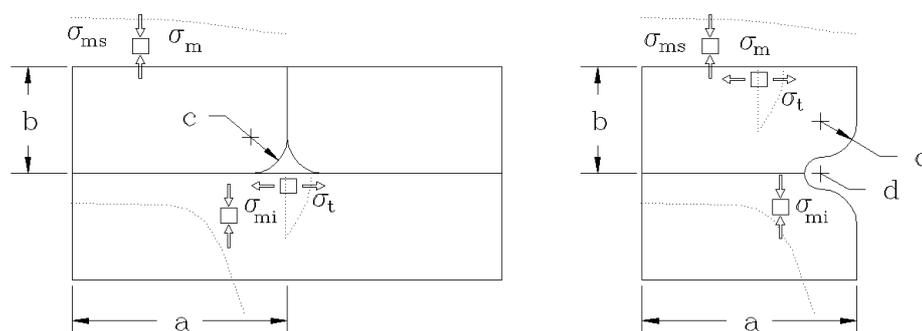
Para el primer modelo, las variables geométricas son la anchura del modelo  $a$ , que podría representar la mitad del tamaño del sillar, dimensión a partir de la cual se repite el dibujo, su altura  $b$ , que representa la semialtura de la hilada, y el radio de circunferencia de la junta  $c$ . Ver —**Fig. 2**—.

Como condiciones de contorno se imponen las que aseguran la repetitividad en horizontal, tomando por lo tanto como línea de desplazamientos horizontales nulos las que



**Fig. 2.1** Unión entre tres sillares.

los modelos de juntas corresponden a los planos verticales ocultos en la perspectiva.



**Fig. 2.2** Juntas central, y de borde

representan la vertical de la junta.

Para el segundo modelo, las variables geométricas son nuevamente la semialtura  $b$ , y los radios de circunferencia de las zonas convexa  $c$  y del seno cóncavo  $d$  de la junta. Las condiciones de contorno vuelven a ser las de simetría y repetitividad para el análisis de la junta, permitiendo el desplazamiento libre en el contorno exterior de la fábrica.

En ambos modelos se ha simulado el estado de tensiones mediante la imposición de un desplazamiento vertical uniforme en la línea de simetría horizontal. Se asegura así la repetitividad en vertical que deben respetar ambos modelos.

### **Análisis y selección de resultados.**

Los dos modelos propuestos han sido analizados en régimen elástico para distintas relaciones entre sus parámetros geométricos con mallas de elementos finitos triangulares de seis nodos, con mallas más finas en las cercanías de las irregularidades del contorno, a fin de minimizar el tamaño de las regiones de comportamiento singular, y el error derivado de éste. En todo caso el error en las proximidades de la singularidad será alto,

y tanto mayor cuanto mayor sea dicha proximidad.

Es evidente que el valor concreto de las tensiones no tiene importancia, por corresponder al desplazamiento arbitrario impuesto. Lo que sí la tiene serán los valores relativos de las mismas, y en particular, sus valores referidos a las tensiones medias de compresión correspondientes a la dimensión horizontal de cada modelo.

Del análisis de cada caso se han extraído diversos resultados numéricos de los que se tabulan las magnitudes siguientes:

- (1) para la junta central, y para cada relación  $a/b$  se han obtenido, —variando la relación  $c/b$ , que representa la dimensión relativa de la zona degradada de la junta— la tensión media de compresión de la sección horizontal,  $\sigma_m$ , la máxima de dicha sección  $\sigma_{ms}$ , la tensión de tracción  $\sigma_t$  que se produce en el sillar inferior, en dirección transversal a la junta vertical que dicho sillar cierra, y finalmente la máxima de compresión en la junta  $\sigma_{mi}$ , que, por corresponder al punto donde se produce la singularidad manifestará un comportamiento errático.
- (2) para la junta de borde, y para una relación  $a/b$  permanente de 2 se ha mantenido constante en cada serie la relación  $d/c$  que representa la *agudeza* de la junta, variando, nuevamente, la relación  $c/b$  que representa la importancia de la degradación, y obteniéndose los mismos casos de tensiones que en el caso anterior, salvo que se mide la mayor tensión de tracción horizontal  $\sigma_t$ , que aparece en la cota correspondiente al eje horizontal de cada sillar<sup>8</sup>.

Los valores trazados son, como ya se ha expuesto, los de los valores relativos a las tensiones medias de compresión.

Se añaden a dichas tablas resultados gráficos correspondientes a tres casos de geometría de cada tipo de junta, gráficos correspondientes en cada modelo a Campo de desplazamientos, campo de tensiones principales —direcciones y valor relativo—, tensiones normales horizontales SX, tensiones máximas SIG1 —máximas de tracción—, tensiones normales verticales SY, tensiones mínimas SIG3 —máximas de compresión—, tensiones tangenciales paralelas a los ejes horizontal–vertical SXY, y tensiones tangenciales máximas SI.

### Tablas para junta central.

b/a=0,5				
c/b	b/c	$\sigma_{ms}/\sigma_m$	$\sigma_{mi}/\sigma_m$	$\sigma_t/\sigma_m$
0,500	2	1,193	3,220	1,110
0,333	3	1,087	3,041	1,016
0,250	4	1,048	2,582	2,212
0,200	5	1,031	2,399	1,060
0,167	6	1,021	3,314	1,130
0,143	7	1,016	2,830	1,055
0,125	8	1,002	2,850	1,126
0,111	9	1,009	2,965	1,087
0,100	10	1,007	3,040	1,272

b/a=0,333

---

<sup>8</sup>la máxima tracción horizontal se localiza en una cota superior a la junta, a una distancia aproximada a la profundidad de ésta, y en una línea relativamente próxima a una oblicua a 15° de la concavidad máxima de la junta.

c/b	b/c	$\sigma_{ms}/\sigma_m$	$\sigma_{mi}/\sigma_m$	$\sigma_t/\sigma_m$
0,500	2	1,106	2,512	1,009
0,333	3	1,050	2,389	1,127
0,250	4	1,028	2,413	1,111
0,200	5	1,018	2,588	1,159
0,167	6	1,012	2,174	1,148
0,143	7	1,009	2,173	1,157
0,125	8	1,006	2,221	1,162
0,111	9	1,005	2,199	1,148
0,100	10	1,004	2,090	1,067

b/a=0,250

c/b	b/c	$\sigma_{ms}/\sigma_m$	$\sigma_{mi}/\sigma_m$	$\sigma_t/\sigma_m$
0,500	2	1,076	2,386	0,984
0,333	3	1,036	2,064	1,035
0,250	4	1,020	2,146	1,052
0,200	5	1,013	2,219	1,077
0,167	6	1,008	2,098	1,010
0,143	7	1,006	1,982	1,141
0,125	8	1,004	1,969	0,867
0,111	9	1,003	1,847	1,900
0,100	10	1,002	2,128	0,813

b/a=0,200

c/b	b/c	$\sigma_{ms}/\sigma_m$	$\sigma_{mi}/\sigma_m$	$\sigma_t/\sigma_m$
0,500	2	1,055	2,337	0,875
0,333	3	1,028	2,154	1,024
0,250	4	1,016	2,265	1,036
0,200	5	1,010	2,149	1,061
0,167	6	1,006	2,026	0,995
0,143	7	1,005	1,894	1,081
0,125	8	1,003	1,811	0,963
0,111	9	1,002	1,839	0,858
0,100	10	1,002	2,007	0,761

b/a=0,167

c/b	b/c	$\sigma_{ms}/\sigma_m$	$\sigma_{mi}/\sigma_m$	$\sigma_t/\sigma_m$
0,500	2	1,048	2,167	0,866
0,333	3	1,022	1,963	0,967
0,250	4	1,012	1,816	1,067
0,200	5	1,006	1,811	0,913
0,167	6	1,005	1,897	0,846
0,143	7	1,003	1,942	0,749
0,125	8	1,002	2,016	0,717
0,111	9	1,001	2,006	0,617
0,100	10	1,001	1,978	0,427

b/a=0,143

c/b	b/c	$\sigma_{ms}/\sigma_m$	$\sigma_{mi}/\sigma_m$	$\sigma_t/\sigma_m$
-----	-----	------------------------	------------------------	---------------------

0,500	2	1,040	3,138	0,884
0,333	3	1,018	1,662	0,950
0,250	4	1,020	1,743	1,051
0,200	5	1,005	2,367	0,811
0,167	6	1,004	1,894	0,816
0,143	7	1,002	1,667	0,733
0,125	8	1,002	1,592	0,689
0,111	9	1,001	1,952	0,693
0,100	10	1,001	1,967	0,606

### Tablas para junta de borde.

d/c=0,5

c/b	b/c	$\sigma_{ms}/\sigma_m$	$\sigma_{mi}/\sigma_m$	$\sigma_t/\sigma_m$
0,500	2	1,499	3,055	0,2020
0,333	3	1,250	3,786	0,1840
0,250	4	1,251	3,941	0,1570
0,200	5	1,101	3,496	0,1220
0,167	6	1,072	3,276	0,0873
0,143	7	1,054	3,099	0,0689
0,125	8	1,041	3,254	0,0568
0,111	9	1,032	3,087	0,0500
0,100	10	1,026	2,911	0,0415

d/c=0,333

c/b	b/c	$\sigma_{ms}/\sigma_m$	$\sigma_{mi}/\sigma_m$	$\sigma_t/\sigma_m$
0,500	2	1,402	4,258	0,1930
0,333	3	1,201	3,994	0,1670
0,250	4	1,120	3,649	0,1250
0,200	5	1,078	3,801	0,0937
0,167	6	1,058	3,750	0,0729
0,143	7	1,042	3,430	0,0606
0,125	8	1,032	3,110	0,0487
0,111	9	1,0248	2,958	0,0395
0,100	10	1,0200	2,858	0,0327

d/c=0,250

c/b	b/c	$\sigma_{ms}/\sigma_m$	$\sigma_{mi}/\sigma_m$	$\sigma_t/\sigma_m$
0,500	2	1,357	4,527	0,193
0,333	3	1,177	3,942	0,157
0,250	4	1,106	3,782	0,114
0,200	5	1,069	3,151	0,0844
0,167	6	1,048	3,419	0,0629
0,143	7	1,036	3,225	0,0537
0,125	8	1,027	3,049	0,0426
0,111	9	1,021	2,903	0,0343
0,100	10	1,018	2,864	0,0282

d/c=0,200

c/b	b/c	$\sigma_{ms}/\sigma_m$	$\sigma_{mi}/\sigma_m$	$\sigma_t/\sigma_m$
-----	-----	------------------------	------------------------	---------------------

0,500	2	1,329	3,660	0,1926
0,333	3	1,163	4,0385	0,1500
0,250	4	1,097	3,704	0,1070
0,200	5	1,065	3,616	0,0792
0,167	6	1,044	3,316	0,0582
0,143	7	1,033	3,223	0,0495
0,125	8	1,024	2,746	0,0389
0,111	9	1,019	3,086	0,0315
0,100	10	1,016	2,664	0,0256

d/c=0,143

c/b	b/c	$\sigma_{ms}/\sigma_m$	$\sigma_{mi}/\sigma_m$	$\sigma_t/\sigma_m$
0,500	2	1,299	4,985	0,1886
0,333	3	1,147	4,017	0,1409
0,250	4	1,087	3,757	0,0995
0,200	5	1,056	3,539	0,0709
0,167	6	1,039	3,312	0,0536
0,143	7	1,029	3,314	0,0453
0,125	8	1,022	3,256	0,0342
0,111	9	1,018	5,592	0,0291
0,100	10	1,015	5,304	0,0242

d/c=0,125

c/b	b/c	$\sigma_{ms}/\sigma_m$	$\sigma_{mi}/\sigma_m$	$\sigma_t/\sigma_m$
0,500	2	1,290	5,454	0,1870
0,333	3	1,143	4,193	0,1209
0,250	4	1,085	3,764	0,0971
0,200	5	1,054	3,714	0,0693
0,167	6	1,038	3,622	0,0511
0,143	7	1,028	3,623	0,0422
0,125	8	1,021	3,623	0,0322
0,111	9	1,018	5,387	0,0300
0,100	10	1,014	3,651	0,0228

d/c=0,111

c/b	b/c	$\sigma_{ms}/\sigma_m$	$\sigma_{mi}/\sigma_m$	$\sigma_t/\sigma_m$
0,500	2	1,283	4,859	0,1859
0,333	3	1,139	4,237	0,1360
0,250	4	1,082	3,735	0,0950
0,200	5	1,053	3,762	0,0677
0,167	6	1,037	3,732	0,0498
0,143	7	1,027	3,518	0,0480
0,125	8	1,020	3,672	0,0319
0,111	9	1,017	4,078	0,0269
0,100	10	1,014	4,805	0,0220

d/c=0,100

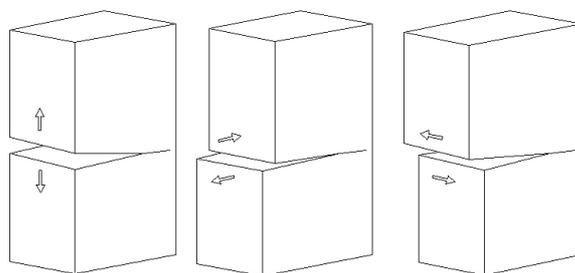
c/b	b/c	$\sigma_{ms}/\sigma_m$	$\sigma_{mi}/\sigma_m$	$\sigma_t/\sigma_m$
0,500	2	1,279	5,062	0,1855
0,333	3	1,136	4,261	0,1341

0,250	4	1,081	4,086	0,0912
0,200	5	1,053	4,003	0,0667
0,167	6	1,038	3,828	0,0514
0,143	7	1,028	4,165	0,0405
0,125	8	1,021	3,593	0,0314
0,111	9	1,017	4,694	0,0258
0,100	10	1,014	6,282	0,0220

### Valoración de los resultados: Junta central.

Los resultados obtenidos confirman varios extremos ya apuntados.

Podemos comparar los dos modelos presentados con dos modelos clásicos de la Mecánica de Fractura Elástica Lineal: en dicha teoría, es usual analizar tres modos de carga que provocan la extensión de fracturas: el modo I, de apertura —por tracción normal a la fractura—, el modo II, de deslizamiento, por cortadura paralela a la fractura, que provoca el deslizamiento del plano de la fractura en la dirección de avance de ésta y el modo III, por cortadura paralela a la dirección del frente de la fisura, que provoca el deslizamiento de los dos labios de la fractura normalmente a la dirección de avance de ésta.



**Fig. 2.3** Modos de fractura en mecánica de fractura, I, II y III

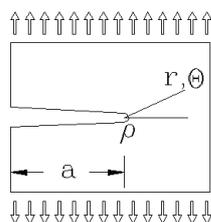
De dichos modos, puede considerarse el modo I como una situación análoga a la estudiada aquí, con signo contrario en los esfuerzos: en mecánica de fractura la fisura se abre, mientras que aquí las compresiones tienden a cerrar la junta. Sin embargo todo el análisis del campo de tensiones en la región correspondiente a la singularidad desarrollado por dicha teoría tiene aplicación inmediata aquí, por analogía, salvando la circunstancia de la disminución de la dimensión de la fisura por razón del contacto entre superficies, en caso de que el acercamiento entre éstas llega a producirlo.

En este modo de carga pueden considerarse los dos casos clásicos de fisura que se analizan en dicha teoría: La fisura central —en analogía con nuestra junta *central*, con la que comparte el defecto transversal a las tensiones que acompaña a los extremos del sillar— y la fisura de borde —análoga a nuestra junta *de borde*—, con lo que el paralelismo es patente.

El análisis del primer caso revela, en mecánica de fractura, un estado de tensiones en torno a la fractura que puede describirse a partir de las tensiones alejadas de la fisura, designadas por  $\sigma_\infty$ , en función de la geometría de la rotura. Por ejemplo, las expresiones correspondientes al caso en que el radio del frente de la fisura  $\rho$  es finito, y en que las tensiones alejadas se producen sólo en la dirección  $y$ ,—**Fig. 4**— son las siguientes:

$$(1) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left( \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \left( \frac{\rho}{2r} \right) \cos \frac{3\theta}{2} \right) - \sigma_\infty \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left( \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \left( \frac{\rho}{2r} \right) \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left( \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} - \left( \frac{\rho}{2r} \right) \sin \frac{3\theta}{2} \right). \end{aligned}$$

expresiones en coordenadas polares  $r, \theta$  con origen en el centro de curvatura del seno cóncavo de la fisura, en la que el diámetro de círculo en la dirección del avance es  $\rho$  y en las que se mide el arco desde la línea que prolonga la dirección de la fisura. En dicha expresión  $K_I$  representa el factor de intensidad de tensión, que vale  $K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi a C}$ , siendo  $a$  la semilongitud de la fisura, y  $C$  un coeficiente que depende de la geometría de la fisura en el espécimen, de anchura  $W$ , con un valor de, por ejemplo  $C = \sqrt{\sec \frac{\pi a}{W}}$  en la fisura central, o  $C = 1,12$  en pequeñas fisuras de borde. Es precisamente dicho factor de intensidad  $K_I$  el que determina la posibilidad de progreso o no de la fisura, y por lo tanto una magnitud a determinar experimentalmente para los diversos materiales.



**Fig. 2.4** Media fisura con diámetro finito en la concavidad de avance

Dichas expresiones muestran la existencia en nuestro problema de tensiones de tracción en la fábrica —de compresión para el caso de tracciones en  $\sigma_\infty$  usual de dicha teoría— paralelas a la fisura, que son de un orden de magnitud equivalente al de las tensiones de compresión medias de las regiones lejanas a la fisura —que corresponde a la ranura horizontal de nuestra junta—, en clara concordancia con los resultados obtenidos en el análisis realizado: la  $\sigma_\infty$  de la mecánica de fractura corresponde al valor  $\sigma_m$  del análisis precedente.

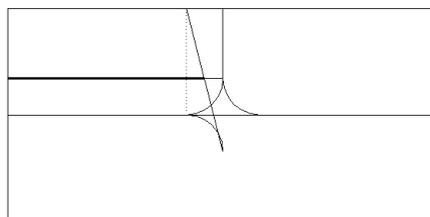
Desde la perspectiva de la alteración del campo de tensiones de compresión para  $b/a=0,5$  resultan las tensiones máximas verticales como si la fisura supusiese una reducción en la sección portante equivalente a una fracción de la fisura de vez y media la magnitud de lo que la fisura supone respecto a la altura del sillar, es decir, para fisuras de 0,2 alturas (de 0,1 anchura) la disminución en capacidad portante es de  $1,5 \times 0,2 \times 0,1 = 0,03$ , que supone tensiones de  $1/(1-0,03)=1,031$  veces las tensiones medias.

Para  $b/a=0,33$  dicha fracción es aproximadamente 1,3 veces la de la fisura a la altura del sillar, y para 0,25 aproximadamente 1,2.

En la figura siguiente puede observarse una construcción geométrica que obtiene una aproximación razonable a la aparente disminución en la sección de la fábrica.

La relativa estabilidad del valor máximo en compresión junto a la discontinuidad que puede leerse en las tablas, cerca del valor de tres veces la tensión media debe explicarse más bien la relativa regularidad geométrica en el trazado de la malla de elementos finitos, que por una razón de estabilidad en dicha tensión, ya que que, como demuestran las fórmulas de la Mecánica de Fractura, éstas deben tender a infinito en las proximidades del vértice de la junta.

En los gráficos pueden observarse las regiones sometidas a alteraciones en los campos de tensiones medias, pudiendo detectarse la formación de un cierto arco de descarga que



**Fig. 2.5.** Disminución aparente de área por la junta

es quien provoca las tracciones en el sillar situado en prolongación de la junta vertical. El inicio de la fractura de dicho sillar puede producirse en cualquier punto del vano, en función de las irregularidades del material, al tratarse de tensiones muy próximas, y en el caso de que la tensión media de compresión supere la tensión de rotura en tracción de la piedra, puesto que la tensión de tracción es de dicho orden de magnitud.

Para analizar el progreso de dicha fisuración, se ha realizado un análisis no-lineal mediante un modelo análogo geoméricamente a los citados, y mediante un programa y modelo material desarrollado hace unos años por D. José María Sancho Aznal<sup>9</sup> orientado al análisis del proceso de rotura del hormigón, pero con posibilidades de aplicación a otros componentes frágiles, sin resistencia a tracción. Careciendo de datos fiables de resistencias en tracción del granito empleado, así como de diagramas tensión deformación fiables, y de ensayos biaxiales que permitan caracterizar las fracturas por estados planos de tensión diversos, etc. se han empleado con leves correcciones las apariencias de las gráficas del hormigón armado, para los valores conocidos del granito, pudiendo seguirse la aparición de tres líneas básicas de fisuras. Los resultados apuntados son sólo orientativos sobre la evolución de la geometría de la fisura, y figuran en un apartado posterior.

### **Valoración de resultados: Junta de borde.**

No repetimos aquí la discusión ya realizada sobre el problema de la singularidad en el fondo de la fisura, para el que serían de aplicación las herramientas ya señaladas.

Sí hacemos notar que en este modelo las alteraciones no singulares a las tensiones medias son de menor importancia: las tensiones de tracción que aparecen, destinadas a reorientar el campo de tensiones normales verticales por la desaparición del material de la junta, son de mucha menor intensidad que las del modelo anterior, siendo las mayores de un orden de magnitud de un quinto a un tercio de las tensiones medias de compresión consideradas. Se sitúan en un plano que nace en el fondo de la junta y se aleja de ella casi en vertical, penetrando hacia el interior con una inclinación algo mayor a los 15°.

Tales tensiones sólo pueden ser conflictivas si se acompañan por otros fenómenos tensionales o de degradación.

Ahora bien, en este caso, es decir, si las causas de degradación de la piedra son tales que hacen disminuir su resistencia en tracción de forma apreciable, el resultado aparente del tipo de esfuerzos que se generan según este modelo será la creación de un plano de fractura interno a la masa de la piedra, y relativamente paralelo a su plano exterior, que

<sup>9</sup>Modelo no lineal de comportamiento del hormigón armado, 1983

se inicia a una profundidad de un orden de magnitud similar a la del defecto, y que al extenderse da origen a la desescamación superficial de la piedra considerada.

Es evidente que este fenómeno no puede darse aislado, por lo que se ve acompañado por otras causas que van a acentuar el fenómeno de desescamación una vez iniciado: heladicidad derivada de la acumulación de agua en el interior de las fisuras iniciadas, ciclos de tensión originados por las variaciones térmicas a lo largo del día, etc.

### **Sobre la aparición sistemática de fisuras en prolongación de las juntas paralelas a las compresiones.**

Como ya se ha avanzado, como continuación de los análisis locales en las regiones de las juntas se ha realizado un estudio no lineal sobre la fisuración de éstas. La falta de datos concretos sobre el comportamiento de la piedra suponen una limitación de los resultados obtenidos: mientras en un análisis lineal las soluciones son proporcionales a las características del material, lo que permite no tener que repetir el proceso si se modifican aquéllas, no ocurre de igual modo con un análisis no lineal, que únicamente tendrá valor en la medida en que se ajuste el modelo adoptado a los datos disponibles. En todo caso es esta indeterminación la que justifica el tipo de análisis realizado.

Para modelar el comportamiento biaxial de la piedra se ha utilizado un modelo de material que representa el comportamiento biaxial del hormigón, en el que el comportamiento biaxial queda determinado en forma directa por un único diagrama uniaxial, que es el que debe ajustarse a los datos conocidos de la piedra. Este diagrama es lineal en la zona traccionada, quedando definido por el módulo de elasticidad inicial y el valor de la tracción para el que se produce la fisuración, y parabólico en la comprimida, quedando esta rama definida por el módulo de elasticidad inicial, y por el valor de rotura en la tensión de compresión del hormigón, que se estima que se alcanza en la deformación del 0,002. Se obtendría un diagrama lineal si se define la tensión de rotura por compresión como el producto del módulo de elasticidad inicial por la deformación del 2 por mil.

Con los datos disponibles de la piedra se adoptó un módulo de elasticidad inicial de  $50.000 \text{ kp/cm}^2$ , valor con el que se realizó el análisis lineal precedente, y un valor máximo para la tensión de compresión ligeramente inferior a la que correspondería un diagrama lineal ( $100 \text{ kp/cm}^2$ ), de  $80 \text{ kp/cm}^2$ . En cuanto al valor máximo de la tensión de tracción, el cálculo se ha realizado con dos valores: 10 y  $15 \text{ kp/cm}^2$ .

En la medida en que las tensiones que producen la rotura por tracción son pequeñas, y que, en las situaciones estudiadas, las tensiones de compresión son también suficientemente pequeñas como para que no tenga apenas influencia la curvatura del diagrama uniaxial, ni deba considerarse la rotura por compresión de la piedra en el punto de deformación correspondiente al 0.002, suposiciones que, sin más datos habrían de reputarse de arbitrarias para la piedra, el modelo adoptado será razonablemente acertado, y al menos válido en el establecimiento de la configuración geométrica del proceso de fisuración.

El estudio se refiere a la junta central, unión en la que se producen tracciones de suficiente entidad como para justificar la aparición de fisuras. De entre los modelos analizados linealmente se eligió el de proporción entre canto y ancho de sillares  $2/3$  para tres valores del radio distintos, los correspondientes a las proporciones 0,5, 0,25 y 0,125 entre canto de sillar y radio de la junta. Modelo en el que se producen las máximas tracciones, y que es suficientemente representativo.

Un problema adicional, fruto de la no linealidad, es la necesidad de acotar las dimensiones de los elementos a estudiar. Acotados los valores de tensión que producen la rotura de la piedra, no puede trabajarse con tensiones proporcionales. Se adoptó un valor de medio canto del sillar de 40 cm.

Con estos valores se modelaron dos cuartos de sillar, haciendo las mismas hipótesis de simetría que en el análisis lineal. El análisis se realizó imponiendo desplazamientos uniformes en la dirección vertical del modelo, repitiéndose el proceso de análisis de forma incremental, para valores crecientes de deformación, con objeto de estudiar la aparición de las fisuras y su propagación. Los resultados se encuentran reflejados en las siguientes tablas.

**Tensión máxima de tracción de 10 kp/cm<sup>2</sup>**

	r=2,5 cm	r=5,0 cm	r=10 cm
	deformación tensión, kp/cm <sup>2</sup>	deformación tensión	deformación tensión
sin fisuración	-0,008 -10,0	-0,008 -10,0	-0,010 -12,5
inicio fisuración centro	-0,009 -11,3	-0,009 -11,3	-0,011 -13,8
fisuración en bordes	-0,019 -23,8	-0,022 -27,5	-0,022 -27,5
fisuración completa	-0,030 -37,5	-0,029 -36,3	-0,027 -33,8

**Tensión máxima de tracción de 15 kp/cm<sup>2</sup>**

	r=2,5 cm	r=5,0 cm	r=10 cm
	deformación tensión, kp/cm <sup>2</sup>	deformación tensión	deformación tensión
sin fisuración	-0,013 -16,25	-0,013 -16,25	-0,016 -20,0
inicio fisuración centro	-0,014 -17,5	-0,014 -17,5	-0,017 -21,3
fisuración en bordes	-0,028 -35,0	-0,025 -31,25	-0,028 -35,0
fisuración completa			

En la primera columna de la primera tabla, correspondiente a un caso suficientemente representativo, se aprecia que la aparición de las primeras fisuras en el centro de la junta se producen al alcanzarse una compresión aproximadamente igual a la tracción máxima que se ha supuesto en la piedra, lo que está en total acuerdo con los valores obtenidos en el análisis lineal. Esta fisura sigue aumentando hasta alcanzar la compresión media un valor doble que el anterior, momento en que se inicia una nueva fisura en los bordes de la junta, que será la que finalmente progresa, terminando por atravesar el sillar para valores de tensiones de compresión tres veces mayor que las que iniciaban el proceso.

Para radios distintos de la junta se observan pequeñas variaciones de los anteriores valores, en todo caso insignificantes dada la gran indeterminación en el planteamiento del problema. para finalizar debe hacerse notar que no se han representado los últimos valores de la segunda tabla. En este caso para conseguir la fisuración completa del sillar se precisaban tensiones de compresión suficientemente altas como para que se iniciara la rotura por aplastamiento de la piedra en los puntos donde aquélla alcanzaba los máximos, lo que hace inadecuado el modelo.

### **Conclusiones.**

Tras el análisis realizado queda claramente descrita la causa de uno de los tipos de fisuración más frecuentes de los detectados en este monumento —y que puede observarse igualmente en otros en los que ha desaparecido el mortero entre sillares—, así como queda detectada una de las causas que colaboran en la desescamación superficial de la piedra:

- (1) La degradación de las juntas paralelas a las compresiones provoca, por su mera existencia, no sólo la reducción aparente de la sección de la fábrica en una fracción de la dimensión de la zona degradada, sino, lo que es más importante, provoca la aparición de tracciones en el sillar que cierra la junta en el aparejo de la fábrica, tracciones que son de un orden de magnitud equivalente a las tensiones medias de compresión de dicha fábrica, causando la fisuración en prolongación —no simétrica— de dicha junta.
- (2) La degradación de las juntas transversales a las compresiones, que se produce en superficie de la fábrica sólo causa la reducción aparente de la sección de ésta —en una pequeña fracción de la dimensión de la junta— produciendo planos de tracción internos a la masa de la piedra que, en caso de darse fenómenos coadyuvantes —reducción de resistencias, hielo, . . . —, y sólo en tal caso, pueden explicar el proceso de desescamación de la superficie de la piedra.

### **Gráficas.**

A continuación se adjuntan gráficas correspondientes a los resultados del análisis.

Los valores numéricos de las tensiones están referidos a la tensión media de compresión, que tendría de este modo valor 1.

Se incluyen, para cada uno de los dos tipos de junta, y para tres relaciones de dimensión en la degradación de la junta resultados de

- (1) modelo, direcciones principales u desplazamientos verticales UX.
- (2) tensiones, correspondiendo los rótulos SX a las normales horizontales, SY a las normales verticales, SXY a las y tangenciales. E igualmente siendo las tensiones principales máximas de tracción SIG1, de compresión SIG3, y la máxima tensión tangencial SI.

Se incluyen asimismo resultados gráficos del proceso no lineal de fisuración descrito más arriba, para las tres relaciones geométricas empleadas en la junta central.

## ACUEDUCTO DE SEGOVIA

## CAPÍTULO III COMPORTAMIENTO TERMICO INTERESTACIONAL

**Introducción.**

El objeto de este análisis es modelar teóricamente el tipo de comportamiento mecánico (movimientos y esfuerzos) que puede preverse en el Acueducto como resultado de los cambios de temperatura entre estaciones.

Este escrito trata de analizar y de acotar el fenómeno en su conjunto.

El enfoque adoptado supone considerar aisladamente cada uno de los fenómenos que pueden presentarse, analizar sus efectos por separado, y mediante éstos, y sus combinaciones —o su análisis combinado cuando el problema es no lineal—, predecir las cotas máximas de movimiento y tensión que cabe prever para cada hipótesis. Para facilitar la comprensión del problema, se plantea, pues, un enfoque de aproximaciones sucesivas.

Se preve en todas las hipótesis que siguen que:

- El material es continuo, isótropo, homogéneo, y de comportamiento lineal en las relaciones tensión-deformación.

Dicha hipótesis no se cumple en la medida en que la separación entre sillares en determinadas juntas —una fracción importante— puede permitir en general movimientos sin modificación apreciable en los esfuerzos generales. De este modo, los valores de esfuerzo que se obtienen en los análisis que siguen en este escrito corresponden realmente a cotas superiores que en la realidad del monumento no pueden alcanzarse en ningún caso.

Se supone inicialmente en las hipótesis siguientes, y salvo declaración explícita en contrario que

- La geometría original del monumento es la teóricamente perfecta: cada tramo es perfectamente plano en su directriz, y no presenta imperfección alguna.

La hipótesis tampoco es cierta en la medida en que están fotografiadas faltas de alineación significativas, y son conocidas las múltiples imperfecciones o diferencias de unos tramos a otros, bien por diferencias de despiece, bien por diferencias de estado en los sillares, etc. Sin embargo es bien sabido que la descripción del comportamiento no lineal de una estructura en función de la existencia de pequeñas imperfecciones puede describirse a partir del de la pieza geoméricamente exacta.

En lo que sigue consideraremos sucesivamente las siguientes hipótesis:

- (1) Comportamiento sin deformación longitudinal ni transversal.
- (2) Desplazamiento transversal general del monumento, sin movimiento de extremos. No se considera la rigidez de las pilas.
- (3) Desplazamiento transversal formando una senoide de corta longitud de onda, considerando la rigidez de las pilas.
- (4) Movimientos con semionda de longitud igual a la distancia entre ejes de pilas.
- (5) Movimientos verticales en los vanos, derivados de la flexión en el plano de monumento.
- (6) Movimientos horizontales, como amplificación de imperfecciones en la alineación del monumento.

**Hipótesis 1: Dilatación impedida: comportamiento sin deformación longitudinal ni transversal.**

Si se supone la solidez y rigidez del monumento muy elevada, la dilatación que produciría un incremento de temperatura, se compensaría por un acortamiento equivalente, resultado de un incremento en las fuerzas de compresión entre sillares.

Resulta entonces que la deformación térmica  $\varepsilon_t$  derivada de un incremento de temperatura  $T$  implica, en un material de coeficiente de dilatación térmica  $\alpha$ , unas tensiones  $\sigma$ :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_t + \alpha T &= 0 \\
 \varepsilon_t &= -\alpha T \\
 \sigma &= \varepsilon_t E \\
 \sigma &= -E\alpha T
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

donde los signos negativos en deformaciones unitarias y tensiones expresan, como es usual, compresiones.

Para una diferencia de temperaturas máxima entre estaciones —correspondientes a los valores medios diarios— de 40° C, para un coeficiente de dilatación térmica de  $0,5 \cdot 10^{-5}$  y para un módulo de elasticidad de 50.000 kp/cm<sup>2</sup> resulta de dicha expresión un incremento de tensiones máximo de 10 kp/cm<sup>2</sup>, y un movimiento nulo, siendo la dilatación térmica anulada por dichas tensiones de un valor igual al 0,2 por mil.

De hecho si observamos la evolución en las temperaturas medias de máxima y mínima de Segovia en los períodos de Septiembre a Agosto de los años 87–88 y 89–90 resulta la tabla siguiente<sup>10</sup>:

Mes; media:	Mínima 87–88	Mínima 89–90	Máxima 87–88	Máxima 89–90
Septiembre	14,9	10,6	27,4	23,1
Octubre	7,6	8,9	15,7	20,7
Noviembre	3,8	6,7	11,6	12,9
Diciembre	2,5	5,8	10,5	11,4
Enero	2,8	-0,1	8,8	7,7
Febrero	0,8	4,6	9,4	13,9
Marzo	1,8	3,4	13,4	14,8
Abril	5,2	2,9	13,6	12,3
Mayo	8,5	8,7	17,7	21,0
Junio	-	12,7	-	26,6
Julio	-	15,3	-	21,1
Agosto	-	15,9	-	30,1

En la tabla, la máxima diferencia de temperaturas sólo alcanza los 30°C, pero si consideramos además que, dada la elevada inercia térmica de la piedra, lo correcto es utilizar las medias diarias correspondientes a un cierto período, resulta que la máxima diferencia queda en 20°C. De este modo los 40°C corresponden a un valor inalcanzable en la diferencia de temperaturas relevante, y, a falta de un análisis estadístico más preciso,

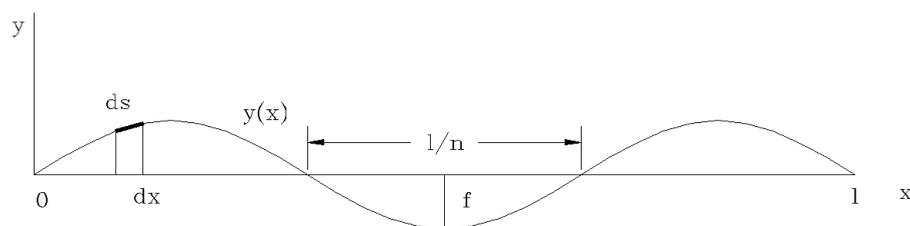
<sup>10</sup> Anuario el País

un valor característico de dicha diferencia podría ser 25°C. Para este último valor, la deformación unitaria resultante será de sólo el 0,125 por mil, y las tensiones resultantes de 6,25 kp/cm<sup>2</sup>.

En lo que sigue haremos referencia a ambos intervalos de temperatura.

**Hipótesis 2: Dilatación sin coacción transversal. Desplazamiento transversal general del monumento, sin movimiento de extremos. No se considera la rigidez de las pilas.**

Vamos en primer lugar a suponer la rigidez lateral del monumento nula, y los extremos fijos, —la hipótesis es ciertamente incorrecta, pero sus resultados, aun siendo irreales, pueden emplearse como se ha dicho en la introducción como referencia para la comparación con los obtenidos por otros análisis— La dilatación se produce con un efecto simultáneo de pandeo lateral del monumento, —una semionda de senoide—, de modo que la diferencia entre las longitudes del arco y de la secante corresponde al incremento de longitudes derivado del incremento de temperatura considerado.



**Fig. 3.1** Deformada por dilatación con coacción en extremos

La longitud de una curva  $y(x)$  próxima a una recta  $y = 0$  entre extremos 0 y  $l$  puede obtenerse, en primer orden de aproximación<sup>11</sup> por

$$s = l + \int_0^l \frac{1}{2} y'^2 dx.$$

y suponiendo la curva formada por ondas de senoide, con  $n$  semiondas de amplitud máxima  $f$  en el tramo considerado

$$y = f \sin \frac{\pi n x}{l}$$

puede obtenerse la relación entre la mayor longitud de cada tramo oblicuo  $ds$  y su proyección  $dx$ , es decir  $(ds - dx)/dx$ , magnitud a la que podemos con alguna licencia llamar alargamiento, pues suponemos que la curva es recta inicialmente y se alarga

<sup>11</sup>

$$s = \int_0^l \sqrt{1 + y'^2} dx \approx \int_0^l \left( 1 + \frac{y'^2}{2} - \frac{y'^4}{8} + \dots \right) dx$$

si se desarrolla la raíz cuadrada en serie de Taylor, para  $y'$  muy próxima a cero.

hasta su forma sinusoidal final. Tenemos entonces que este *alargamiento* promediado a lo largo de la viga vale lo que el alargamiento producido en la dilatación térmica, y es :

$$\begin{aligned}\varepsilon_m &= \frac{s-l}{l} \\ \varepsilon_m &= \frac{1}{l} \int_0^l \frac{1}{2} f^2 \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \cos^2 \frac{\pi n x}{l} dx \\ \varepsilon_m &= \frac{1}{2l} f^2 \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \frac{l}{n\pi} \int_0^{n\pi} \cos^2 \frac{\pi n x}{l} d\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \\ \varepsilon_m &= \frac{1}{2} f^2 \frac{\pi n}{l^2} \left[ \frac{\cos \frac{\pi n x}{l} \sin \frac{\pi n x}{l} + \frac{\pi n x}{l}}{2} \right]_0^l \\ \varepsilon_m &= \frac{\pi^2 n^2}{(2l/f)^2}\end{aligned}$$

Nótese que la deformación unitaria a que equivale la mayor longitud de la curva está asociada tanto a la relación  $l/f$  entre la longitud de la pieza y la flecha lateral máxima, como al número de semiondas considerado  $n$  pudiendo expresarse en la forma

$$(2) \quad \varepsilon_m = \left( \frac{\pi f}{2 l/n} \right)^2 = \varepsilon_1$$

y por lo tanto la relación pertinente es la de dicha flecha lateral a la longitud entre puntos de inflexión de la deformada<sup>12</sup>.

La hipótesis considerada más arriba —es decir, la aparición de un desplazamiento transversal general— exige emplear  $n = 1$ . La deformación media puede obtenerse de (2), y para alcanzar el 0,2 por mil, es decir, para admitir la dilatación térmica de 40° C sin movimiento en los extremos fijos mediante una semionda, basta sustituir  $l$  por la longitud del tramo —307,8 m.— y despejar  $f$ .

Dicha deformación media exige una relación  $\frac{l/n}{f} = \frac{\pi}{2\sqrt{\varepsilon_m}} = 111,072$ .

Resulta entonces que, para el tramo que cruza la Plaza del Azoguejo, la deformación que correspondería a esta hipótesis exigiría un desplazamiento lateral máximo de 277,1 cm. para idénticas hipótesis sobre diferencia de temperaturas y coeficiente de dilatación del granito que la primera de las consideradas en la Hipótesis 1. La carga ejercida sobre los apoyos en esta hipótesis sería nula.

El mismo 0,2 por mil se obtiene con ondas cuyo punto de inflexión se situase sobre cada una de las pilas, resultando entonces necesarios desplazamientos laterales de 5,4 cm para la separación de 6 m. entre ejes de pilas.

<sup>12</sup>Podemos obtener dicha *deformación unitaria* con mayor precisión si empleamos más términos en el desarrollo en serie; si consideramos el término  $-y'^4/8$ , obtenemos el término adicional  $-3\varepsilon_1^2/4$  con lo que

$$(2') \quad \varepsilon_m = \varepsilon_1 - \frac{3}{4}\varepsilon_1^2 + \dots$$

Si consideramos el valor característico de 25°C en la diferencia entre las temperaturas medias, la relación de semionda a flecha necesaria pasa a ser 140,5

Puede refinarse adicionalmente esta hipótesis 2 considerando que la carga sobre los apoyos no puede ser nula. Esto implica, en primera aproximación, determinar la deformación crítica de pandeo del monumento, supuesto que el pandeo se produce por la compresión axial —longitudinal— que se desprende del aumento de temperatura, y analizando este fenómeno en función de la rigidez en flexión y cualesquiera otras que se opongan a los movimientos laterales. A partir de la deformación crítica obtenida debe calcularse la tensión media crítica de pandeo. El empuje en tal caso será el que se derive de dicha tensión, y la deformación definitiva del monumento sería la correspondiente a un (o múltiples, en el caso de  $n > 1$ ) tramo(s) de arco alargado(s) por el incremento de temperatura, y acortado(s) por el efecto de la tensión media citada.

Consideraremos nuevamente, para mantener el hilo de la discusión, que no hay rigidez lateral en las pilas.

La deformación crítica de Euler —que se obtiene con facilidad a partir de la expresión de la carga crítica— es

$$\varepsilon_k = \frac{\pi^2}{\lambda^2},$$

siendo  $\lambda$  la esbeltez mecánica de la pieza considerada. Puesto que las secciones por vano son todas rectangulares, dicha esbeltez  $l/i$  vale  $l/0,28867a$  siendo  $i$  el radio de giro, y  $a$  la anchura de la sección considerada. Para la longitud total de 307,8 m resulta  $\lambda = 609,30$ , empleando 1,75 como anchura de la coronación.

Esto implica que la deformación crítica en la hipótesis citada vale 0,0266 por mil, para la que la tensión media en las secciones —la tensión crítica— alcanza el valor de 1,33 kp/cm<sup>2</sup>.

Como dicho valor es menor que el que origina la dilatación térmica con coacción en los extremos, resultará que, en la hipótesis de no considerar la rigidez lateral de las pilas, el monumento se estabilizaría en una deformación final correspondiente a un alargamiento  $\varepsilon_e$  resultado del térmico menos el crítico, para tensiones medias correspondientes al acortamiento crítico obtenido, es decir, se estabilizaría en un alargamiento de  $0,2 - 0,0266 = 0,173$  por mil, y por lo tanto con una relación semionda–flecha ( $\frac{l/n}{f}$ ) de 119,29, si empleamos nuevamente la expresión (2) y 40°C, o, alternativamente  $0,125 - 0,0266 = 0,0984$  por mil, con una relación de 158,3 si consideramos el intervalo de 25°C.

Si no se considera, pues, la rigidez lateral de las pilas, esta hipótesis conduciría, finalmente, a una tensión media (igual a la tensión crítica) de 1,33 kp/cm<sup>2</sup> y un desplazamiento lateral de 258,0 cm para una diferencia de temperaturas de 40°, o de 194,3 cm para la más probable de 25°.

### **Hipótesis 3: Dilatación con coacción transversal. Desplazamiento transversal formando una senoide de corta longitud de onda, y considerando la rigidez de las pilas.**

En la expresión (2) hemos podido ver cómo incrementar el número de ondas puede permitir alcanzar la misma longitud final para una curva ondulada, con menor desplazamiento lateral máximo en cada onda.

Se trata de una deformación en la que la longitud de onda es pequeña en relación a la longitud del tramo considerado. El fenómeno crítico correspondiente es análogo al del pandeo de piezas en lecho elástico, con menor longitud de onda cuanto mayor es la rigidez del lecho. De hecho dicha hipótesis se aproxima más a la situación del monumento que la precedente, puesto que ahora consideramos la rigidez en flexión lateral de las pilas. Si suponemos que dicha rigidez está uniformemente distribuída —a lo largo de la longitud del monumento— el problema es exactamente el citado.

Aunque la última suposición citada no es completamente correcta, puesto que la rigidez se produce de forma discontinua a lo largo de la directriz del acueducto, es mucho más próxima a la realidad que la anterior, y su aproximación será razonable si las semiondas implican el conjunto de un cierto grupo de pilas. De este modo nos acercamos apreciablemente al fenómeno que analizamos.

Se suponen los extremos fijos. La hipótesis exige considerar la rigidez lateral de las pilas que soportan los tramos en arco. En esta aproximación se supondrá que dicha rigidez está distribuída en toda la longitud del plano del monumento considerado.

La ecuación que define la carga crítica de pandeo de una pieza sobre lecho elástico es<sup>13</sup>:

$$P_k = \frac{EI\pi^2 n^2}{l^2} + \frac{Cl^2}{\pi^2 n^2}$$

con el mismo significado para las variables ya conocidas —es decir  $EI$  corresponde a la rigidez en flexión lateral de un tramo unidad de los considerados— y siendo  $C$  la constante elástica del lecho —en unidades de fuerza por unidad de longitud, por unidad de desplazamiento—.

Empleando como antes el valor geométrico  $\varepsilon_k$  tenemos:

$$(3) \quad \varepsilon_k = \frac{\pi^2 n^2}{\lambda^2} + \frac{1}{\pi^2 n^2} \frac{C l^2}{E A}$$

que tiene un mínimo para el valor de  $n$

$$n \approx \sqrt[4]{\frac{Cl^4}{EI\pi^4}} = \sqrt[4]{\frac{C l^2 \lambda^2}{E A \pi^4}}$$

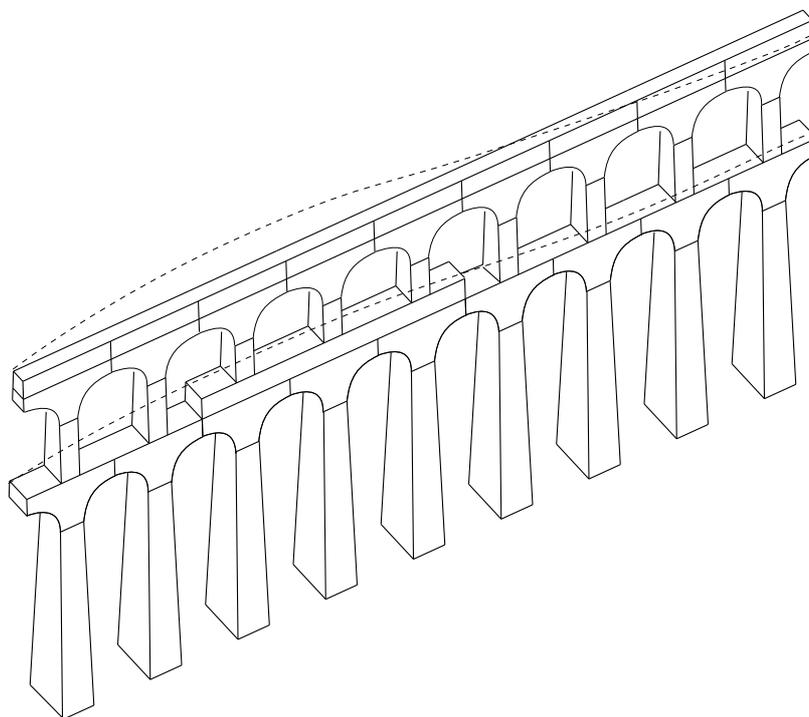
Debe hacerse notar que empleamos sistemáticamente valores relativos —adimensionales— por su mayor facilidad de control. Para poder obtener un valor aproximado del número de semiondas hay que aventurar una relación entre  $C$  y  $E$ . Véase para ello el anejo 2 de este apartado, en el que resulta la relación

$$\frac{C}{E} = 1,1939 \cdot 10^{-4}.$$

Para dicho valor, y siendo  $\lambda = 609,3$ , y  $l^2/A = 0,2 - 307,8^2/(1,75 * 1,60) = 33836,01$ , resulta

$$n \approx 11,139$$

<sup>13</sup>Ver análisis detallado, y la deducción de la fórmula, más adelante



**Fig. 3.2** Geometría deformada en conoide: seguiría la onda sinusoidal dibujada en coronación. No puede producirse como consecuencia de la dilatación dada la gran rigidez lateral existente.

equivalente a una longitud de semionda de 27,60 m, que corresponde aproximadamente a tramos de 4,6 pilas<sup>14</sup>. Vale la pena resaltar que la distancia entre líneas de inflexión en la deformada del plano del acueducto es equivalente a su altura, y que la esbeltez lateral de los tramos resultantes en coronación es de  $27,6/1,75 = 15,77$ .

Para dicha configuración, el valor de la deformación crítica sería

$$\varepsilon_k = \frac{\pi^2 11,139^2}{\lambda^2} + \frac{1}{\pi^2 11,139^2} \frac{C l^2}{E A}$$

$$\varepsilon_k = 3,2987 \cdot 10^{-3} + 3,2987 \cdot 10^{-3} = 6,5974 \cdot 10^{-3}$$

deformación a la que correspondería una tensión crítica que alcanza el valor<sup>15</sup> de 329,87 kp/cm<sup>2</sup>. Dicho valor resulta ser casi 33 veces la que se deriva de la compresión por dilatación térmica con coacción absoluta, y con temperaturas más que extremas.

Es decir, no se produciría, en esta hipótesis, que considera la geometría inicial perfectamente recta, posibilidad alguna de pandeo lateral, ni por tanto movimiento transversal

<sup>14</sup>Valor de  $C/E$  obtenido manualmente. Para las dos filas de arcos se han obtenido análogamente los valores de tal relación mediante un modelo 3D de elementos finitos, resultando para las filas inferior y superior, respectivamente, los valores  $2,6 \cdot 10^{-4}$  y  $0,5 \cdot 10^{-4}$ , a los que corresponden valores de  $n$  iguales a 13,5 y 8,96 respectivamente

<sup>15</sup>o los valores de deformación de  $9,733 \cdot 10^{-3}$  y  $4,628 \cdot 10^{-3}$  respectivamente con los valores del modelo de elementos finitos.

alguno. El monumento mantendría, por lo tanto su forma, con los incrementos en las tensiones ya evaluados en 10 o 6,25 kp/cm<sup>2</sup>, según sea la diferencia de temperatura considerada.

Como puede comprobarse de este último análisis —como por otro lado resulta evidente de la simple observación del monumento— la rigidez de las pilas es determinante en su comportamiento, e impide que puedan producirse movimientos de segundo orden de desplazamiento transversal al plano del monumento de gran longitud de onda: no es posible, en función de los resultados de este análisis, un movimiento generalizado del monumento de menos de 6 ondas para el tramo que cruza la plaza del Azoguejo.

Ahora bien, en el otro extremo podemos ahora concebir la hipótesis de que se produzcan movimientos transversales sin flexión de las pilas, ya que éstas se oponen tan seriamente al mismo, y que, por lo tanto, se producirían con sólo torsión de las pilas, y con formación de los puntos de inflexión de la deformada en el eje mismo de las pilas.

**Hipótesis 4: Dilatación con coacción transversal infinita. Movimientos con semionda de longitud igual a la distancia entre ejes de pilas.**

Si no consideramos la rigidez en torsión de las pilas, el movimiento que analizamos a continuación corresponde al del pandeo de longitud igual a la que media entre dichos ejes. Cuando analizábamos la Hipótesis 1, obtuvimos que un alargamiento del 0,2 por mil podía relajarse mediante este movimiento con desplazamientos laterales de 5,4 cm. dado que la distancia entre ejes es de 6 m., y dado que la relación semionda–desplazamiento era de 111,072 para dicha deformación unitaria. Un alargamiento del 0,125 por mil requeriría sólo 4,27 cm.

Ahora bien, para que se produzca dicho movimiento, debería superarse por razón de la dilatación térmica la deformación unitaria de pandeo que corresponde a tal geometría.

Si evaluamos ésta mediante la conocida expresión  $\varepsilon_k = \pi^2/\lambda^2$  obtenemos que, como  $\lambda = 6/(0,28867 * 1,75) = 11,877$  la deformación crítica y la tensión crítica valen

$$(4) \quad \begin{aligned} \varepsilon_k &= -6,9964 \cdot 10^{-2} \\ \sigma_k &= -3.498,2 \text{ kp/cm}^2 \end{aligned}$$

es decir, se trata de unos valores unas 350 veces mayores que los provocados por la mayor dilatación térmica interestacional concebible, por lo que no puede producirse este tipo de movimiento.

**Hipótesis 5: Relajación de dilatación por flexión en su plano. Movimientos verticales en los vanos derivados de la flexión en el plano de monumento.**

Para dicho análisis se ha empleado el primer modelo de Elementos Finitos, describiendo una pila típica —la 105—, y analizando esfuerzos y deformaciones derivados de un incremento de temperatura dado. El resultado de dicho análisis puede traducirse al igual que en los casos anteriores a una tensión media en las secciones por el eje de los vanos, que supone diferencias sólo marginales respecto de las medias obtenidas con coacción completa a los movimientos.

En efecto, la rigidez de las secciones correspondientes a los vanos es, no considerando el efecto de las juntas, muy elevada, de modo que el ascenso en la clave del arco provocado por la excentricidad del empuje respecto de ésta no implica descensos relevantes en las

tensiones medias, aunque sí una distribución no uniforme de las compresiones derivadas de la dilatación, que provoca diferencias en el nivel tensional con relaciones de 4 a 1 según los puntos considerados. Estas diferencias sólo suponen la duplicación, en los puntos más solicitados, de las tensiones medias por dilatación obtenidas en apartados anteriores, o su disminución hasta un valor mitad en los puntos menos solicitados.

Estas diferencias locales no originan modificación alguna a los movimientos transversales de segundo orden de los que aquí tratamos, siendo además los movimientos verticales de muy pequeña magnitud: la diferencia entre el movimiento vertical de un punto situado en el centro de cualquier vano y el centro de la pila en la misma cota horizontal, obtenida en el análisis por EF citado es de sólo  $0,388 \cdot 10^{-3}$  cm. por cada grado centígrado.

Se adjuntan gráficas de las redistribuciones de tensiones obtenidas en el capítulo I.

### **Hipótesis 6: Dilatación acompañada de desplazamiento lateral. Movimiento por amplificación de imperfecciones iniciales.**

Para analizar los movimientos reales ha de tenerse en cuenta que las geometrías consideradas no son nunca perfectas, de modo que los comportamientos de segundo orden, como el que analizamos, están fuertemente influidos por las imperfecciones geométricas y mecánicas. Hemos visto que, en caso contrario, la dilatación del monumento se produciría sin activar movimientos laterales de ningún tipo. El análisis requiere considerar previamente el comportamiento crítico y poscrítico —o correspondiente a las primeras fases del movimiento por inestabilidad— de la pieza ideal, analizando seguidamente la influencia de cada imperfección en el mismo.

Vamos a analizar ahora, pues, con más rigor, el problema del comportamiento crítico y poscrítico de la hipótesis de movimiento transversal.

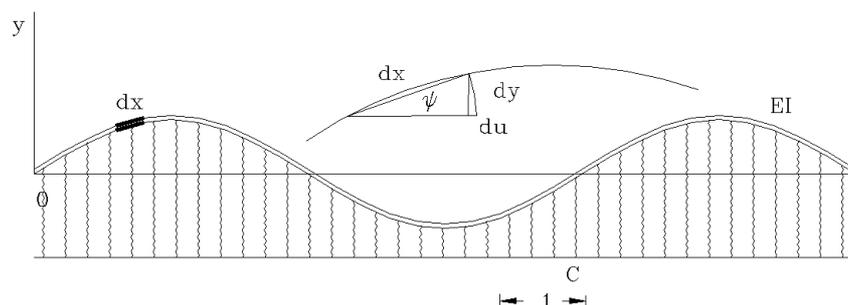
Puede caracterizarse el comportamiento crítico de una pieza o estructura con un grado de libertad por la gráfica  $P-\delta$  de la estructura considerada, gráfica que en el primer tramo, hasta la carga crítica es trivial:  $\delta = 0$ , pero que bifurca en el valor  $P = P_k$  correspondiente a la carga crítica. Debe seguirse la gráfica tras la bifurcación, y la primera aproximación vendrá dada por la primera derivada de esta gráfica. Si ésta es no nula, estaremos en un caso de pandeo asimétrico inestable, y la pendiente de la gráfica en  $(P_k, 0)$ <sup>16</sup> permite analizar con primer orden de aproximación el comportamiento pospandeo, del que depende el inducido por las imperfecciones. Se trata de un caso en el que aumenta la carga equilibrada según crece el desplazamiento si lo hace en uno de los sentidos posibles, mientras que dicha carga equilibrada disminuye si el desplazamiento crece en el sentido contrario. Las imperfecciones actuarán en el sentido de la inestabilidad, y la pendiente citada permite predecir su influencia.

Si dicha pendiente  $P-\delta$  es nula en el punto crítico, se trata de un caso de pandeo simétrico, del que sólo conoceremos su carácter estable o inestable conociendo la curvatura de la gráfica en dicho punto, es decir, sabremos si la carga puede tendencialmente crecer al crecer el desplazamiento, o si la carga equilibrada disminuye al crecer éste a partir de la citada curvatura: la influencia de la imperfecciones dependerá, pues de la curvatura de la gráfica  $P-\delta$  en el punto crítico.

Veamos las cuestiones planteadas por partes.

---

<sup>16</sup>que es una rigidez, pues relaciona carga con desplazamiento



**Fig. 3.3** Deformación de pandeo en *lecho elástico*

### Geometría de la deformación.

Considerando un elemento de longitud  $dx$  que rota en la deformación un ángulo  $\psi$ , de modo que su proyección pasa a valer  $dx - du$ , como  $(ds)^2 = (dx - du)^2 + (dy)^2$ , siendo  $u$  el desplazamiento de cada punto material paralelo a la recta original e  $y$  dicho desplazamiento transversal a tal recta, y como empleamos  $ds = dx$  resulta que

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \left(1 - \left(\frac{du}{dx}\right)\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$1 = (1 - u')^2 + y'^2$$

y por lo tanto

$$(5) \quad \frac{du}{dx} = u' = 1 - \sqrt{1 - y'^2}$$

—para cada tramo oblicuo la proyección de la longitud original mide su propio valor multiplicado por el factor  $\sqrt{1 - y'^2}$ . Como ya se ha explicado, consideramos  $dx$  medido sobre la longitud de la pieza deformada—

Continuando con la geometría, para poder considerar más adelante la energía de deformación alcanzada en un cierto movimiento necesitamos conocer la expresión de la curvatura de la pieza deformada, y, al igual que antes, medida sobre la propia longitud de la pieza deformada, no sobre su proyección. En geometría diferencial suele expresarse la curvatura de una curva  $y(x)$  dada como

$$\chi = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

pero dicha expresión toma como variable independiente la proyección de la curva, no su desarrollo. Utiliza por lo tanto el sistema de coordenadas espacial o euleriano.

Para obtener la expresión adecuada para el sistema de coordenadas material, o lagrangiano, — $dx$  se mide sobre la longitud de la barra deformada— usamos

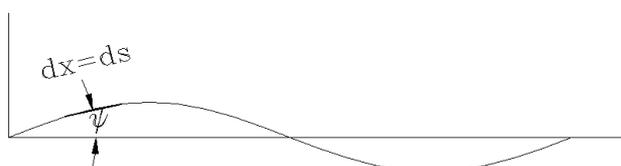
$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ds} = \sin \psi$$

siendo  $\psi$  la rotación de la directriz, o ángulo entre la recta original y la tangente tras la deformación. De este modo

$$\psi = \arcsin(y'),$$

y como la curvatura  $\chi$  es el ritmo de cambio en la inclinación  $\psi$  a lo largo de la longitud  $x$ , tenemos que

$$(6) \quad \chi = \frac{d\psi}{dx} = \psi' = \frac{y''}{(1 - y'^2)^{1/2}}.$$



**Fig. 3.4** Deformación por pandeo

Suponemos ahora que la deformada se describe mediante sumas de series de funciones sinusoidales:

$$y = \sum_i f_i \sin \frac{\pi n_i x}{l}$$

o, en notación de suma implícita

$$(7) \quad y = f_i \sin \frac{\pi n_i x}{l}$$

El desplazamiento de la carga en los extremos, o aproximación entre dichos extremos por pandeo de la pieza, y manteniendo la pieza su longitud original es, según (5)

$$\Delta = l - \int_0^l \sqrt{1 - y'^2} dx = l \left( 1 - \int_0^1 \sqrt{1 - y'^2} d\left(\frac{x}{l}\right) \right)$$

La *deformación unitaria* promedio que estamos midiendo, es decir el cociente entre  $\Delta$  y  $l$  vale:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{l} = \varepsilon_m &= 1 - \int_0^1 \sqrt{1 - y'^2} d\left(\frac{x}{l}\right) \\ &= \int_0^1 \left( \frac{y'^2}{2} + \frac{y'^4}{8} + \dots \right) d\left(\frac{x}{l}\right). \end{aligned}$$

Empleando la expresión elegida para  $y$ , considerando los dos primeros términos del desarrollo anterior, siendo  $y'^2 = \left( \frac{\pi n_i f_i}{l} \cos \frac{\pi n_i x}{l} \right) \left( \frac{\pi n_j f_j}{l} \cos \frac{\pi n_j x}{l} \right)$ , y de análoga forma

para la cuarta potencia, y teniendo en cuenta la ortogonalidad de las funciones  $\cos \frac{\pi n_i x}{l}$  y  $\cos \frac{\pi n_j x}{l}$  en el intervalo considerado, resulta:

$$\varepsilon_m = \int_0^1 \left( \frac{1}{2} \pi^2 n_i^2 \frac{f_i^2}{l^2} \cos^2 \frac{\pi n_i x}{l} + \frac{1}{8} \frac{\pi n_i f_i}{l} \frac{\pi n_j f_j}{l} \frac{\pi n_k f_k}{l} \frac{\pi n_l f_l}{l} \cos \frac{\pi n_i x}{l} \cos \frac{\pi n_j x}{l} \cos \frac{\pi n_k x}{l} \cos \frac{\pi n_l x}{l} \right) d\left(\frac{x}{l}\right)$$

Si en (7) empleamos una sola función sinusoidal, —interpretando por lo tanto dicha expresión sin sumación sobre la  $i$ — puede efectuarse de forma genérica la anterior integral, de modo que

$$\varepsilon_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi n_i} \left( \frac{1}{2 n_i} \frac{f_i^2}{l^2} \pi^2 n_i^2 \cos^2 \frac{\pi n_i x}{l} + \frac{1}{8 n_i} \frac{f_i^4}{l^4} \pi^4 n_i^4 \cos^4 \frac{\pi n_i x}{l} \right) d\left(\frac{\pi n_i x}{l}\right)$$

que, mediante un cambio de variable resulta

$$\begin{aligned} \varepsilon_m &= \frac{\pi n_i}{2} \frac{f_i^2}{l^2} \int_0^{\pi n_i} \cos^2 t \, dt + \frac{\pi^3 n_i^3}{8} \frac{f_i^4}{l^4} \int_0^{\pi n_i} \cos^4 t \, dt \\ (8) \quad \varepsilon_m &= \left( \frac{\pi f_i}{2l/n_i} \right)^2 + \frac{3}{4} \left( \frac{\pi f_i}{2l/n_i} \right)^4, \end{aligned}$$

expresión en la que, como se ha dicho, no hay suma sobre el índice  $i$ , y en la que el número de semiondas  $n_i$  no es conocido por el momento.

### Mecánica del problema..

Conocida la geometría de la deformación, podemos obtener las expresiones de energía de deformación  $U$ , y de la energía potencial de las cargas que nos permiten definir mecánicamente el problema. Para éstas, dado que las cargas pierden energía en el proceso de deformación, lo que se mide es su pérdida de energía potencial —o del trabajo que realizan en la deformación—  $W$ . El conocimiento de ambas magnitudes permite medir la energía potencial total del sistema en cada situación de equilibrio mediante la conocida expresión  $V = U - W$ .

Es sabido que en tanto que el problema sea conservativo, la magnitud  $V$  gobierna el problema. Su valor absoluto no tiene importancia, pues depende del origen considerado para su medición, pero sus derivadas sí que lo tienen. En particular, si podemos expresar  $V$  con suficiente precisión en función de alguno de los parámetros de deformación independiente, resulta, empleando terminología relativamente informal que

- (1) la condición  $V' = 0$  —la derivada de la energía es nula, o el trabajo virtual realizado en un movimiento diferencial es nulo— expresa la condición de equilibrio en todas las situaciones posibles, tanto las precríticas como las poscríticas,
- (2) la condición  $V'' = 0$  expresa la condición de equilibrio crítico, es decir, bien la condición por la que el equilibrio es indiferente localmente, o bien el punto en el que se cruzan dos posibles configuraciones geométricas diferentes de materializar el equilibrio,

- (3) la condición  $V''' = 0$  indica que la mecánica —movimientos y esfuerzos— de la forma de equilibrio alternativa a la trivial —ésta es la que establece el equilibrio sin deformación de pandeo— es simétrica localmente en el punto crítico. De ser cierto el caso contrario puede afirmarse que la situación es de inestabilidad asimétrica, y, finalmente,
- (4) la magnitud  $V^{IV}$  gobierna la descripción local de las condiciones del equilibrio crítico simétrico, permitiendo determinar si se trata de situaciones críticas estables o críticas de tipo inestable.

Descripciones más rigurosas pueden encontrarse en textos sobre análisis de la estabilidad. Véase por ejemplo *Stress, stability and chaos in structural engineering: an energy approach* de **M.S. El Naschie**, Londres, 1990.

La precedente relación permite justificar que, para obtener la primera aproximación al comportamiento poscrítico de una estructura, baste considerar expresiones de la energía que incluyan como mucho los términos de hasta el cuarto orden.

Por lo tanto consideraremos expresiones hasta dicho orden en las diferentes magnitudes en juego.

Comenzando por la pérdida de energía potencial de la carga, tenemos que, puesto que la carga existe y se mantiene cuando se desencadena el pandeo,

$$(9) \quad W = P\Delta = P\varepsilon_m l = \left( \frac{\pi f_i}{2l/n_i} \right)^2 Pl + \frac{3}{4} \left( \frac{\pi f_i}{2l/n_i} \right)^4 Pl$$

Si analizamos en segundo lugar la energía de deformación por flexión de la(s) pieza(s) longitudinales tenemos

$$U_1 = \int_0^l \frac{EI}{2} \chi^2 dx = \int_0^l \frac{EI}{2} \frac{y''^2}{1-y'^2} dx = \frac{EI}{2} \int_0^l y''^2 (1+y'^2 + \dots) dx$$

y empleando la expresión en serie de  $y$  que hemos presentado tendremos, en general:

$$(10) \quad U_1 = \frac{EI}{2} \int_0^l \left( f_i f_j \frac{\pi^4 n_i^2 n_j^2}{l^4} \sin \frac{\pi n_i x}{l} \sin \frac{\pi n_j x}{l} \right) \left( 1 + f_k f_m \frac{\pi^2 n_k n_m}{l^2} \cos \frac{\pi n_k x}{l} \cos \frac{\pi n_m x}{l} + \dots \right) dx$$

Vamos a considerar nuevamente el caso de empleo de un sólo término de senoide en el desarrollo de  $y$ , es decir, suponemos elegido un sólo  $i$ , de modo que en las fórmulas que siguen  $f_i n_i$  implica producto para ese término elegido, pero no suma<sup>17</sup>. En este caso la anterior expresión se simplifica a

$$U_1 = \frac{EI}{2} \int_0^l \left( f_i^2 \frac{\pi^4 n_i^4}{l^4} \sin^2 \frac{\pi n_i x}{l} \right) \left( 1 + f_i^2 \frac{\pi^2 n_i^2}{l^2} \cos^2 \frac{\pi n_i x}{l} + \dots \right) dx$$

$$U_1 = \frac{EI}{2} \int_0^l \left( f_i^2 \frac{\pi^4 n_i^4}{l^4} \sin^2 \frac{\pi n_i x}{l} + f_i^4 \frac{\pi^6 n_i^6}{l^6} \sin^2 \frac{\pi n_i x}{l} \cos^2 \frac{\pi n_i x}{l} \right) dx$$

<sup>17</sup>De hecho, si se resuelve analíticamente la ecuación diferencial del problema planteado, la solución es una función sinusoidal de un sólo término, por lo que la suposición hecha es exacta en este caso.

expresión en la que mantenemos sólo los términos hasta el cuarto orden, y que integrada resulta

$$U_1 = \frac{EI l}{2} \frac{f_i^2}{(l/n_i)^4} \frac{\pi^4}{2} + \frac{EI l}{2} \frac{f_i^4}{(l/n_i)^6} \frac{\pi^6}{8}$$

Si presentamos la expresión en forma que dependa de variables adimensionales resulta

$$(11) \quad U_1 = \frac{\pi^2 EI l}{(l/n_i)^2} \left( \frac{\pi f_i}{2l/n_i} \right)^2 \left( 1 + \left( \frac{\pi f_i}{2l/n_i} \right)^2 \right)$$

Finalmente, para la energía almacenada por la deformación lateral de las pilas — siendo  $C$  la rigidez lateral por unidad de longitud, o *constante del lecho*— tenemos la expresión

$$(12) \quad U_2 = \int_0^l \frac{C}{2} y^2 dx = \frac{C}{2} \int_0^{\pi n_i} f_i^2 \frac{l}{\pi n_i} \sin^2 \frac{\pi n_i x}{l} d \left( \frac{\pi n_i x}{l} \right)$$

$$U_2 = \frac{Cl f_i^2}{4} = \frac{Cl^3}{\pi^2 n_i^2} \left( \frac{\pi f_i}{2l/n_i} \right)^2$$

Tenemos, pues, que la energía total es,

$$V = U_1 + U_2 - P\Delta$$

que, expresada en términos de los desarrollos elegidos, es decir, empleando un solo término en el desarrollo de la deformación en serie de senos y los términos hasta el cuarto orden en  $f_i/a$  en la aproximación de la energía —y empleando por lo tanto (9), (11), y (12)— resulta ser,

$$(13) \quad V = \left\{ \frac{\pi^2 EI l}{(l/n_i)^2} \left( 1 + \left( \frac{\pi f_i}{2l/n_i} \right)^2 \right) + \frac{Cl^3}{\pi^2 n_i^2} - Pl \left( 1 + \frac{3}{4} \left( \frac{\pi f_i}{2l/n_i} \right)^2 \right) \right\} \left( \frac{\pi f_i}{2l/n_i} \right)^2$$

Antes de continuar emplearemos la notación siguiente:

$$(14) \quad P_e = \frac{\pi^2 EI}{(l/n_i)^2}$$

$$P_l = \frac{C(l/n_i)^2}{\pi^2}$$

$$a = \frac{2l/n_i}{\pi}$$

Empleando dicha notación, la energía potencial total se escribe en la forma

$$(15) \quad V = -Pl \frac{f_i^2}{a^2} \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{f_i^2}{a^2} \right) + P_e l \frac{f_i^2}{a^2} \left( 1 + \frac{f_i^2}{a^2} \right) + Pl \frac{f_i^2}{a^2}$$

Las situaciones de equilibrio quedan descritas por  $V' = 0$ ,  $-V' = dV/d(f_i/a)$ — por lo que corresponden a

$$(16) \quad V' = -2Pl \frac{f_i}{a} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{f_i^2}{a^2}\right) + 2P_e l \frac{f_i}{a} \left(1 + 2 \frac{f_i^2}{a^2}\right) + 2P_l l \frac{f_i}{a} = 0$$

que tiene, evidentemente la solución trivial  $f_i/a = 0$ , y por lo tanto la inexistencia de deformación, es decir, la solución de equilibrio manteniendo la pieza recta cargas crecientes, pero también la solución

$$(17) \quad \begin{aligned} -P \left(1 + \frac{3}{2} \frac{f_i^2}{a^2}\right) + P_e \left(1 + 2 \frac{f_i^2}{a^2}\right) + P_l &= 0 \\ P &= \frac{P_e \left(1 + 2 \frac{f_i^2}{a^2}\right) + P_l}{1 + \frac{3}{2} \frac{f_i^2}{a^2}} \end{aligned}$$

que constituye un camino de equilibrio diferente al trivial, para valores de  $f_i/a \neq 0$ .

De esta solución puede obtenerse la carga crítica de pandeo sin más que considerar el punto  $P, f_i$  tal que  $f_i = 0$ , es decir, sin más que considerar el punto en el que este camino de equilibrio se cruza con el trivial, o, en otras palabras, el punto en el que la configuración de equilibrio trivial *bifurca* a la otra configuración posible. Dicha carga crítica es

$$(18) \quad P_k = P_e + P_l,$$

donde  $P_e$  es la carga crítica de Euler de la pieza considerada —obtenida cuando la constante del lecho  $C$  es nula— y  $P_l$  es la carga añadida por la rigidez del lecho elástico en que se sitúa la pieza, tal y como se veía en (14), y que corresponde a la carga crítica para el caso de que la rigidez de flexión de la pieza  $EI$  sea nula.

Podría haberse obtenido también  $P_k$  de la condición  $V'' = 0$  —siendo como es natural  $V'' = d^2V/d(f_i/a)^2$ —

$$(19) \quad V'' = \left(-2Pl \left(1 + \frac{9}{2} \frac{f_i^2}{a^2}\right) + 2P_e l \left(1 + 6 \frac{f_i^2}{a^2}\right) + 2P_l l\right) = 0$$

obteniéndose idéntico valor, que es el que hemos empleado más arriba al formular la hipótesis 3.

Para definir el número de semiondas  $n_i$  a que corresponde esta solución basta obtener el valor de  $n_i$  para el que  $P_k$  es mínimo, o el valor de la longitud de onda  $2(l/n_i)$  que minimiza dicho valor de carga crítica. Tal valor para  $n_i$  puede obtenerse considerando el problema continuo, y anulando la derivada de  $P_k$  respecto de  $n_i$  —operación que es equivalente a considerar indefinida o infinita la longitud de la pieza, y obtener la longitud de onda correspondiente—. Resulta:

$$(20) \quad n_i = \sqrt[4]{\frac{Cl^4}{\pi^4 EI}}$$

que es el valor que ya empleamos al analizar dicha hipótesis.

En lo sucesivo prescindiremos del índice  $i$ , pues ha quedado totalmente definida la geometría de la configuración de pandeo.

Ahora bien, nuestro objetivo es describir, no el inicio del pandeo, sino el comportamiento de la pieza después del mismo para, posteriormente analizar el comportamiento de la pieza con imperfecciones.

Para ello empleamos la expresión de la la carga  $P$  en la configuración de equilibrio no trivial, (17), es decir

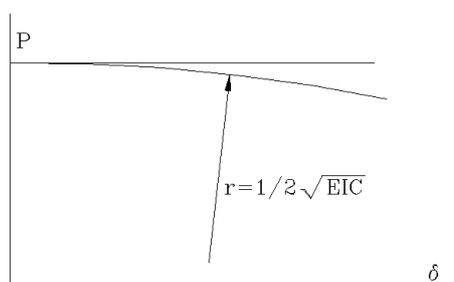
$$P = \frac{P_e \left(1 + 2\frac{f^2}{a^2}\right)}{1 + \frac{3}{2}\frac{f^2}{a^2}} + \frac{P_l}{1 + \frac{3}{2}\frac{f^2}{a^2}}$$

Desarrollando los cocientes entre los polinomios obtenemos, en primera aproximación:

$$P = P_e \left(1 + \frac{1}{2}\frac{f^2}{a^2} \dots\right) + P_l \left(1 - \frac{3}{2}\frac{f^2}{a^2} \dots\right)$$

expresión de la que basta considerar hasta los términos cuadráticos para conocer el comportamiento pospandeo en primera aproximación.

En esta expresión puede comprobarse que la carga equilibrada puede crecer con la deformación —se trataría de bifurcación simétrica estable—, o decrecer con la misma —bifurcación simétrica inestable— en función de la relación que exista entre  $P_e$  y  $P_l$ . En concreto, para saber si el término cuadrático en  $f$  crece o decrece bastará comparar con cero la diferencia  $\frac{1}{2}P_e - \frac{3}{2}P_l$ , o lo que es lo mismo, obtener en el punto crítico la curvatura de la gráfica, dada por  $P_e - 3P_l$ , de modo que el comportamiento será del tipo estable si  $P_e > 3P_l$ , y del tipo inestable en el caso contrario.



**Fig. 3.5** Carga crítica, y relación entre carga y desplazamiento tras la bifurcación de pandeo.

La diferencia, empleando el valor obtenido de  $n_i$  en (20) es

$$\begin{aligned} P_e - 3P_l &= \frac{\pi^2 EI}{l^2} \sqrt{\frac{Cl^4}{EI\pi^4}} - 3\frac{Cl^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{EI\pi^4}{Cl^4}} \\ &= -2\sqrt{EIC} \end{aligned}$$

valor negativo, por lo que el caso analizado corresponde al caso de bifurcación simétrica de tipo inestable, con una curvatura en la gráfica  $P - \left(\frac{f}{a}\right)$ , en el punto crítico, que

vale  $P'' = \frac{dP}{d(f/a)} = -2\sqrt{EiC}$ . Veamos cual es dicho valor para las dimensiones del monumento:

$$P'' = -2\sqrt{EAi^2} 1,1939E 10^{-4}$$

$$P'' = -2,1853 10^{-2} E \sqrt{bd(0,28867b)^2}$$

siendo  $b$  la anchura en coronación,  $d$  el canto medio considerado en vanos, e  $i$  el radio de giro lateral de dichos vanos.

Para comparar con valores anteriores emplearemos  $\varepsilon'' = P''/EA$  mejor que el propio valor de  $P''$ . De este modo podremos explorar la evolución con  $f/a$  de  $\varepsilon = \varepsilon_k - \frac{1}{2}\varepsilon'' \left(\frac{f}{a}\right)^2$ . Así pues:

$$\varepsilon'' = \frac{d\varepsilon}{d(f/a)} = -0,6308 10^{-2} \sqrt{\frac{b^3 d}{b^2 d^2}}$$

$$(21) \quad \approx -5 \cdot 10^{-3}$$

obtenido considerando un valor promedio  $d \approx 1,6b$ , y dada la relativa estabilidad de la expresión  $\sqrt{b/d}$ .

Habíamos obtenido más arriba el valor de  $\varepsilon_k = 6,5974 10^{-3}$ , de modo que el valor ahora alcanzado viene a significar que, en la hipótesis de geometría sin defectos, y una vez alcanzada la carga crítica, se produciría el colapso descrito por una gráfica  $\varepsilon - (f/a)$  decreciente, según la expresión

$$\varepsilon = \varepsilon_k + \frac{1}{2} \frac{d^2\varepsilon}{d(f/a)^2} \Big|_k \left(\frac{f}{a}\right)^2$$

$$\varepsilon = \left(6,5974 - \frac{1}{2}5 \left(\frac{f}{a}\right)^2\right) 10^{-3}$$

Cabe hacer notar, recordando la expresión (8), y el significado de  $a$ , de la (14), que la expresión  $(f/a)^2$  expresa el primer orden del acortamiento medio aparente derivado de la incurvación por pandeo.

Puesto que según (14)  $a$  es el cociente entre la longitud de onda y  $\pi$  la expresión obtenida implica que, para que la deformación disminuya en un décimo respecto de la crítica, se requiere que la flecha alcance un valor equivalente aproximadamente al tercio de la semilongitud de onda de la deformada de pandeo.

De la anterior conclusión se deduce que, aun siendo un caso de gráfica en la que la carga pospandeo es decreciente, —tipo simétrico inestable— lo es en tan pequeña medida en las primeras fases de este movimiento que puede considerarse, a los efectos prácticos, que dicha gráfica es completamente horizontal en la región que nos interesa, y puede considerarse el valor de la carga constante e igual a la crítica para tales pequeñas deformaciones.

### Análisis de la influencia de las imperfecciones.

Podemos, ahora, analizar el efecto de las imperfecciones existentes en el monumento en su movimiento transversal, como consecuencia de la dilatación térmica interestacional.

Para ello podríamos rehacer el análisis del estado de energía potencial resultante del proceso de deformación que se inicia en estado de imperfección inicial, que consideramos tiene una forma idéntica a la que se activa en el pandeo —sinusoide de igual longitud de onda—, pero de magnitud dada por  $f_0$ , y que, en el proceso de carga —provocado por el aumento gradual de la temperatura— alcanza, merced a una deformación añadida  $f_a$  la deformación correspondiente al estado de equilibrio final  $f$ . Sin embargo en dicho análisis debería tenerse en cuenta la relación —no lineal— entre la carga y la deformación añadida, por lo que el proceso así planteado no es sencillo.



**Fig. 3.6** Ampliación de imperfecciones

Puesto que queremos conocer el estado de equilibrio que se establecería para una carga dada  $P$  —o una deformación  $\varepsilon$  dada— una vez conocidas las características mecánicas de la estructura analizada —en particular la magnitud de su carga crítica  $P_k$ , a la que, en primera aproximación no afectan tales imperfecciones, tenemos medios más expeditivos de realizar el análisis.

En concreto, observando las expresiones (15), (16), (19), y considerando (18), podemos observar que la energía potencial total almacenada, y sus derivadas sucesivas pueden expresarse mediante expresiones de las cargas, la longitud de la pieza, y la deformación promedio que hemos elegido para representar el problema,  $f/a$ .

Considérese, por ejemplo,

$$V = -Pl(f/a)^2 + P_k l(f/a)^2$$

donde  $P$  es la carga sobre la pieza: el correspondiente término expresa su pérdida de energía potencial. Puesto que  $P_k$  es la carga crítica *respuesta* de la pieza, el correspondiente término expresa la energía elástica de deformación acumulada en el proceso de pandeo hasta la deformación medida por  $f/a$ .

Consideremos una pieza con una imperfección  $f_0$ , y establezcamos en la misma dicho tipo de formulación. Supongamos que la situación de equilibrio se ha alcanzado en  $f = f_0 + f_a$  con la carga  $P$ .

La energía potencial total correspondiente a dicha situación de equilibrio puede expresarse como diferencia entre la de deformación y la pérdida de energía potencial de la carga  $P$  respecto de una posición arbitraria considerada como origen, y la expresión deberá considerar cualquier estado de deformación próximo al del equilibrio alcanzado.

La energía potencial de deformación es

$$U = P_k l \left( \frac{f_a}{a} \right)^2$$

puesto que sólo involucra las deformaciones adicionales a la imperfección inicial, y donde hemos aceptado que la región de interés del análisis corresponde a  $P_k = \text{constante}$ .

Podemos medir la pérdida de energía potencial de  $P$  respecto de cualquier posición tomada como origen. Dicha energía depende linealmente del descenso de la carga, que a su vez depende no linealmente del desplazamiento lateral máximo  $f$ . Por ello el origen más sencillo para medir la energía potencial de  $P$  es la posición correspondiente a la posición recta de la pieza. En la posición de equilibrio alcanzada  $f$ , la pérdida de energía potencial respecto de la situación no cargada de la pieza  $f_0$  es

$$\begin{aligned} W &= W_f - W_{f_0} \\ W &= Pl \left( \frac{f}{a} \right)^2 - Pl \left( \frac{f_0}{a} \right)^2 \end{aligned}$$

y como  $f = f_0 + f_a$  resulta

$$W = PL \left( \frac{f_a^2}{a^2} + 2 \frac{f_0 f_a}{a^2} \right)$$

con lo que

$$V = P_k l \left( \frac{f_a}{a} \right)^2 - Pl \left( \frac{f_a^2}{a^2} + 2 \frac{f_0 f_a}{a^2} \right)$$

La situación de equilibrio buscada corresponde, entre todas las posibles, a la que hace  $V' = 0$ , siendo  $f_a/a$  la variable independiente, con lo que resulta

$$V' = 2P_k l \frac{f_a}{a} - Pl \left( 2 \frac{f_a}{a} + 2 \frac{f_0}{a} \right) = 0$$

De este modo se obtiene la conocida expresión del equilibrio de piezas con imperfecciones para el supuesto de que la gráfica carga-deformación es horizontal en una región suficientemente amplia cercana a la situación crítica de la correspondiente pieza sin imperfecciones:

$$P(f_0 + f_a) = P_k f_a$$

expresión de la que se deriva fácilmente la más útil llamada de *ampliación de flecha*:

$$\alpha = \frac{f}{f_0} = 1 + \frac{f_a}{f_0} = \frac{1}{1 - \frac{P}{P_k}}$$

o en la forma que nos parece más interesante, en términos de las deformaciones unitarias

$$(22) \quad \alpha = \frac{1}{1 - \varepsilon/\varepsilon_k}$$

Dicha expresión permite determinar con facilidad el efecto de segundo orden buscado, pues ahora conocemos tanto  $\varepsilon$ , derivado del salto térmico entre estaciones —que alcanza el valor de  $0,2 \cdot 10^{-3}$  para la hipótesis de  $40^\circ\text{C}$  de diferencia, y el valor de  $0,125 \cdot 10^{-3}$  para la condición característica que establece dicha diferencia en  $25^\circ\text{C}$ —, como  $\varepsilon_k$ , correspondiente a la geometría y rigidez del monumento, y que hemos evaluado en  $6,5974 \cdot 10^{-3}$ . De este modo el factor de ampliación de deformación que se obtiene es

$$\alpha_{40} = \frac{1}{1 - \frac{0,2}{6,5974}} = 1,0312$$

$$\alpha_{25} = \frac{1}{1 - \frac{0,125}{6,5974}} = 1,0193$$

El resultado implica que los defectos relativos de alineación que puedan medirse en planta en el monumento en tramos de hasta 5 pilas como máximo<sup>18</sup> resultarán ampliados a lo largo del año por efecto de la dilatación térmica, estando la máxima ampliación acotada por el factor característico 1,0193.

### Conclusiones.

De lo anteriormente dicho pueden extraerse diversas conclusiones referidas al monumento. Hemos supuesto en el análisis que su comportamiento puede describirse como el de un elemento construido por un material isótropo y continuo. Como la realidad es la de un material unido por juntas, con importantes discontinuidades en algunas áreas, las conclusiones que aquí se establecen de esfuerzos y movimientos, corresponden en todo caso a cotas superiores a los mismos, que no pueden ser alcanzadas en ningún caso en el monumento actual.

Las conclusiones principales son, pues, las siguientes:

- (1) Las dilataciones térmicas derivadas de los cambios de temperatura interestacional que se producen en el Acueducto de Segovia están altamente coaccionadas por la rigidez, tanto longitudinal como transversal del mismo, por lo que su efecto en el mismo es principalmente el de un cambio generalizado en el estado tensional del mismo, al que se añade un estado generalizado de compresión horizontal, cambio de tensión que no puede alcanzar en ningún caso valores medios mayores a los  $6,25 \text{ kp/cm}^2$ , aunque localmente pueden suponer mayores valores —hasta un máximo de dos veces dicho valor medio—.
- (2) los movimientos transversales que pueden producirse en el Acueducto por efectos de segundo orden asociados al incremento en el estado de compresiones citadas en el punto anterior son movimientos que, en planta, tienen la apariencia de una ondulación de tipo periódico sobre la longitud del mismo, siendo la semilongitud de onda de dicha ondulación del orden del tramo soportado por cinco pilas sucesivas. Es decir, el movimiento producido transformaría el plano del acueducto en un conjunto sucesivo de conoides con la máxima curvatura en la coronación, que formaría una onda sinusoidal, yuxtaponiéndose dichos conoides por líneas de inflexión que definen en alzado tramos correspondientes a cada conoide de forma aproximadamente cuadrada.

---

<sup>18</sup>para ser consistentes con el valor obtenido para la condición crítica más desfavorable

- (3) Dichos movimientos transversales al plano del monumento serán en general ampliaciones locales de muy pequeño valor de los defectos de alineación que puedan establecerse en el monumento, ya sea por razones geométricas —alineación no perfectamente recta de pilas y arcos—, ya sea por razones mecánicas —deterioros diferenciados en los sillares en los dos alzados del Acueducto, que provocarían una diferencia en la forma y rigidez de las juntas en ambas caras—, debiendo medirse dichos defectos de alineación en tramos de longitud igual a la citada en el párrafo anterior, es decir, la longitud equivalente a los tramos soportados por cinco pilas.
- (4) La amplificación de dicho tipo de defectos de alineación depende de forma no lineal de las máximas diferencias de temperatura media, siendo la correspondiente a la diferencia característica de  $25^{\circ}\text{C}$ , es decir siendo la máxima amplificación que cabe esperar, un valor que no alcanzará en ningún caso el 2% del defecto inicial.

**Anejo 1: Algunos desarrollos en serie útiles.**

En las proximidades de  $x = 0$  son válidas las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned}\sqrt{1-x^2} &= 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} \dots \\ \sqrt{1+x^2} &= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} \dots \\ \frac{1}{1-x^2} &= 1 + x^2 + \frac{4}{3}x^3 \dots\end{aligned}$$

**Anejo 2: Rigidez lateral de las pilas.** Las dimensiones de las pilas centrales son tales que su anchura en la base es prácticamente doble de la anchura en coronación. Dichas medidas son 3,48 m y 1,75 m respectivamente. Para aproximar la rigidez lateral de las mismas despreciamos el efecto de sobreancho que producen los arranques de los arcos, desde la cota de la imposta a la de la clave.

De este modo consideramos que la sección es rectangular, y que la anchura varía de forma aproximadamente lineal entre la base y la coronación.

La rigidez lateral que buscamos es la relación entre carga —en coronación— y desplazamiento,  $\frac{P}{\delta}$ . Podemos obtener  $\delta$  integrando dos veces la ley de momentos, y empleando la base como origen, lo que anula las constantes de integración. Así pues llamando  $H$  a la altura de la pila,  $I_0$  la inercia de ésta en la base, y  $\alpha I_0$  a su inercia en una cota  $x$  arbitraria resulta:

$$\begin{aligned}\delta &= \int dx \int dx \frac{P(H-x)}{E\alpha I_0} \\ \delta &= \frac{P}{EI_0} \int_0^H dx \int_0^x dx \frac{H-x}{\alpha}\end{aligned}$$

Como  $\alpha = \frac{d^3}{d_0^3}$  siendo  $d$  el canto de la pila considerada en la cota  $x$ , y  $\frac{d}{d_0} = \frac{2H-x}{2H} = 1 - \frac{x}{2H}$ , resulta:

$$\frac{P}{\delta} = EI_0 \frac{1}{H^3 \int_0^1 d\left(\frac{x}{H}\right) \int_0^x d\left(\frac{x}{H}\right) \frac{1-\frac{x}{H}}{\left(1-\frac{x}{2H}\right)^3}} = 1,8342 \frac{EI_0}{H^3}.$$

Observando el alzado del monumento, tenemos una anchura de pilas del orden de 2 m, y una distancia entre ejes de éstas de 6 m., por lo que tendremos que la rigidez *distribuida* por unidad de longitud será un tercio de la de cada metro de pila, y por lo tanto

$$\begin{aligned}C &= \frac{1}{3b} \frac{P}{\delta} = \frac{1,8342}{3b} \frac{Ebd_0^3}{12H^3} \\ \frac{C}{E} &= \frac{0,05095}{\lambda_p^3}\end{aligned}$$

siendo  $\lambda_p$  la esbeltez geométrica lateral de la pila, cociente entre la altura y la base. Como  $\lambda_p = \frac{26,2}{3,48} = 7,5287$  resulta que la relación entre la rigidez lateral de las pilas por unidad de longitud en planta y el módulo de elasticidad es:

$$\frac{C}{E} = 1,1939 \cdot 10^{-4}.$$

Dicho cociente puede interpretarse como el cociente entre la constante elástica del conjunto de *resortes* que se oponen al movimiento lateral, o constante elástica del *lecho*, y el módulo de Elasticidad de la fábrica.

**Modelo de Elementos finitos.** Para contrastar los valores de rigidez lateral empleados en el análisis manual se ha utilizado el modelo de 3 dimensiones elaborado para analizar el comportamiento transversal para viento y oscilaciones dinámicas. Dicho modelo ha sido analizado dos veces, imponiendo sucesivamente desplazamientos unidad en la coronación de la primera, y de la segunda fila de arcos.

Para la geometría y constantes materiales utilizadas de forma sistemática en este estudio han resultado los valores siguientes, de los que cabe deducir de inmediato las rigideces laterales del modelo:

<b>Caso analizado</b>	<b>1</b>	<b>2</b>
Desplazamiento coronación, cm.	1,000	2,001
Desplazamiento primera fila	0,371	1,000
Reacción kilopondios	1.494,1	8.057,8

Por lo tanto, si consideramos cada una de las filas de arcos independientemente resultan las rigideces globales por pila, en kp/cm, las unitarias, por centímetro de longitud de acueducto, en kp/cm/cm, y las relativas al módulo  $E$ , que corresponde al adimensional  $C/E$ , siguientes:

Coronación	1.494	2,45	$0,5 \cdot 10^{-4}$
Primera fila	8.058	13,21	$2,6 \cdot 10^{-4}$

La aproximación manual, por tanto, se encuentra dentro del rango definido por el modelo numérico, por lo que sus resultados pueden considerarse cualitativamente válidos, y cuantitativamente razonables.

## ACUEDUCTO DE SEGOVIA

CAPÍTULO IV  
COMPORTAMIENTO TERMICO DIARIO**Introducción.**

En este informe se trata de establecer las variaciones del estado mecánico a que puede verse sometida la superficie de la piedra del Acueducto como respuesta a las variaciones diarias de temperaturas entre su superficie y su masa.

Para ello trataremos de establecer un sencillo modelo de la evolución en el tiempo de las condiciones térmicas que supongan las mayores diferencias entre dichas temperaturas, a partir de modelos físicos clásicos.

De las leyes de temperatura resultantes, e imponiendo como condición la coacción general a los movimientos, estableceremos las leyes de tensiones más desfavorables que quepa concebir próximas a las superficies, que deben interpretarse como alteraciones máximas sobre los estados de tensiones medios que hayan sido calculados para las diversas hipótesis mecánicas consideradas.

**Leyes de temperatura en la masa de piedra.**

Es clásica la ley de conducción del calor que permite derivar la distribución de temperaturas en un medio a lo largo del tiempo.

$$(1) \quad \text{div grad}T \equiv \Delta T = \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Vamos a emplear como constantes medias del granito las siguientes:

$$\rho = 2,6 \text{ kg/litro} = 2.600 \text{ kg/m}^3 \quad (\text{densidad}).$$

$$c = 0,2 \text{ kcal/kg}^\circ\text{C} = 837,6 \text{ J/kg}^\circ\text{C} \quad (\text{calor específico}).$$

$$\lambda = 3 \text{ kcal/mh}^\circ\text{C} = 3,489 \text{ W/m}^\circ\text{C} \quad (\text{conductividad térmica}).$$

La llamada difusividad térmica,  $\lambda/\rho c$ , en  $\text{m}^2/\text{s}$  es de  $1,6 \cdot 10^{-6}$ .

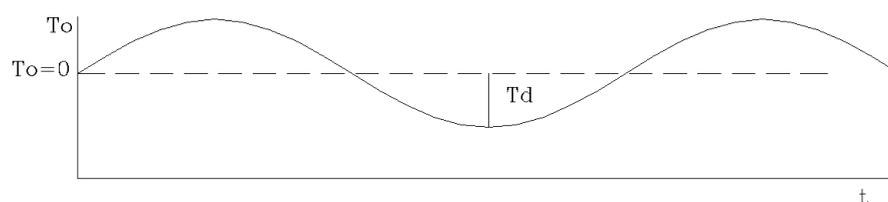
El empleo de la expresión anterior requiere definir la distribución inicial de temperatura, y las condiciones de ésta en el contorno. Vamos a considerar en primer lugar la hipótesis de que las condiciones de temperatura en la superficie libre de la masa de piedra siguen una ley sinusoidal dada, a los efectos de caracterizar el problema. Posteriormente analizaremos las alteraciones a dicho modelo que pueden suponer condiciones de soleamiento y temperatura más aproximadas a la situación real.

**Hipótesis 1: Ley sinusoidal para las temperaturas en la superficie.**

Supongamos un eje longitudinal con origen en la superficie externa, normal a la misma, y dirigido hacia el interior. Supongamos igualmente que las isotermas son planos paralelos a dicha superficie. Supongamos que, por causa de la temperatura exterior, convección, soleamiento, emisión radiante, etc. la ley de temperaturas resultante en la superficie exterior resulta sinusoidal de ley

$$T(x_0 = 0, t) = T_0(t) = T_d \sin(\omega t)$$

ley para la que elegimos como origen de temperaturas la temperatura media  $T_m$  en el período dado, con la que coincidirá dos veces al día la temperatura  $T_0$  de la superficie.  $T_d$  es, pues, la mitad de la diferencia entre las temperatura máxima y mínima, es decir, la máxima diferencia entre cualquier temperatura del período y la temperatura media, y siendo  $t$  el tiempo medido desde un origen correspondiente a la temperatura media, y  $\omega$  la velocidad angular del *movimiento periódico* que describe la oscilación de la temperatura en el tiempo.



**Fig. 4.1** Temperaturas en la superficie externa a lo largo del tiempo

Podemos expresar dicha ley mediante la expresión de Euler–Moivre,  $e^{ia} = \cos a + i \sin a$ , salvo un desfase en  $wt = -\pi/2$ <sup>19</sup>, en la forma

$$T_0(t) = T_d e^{i\omega t}$$

Consideremos que la ley de temperaturas en la masa de granito pueda análogamente expresarse en la forma

$$(2) \quad T(x, t) = T(x) e^{i\omega t}$$

y trataremos de resolver (1) en tales condiciones.

La ecuación (1) toma la forma:

$$e^{i\omega t} \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} = \frac{\rho c}{\lambda} T(x) i\omega e^{i\omega t}$$

$$T'' - \frac{\rho c}{\lambda} i\omega T = 0$$

empleando  $( )' = \frac{\partial}{\partial x}$ , al resultar una ecuación con una sola variable.

Supongamos soluciones para  $T = T(x)$  de la forma

$$T = a e^{rx}$$

<sup>19</sup> $e^{i\omega t}$  tiene el origen de tiempo para el instante de temperatura máxima, mientras que  $\sin \omega t$  lo tiene para temperatura creciente con el tiempo, y en el instante en que es idéntica a la media. Ambos ciclos son idénticos en las restantes características.

En este caso la anterior ecuación pasa a ser

$$\begin{aligned} ar^2 e^{rx} - \frac{\rho c}{\lambda} i \omega a e^{rx} &= 0 \\ r^2 &= \frac{i \omega \rho c}{\lambda} \\ r &= \pm \sqrt{\frac{i \omega \rho c}{\lambda}} \end{aligned}$$

y como  $\sqrt{i} = (1 + i)/\sqrt{2}$ ,

$$r = \pm (1 + i) \sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\lambda}}$$

Dado que la expresión definitiva es una onda, bien amplificada, bien amortiguada, según se emplee la solución positiva, o la negativa, usaremos esta última, que es la que tiene el sentido físico adecuado. Por lo tanto

$$(3) \quad T(x, t) = a e^{-\sqrt{\frac{\omega \rho c x^2}{2\lambda}}} e^{i\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega \rho c x^2}{2\lambda}}\right)}$$

y vamos a analizar el significado de cada término en la expresión.

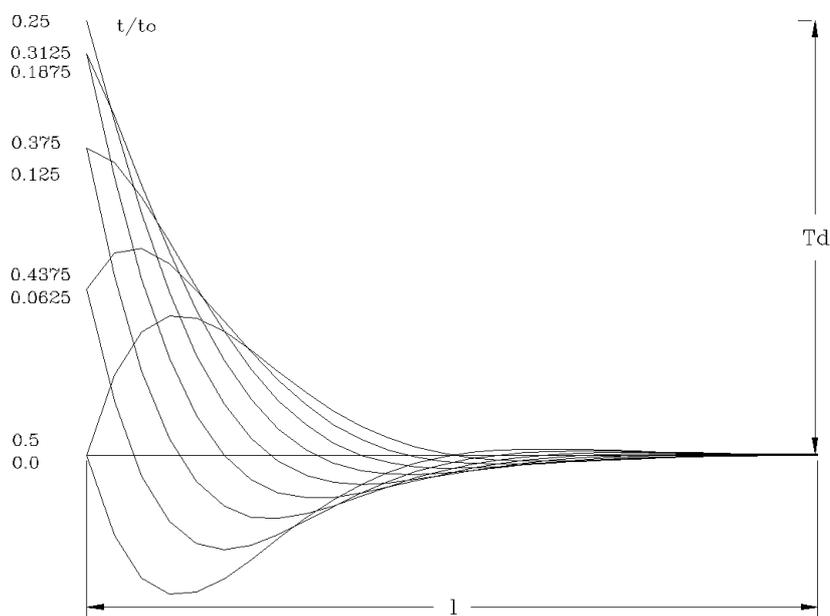
En ella tenemos tres términos diferenciados:

- (1) en primer lugar  $a$  es una constante que puede considerarse como un factor de intensidad.
- (2) en segundo lugar  $e^{-\sqrt{\frac{\omega \rho c x^2}{2\lambda}}}$  es un término de amortiguación, que decrece con  $x$ .
- (3) en tercer lugar  $e^{i\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega \rho c x^2}{2\lambda}}\right)}$  es una oscilación medible tanto en el tiempo, como en la profundidad de la masa.

El factor  $a$  no es otro que la semidistancia entre temperaturas máxima y mínima,  $T_d$ , lo que se comprueba sin más que hacer  $x = 0$  y comparar (3) con la expresión elegida para las temperaturas en la superficie  $T_0(t)$ .

Si consideramos la oscilación térmica, para una cota  $x$  dada fija, ( $x$  mide la profundidad en la masa del macizo) ésta viene definida por la onda que describe  $\omega t$ , cuyo período  $t_0$  define la velocidad angular del movimiento periódico:  $\omega = 2\pi/t_0$ . Como se trata de una oscilación diaria,  $t_0 = 24\text{h}$  y  $\omega t = 2\pi t/t_0$ . Podemos considerar el término  $-\sqrt{\frac{\omega \rho c x^2}{2\lambda}}$  como el desfase angular correspondiente a dicha onda en cada coordenada  $x$  respecto de la oscilación en la superficie exterior del macizo. Si consideramos la distancia a la que corresponde un desfase angular de  $2\pi$ , es decir, la distancia a la que, aun amortiguada, se reproduce la onda de una cota dada, tenemos la longitud de onda de la oscilación térmica en el interior de la masa:

$$\begin{aligned} 2\pi &= \sqrt{\frac{\omega \rho c l^2}{2\lambda}} \\ l &= 2\pi \sqrt{\frac{2\lambda}{\omega \rho c}} \end{aligned}$$



**Fig. 4.2** Temperaturas en la masa a lo largo del tiempo

$t_0 = 24$  horas;  $l = 1,32$  cm.;  $T_d =$  Diferencia entre máxima y media.

y sustituyendo  $\omega$

$$(4) \quad l = \sqrt{\frac{4\pi\lambda t_0}{\rho c}}$$

de modo que la velocidad de avance de la onda en la masa, que debe ser igual a la longitud de onda dividida por el período, vale

$$(5) \quad v = \frac{l}{t_0} = \sqrt{\frac{4\pi\lambda}{\rho c t_0}}$$

Es decir, tenemos una oscilación térmica en el tiempo, de período igual al que se produce en la cara exterior, y cuya onda avanza reproduciendo —amortiguada— dicha oscilación en la masa, con la longitud de onda dada por la expresión (4), y a la velocidad dada por (5).

Podemos expresar dicha oscilación en el interior del granito empleando el desfase angular correspondiente a cada coordenada,  $\phi x = \sqrt{\frac{\omega \rho c x^2}{2\lambda}}$ , que, si se expresa en función de la longitud de onda vale  $\phi x = \frac{2\pi x}{l}$ . De este modo la ecuación (3) se escribirá en la forma más sencilla

$$(6) \quad T = T_d e^{-\phi x} e^{i(\omega t - \phi x)}$$

$$\phi x = \frac{2\pi x}{l}$$

expresiones para las que empleamos el valor de la longitud de onda de (4), así como la relación entre  $\omega$  y  $t_0$ .

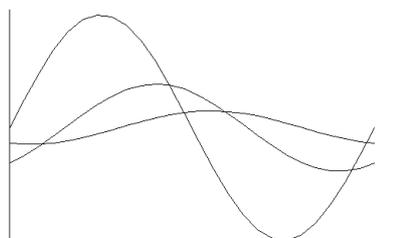
Si consideramos ahora la amortiguación, resulta que ésta depende del desfase angular, de tal modo que la amortiguación entre puntos distantes entre sí en una longitud de onda es ya de  $e^{-2\pi} = 1,86744 \cdot 10^{-3}$ . Es decir, en la distancia correspondiente a una longitud de onda la amplitud de la oscilación se ha reducido en un factor de 535,5.

Para los valores considerados en el granito, la longitud de onda de la oscilación térmica es

$$l = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 3 \text{ kcal/mh}^\circ\text{C} \cdot 24 \text{ h}}{2,6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,2 \text{ kcal/kg}^\circ\text{C}}} = 1,31907 \text{ m.}$$

es decir, que la onda avanza en la masa unos 132 cm. diarios, reduciéndose en esa distancia la oscilación térmica a sólo dos milésimas de la amplitud de la oscilación que se produce en la superficie. Cuando se produce el máximo en la superficie externa, la menor temperatura de la masa se localiza 50 cm en el interior, con un valor igual al la media menos 0,067 veces la diferencia  $T_d$ .

Para hacerse una idea del avance de la onda en la masa dibujamos en una gráfica tiempo-temperatura los valores correspondientes a la superficie, y a puntos interiores en la masa del granito, a distancias de 20 y 40 cm. de dicha superficie, es decir, con amortiguación y desfase del 15% y del 30% de  $2\pi$  ( $\phi x = 2\pi x/l = 0,1515$  y  $0,3030$  respectivamente). Esto implica según (6) que los desfases en las máximas se dan con 3,6 y 7,3 horas de retraso respectivamente, y corresponden a valores de 0,386 y 0,149 veces la máxima en la superficie para cada una de dichas profundidades.



**Fig. 4.3** Variaciones térmicas diarias en superficie e interior, a 20 y 40 cm.

Pueden estudiarse cualidades de la distribución, de entre las que tiene interés el gradiente de temperaturas.

Este es, sin más que derivar

$$(7) \quad \text{grad}T = -\phi(1+i)T_d e^{-\phi x} e^{i(\omega t - \phi x)} \quad \text{grad}T = -\phi\sqrt{2}T_d e^{i(\omega t - \phi x + \pi/4)}$$

expresión para la que se han empleado las propiedades del producto de números complejos.

Cuando se produce el máximo en la superficie de la piedra se tiene la temperatura mínima en la cota  $x$  que corresponde a  $\omega t - \phi x + \pi/4 = 0$  por lo que  $x = \left(\frac{\omega t}{\phi} + \frac{\pi}{4\phi}\right)$ , y,

puesto que  $\omega t = \pi/2^{20}$ , resulta dicha cota  $x = \frac{3\pi l}{4 \cdot 2\pi} = 0,375l$ , para la que la amplitud es  $-0,067T_d$ .

El máximo gradiente se obtiene fácilmente, puesto que en (7), y para  $x = 0$ , el gradiente resulta  $-\phi\sqrt{2}T_d e^{i\omega t + \pi/4}$  de módulo

$$\text{grad}T|_{\max} = \sqrt{2}T_d\phi = \sqrt{2}\frac{2\pi}{l}T_d\frac{^{\circ}C}{m}$$

que se da para  $\omega t = \pi/4$ , es decir,  $t/t_0 = 0,125$ .

Finalmente, para conocer valores reales de temperaturas debe analizarse con cierta precisión la condición de contorno del problema, es decir, el problema del intercambio térmico en la superficie de la masa considerada, problema al que dedicamos los siguientes apartados.

### **Hipótesis 2: Análisis realista del intercambio térmico en la superficie.**

Para realizar un análisis realista de la evolución diaria de temperatura debemos establecer tanto la situación inicial de distribución térmica en la masa de granito que queramos considerar, como la evolución a lo largo del día de las condiciones en las superficies que limitan dicha masa. La primera es fácil de establecer, sin más que suponer una distribución arbitraria inicial, y alargar el análisis en el tiempo hasta un momento en el que se reproduzcan cíclicamente las mismas distribuciones a lo largo del día.

Para establecer las condiciones en los límites correspondientes a las caras externas de la masa del granito, consideraremos en primer lugar que a los efectos diarios el interior de la masa tiene, a profundidad suficiente, una temperatura constante dada, hipótesis plausible como consecuencia del análisis precedente. Dicha profundidad puede pues limitarse por una superficie de condiciones adiabáticas. Ahora bien, la superficie exterior de la masa tendrá una temperatura y un flujo de calor que dependerá de las condiciones ambientales a que esté sometido el monumento.

En el contorno se establece la condición

$$(8) \quad -\lambda \text{grad}T \, ds \, dt = dQ$$

que define el flujo de calor que atraviesa la superficie.

Vamos a establecer dicha condición de contorno del problema. Para ello consideraremos aproximadamente las condiciones de intercambio de calor en la superficie de la masa, intentando aproximar cualitativa y cuantitativamente las condiciones ambientales más importantes.

### **Adsorción y emisión de radiación en la superficie del Granito.**

Dado el estado, color y características del granito del Acueducto, empleamos como cociente de absorción o poder absorbente el valor  $\alpha = 0,85$ , para todas las longitudes de onda, lo que implica la absorción del 85% de la energía radiada por un cuerpo negro que alcanza la superficie considerada, de acuerdo con los datos que para cuerpos *grises* establece el **Handbook of Fundamentals** de la ASRAE, 1989.

---

<sup>20</sup>Consideramos el origen correspondiente a la expresión inicial  $\sin \omega t$ . Ver nota anterior.

### Intercambios por radiación. Irradiación solar.

Segovia se encuentra casi en el paralelo  $41^\circ$ , lo que implica que la máxima altura del sol en el equinoccio es de  $49^\circ$ , que evoluciona entre los  $26^\circ$  y los  $74^\circ$  a lo largo del año.

En cualquier texto de acondicionamiento o de diseño de arquitectura solar pueden encontrarse gráficos o tablas para el cálculo de la irradiación solar total en tiempo diáfano sobre superficies de cualquier inclinación y que cortan la horizontal con cualquier orientación. Pese a todo, los criterios con que han sido realizadas dichas tabulaciones no quedan a veces descritas con suficiente precisión, por lo que no todas son igualmente útiles para este análisis.

De entre todas las superficies que presentan las caras de los sillares del monumento podemos elegir la del plano general del Alzado Sur-Oeste como la más representativa de entre los planos del monumento, junto con la superficie horizontal. La primera tiene un acimut de  $63^\circ$ , es decir, la normal al alzado forma con la dirección sur dicho ángulo.

Empleando alguna de las tablas reseñadas<sup>21</sup> pueden construirse las siguientes tablas de energía recibida en vatios por  $m^2$  según mes y hora solar en las superficies elegidas:

Superficie vertical de  $63^\circ$  de acimut, interpolando entre las direcciones OSO —de acimut  $67,5^\circ$ — y SO —de  $45^\circ$ —.

Hora solar	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Diciembre	—	9	33	72	148	337	518	622	596	259	—	—	—
Mar./Sept.	26	50	68	82	124	281	505	669	748	718	492	—	—
Junio	65	85	100	113	125	176	339	493	582	597	526	349	41

Superficie horizontal:

Hora solar	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Diciembre	—	20	124	243	327	356	327	243	124	20	—	—	—
Mar./Sept.	83	267	450	587	672	702	672	587	450	267	83	—	—
Junio	306	483	633	749	821	844	821	749	633	483	306	126	8

Las tablas consideran un factor de claridad 1, y un reflectancia del suelo del 20%.

Para ser precisos debería eliminarse en la cuenta la parte de la bóveda celeste oculta por edificación o arbolado, pero consideraremos del lado de la seguridad que esta influencia es pequeña.

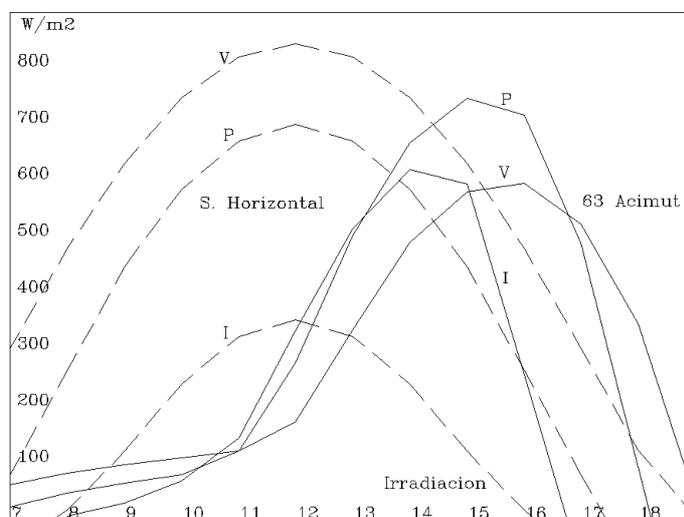
La gráfica correspondiente a tales valores da una idea de su influencia según épocas del año. En ésta se ve que la máxima irradiación para el plano vertical se corresponde con los meses de primavera-otoño, mientras que para el plano horizontal, el máximo corresponde al verano.

Como referencia puede hacerse notar que la energía solar que llega a una superficie normal a la dirección del sol en el límite de la atmósfera es de  $1.400 \text{ W/m}^2$  aproximadamente<sup>22</sup>.

La totalidad diaria correspondiente a cualquier mes puede obtenerse de las tablas anteriores por integración, resultando los valores de  $1.784$ ,  $4.820$  y  $7.096 \text{ Wh/m}^2$  para la superficie horizontal en invierno, primavera-otoño y verano respectivamente.

<sup>21</sup>En particular las correspondientes a superficies situadas en la latitud  $40^\circ$ , en el texto **Handbook of Fundamentals**, ASHRAE 1989.

<sup>22</sup>En el ASHRAE, **Handbook ...** 1989 se señala un valor máximo de  $1.417 \text{ W/m}^2$  para la máxima proximidad del sol, y el valor recomendado para la constante solar, considerando las alteraciones derivadas de las diferentes distancias al sol según meses es de  $1.370 \text{ W/m}^2$ .



**Fig. 4.4** Irradiación solar diaria

### Balance por radiación.

La energía incidente sobre el monumento no es adsorbida en su totalidad, sino sólo en la fracción representada por el factor de adsorción ya señalado.

Un balance completo deberá considerar además las pérdidas nocturnas por emisión radiante de onda larga en la superficie.

Para calcular la pérdida de calor por radiación de la superficie del granito debe emplearse la ley de Stephen–Boltzmann y su constante

$$F = a\sigma T^4$$

donde

$F$  es el flujo de calor en  $W/m^2$ ,

$a$  es el poder adsorbente

$\sigma = 5,6697 \cdot 10^{-8} W/m^2 \cdot K^{-4}$  es la constante de Stephen–Boltzmann

$T$  es la temperatura absoluta.

Para el tiempo de primavera y otoño, considerando una temperatura media de  $14^\circ C$ , resulta una emisión para un cuerpo negro de  $387 W/m^2$ , mientras que para invierno  $-5^\circ C$  y verano  $-23^\circ C$  dichos valores son de 341 y 438.

Sin embargo, dichos valores han de compensarse con la adsorción correspondiente a la radiación de onda larga procedente de la atmósfera y de los elementos circundantes. En el texto citado más arriba se recomienda, para los cálculos de acondicionamiento térmico emplear un valor nulo de emisión en onda larga para superficies verticales, pues el intercambio se realiza en gran medida con elementos enfrentados a análoga temperatura, y un valor de pérdidas de  $63 W/m^2$  para superficies horizontales con intercambio únicamente con la bóveda celeste, para considerar el balance total entre energía emitida y energía recibida.

En otros manuales el problema no está delimitado con claridad suficiente, por lo que mantenemos los criterios planteados en el texto reseñado.

### Intercambios por convección.

Los intercambios por convección se rigen por la ley

$$(9) \quad dQ = h(T - T_a) ds dt$$

siendo  $h$  el coeficiente de intercambio superficial o coeficiente de convección.

Dicho coeficiente depende —algo— de la diferencia de temperaturas, y el texto citado aporta algunos valores. Para simplificar el problema suelen emplearse valores medios, para los que consideraremos los siguientes, en  $\text{W}/\text{m}^2\text{°C}$ , en pared vertical:

convección natural	8,28
viento 24 km/h	34,02
viento 40 km/h	48,76

y recordando que para superficies horizontales los valores son un 20 a un 40% mayores.

Podemos emplear un intercambio por convección forzada para una velocidad media del viento, en torno a los 30 km/h, y un valor de  $h = 40 \text{ W}/\text{m}^2\text{°C}$  en pared vertical y  $h = 50 \text{ W}/\text{m}^2\text{°C}$  en pared horizontal.

### Temperatura ambiente.

Para caracterizar la temperatura que rodea al monumento, que determinará las transferencias por convección, hay que considerar las temperaturas ambientes a lo largo del día.

En este caso no es pertinente el uso de las tablas de temperaturas medias de máxima y mínima por mes, sino que deben considerarse las tablas de temperaturas máximas y mínimas absolutas mensuales —que aunque no corresponden usualmente al mismo día sí pueden dar una idea de las diferencias características entre máxima y mínima diaria en los días extremos de cada estación— Considerando las correspondientes al período de Septiembre a Agosto de los años 85–86 y 87–88<sup>23</sup> tenemos:

Mes	Mínima 85–86	Mínima 87–88	Máxima 85–86	Máxima 87–88
Septiembre	9,2	10,0	33,6	34,2
Octubre	3,0	1,5	27,6	22,2
Noviembre	-5,0	-3,5	22,0	20,0
Diciembre	-6,0	-6,0	21,0	17,6
Enero	-5,0	-2,4	14,8	12,8
Febrero	-9,0	-5,4	16,8	16,0
Marzo	-3,4	-3,8	18,0	21,6
Abril	-5,2	0,0	18,2	21,8
Mayo	0,4	4,8	28,4	23,6
Junio	3,4	-	33,6	-
Julio	6,6	-	36,0	-
Agosto	6,4	-	35,0	-

Puede verse que las máximas diferencias no pueden alcanzar los 30°C, en los períodos de verano–invierno, o los 25°C en los de primavera–otoño.

<sup>23</sup>Anuario el País. No están los datos del período 89–90

### Condiciones de intercambio térmico en el contorno.

Para establecer la ley de temperaturas se considera la ecuación diferencial ya expresada en (1), para las condiciones de contorno de (8).

Ahora bien, el flujo a través de la superficie puede medirse como la suma en cada unidad de tiempo de la energía radiante recibida del sol, más la energía intercambiada por convección, menos el saldo entre la energía emitida y adsorbida en onda larga, es decir,

$$dQ = (\alpha I_r + h(T_0 - T_A) - \varepsilon \delta R) dt dA.$$

donde A denota el área de la superficie considerada, y el 0 la atmósfera exterior.  $\varepsilon$  es la emitancia hemisférica, que puede considerarse próxima a  $\alpha$ .  $I_r$  es el flujo radiante que alcanza la superficie, y  $\delta R$  es el balance en onda larga.

A menudo se emplea el concepto de temperatura sol-aire, que puede expresarse como sigue: se trataría de la temperatura exterior para la que los intercambios por sólo convección son idénticos a los considerados por la anterior expresión, que recoge los de la radiación solar, más la radiación de onda larga, más los de convección. Si llamamos  $T_s$  a dicha temperatura, resulta que la anterior ecuación puede igualarse a

$$dQ = h(T_s - T_A) dt dA$$

por lo que

$$(10) \quad T_s = T_0 + \frac{\alpha I_r}{h} - \frac{\varepsilon \delta R}{h}.$$

La ventaja de este enfoque es que pueden tabularse tales temperaturas para los casos más usuales y establecerse reglas para su modificación o empleo en casos concretos, y de hecho existen tablas de este tipo en el Manual citado más arriba.

Se adjuntan las correcciones a la temperatura ambiente exterior —en más o en menos— correspondientes a la superficie horizontal, y a superficies verticales de orientaciones Oeste y Suroeste, para la relación  $\varepsilon \delta R/h = -3,9^\circ C$ , y el cociente  $\alpha/h = 0,026$ , y  $0,052$  en unidades mks, valores correspondientes a días claros, y superficies claras y oscuras respectivamente, y por tanto, correspondiendo las últimas citadas a los máximos gradientes posibles, todo ello para el día de máximo soleamiento del año. Estas correcciones proceden del **Handbook of fundamentals** 1989.

Hora	H	O	SO	—	H	O	SO
1-5	-3,9	0,0	0,0	—	-3,9	0,0	0,0
6	0,0	0,0	0,0	—	3,9	1,7	1,7
7	5,6	1,7	1,7	—	15,0	3,9	3,9
8	10,5	2,2	2,2	—	25,0	5,0	5,0
9	14,5	2,8	2,8	—	33,4	6,1	6,1
10	17,8	3,3	3,3	—	40,0	6,7	6,7
11	20,0	3,3	5,0	—	43,9	7,2	10,0
12	20,5	3,9	9,4	—	45,5	7,8	19,4
13	20,0	9,5	13,4	—	43,9	19,5	27,3

14	17,8	15,0	16,1	—	40,8	30,0	32,2
15	14,5	18,0	16,6	—	33,3	37,7	33,8
16	10,5	20,6	15,6	—	25,0	41,1	31,7
17	5,6	18,9	12,3	—	15,0	38,4	25,0
18	0,0	12,8	6,7	—	3,9	26,1	13,9
19–24	-3,9	0,0	0,0	—	-3,9	0,0	0,0

Pueden construirse tablas análogas para todas las orientaciones, a partir de los términos de irradiación solar apuntados antes, pero, dada su relativa proximidad optamos por emplear una cierta interpolación entre las dos orientaciones consideradas, de acimut 90° y 45° respectivamente.

Con dichas correcciones térmicas, superpuestas a las temperaturas ambientes en las diferentes horas del día, pueden establecerse las temperaturas externas sol–aire que permiten realizar un análisis de transmisión térmica en estado transitorio, para verificar la evolución térmica en el interior de la masa de granito del acueducto.

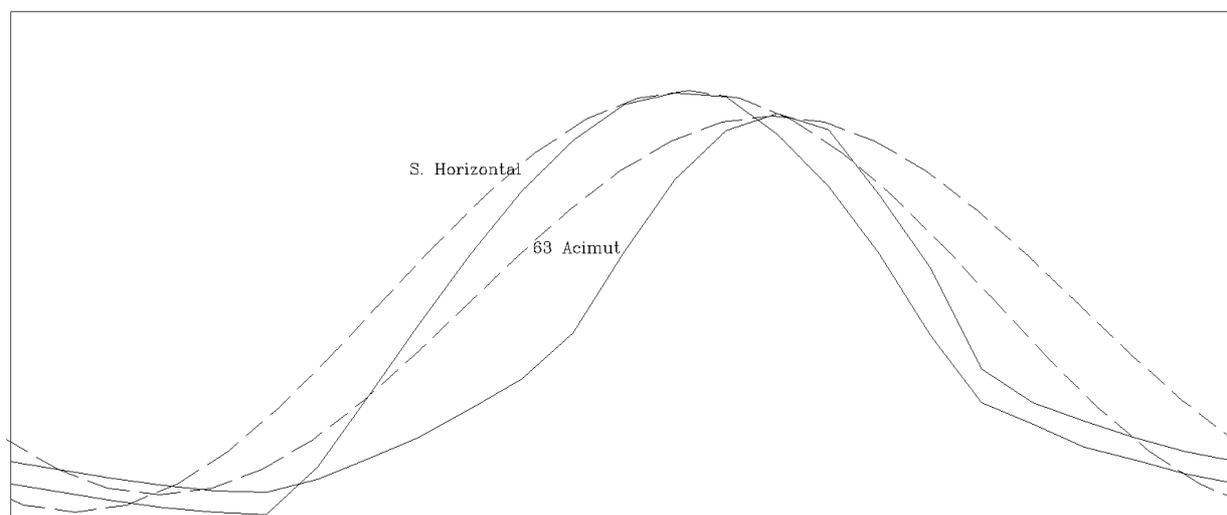
Para considerar la evolución diaria en la temperatura ambiente —de bulbo seco—, partiendo de los valores de máxima y mínima del día puede emplearse una tabla del texto citado que asigna a cada hora del día una fracción de la diferencia entre la máxima y la mínima, resultando las tablas de temperaturas a lo largo del día que figura a continuación, para una temperatura máxima de 35° y un rango de temperaturas de 30 ° en verano. En la tabla figuran en primer lugar los valores de la temperatura exterior, y en segundo lugar las temperaturas sol–aire para las superficies horizontal y vertical consideradas.

<b>Hora</b>	—	<b>Amb.</b>	<b>Hor.</b>	<b>Ver.</b>
—	—	—	—	—
1	—	8,9	5,0	8,9
2	—	7,4	3,5	7,4
3	—	6,2	2,3	6,2
4	—	5,3	1,4	5,3
5	—	5,0	1,1	5,0
6	—	5,6	9,5	7,3
7	—	7,1	22,1	11,0
8	—	9,8	34,8	14,8
9	—	13,7	47,1	19,8
10	—	18,2	58,2	25,1
11	—	23,3	67,2	33,2
12	—	28,1	73,6	47,6
13	—	31,7	75,6	60,3
14	—	34,1	74,9	69,0
15	—	35,0	68,3	72,0
16	—	34,1	59,1	69,1
17	—	32,0	47,0	57,5
18	—	28,7	32,6	44,7
19	—	24,8	20,9	24,8
20	—	20,9	17,0	20,9
21	—	17,6	13,7	17,6
22	—	14,6	10,7	14,6

23	—	12,2	8,3	12,2
24	—	10,4	6,5	10,4
	—			
Media	—	18,11	31,7	27,7

Con tales valores y con los coeficientes de convección correspondientes a cada superficie considerada, puede realizarse el análisis de la evolución de temperaturas en la masa de granito.

En la gráfica se comparan la evolución de temperaturas exteriores sol–aire tabuladas con el aspecto que adoptarían en el caso de emplearse una evolución diaria de tipo sinusoidal.



**Fig. 4.5** Temperaturas sol–aire diarias, latitud  $41^\circ$

### **Evolución de las temperaturas en el interior del granito.**

Hemos obtenido las gráficas correspondientes a la forma en que evoluciona la temperatura a lo largo del día en la masa de granito. —**Fig. 4.2**— Para aplicar valores a dichas gráficas de temperatura deben establecerse las condiciones en el contorno, en particular la ley de temperaturas en la superficie, con sus valores. Ahora bien, como ya se ha visto en el apartado anterior, puede conocerse la ley de temperaturas del ambiente externo que establecería un intercambio de calor por sólo convección equivalente al del intercambio global por convección más radiación. Se trata de las llamadas temperaturas sol–aire,  $T_s$ . Éstas inducen una ley de temperaturas en la superficie  $T_0$  que es, obviamente distinta.

Ahora bien, establecida una ley de temperaturas  $T = T(x, t)$  en el interior según la fórmula (6), que implica una ley también conocida en la superficie,  $T_0 = T_0(t)$ , podemos determinar la ley de temperaturas exteriores  $T_s(t)$  que es capaz de mantener dicha ley  $T$  si el intercambio superficial se realiza mediante convección, con un coeficiente  $h$  conocido. Pues bastará igualar el flujo térmico en la superficie con el que se deriva de la condición de contorno (8). Puesto que el flujo por convección puede medirse mediante la expresión

(9), igualando ambas aplicadas a  $x = 0$  resultará

$$dQ = h(T_s - T_0)ds dt = -\lambda \text{grad}T ds dt$$

$$T_s - T_0 = -\frac{\lambda}{h} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

y puesto que conocemos  $T$ , (6), puede obtenerse también su gradiente, y aplicarse ambas a  $x = 0$ , obteniéndose

$$T_0 = T_d e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\alpha(1+i)T_d e^{i\omega t}$$

de modo que

$$T_s = T_d e^{i\omega t} \left( 1 + \frac{\lambda\alpha}{h}(1+i) \right)$$

$$= T_d e^{i\omega t} \left( 1 + \frac{\lambda\alpha}{h} + i\frac{\lambda\alpha}{h} \right)$$

Ahora bien, en la última expresión tenemos el producto de dos números complejos, dado que  $e^{i\omega t}$  representa un número complejo de módulo 1 y argumento —ángulo—  $\omega t$ , dependiente del tiempo, mientras que el número entre paréntesis representa otro número complejo, para el que módulo y argumento son

$$(11) \quad r = \sqrt{1 + \frac{2\lambda\alpha}{h} + \frac{2\lambda^2\alpha^2}{h^2}}$$

$$\theta = \text{atan} \left( \frac{\frac{\lambda\alpha}{h}}{1 + \frac{\lambda\alpha}{h}} \right)$$

de modo que el producto supone un número de módulo  $r$  y argumento  $\omega t + \theta$ .

Por tanto, la ley de temperaturas exteriores  $T_s$  a que corresponde la ley  $T$  puede interpretarse como una oscilación de módulo  $rT_d$ , y fuera de fase y adelantada  $\theta$  respecto a la ley de la superficie de la piedra.

$$(12) \quad T_s = rT_d e^{i(\omega t + \theta)}$$

Empleando valores ya determinados para  $\lambda = 3,489 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ ,  $\alpha = 2\pi/l$ , siendo  $l = 1,32 \text{ m}$ , y  $h = 50 \text{ W/m}^2\text{C}$ , resulta  $\lambda\alpha/h = 0,3322$ , de modo que  $r = 1,3729$ , y el desfase angular es  $\theta = 0,2444$  radianes, en superficie horizontal, que, para el período de 24 horas representa 0,933 horas.

O lo que es lo mismo, si la temperatura sol-aire sigue una evolución periódica sinusoidal, la temperatura en la superficie horizontal de la piedra sigue una ley similar, cuyos

máximos son sólo 0,7284 veces el máximo de las temperaturas sol–aire, produciéndose 0,933 horas después de aquéllos.

Asimilando las leyes de temperatura diarias de la figura —**Fig.** 4.5— a una senoide, centrada en el valor medio diario, resultará que la temperatura en dicha superficie alcanza un máximo de  $63,6^{\circ}\text{C}$ , correspondiente a una diferencia de  $31,9^{\circ}\text{C}$  respecto de la media diaria en superficie, 0,93 horas después del máximo sol–aire de  $75,6^{\circ}\text{C}$  que se alcanza a las 13 horas. La mínima en ese momento es de  $29,5^{\circ}\text{C}$ .

Análogamente, para la superficie vertical considerada  $\lambda\alpha/h = 0,4152$ , por lo que  $r = 1,4748$ , es decir, la amplitud de la oscilación en la temperatura de superficie es 0,6871 veces la del exterior,  $\theta = 0,2854$ , equivalente a 1,09 horas, de modo que la máxima de  $57,6^{\circ}\text{C}$  de dicha superficie,  $30,0^{\circ}\text{C}$  mayor que la media se produce 1,09 horas después de la máxima sol–aire de  $72,00^{\circ}$  correspondiente a las 15 horas, produciéndose en ese momento una mínima de  $25,7^{\circ}\text{C}$ .

### **Análisis de un modelo de dos dimensiones.**

Con los datos obtenidos sobre la evolución de las temperaturas sol–aire puede construirse un pequeño modelo en dos dimensiones para su análisis por EF, para lo que se ha establecido un modelo que podría corresponder a la sección de cualquiera de los arcos, cortada horizontal y verticalmente por la línea media de la sección del arco, de modo que el modelo es de 40 por 80 cm., con caras horizontal superior y lateral izquierda sometidas a los intercambios con el exterior, y caras inferior y lateral derecha en el interior de la masa.

El objeto de este modelo es analizar la influencia de la esquina entre dos superficies en el intercambio térmico, y en la consiguiente evolución de temperaturas.

Es obvio que en el modelo no se ha considerado el problema de las sombras.

El análisis se ha realizado iniciándose con una temperatura uniforme de  $30^{\circ}\text{C}$  en toda la masa, y siguiéndose la evolución a lo largo de dos días. La hora cero y la hora 24 del segundo día corresponden a distribuciones idénticas, por lo que la evolución del segundo día es suficientemente representativa. Hay que recordar que los datos empleados son extremos, por lo que las temperaturas medias que se obtienen son elevadas.

La evolución térmica puede seguirse a lo largo de dicho día en las gráficas que se acompañan, en las que pueden detectarse todas las características de comportamiento analizadas en la hipótesis inicial, y en donde pueden, incluso, obtenerse valores extremos, y tiempos muy próximos a los obtenidos analíticamente en el apartado anterior.

En particular pueden verse las evoluciones de temperaturas de diversos puntos en la superficie y en el interior de la masa, y puede asimismo observarse la migración de los puntos de máxima y mínima, que realizan aproximadamente la misma trayectoria.

Las máximas diferencias de temperatura se dan a las 12 horas, alcanzando los  $36^{\circ}$  medio, no dándose en ningún caso diferencias menores a los  $13^{\circ}$  de las 8 de la mañana. Por otro lado, el punto de la esquina, que soporta la evolución extrema, recorre un rango de temperaturas de más de  $60^{\circ}\text{C}$ .

### **Estados tensionales.**

A partir de las condiciones de temperatura expuestas puede analizarse la evolución en el estado de tensiones del modelo considerado.

Para ello debe tenerse en cuenta que temperaturas uniformes para un instante dado sólo han de provocar dilataciones uniformes sin tensión, en tanto no exista coacción al movimiento. Sólo las diferencias de temperatura entre la temperatura de cada punto y la temperatura media instantánea,  $T_i$  —que llamaremos de tal modo para distinguirla de la temperatura media diaria  $T_m$  aunque pueda coincidir con ella— provocarán dilataciones o contracciones diferenciales entre las diversas regiones del material, y por lo tanto, estados de tensión.

Si analizamos la figura —**Fig.** 4.2— podemos apreciar que, en general, la temperatura media instantánea es diferente de la diaria, salvo si se considera una profundidad infinita en la masa de granito. Vamos a considerar un análisis restringido a una cierta profundidad finita de la masa del material  $z$ , menor que la longitud de onda  $l$ , y estableceremos la hipótesis de considerar despreciable la influencia de la temperatura de la masa a partir de toda profundidad mayor que  $z$ . Se trata de una suposición útil, como se verá, y que, pese a ser no cumplirse, y tanto menos cuanto menor sea  $z/l$ , no es descabellada, puesto que, en suma, sólo supone considerar un desplazamiento controlado en la temperatura de referencia para el análisis de tensiones. Es más, en las regiones internas de la piedra, para profundidades mayores que media longitud de onda, la temperatura varía en tan escasa medida que puede considerarse que se trata de regiones con dilatación térmica uniforme. Para ésta, la coacción en la dirección  $x$  que hemos considerado es nula, y por idéntica razón las tensiones  $\sigma_x$ , mientras que en la dirección  $y$ , dicha dilatación dependerá de las condiciones de contorno, que suponemos comunes a la región  $z$  que aquí se analiza. De este modo, las tensiones asociadas a las temperaturas  $T_m$  correspondientes a dicha zona profunda pueden obtenerse con facilidad conocido el estado medio —uniforme— inicial y las condiciones de contorno, y sólo suponen un origen diferente a la ley de tensiones  $\sigma_y$  —o a la correspondiente ley de temperaturas— que el que puedan suponer las medias instantáneas obtenidas para una región acotada  $z$  — $T_{iz}$ — que por lo tanto pueden emplearse como referencia. Así pues, las gráficas de tensiones  $\sigma_y$  son proporcionales a las gráficas de temperatura  $T$ , salvo un desplazamiento en el origen de temperaturas  $T_{iz} - T_m$ . Se emplea, por tanto  $\Delta T$ , así como el factor de escala dado por el coeficiente de dilatación térmica multiplicado por el módulo de rigidez,  $\sigma = -\alpha E \Delta T$ . Puesto que en apartados anteriores habíamos situado el origen 0 en  $T_m$  ( $T_m = 0$ ), para tal origen  $\Delta T = T$

Para conocer cualquier desplazamiento  $T_{iz} - T_m$  basta obtener la temperatura media instantánea correspondiente a la región  $z$  que deseemos considerar. Así pues,

$$T_{iz} = \frac{1}{z} \int_0^z T dx = \frac{1}{z} \int_0^z T_d e^{-\alpha x} \cdot e^{i(\omega t - \alpha x)} dx$$

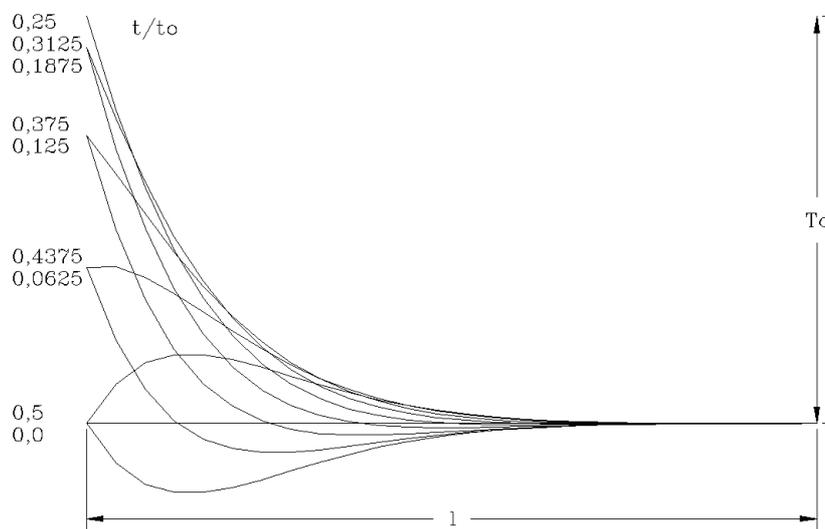
$$T_{iz} = \frac{T_d e^{i\omega t}}{z} \int_0^z e^{-(1+i)\alpha x} dx$$

$$T_{iz} = -\frac{T_d e^{i\omega t}}{2\alpha z} (-1+i) (e^{-(1+i)\alpha z} - 1) = \frac{T_d (1-i)}{2\alpha z} (e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \alpha z)} - e^{i\omega t})$$

cuya parte real puede interpretarse mediante la fórmula de Euler–Moivre y empleando nuevamente el desfase en  $\omega t$  establecido al considerar el origen de tiempos.

Pueden trazarse así gráficas de temperaturas instantáneas medias para regiones dadas de profundidad  $z$ , referidas a la temperatura media diaria, a la máxima diferencia diaria

respecto de ésta que se da en la superficie  $T_d$ , y al instante  $t$  considerado, como las de —Fig. 4.6—.



**Fig. 4.6** Temperaturas medias instantáneas para cualquier profundidad  $z$

$z$  en abscisas, y  $T_{iz}$  en ordenadas, para origen en  $(0, T_m)$ , y siendo  $t_0 = 24$  horas, y  $l = 1,32$  m.

Basta por tanto analizar regiones finitas  $z$ , para las que se usa la temperatura media  $T_{iz}$  obtenida en la gráfica como origen, para la que se obtienen por tanto tensiones —diferencias de tensión— de resultante nula en dicha región  $z$ , aunque de momento resultante no nulo.

De este modo, las diferencias entre los estados de tensión paralela a la superficie de la piedra, en planos de diversa profundidad, procedente de la evolución diaria pueden obtenerse directamente de la ley de temperaturas de —Fig. 4.6—. Las tensiones resultantes deberán añadirse a las correspondientes al estado medio de tensión que se derive en la región analizada de todos los demás fenómenos: cargas, dilataciones medias —de carácter interanual—, etc.

Puesto que habíamos obtenido analíticamente diferencias instantáneas de temperatura máximas de  $63,6 - 29,5^\circ\text{C}$ , —de 66-26— en el modelo en 2D de elementos finitos, las diferencias de tensión máximas inducidas por la evolución diaria serán del orden de los  $8,5 \text{ kp/cm}^2$ . En el caso de considerarse coacción completa al movimiento en el contorno, las diferencias entre máximo y mínimo serán de 2 veces la amplitud, es decir, de  $64^\circ\text{C}$ , lo que supone una variación diaria en el estado medio de tensiones de  $16 \text{ kp/cm}^2$  en la superficie de la piedra.

El modelo empleado para el análisis térmico en 2D puede emplearse para el análisis de tensiones, para cualquier momento del día, mediante la correspondiente transformación del tipo de elemento empleado, empleando como condiciones de contorno las de coacción al desplazamiento perpendicular a las secciones en las establecidas en el interior de la masa, y la posibilidad libre de movimiento paralelo a la sección, así como la libertad

total de movimientos en las superficies libres. Los casos de carga impuestos serán los de temperaturas de la hora considerada. Como comprobación del modelo se ha establecido asimismo un estado de carga correspondiente a una temperatura uniforme, al que ha de corresponder un estado de dilatación uniforme, sin tensiones, como así sucede, puesto que para dicho estado de carga se obtienen valores marginales de tensión ( $10^{-5}$  Pascal) derivados de los errores numéricos inevitables del análisis.

El modelo en 2D reproduce paso por paso las conclusiones avanzadas en los párrafos anteriores. Deben hacerse notar aquí algunas de las características de la solución.

En primer lugar, y ello puede apreciarse claramente en la dimensión en horizontal, para distancias a la esquina mayores a un tercio o un medio de la longitud de onda, el comportamiento es el correspondiente a la situación de coacción completa. Es decir, el modelo analítico de una dimensión responde fielmente al comportamiento general del modelo de dos dimensiones en las regiones que se alejan de la segunda superficie libre en más de dicha fracción de la longitud de onda, de modo que el comportamiento de la esquina afecta sólo en una región limitada al estado general de tensiones.

En dicha región se establece el equilibrio de los momentos no equilibrados de las tensiones de la masa que se equilibran entre sí, produciéndose sencillamente la rotación del campo de tensiones de una cara a la perpendicular, como se aprecia con facilidad en los diagramas de tensiones principales. El estado es de dilatación uniforme sin tensión, tanto en el interior de la masa, como en una limitada región de la esquina misma, para los que las temperaturas varían en escasa magnitud.

### Conclusiones.

Pueden establecerse las siguientes conclusiones del análisis realizado:

- (1) Las diferencias de temperatura a lo largo del día, y muy especialmente las condiciones de soleamiento que se producen provocan una muy importante variación en las temperaturas de las zonas superficiales del granito, que puede evolucionar a lo largo del día en rangos de  $60^{\circ}\text{C}$  entre máxima y mínima si se consideran las peores condiciones posibles.
- (2) La evolución diaria de temperaturas en la superficie, puede representarse con precisión suficiente mediante leyes de tipo sinusoidal, se amortigua con rapidez en el interior, y afecta sólo a profundidades limitadas de la masa de la piedra, que pueden medirse con relación a la longitud de onda en dicha masa. Dicha longitud de onda depende directamente de las propiedades térmicas de la piedra, y puede estimarse en 1,32 m. Para profundidades mayores a media longitud de onda la amortiguación producida hace que el efecto provocado por la evolución térmica diaria sea despreciable.
- (3) las máximas diferencias de temperaturas que se dan simultáneamente sólo superan en pequeña medida la diferencia entre la máxima en superficie y la media, no llegando a alcanzar 1, 10 veces dicha diferencia, y se dan en el instante de máxima o mínima en la superficie, que se alcanza una hora después que el máximo o mínimo exterior —considerando en éste los efectos equivalentes del intercambio térmico por radiación—. Dichas temperaturas extremas se dan en puntos que distan entre sí del orden de 0,375 veces la longitud de onda, es decir, 50 cm.
- (4) el comportamiento es básicamente unidimensional, es decir, puede representarse analizando sólo el problema en profundidad, y considerando que las coacciones de

extremo correspondientes a las dimensiones perpendiculares a dicha profundidad sólo afectan a las tensiones medias, y no al gradiente provocado por la evolución diaria, para el que quedan impedidos los movimientos paralelos a la cara respecto de la que se mide la profundidad, salvo en las proximidades a las aristas o vértices de la geometría del monumento, en distancias no mayores a media longitud de onda. En éstas, el estado es el que permita poner en equilibrio los momentos que se producen en planos paralelos a las caras a dicha profundidad, conformándose en la región un estado aproximadamente cilíndrico —aristas— o esférico —vértices— en el que cambian de dirección las trayectorias de las tensiones.

- (5) para el instante de máxima diferencia de temperatura entre puntos próximos de la piedra, las diferencias de tensión máximas correspondientes a tales puntos, y en dicho instante, suponen  $8,5 \text{ kp/cm}^2$ .
- (6) A lo largo del día, las diferencias máximas en el estado de tensiones que puede alcanzarse en cualquier punto dado de la superficie pueden llegar, en material sano, y en las peores condiciones posibles, a los  $16 \text{ kp/cm}^2$ , sobrecomprimiéndose el material, o descomprimiéndose medio ciclo después —incluso traccionándose si no existe compresión en dicha dirección— en  $8 \text{ kp/cm}^2$  como máximo.

### Gráficas.

A continuación se adjuntan las representaciones gráficas correspondientes al análisis térmico y de estado de tensiones citado, correspondiente a un corte de fábrica de 80 por 40 cm., siendo las superficies expuestas a una evolución diaria como la descrita en el apartado anterior la horizontal superior, y la vertical izquierda, y considerándose condiciones adiabáticas en las otras dos. Puesto que el análisis es no lineal se ha realizado un análisis incremental correspondiente a intervalos de tiempo no mayores a los 15 m. para la evolución de los dos días, iniciándose el análisis en condiciones de temperatura uniforme próxima a la media prevista, y considerándose suficientemente aproximados los resultados correspondientes al segundo día, dada la identidad en el campo de temperaturas obtenidas a las 0 y las 24 horas de dicho día.

Para el análisis tensional se han considerado las características materiales citadas más arriba, y condiciones de desplazamiento horizontal o vertical impedido respectivamente en las superficies *adiabáticas* vertical y horizontal, respectivamente, considerando dichas superficies suficientemente lejanas al contorno paralelo a las mismas. Las gráficas incluyen

- (1) Evolución de temperaturas a lo largo de dos días y de un día de puntos situados en la superficie horizontal y vertical expuestas, así como en la esquina entre ambas, y en puntos en el *interior* —a unos 20 cm. de la superficie expuesta horizontal— y la *masa* —a unos 40 cm. de las superficies expuestas—.
- (2) Estado de temperaturas del modelo completo en varios instantes significados del día: 24 h., 5 h., 9 h., 14 h., 18 h.
- (3) Como comprobación del modelo, estado de tensiones para una dilatación uniforme de 5 grados.
- (4) Tensiones a lo largo del día de puntos situados en las caras expuestas horizontal y vertical —*lejanos* a la esquina— y en el interior de la masa, correspondientes al vértice inferior derecha (A-8), o al punto en la bisectriz, a 40 cm de cada cara.
- (5) Máximas tensiones de tracción S1 y compresión S3 que se producen en las horas analizadas.

- (6) Gráficas en sección de las tensiones normales paralelas a la superficie libre en las horas citadas y en cada una de las superficies *adiabáticas* horizontal —nudos 1 a 2— y vertical —nudos 2 a 16— acompañadas de gráficas de su tensión media resultante y de la tensión lineal de igual momento resultante.
- (7) Direcciones principales de los estados de tensión resultantes.
- (8) Se incluye un caso de tensiones SX SY SXY correspondientes al campo tensorial representado según ejes paralelos a los de las superficies consideradas, en el que puede apreciarse la sensible simetría que se produce respecto de la bisectriz<sup>24</sup>.

Se han empleado unidades mks tanto en el análisis térmico, y por tanto en la geometría del modelo, como en el análisis de tensiones, utilizándose para dichas unidades un módulo de elasticidad de  $0,5 \cdot 10^{10}$  Pascales, aproximadamente igual a  $50.000 \text{ kp/cm}^2$ .

---

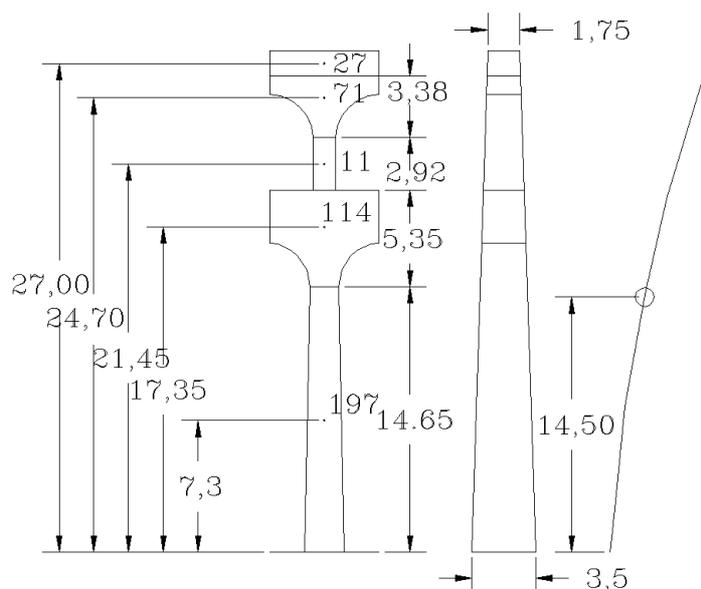
<sup>24</sup>el leve alejamiento de la dirección a 45 grados se debe a las diferencias de soleamiento de las superficies vertical y horizontal.

ACUEDUCTO DE SEGOVIA  
CAPÍTULO V  
ANÁLISIS DE LA RIGIDEZ TRANSVERSAL.  
COMPORTAMIENTO DINÁMICO

**Introducción.** En el presente apartado tratamos de establecer las características de rigidez transversal del monumento que gobiernan su comportamiento deformacional estático y dinámico. La relación entre ambos está dada por una de las cualidades más fácilmente determinable: la masa de cada tramo del monumento. Los datos obtenidos, en caso de poderse contrastar experimentalmente, permitirían calibrar algunos de los datos básicos en la definición del comportamiento mecánico del monumento, en particular el módulo de elasticidad medio de la fábrica.

**Oscilaciones libres transversales de una pila.**

A fin de acotar la magnitud de las variables en juego en las oscilaciones del monumento, determinando el orden de magnitud que cabe esperar en los resultados correspondientes a los modos propios de oscilación, vamos a considerar en primer lugar una aproximación relativamente burda mediante un modelo de un solo grado de libertad, que puede ser analizado manualmente. En la figura puede verse claramente la definición del modelo considerado, para el que se considera la oscilación de toda la masa correspondiente a un tramo de acueducto limitado por los ejes de dos vanos situada en su centro de gravedad, y con la oscilación regida por la rigidez transversal de la ménsula constituida por una pila. Corresponde a la pila 107.



**Fig. 5.1** Pila 107: alzado frontal, sección, y deformada considerados.

La elección de dicha pila responde al objetivo de determinar el período más largo posible, pues en efecto, para idéntica rigidez que las pilas contiguas, la masa es mayor, lo que debe implicar menor frecuencia de oscilación libre.

Las siguientes expresiones son clásicas: para la ménsula correspondiente a una altura de 14,5 m., es decir, 0,5235 veces la altura total de 27,7 m. tenemos

$$P = K\delta = \frac{3\alpha I_0 E}{(0,5235h)^3} \delta = \frac{20,91\alpha EI_0}{h^3} \delta; \quad K = \frac{20,91\alpha EI_0}{h^3}$$

$$W_d = \frac{1}{2} K \delta^2$$

$$W_c = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} M \omega^2 \delta^2 \quad \text{empleando } \delta = \delta_0 \sin \omega t$$

e igualando la energía de deformación correspondiente a la máxima deformación sin movimiento con la energía cinética correspondiente a la máxima velocidad, sin deformación, resulta la conocida expresión

$$(1) \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

que se particulariza en nuestro caso a

$$\omega = \sqrt{\frac{20,91\alpha EI_0}{Mh^3}}$$

Esta última, para  $\alpha = 0,58^{25}$  —lo que corresponde a considerar aproximadamente la inercia de la altura  $h/4$ — supone

$$\omega \approx \sqrt{\frac{12EI_0}{Mh^3}}$$

Para las dimensiones —en metros— y masas —en toneladas— de la figura, y para el módulo de elasticidad de  $50.000 \text{ kp/cm}^2$  — $0,49e10$  Pascales, en unidades mks— resulta, empleando unidades mks:

$$\omega = \sqrt{\frac{12 \times 0,49e10 \times 3,5^3 \times 2/12}{420e3 \times 27,7^3}} = \sqrt{47,0697}$$

es decir,  $\omega = 6,86$  radianes por segundo, que implica una frecuencia de 1,09 hercios.

Puede considerarse mayor precisión para un solo grado de libertad empleando el método de Rayleigh y una ley supuesta para la deformada que cumpla las condiciones de contorno del problema, por ejemplo la ley cosenoidal  $\delta = \delta_0 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2h}\right)$ , que mantiene curvatura nula en el extremo libre, y no nula en el empotrado, por lo que se adapta a las condiciones de extremo del problema.

Para esta deformada típica podemos obtener la deformada en el tiempo mediante

$$\delta = \delta_0 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2h}\right) \sin \omega t$$

---

<sup>25</sup>ver anejo 2 en el apartado sobre comportamiento térmico estacional, en el que se discute la influencia de la forma variable de la pila

las velocidades

$$v = \frac{\partial \delta}{\partial t} = \omega \delta_0 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2h}\right) \cos \omega t$$

y las curvaturas

$$c = \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} = \frac{\pi^2}{4h^2} \delta_0 \left(\cos \frac{\pi x}{2h}\right) \sin \omega t$$

Debemos ahora igualar nuevamente energía cinética y energía de deformación, con lo que tenemos

$$(2) \quad W_d = \frac{1}{2} \int M c \, dx = \frac{1}{2} \int E I c^2 \, dx = \frac{1}{2} E I_0 \int \frac{I}{I_0} c^2 \, dx$$

$$(3) \quad W_c = \sum \frac{1}{2} M_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum M_i \omega^2 \delta_i^2 = \frac{1}{2} M \omega^2 \delta_0^2 \sum \frac{M_i}{M} \frac{\delta_i^2}{\delta_0^2}$$

$$(4) \quad W_d = W_c$$

En estas expresiones consideramos  $I/I_0 \approx (d/d_0)^{3,5}$ , pues el canto disminuye aproximadamente de forma lineal con la altura, y el ancho a menor ritmo que el canto. Puesto que para la máxima altura el canto es mitad del de la base,  $I/I_0 = (1 - x/2h)^{3,5}$ .

La energía de deformación se obtiene integrando las expresiones resultantes para la deformada máxima

$$W_d = \frac{1}{2} E I_0 \frac{\pi^4}{16h^4} \delta_0^2 \int_0^h \left(1 - \frac{x}{2h}\right)^{3,5} \cos^2 \frac{\pi x}{2h} \, dx$$

$$W_d = 6,088 \frac{E I_0}{h^3} \delta_0^2 \int_0^{0,5} \left(1 - \frac{x}{2h}\right)^{3,5} \cos^2 \frac{\pi x}{2h} \, d\left(\frac{x}{2h}\right)$$

expresión para la que el resultado de la integral vale 0,1511.

La energía cinética puede obtenerse mediante la siguiente tabla de cálculos

$M_i$	27	71	11	114	197
$x/h$	0,97	0,89	0,77	0,62	0,26
$\delta_i/\delta_0$	0,96	0,83	0,65	0,44	0,085
$M_i(\delta_i/\delta_0)^2$	24,98	49,17	4,71	22,78	1,41

resultando  $\sum \frac{M_i \delta_i^2}{M \delta_0^2} = 0,2454$ , con lo que obtenemos

$$W_d = 0,92 \frac{E I_0}{h^3} \delta_0^2$$

$$W_c = 0,1227 M \omega^2 \delta_0^2$$

$$\omega = \sqrt{7,4993 \frac{E I_0}{M h^3}}$$

$$\omega = 5,423$$

por lo que la frecuencia resulta de 0,8617 hercios, con una discrepancia respecto al anterior análisis del orden del 25 %<sup>26</sup>.

La energía correspondiente a un estado como el descrito puede expresarse en función del máximo desplazamiento en cabeza, puesto que, por ejemplo, desde la perspectiva de la energía cinética puede medirse con (3), resultando, en Julios,

$$W_c = \frac{1}{2} 420e3 \cdot 5,423^2 \delta_0^2 \cdot 0,2454 = 1,516e6 \delta_0^2$$

a la que corresponde una velocidad máxima en cabeza de la ménsula de

$$v = \omega \delta_0 = \sqrt{\frac{2W_c}{Mc}}$$

siendo  $c = 0,2454$  el coeficiente obtenido más arriba.

De este modo, si, siguiendo las recomendaciones de la norma DIN-4150, se trata de limitar la máxima velocidad de las partículas del monumento al valor de 2 mm./s, tenemos un límite para la energía de oscilación de cualquiera de las pilas típicas, en  $4e-6 \cdot 420e3 \cdot 0,2454/2 = 0,21J$ , equivalente a limitar la máxima amplitud del desplazamiento correspondiente a la oscilación a 4 décimas de milímetro. Para hacerse una idea comparativa dicha limitación supone limitar las fuerzas dinámicas horizontales equivalentes resultantes de la oscilación por tráfico en la región de los arcos a un máximo total menor a las 0,15 toneladas aproximadamente, mientras que la fuerza característica de viento en dicha zona puede alcanzar las 3 toneladas<sup>27</sup>.

Para analizar la influencia de la rigidez lateral de arcos y canal, así como para obtener mayor precisión numérica en la definición del modelo geométrico teórico, que luego ha de contrastarse con los resultados experimentales, se ha elaborado un modelo de elementos finitos en 3D de la pila tipo, formado por elementos hexaédricos de 8 nodos, del que se han obtenido los modos de oscilación para diversas condiciones de coacción impuesta por la oscilación de las pilas próximas, tal y como se describe más adelante.

Como primer modo de oscilación, del que se presenta en gráficas la correspondiente deformada, se obtiene uno de frecuencia igual a 0,68 hercios, cuyo orden de magnitud es comparable a la obtenida manualmente. Cabe señalar que la deformada de este modelo presenta mayores curvaturas comparativamente en la zona de los arcos que las consideradas en los modelos manuales, dado que las secciones no decrecen en la realidad en la formasimplificada que hemos adoptado más arriba —lineal de abajo arriba—, sino que la pila decrece hasta una dimensión en la base del primer arco, y mantiene dicha dimensión a partir de dicha altura, en todas las alturas superiores. De este modo el análisis manual sobreestima la rigidez del modelo, no sólo por la imposición de una deformada elegida

<sup>26</sup>y del mismo orden respecto del valor de 0,68 hz. que se obtiene más adelante con el modelo de EF

<sup>27</sup>Puede emplearse la rigidez transversal obtenida en los modelos de EF, o la empleada para el análisis de deformación transversal por dilatación térmica anual. Obteníamos aproximadamente una relación entre  $C$  —constante del lecho elástico equivalente a la rigidez lateral distribuida de las pilas— y  $E$  del orden de  $1 \cdot 10^{-4}$ . De este modo, para  $E = 50.000 \text{ kp/cm}^2$ ,  $C \approx 5 \text{ kp/cm}^2$ , que para una pila que recoge un frente de monumento de 610 cm. supone una rigidez del orden de 3.600 kp/cm. De este modo 0,5 mm, máximo para la frecuencia de 0,68 hz se alcanza con una carga de 0,15 t. aproximadamente.

a priori —lo que ya es causa de una sobrerigidez— sino además por la consideración de una ley de secciones levemente mayores a las del modelo geométrico más ajustado, por lo que es fácil comprender que la frecuencia esté, asimismo sobreestimada.

En cualquier caso, los valores anteriores sitúan el rango de valores que cabe esperar para las menores frecuencias propias de oscilación del monumento, y que cabría situar en valores cercanos y memores al herzio si el comportamiento del conjunto de sillares puede ser representado de forma adecuada por el modelo continuo e isótropo empleado.

En caso contrario, si el modelo continuo no es adecuado, y por lo tanto resultados experimentales contrastados fuesen diferentes en magnitud, cabría deducir de su contraste con los anteriores resultados el efecto medio de pérdida de rigidez que supone la existencia de las juntas, y su degradación, por contraste entre el módulo de rigidez medio de las piedras individualmente consideradas, y el de la sillería en su conjunto.

Debe señalarse aquí que el rango de valores obtenidos para las frecuencias del primer modo de oscilación se corresponde con cierta aproximación con los obtenidos en los trabajos experimentales realizados por Alava Ingenieros, en colaboración con el Catedrático de Ingeniería Mecánica, D. Felipe Montoya Moreno, en el Laboratorio de acústica y vibraciones de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de la Universidad de Valladolid. En efecto, en las mediciones realizadas por dicha empresa, y según los datos remitidos por D. Felipe Montoya a la Junta de Castilla y León, se detecta, en efecto, un pico que se sitúa en algunas de las medidas en 1 herzio, otras en 0,75, y que, dada la resolución empleada por el aparato de medida —0,25 herzios— cabe pensar corresponden al mismo modo de vibración.

Puede parecer que estos resultados concuerdan asimismo con los resultados del análisis numérico obtenido mediante ordenador por dicho Catedrático, pero por los resultados que él mismo ha difundido, dicha concordancia no existe en absoluto. En efecto los documentos divulgados de dicho trabajo<sup>28</sup> contienen valores para las constantes materiales, que cabe entender son los empleados en su análisis, y entre tales valores deben considerarse

- (1) el módulo de Elasticidad  $E = 0,71e11$  (suponemos que en unidades mks, es decir, Pascales).
- (2) la densidad media empleada, que parece ser la de  $2,67 \text{ T/m}^3$ , pues se reproducen los datos publicados por Aurelio Ramírez Gallardo en 1975:  $7.500 \text{ m}^3$  y “un peso en alzada de  $20.000.000 \text{ kg}$ ”<sup>29</sup>.

Según estos datos, el módulo  $E$  empleado es unas 14,2 veces mayor al empleado en nuestros análisis, y la densidad aproximadamente un 2,7% mayor. De modo que, dado que la frecuencia es proporcional a la velocidad angular, dado que ésta es:  $\omega = \sqrt{K/M}$ , y siendo la rigidez  $K$  directamente proporcional al módulo de rigidez  $E$ , y la masa proporcional a la densidad, los datos empleados por D. Felipe Montoya deben proporcionar frecuencias de oscilación libre para el primer modo 3,72 veces mayor que la obtenida con nuestros datos, para una misma geometría. Es decir,

- (1) empleando nuestra aproximación con los datos utilizados por D. Felipe Montoya, las frecuencias obtenidas se sitúan en valores de entre 2,55 y 4,10 herzios según

<sup>28</sup>remitidos a la Junta de Castilla y León a 19 de Noviembre de 1993

<sup>29</sup>Aurelio Ramírez Gallardo, [op. cit., 1975], p 38.

el modelo elegido. O alternativamente,

- (2) empleando su modelo mecánico y nuestros datos de características materiales —para  $E$  el valor de  $0,5 \times 10^{10}$  Pa y para  $\rho$  el de  $2,6 \text{ T/m}^3$ — D. Felipe Montoya obtendría mediante su análisis un valor de  $0,75/3,72=0,20$  hercios para la frecuencia correspondiente al primer modo de oscilación,

resultados ambos visiblemente lejanos entre sí y, desde nuestro punto de vista, siendo los suyos bastante alejados de los valores esperados<sup>30</sup>.

Finalmente, los resultados de nuestro análisis concuerdan razonablemente con las estimaciones realizadas en el análisis descrito por Antonio Mas-Guindal<sup>31</sup> incluido en los trabajos por él dirigidos que se realizaron entre 1985–1986.

Si consideramos acertada una medición experimental de 0,75 a 1 hz., conjuntamente con resultados analíticos de 0,68 hz. obtendríamos que la rigidez conjunta de la fábrica es entre un 20 y un 50% menor que la de la piedra considerada en el análisis<sup>32</sup>. Por desgracia los errores de estimación —ya sea por resolución, ya por obtención básicamente de ruido, según los análisis— de los resultados experimentales no son lo suficientemente precisos como para poder hacer afirmaciones de este tipo. En efecto, como veremos en el apartado siguiente una estimación más precisa de la frecuencia teórica puede situarnos en algún punto del entorno 0,7 a 1 hercios, considerando la mayor rigidez debida a la oscilación conjunta de grupos de pilas. Para un valor en ese orden un error en la estimación experimental cercano al 30% —correspondiente a una resolución de 0,25 hz. en torno a la frecuencia fundamental— puede suponer concluir tanto la identidad de rigidez de fábrica y piedra como una diferencia de una a otra correspondiente a un factor de 0,6.

### Oscilaciones libres transversales de grupos acoplados de pilas.

Para el análisis de las oscilaciones de grupos de pilas puede optarse por diversos modelos diferentes. Aunque puede parecer deseable la introducción de un modelo completo del monumento, la cuestión es inabordable con medios de análisis económicamente adecuados. Por otro lado dicho modelo completo —hoy día— tendría más de apuesta mediática que interés analítico y práctico: es posible hacerse una idea cabal del modo de oscilación del conjunto sin tanto aparato, que sin embargo podría, por su espectacularidad misma, desviar la atención respecto de los aspectos mal formulados en el modelo, no siendo además la precisión analítica contrastable por los resultados experimentales de que por el momento se dispone.

<sup>30</sup>No conocemos la causa de dicha discrepancia al desconocer características de detalle de su modelo. Podría tal vez estar asociada al factor  $\sqrt{9,8} = 3,13$ . Esto transformaría la frecuencia fundamental de su modelo de 0,20 hercios para  $E=0,5 \times 10^{10}$ , discrepante, en una frecuencia de 0,63 hercios, en muy aceptable acuerdo con los obtenidos en nuestro modelo de Elementos Finitos. Podría también haber considerado el efecto de una cierta relación de amortiguación, pero dicho efecto, que hace disminuir la frecuencia fundamental, lo hace en pequeña medida, y se desprecia a menudo. Insistimos por tanto en que no tenemos datos suficientes por el momento como para conocer las causas de la discrepancia.

<sup>31</sup>[op. cit. 1992], Empleando un módulo de rigidez  $E = 1.500.000 \text{ T/m}^2 = 150.000 \text{ kp/cm}^2$  determinan por métodos aproximados frecuencias de oscilación horizontal entre 1 y 3 hercios. Por tanto, para un módulo de rigidez de un tercio del anterior, el utilizado por nosotros, su análisis determinaría como valor medio para el rango probable de la frecuencia de la oscilación libre el de  $2/\sqrt{3} = 2/1,73 = 1,15$  hercios.

<sup>32</sup>módulo medio mayor, aun sin considerar la pérdida atribuible a las juntas. Tratar de reducir tan amplio margen sugeriría precisar más tanto en el modelo analítico como en los valores empleados para las constantes del granito del Acueducto.

Hemos optado por ello por utilizar un modelo de una sola pila, al que se han impuesto restricciones en su movimiento mediante las condiciones de contorno aplicadas en los ejes de los vanos, forzando mediante dichas condiciones de contorno a que los movimientos representen la forma acoplada de oscilación de cualesquiera conjuntos de pilas.

Para ello se han supuesto deformadas conjuntas representadas por tramos de senoide, de media longitud de onda dada por grupos de una, dos, cuatro pilas, ... y se han impuesto las pertinentes restricciones a los movimientos de los ejes en vano, mediante condiciones de desplazamiento y giro acoplados al desplazamiento del eje de la pila. Esto provoca en los ejes de vanos reacciones que corresponden a los cortantes y momentos que provocan en la línea de arcos la deformación sinusoidal en planta.

En concreto, si se representa la deformada horizontal con expresiones del tipo

$$\omega = \omega_0 \sin \frac{\pi x}{kl}$$

siendo  $kl$  la longitud total considerada,  $l$  la longitud entre ejes de pilas, correspondiente a la unidad que se repite, y  $k$  el número de pilas agrupadas en una semionda del tipo señalado, y por lo tanto un número entero cualquiera mayor que 1, las condiciones de contorno a aplicar en los ejes de vano, si se considera la pila analizada situada en el máximo de la deflexión, se deducen con facilidad: en efecto, tanto la relación entre la deflexión máxima y la de los ejes de los vanos,  $\omega_0/\omega_c$ , como la que se da entre dicha deflexión y los giros en los centros de los vanos  $\omega_0/\theta_c$  son fáciles de obtener:

$$\frac{\omega_0}{\omega_c} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2k}\right)}$$

$$\frac{\omega_0}{\theta_c} = \frac{kl}{\pi} \frac{1}{\cos\left(\pi \pm \frac{\pi}{2k}\right)}$$

Dichas restricciones<sup>33</sup> incrementan la rigidez general del tramo de acueducto considerado, incrementando, por lo tanto, la frecuencia de oscilación, que corresponderá al modo

---

<sup>33</sup>nótese que, por el modo en que están concebidos los diversos programas de elementos finitos, puede haber diversas maneras, de mayor o menor dificultad, de imponer dichas restricciones. En efecto, las ecuaciones correspondientes al análisis del modelo son del tipo

$$F_i = K_{ij}u_j \quad i, j = 1, \dots, E \quad E = L + S,$$

con  $L$ ,  $S$  grados de libertad más sustentaciones del modelo, y tras eliminar las sustentaciones propias a la geometría del modelo resultan la ecuación clásica lineal a resolver, así como la ecuación que permite determinar las reacciones

$$F_i = F_i^* - K_{ik}u_k = K_{ij}u_j \quad , i, j = 1 \dots L \quad k = L + 1 \dots E$$

$$R_k = K_{kj}u_j \quad j = 1 \dots E \quad k = L + 1 \dots E$$

Ahora deben imponerse las coacciones añadidas mediante las relaciones entre varios de los desplazamientos  $u_j$ . Si consideramos las ecuaciones ordenadas de modo que el desplazamiento  $u_l$ , es una combinación lineal de los demás, como resultado de las coacciones añadidas, resulta

$$(a) \quad \begin{aligned} F_i &= K_{ij}u_j + K_{il}u_l \quad i, j \neq l \\ F_l &= K_{lj}u_j + K_{ll}u_l \quad j \neq l \end{aligned}$$

que resultaría de dicha forma de acoplamiento en planta entre las oscilaciones de las pilas contiguas. Por los resultados obtenidos se observa la escasa influencia que en dicha frecuencia tienen longitudes de semionda relativamente largas, por lo que es la rigidez en ménsula de la pila el factor determinante en la oscilación del Acueducto. Por lo tanto, desde una perspectiva teórica, modelar adecuadamente los modos que siguen al primero en la forma global de oscilación del monumento exigirá considerar la alteración en la geometría de las ménsulas correspondientes a las diferentes pilas en alzado: sus diferentes alturas, dado que es la rigidez de las mismas la que inducirá frecuencias diferentes en cada tramo. Tal análisis parece tener más interés teórico que práctico, dado que, como ya se ha visto, la resolución analítica —la capacidad de discriminar frecuencias diferentes para modos alternativos— parece superar con creces la resolución de los instrumentos de medida empleados tanto por Geocisa como por Alava Ingenieros.

**Efecto del viento.** Se considera aquí el problema del viento, dado que el modelo de elementos finitos empleado para contrastar los valores que pueden estimarse manualmente es el mismo que el empleado para el análisis dinámico.

En cualquier caso, dada la sencillez de la geometría implicada, al igual que en el análisis frente a peso propio, no puede esperarse una diferencia apreciable en los resultados si se considera la misma geometría, e idénticas cargas por unidad de superficie. Nuevamente aportamos valores de la estimación manual realizada para contrastar el modelo, junto con los estimados por Fernández Casado, para las mismas secciones que se consideraron en el capítulo 1.

---

además de la condición que liga  $u_l$  col los demás desplazamientos

$$(b) \quad C_l = C_j U_j + u_l \quad j \neq l$$

Si ahora se sustituye la última ecuación en (a) por (b) resultará inmediatamente la ligazón prevista, pudiendo resolverse el sistema

$$F_i - C_l K_{il} = (K_{ij} - C_j K_{il}) u_j \quad i, j \neq l$$

resultando finalmente los valores  $u_j$ , el  $u_l$  de (b), y un valor calculable de  $F_l$  que debe interpretarse como la reacción necesaria en la dirección  $l$  para forzar el valor ligado de  $u_l$ . Es decir, en este caso estamos interpretando que se conoce  $u_l$  como resultado de los desplazamientos ligados, y se fuerza a tal valor mediante las *reacciones exteriores*  $F_l$ . Es nuestro caso. Ahora bien, cabe también pensar que la coacción entre desplazamientos se ejerce por algún medio asociado al propio modelo —por ejemplo si consideramos despreciables los acortamientos de la viga de un pórtico en un análisis de viento, ligar desplazamientos horizontales implicaría rigidez axial extrema— de modo que la fuerza  $F_l$  que se ejerce desde el exterior sobre la estructura es acción conocida, —la del viento en el ejemplo— y mediante las coacciones se *distribuye* entre los grados de libertad ligados de tal forma que éstos se desplacen en la forma prescrita —apareciendo además si es necesario otro tipo de fuerzas *asociadas* entre dichos grados de libertad. En este caso  $F_l$  no es reacción, es una acción conocida, y su efecto debe introducirse en el sistema de ecuaciones. Esto puede hacerse de varias formas, Consúltese por ejemplo el capítulo 15 del volumen teórico del manual del programa Ansys. El resultado es un nuevo sistema de ecuaciones en el que  $F_l$  pasa a ser dato.

SECCIÓN	anchura <i>cm</i>	profundidad <i>cm</i>	tensión $\sigma_y$ <i>kp/m<sup>2</sup></i>	tensión. Fdez. Casado <i>kp/m<sup>2</sup></i>
<i>b</i>	120	170	0,68	0,78
<i>c</i>	120	170	1,82	2,23
<i>d</i>	150	170	2,68	1,56
<i>e</i>	220	350	1,68	2,30

Los resultados son de muy pequeña importancia, y, acumulados a los de carga gravitatoria, no suponen la descarga de las compresiones en ningún punto. Es evidente que, siendo la carga total de la pila del orden de las 380 t, y siendo la carga del viento del orden de las 5 t., se trata de un efecto de importancia completamente marginal. La inclinación —tangente del ángulo que forma con la vertical— de la resultante de las cargas gravitatorias más viento no supera en ningún tramo de la pila el valor de  $1,66e-2$  es decir,  $1/60$ , de modo que la excentricidad en la base de la pila de las fuerzas combinadas de viento y peso propio es del orden de los 20 cm, menor a seis centésimas del canto, lo que evidencia su nula importancia.

### Conclusiones.

- (1) Los resultados obtenidos permiten prever un modo propio de oscilación fundamental por flexión, pudiendo representarse el Acueducto mediante un modelo de ménsula. Dicha oscilación tiene una frecuencia próxima y menor a un herzio.
- (2) la oscilación depende de forma fundamental las características de elasticidad de la piedra, pero no hay precisión experimental suficiente como para poder hacer afirmaciones sobre la influencia de la existencia de las juntas, en dicho comportamiento.
- (3) para las frecuencias obtenidas, y dada la relativamente elevada flexibilidad de las ménsulas constituidas por las pilas, una limitación generalizada de las velocidades de las oscilaciones inducidas permanentemente por el tráfico exige una limitación del desplazamiento en cabeza por dicha causa a valores menores a medio milímetro.

El análisis dinámico completo del monumento requiere considerar las posibles causas de excitación, mediante registros capaces de representarlas. Para ello es usual considerar, bien registros de fenómenos concretos, —en análisis sísmico se trata de sismos de registro conocido en el tiempo— bien espectros de respuesta correspondientes a los mismos —que se construyen analizando la respuesta de osciladores de un grado de libertad ante alguno de tales acontecimientos definidos—. Avanzar en la descripción del comportamiento dinámico del monumento exige por tanto establecer registros adecuados para representar tales excitaciones.

### Gráficas.

Se incluyen a continuación gráficas representando las deformadas correspondientes a los modos de oscilación citados.

## INDICE

COMPORTAMIENTO MECÁNICO	
Introducción: Objetivos y aportaciones	1
ANÁLISIS DE LOS ESTADOS DE TENSIÓN Y DEFORMACIÓN DE LAS PILAS	
Introducción	3
Pila 107	5
Pila 105	7
Gráficas	7
CONCENTRACIONES DE TENSIÓN POR DEGRADACIÓN DE LAS JUNTAS	
Introducción	42
Modelos propuestos	43
Análisis y selección de resultados	44
Junta central: Tablas	45
Junta de borde: Tablas	47
Junta central: resultados	50
Junta de borde: resultados	52
Fisuración en prolongación de juntas paralelas a compresiones	53
Conclusiones	55
Gráficas	55
COMPORTAMIENTO TÉRMICO INTERESTACIONAL	
Introducción	117
Hip. 1: Dilatación impedida	118
Hip. 2: Dilatación sin coacción transversal	119
Hip. 3: Dilatación con coacción transversal	121
Hip. 4: Dilatación con coacción transversal infinita	124
Hip. 5: Relajación de dilatación por flexión en su plano	124
Hip. 6: Dilatación acompañada de desplazamiento lateral	125
Conclusiones	136
Anejos	138
COMPORTAMIENTO TÉRMICO DIARIO	
Introducción	140
Leyes de temperatura en la masa de piedra	140
Hip. 1: Ley sinusoidal de temperaturas en la superficie	140
Hip. 2: Análisis realista del intercambio térmico en la superficie	145
Intercambios por convección	148
Temperatura ambiente	148
Condiciones de intercambio térmico en el contorno	149
Evolución de las temperaturas en el interior del granito	151
Análisis de un modelo de dos dimensiones	153
Estados tensionales	153
Conclusiones	156
Gráficas	157

ANÁLISIS DE LA RIGIDEZ TRANSVERSAL Y COMPORTAMIENTO DINÁMICO

Introducción	185
Oscilaciones libres transversales de una pila	185
Oscilaciones libres transversales de grupos de pilas	190
Efecto del viento	192
Conclusiones	193
Gráficas	193

INDICE DE DIAPOSITIVAS

a. Pilas

a.1. Carga gravitatoria

a.1.1. Pila central

1. Modelo de pila central .....	9
2. Deformada .....	10
3. Desplazamientos verticales .....	11
4. Desplazamientos horizontales .....	12
5. Tensiones verticales .....	13
6. Tensiones horizontales .....	14
7. Tensiones tangenciales .....	15
8. Tensiones paralelas a los arcos .....	16
9. Tensiones radiales en los arcos .....	17
10. Direcciones principales .....	18
11. Direcciones principales. Zona del sotabanco .....	19

a.1.2 Pila tipo

1. Modelo de pila tipo .....	20
2. Deformada .....	21
3. Desplazamientos verticales .....	22
4. Desplazamientos verticales. Primera línea de arcos .....	23
5. Desplazamientos horizontales .....	24
6. Tensiones verticales .....	25
7. Tensiones horizontales .....	26
8. Tensiones tangenciales .....	27
9. Tensiones paralelas a los arcos .....	28
10. Tensiones radiales en los arcos .....	29
11. Direcciones principales .....	30

a.2 Acción térmica

a.2.1 Pila central

1. Desplazamientos horizontales .....	31
2. Tensiones verticales .....	32
3. Tensiones horizontales .....	33
4. Tensiones horizontales. Zona del sotabanco .....	34
5. Tensiones tangenciales .....	35
6. Direcciones principales. Arcos y sotabanco .....	36

a.2.2 Pila tipo

1. Desplazamientos horizontales .....	37
2. Tensiones verticales .....	38
3. Tensiones horizontales. Arcos .....	39
4. Tensiones tangenciales .....	40
5. Direcciones principales. Arcos .....	41

b. Junta entre sillares.

b.1. Junta lateral

b.1.1. Junta lateral B/C = 2

1. Modelo y direcciones principales .....	57
2. Tensiones verticales .....	58
3. Tensiones horizontales .....	59
4. Tensiones tangenciales .....	60
5. Tensiones principales de compresión .....	61
6. Tensiones principales de tracción .....	62
7. Tensiones tangenciales máximas .....	63
8. Campo de desplazamientos verticales .....	64

b.1.2 Junta lateral B/C = 4

1. Modelo y direcciones principales .....	65
2. Tensiones verticales .....	66
3. Tensiones horizontales .....	67
4. Tensiones tangenciales .....	68
5. Tensiones principales de compresión .....	69
6. Tensiones principales de tracción .....	70
7. Tensiones tangenciales máximas .....	71
8. Campo de desplazamientos verticales .....	72

b.1.3 Junta lateral B/C = 8

1. Modelo y direcciones principales .....	73
2. Tensiones verticales .....	74
3. Tensiones horizontales .....	75
4. Tensiones tangenciales .....	76
5. Tensiones principales de compresión .....	77
6. Tensiones principales de tracción .....	78
7. Tensiones tangenciales máximas .....	79
8. Campo de desplazamientos verticales .....	80

b.2. Junta central

b.2.1. Junta central B/C = 2

1. Modelo y direcciones principales .....	81
2. Tensiones verticales .....	82
3. Tensiones horizontales .....	83
4. Tensiones tangenciales .....	84
5. Tensiones principales de compresión .....	85
6. Tensiones principales de tracción .....	86
7. Tensiones tangenciales máximas .....	87
8. Campo de desplazamientos verticales .....	88

b.2.2 Junta central B/C = 4

1. Modelo y direcciones principales .....	89
2. Tensiones verticales .....	90
3. Tensiones horizontales .....	91
4. Tensiones tangenciales .....	92
5. Tensiones principales de compresión .....	93
6. Tensiones principales de tracción .....	94
7. Tensiones tangenciales máximas .....	95
8. Campo de desplazamientos verticales .....	96

b.2.3 Junta central B/C = 8

1. Modelo y direcciones principales .....	97
2. Tensiones verticales .....	98
3. Tensiones horizontales .....	99
4. Tensiones tangenciales .....	100
5. Tensiones principales de compresión .....	101
6. Tensiones principales de tracción .....	102
7. Tensiones tangenciales máximas .....	103
8. Campo de desplazamientos verticales .....	104

b.3 Fisuración en la junta central

1 a 4. Progresión de las fisuras para B/C = 2 .....	105
5 a 8. Progresión de las fisuras para B/C = 4 .....	109
5 a 8. Progresión de las fisuras para B/C = 8 .....	113

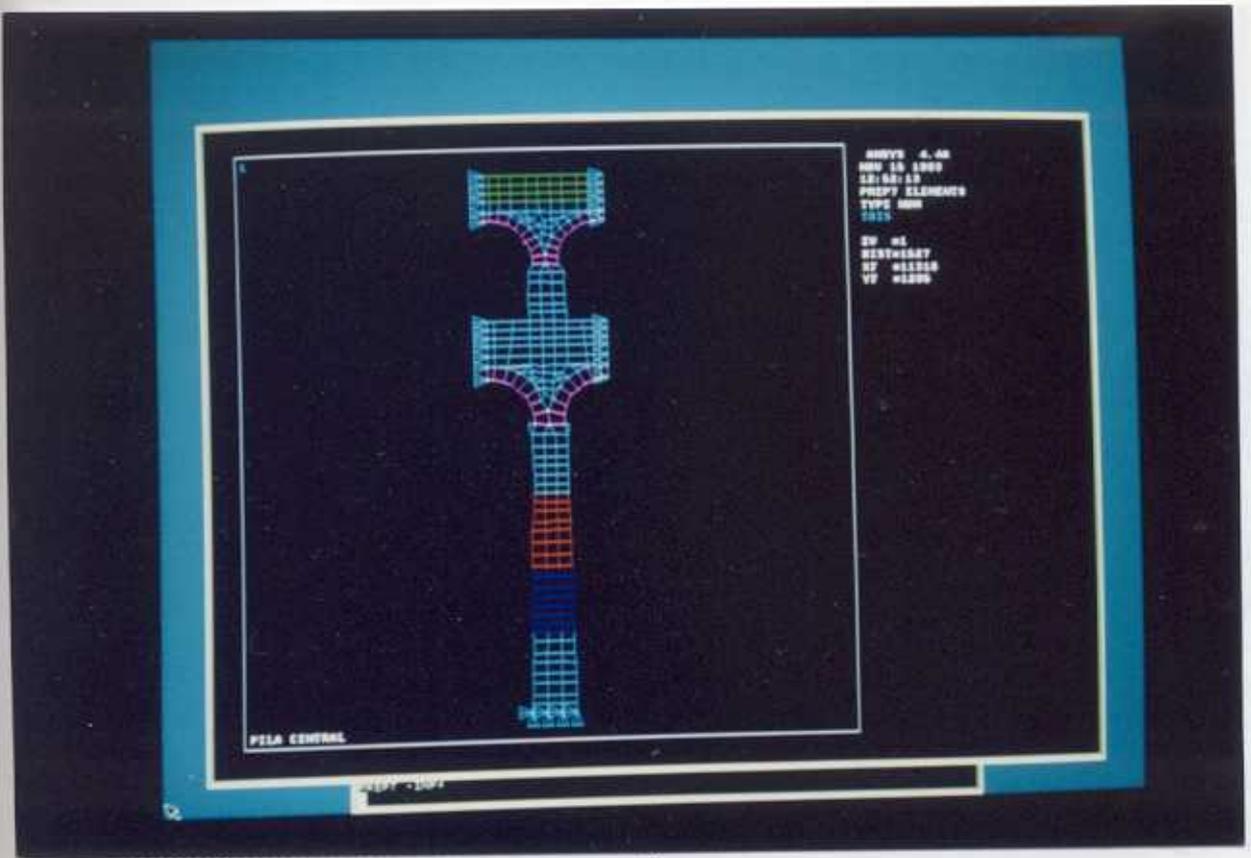
c. Comportamiento térmico diario

1. Comportamiento térmico diario. Temperaturas diarias (H.0) .....	159
2. Comportamiento térmico diario. Temperaturas Hora 5 .....	160
3. Comportamiento térmico diario. Temperaturas Hora 9 .....	161
4. Comportamiento térmico diario. Temperaturas Hora 14 .....	162
5. Comportamiento térmico diario. Temperaturas Hora 18 .....	163
6. Comportamiento térmico diario. Temperaturas Hora 24 .....	164
7. Comportamiento térmico diario. Esfuerzos dilatación 5° .....	165
8. Tensiones diarias .....	166
9. Comportamiento térmico diario. Esfuerzos Hora 5 (S1) .....	167
10. Comportamiento térmico diario. Esfuerzos Hora 5 (S3) .....	168
11. Comportamiento térmico diario. Esfuerzos Hora 5 (D.P.) .....	169
12. Comportamiento térmico diario. Tensiones corte derecho. Hora 5 .....	170
13. Comportamiento térmico diario. Esfuerzos Hora 9 (S1) .....	171
14. Comportamiento térmico diario. Esfuerzos Hora 9 (S3) .....	172
15. Comportamiento térmico diario. Esfuerzos Hora 9 (D.P.) .....	173
16. Comportamiento térmico diario. Tensiones corte derecho. Hora 9 .....	174
17. Comportamiento térmico diario. Esfuerzos Hora 14 (S1) .....	175
18. Comportamiento térmico diario. Esfuerzos Hora 14 (S3) .....	176
19. Comportamiento térmico diario. Esfuerzos Hora 14 (SXY) .....	177
20. Comportamiento térmico diario. Esfuerzos Hora 14 (D.P.) .....	178
21. Comportamiento térmico diario. Tensiones corte derecho. Hora 14 .....	179
22. Comportamiento térmico diario. Tensiones corte inferior. Hora 14 .....	180
23. Comportamiento térmico diario. Esfuerzos Hora 18 (S1) .....	181
24. Comportamiento térmico diario. Esfuerzos Hora 18 (S3) .....	182
25. Comportamiento térmico diario. Esfuerzos Hora 18 (D.P.) .....	183
26. Comportamiento térmico diario. Tensiones corte derecho. Hora 18 .....	184

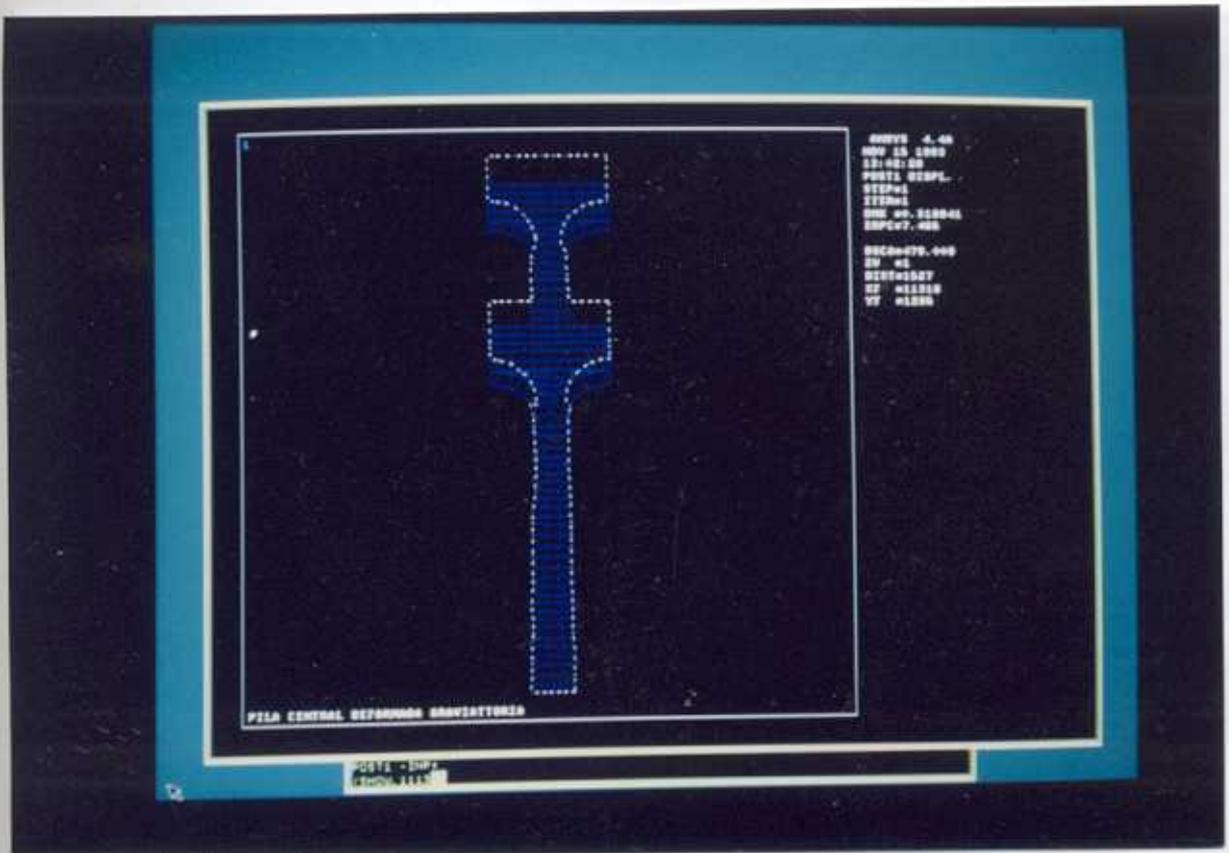
d. Modelo volumétrico de la pila tipo

1. Modelo .....	194
2. Deformada de viento .....	195
3. Tensiones verticales de viento. Vista lateral .....	196
4. Tensiones verticales de viento. Cara a sotavento .....	197
5. Tensiones verticales de viento. Cara a barlovento .....	198
6. Deformada para el 1 <sup>er</sup> modo de oscilación (ménsula) .....	199

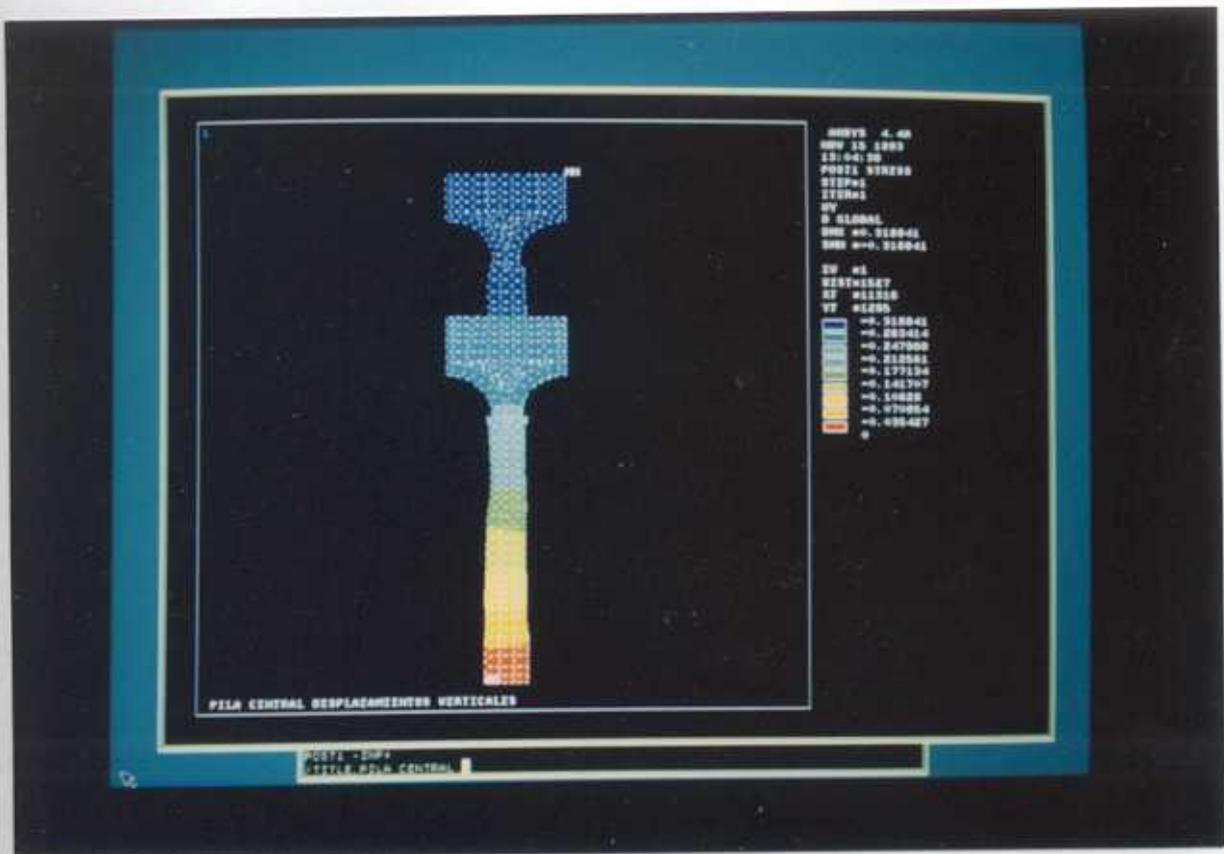




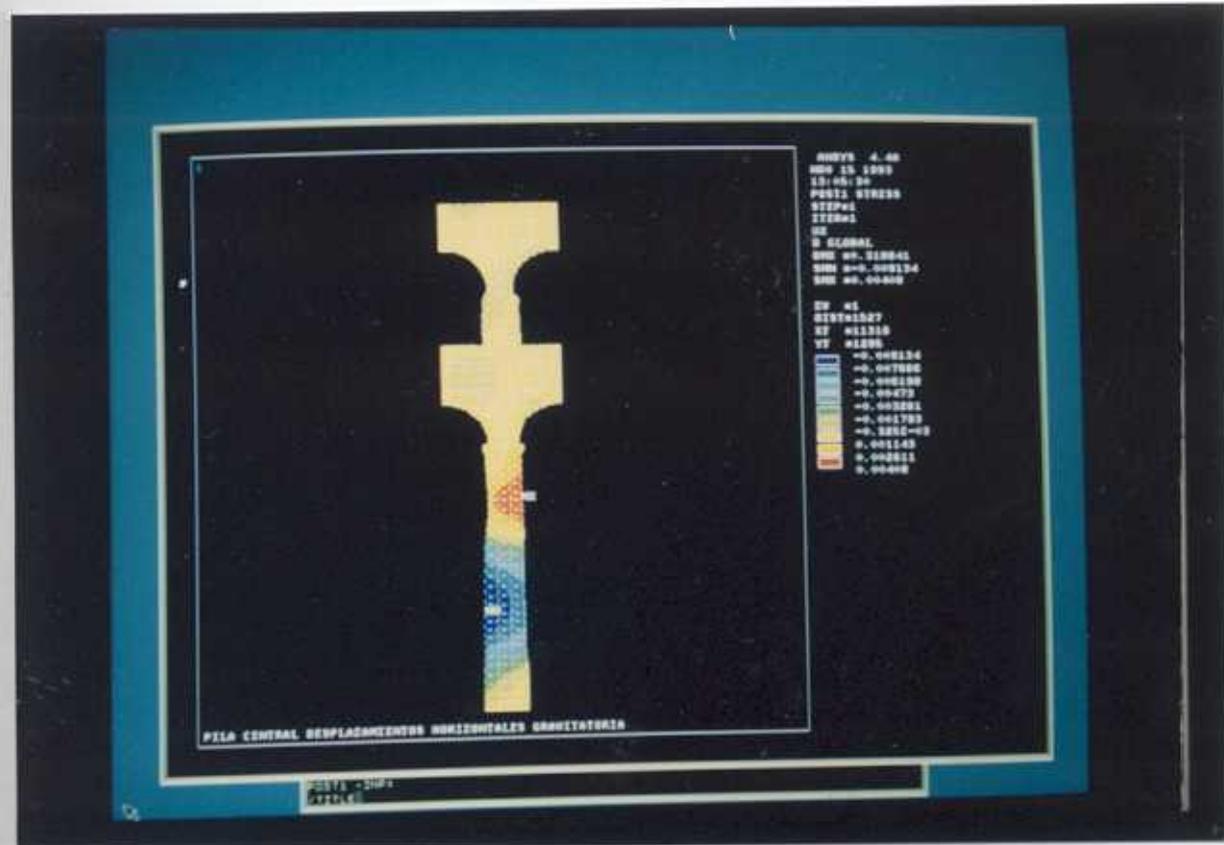
9



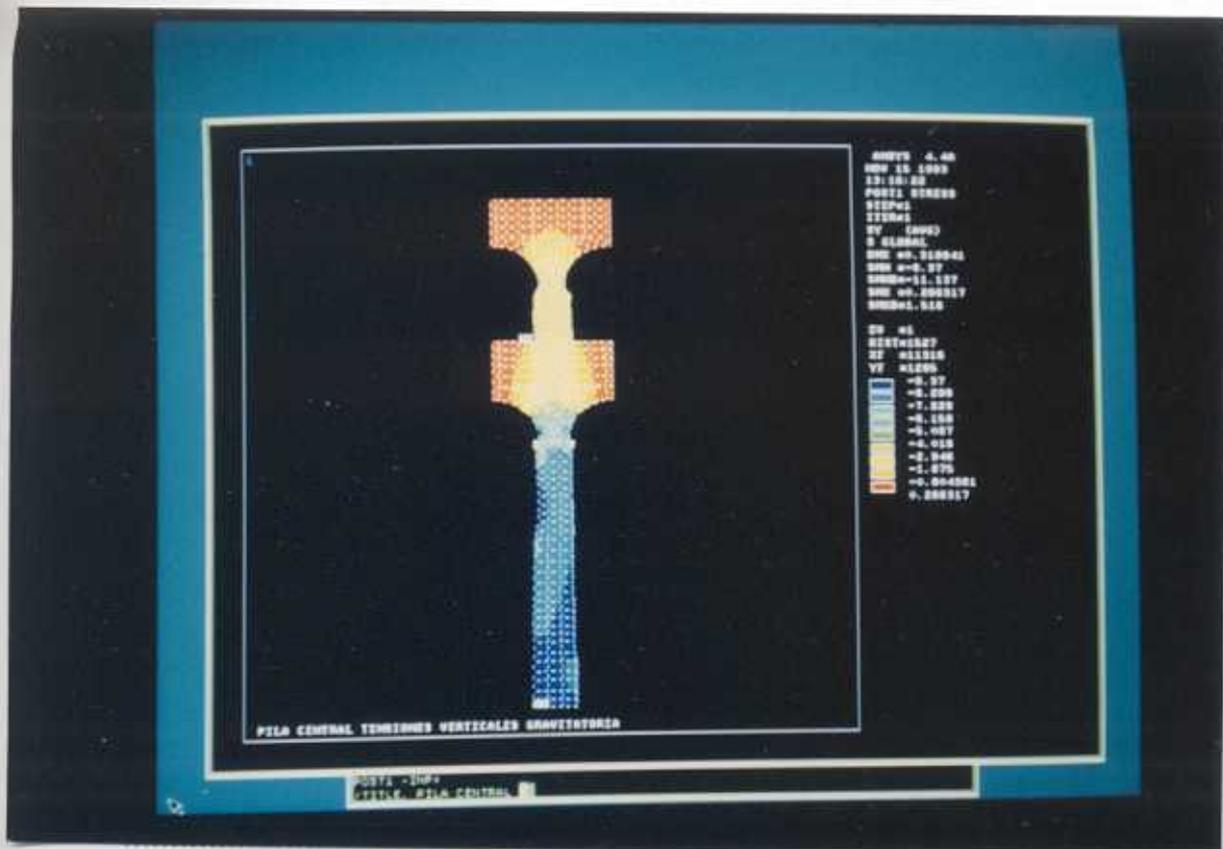
10



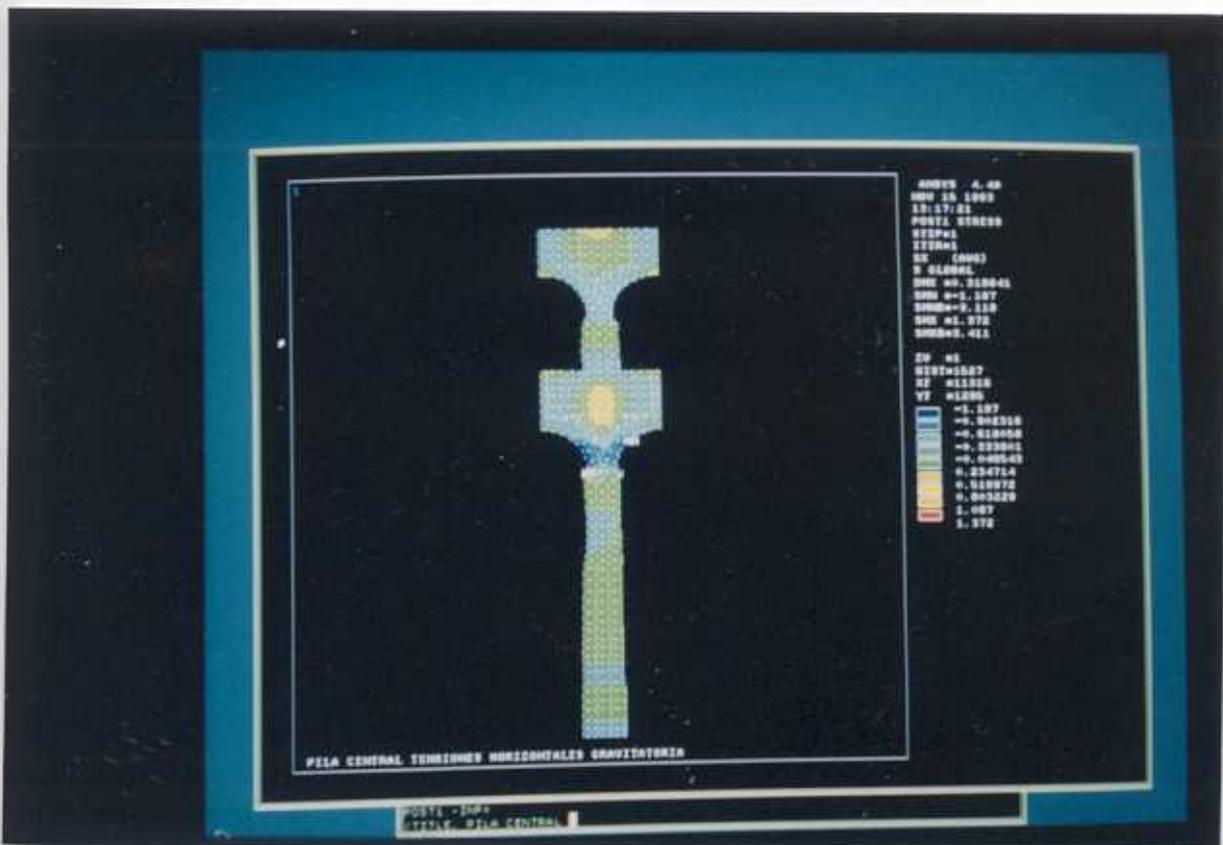
11



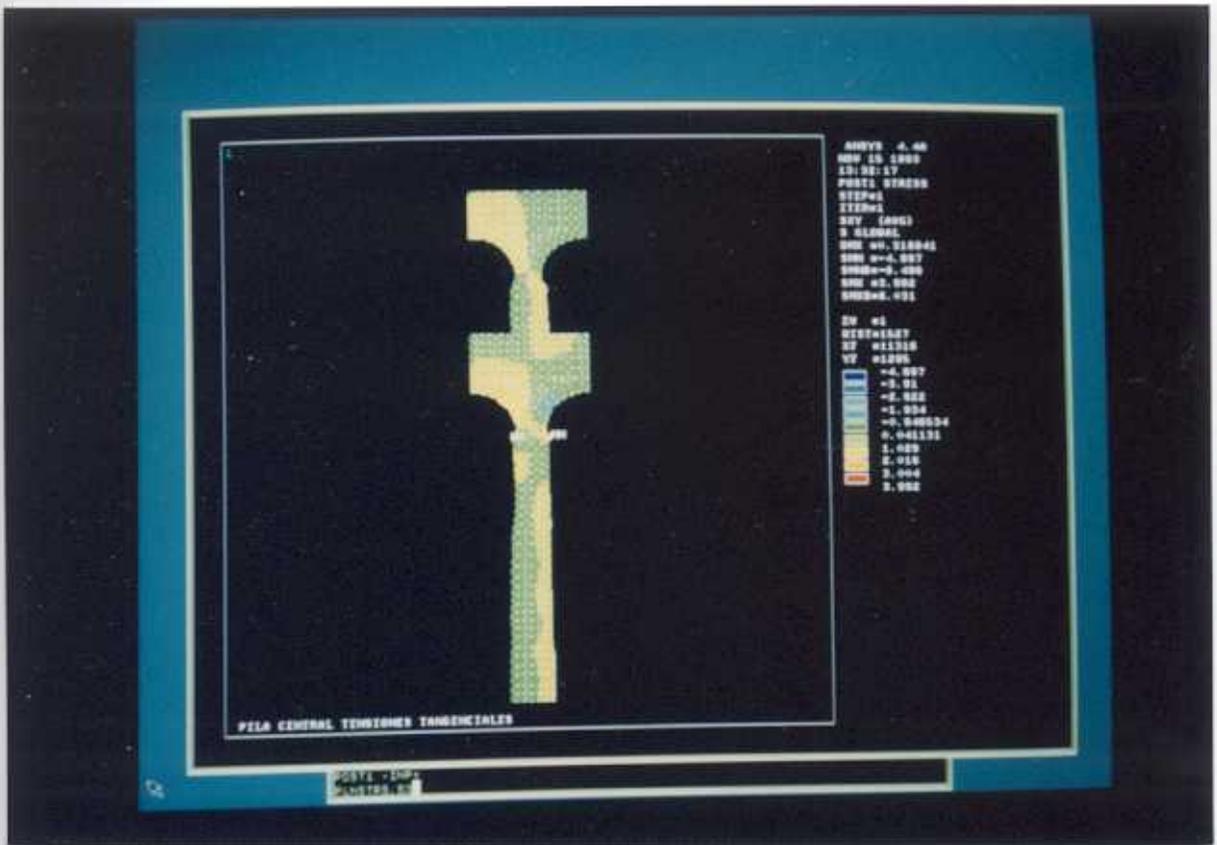
12



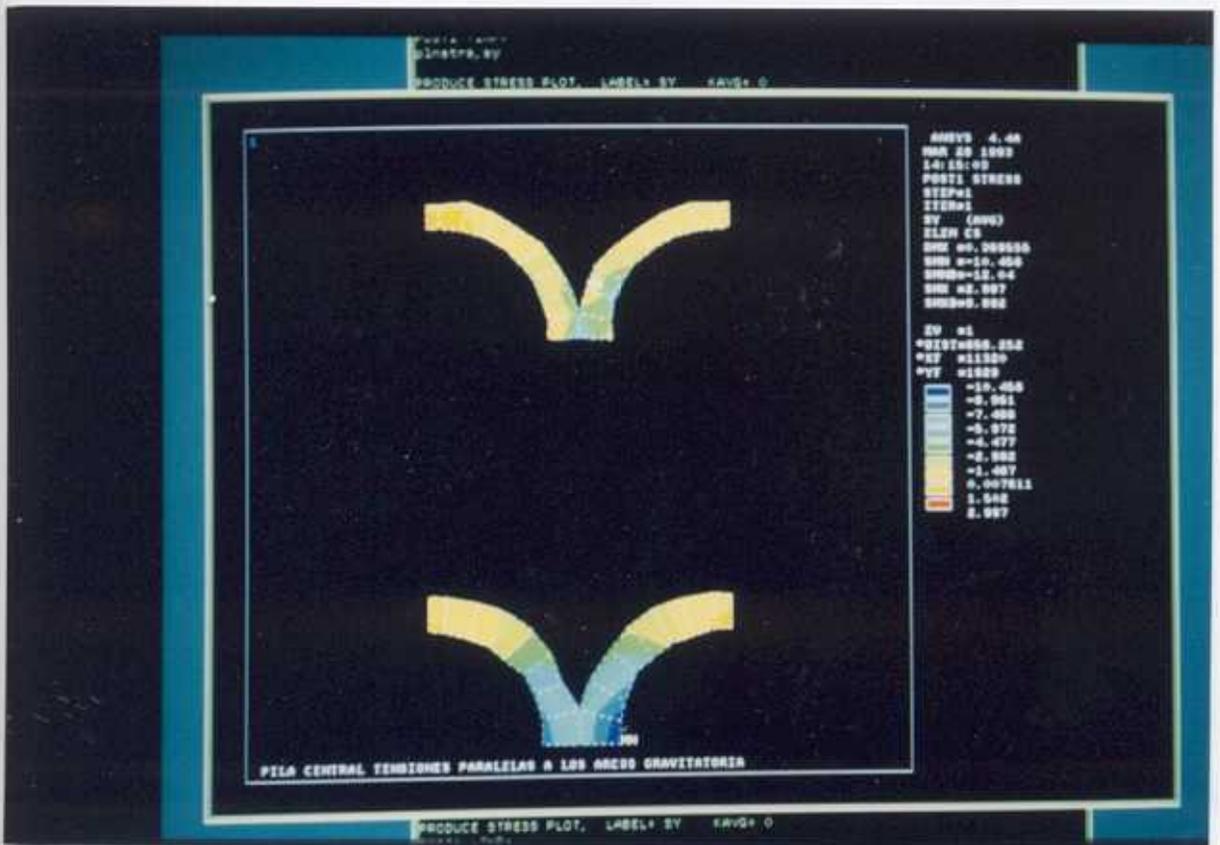
13



14

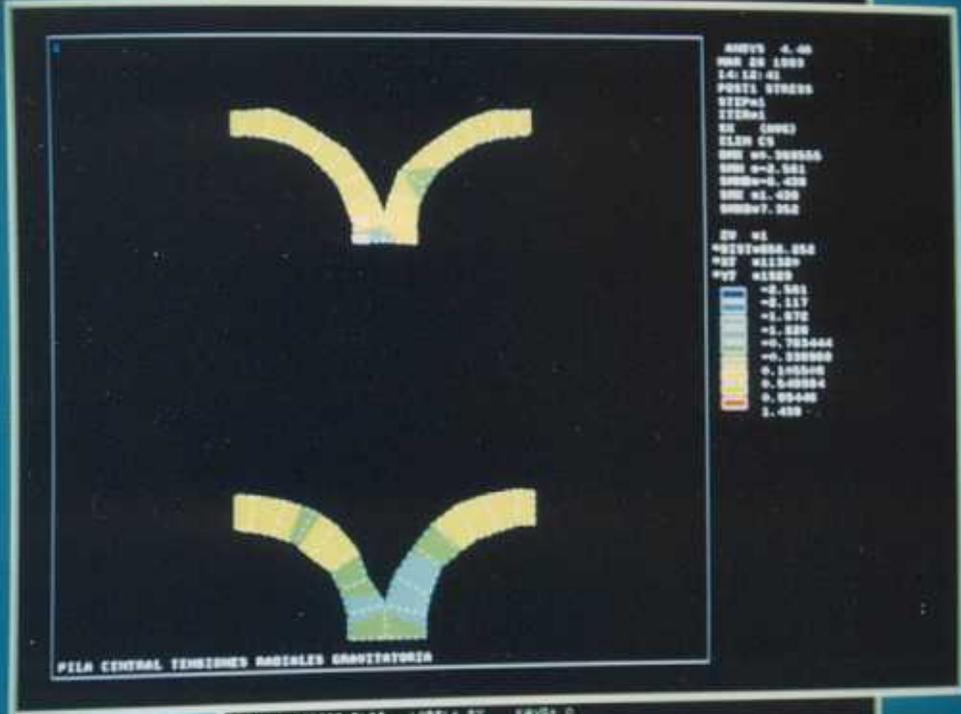


15

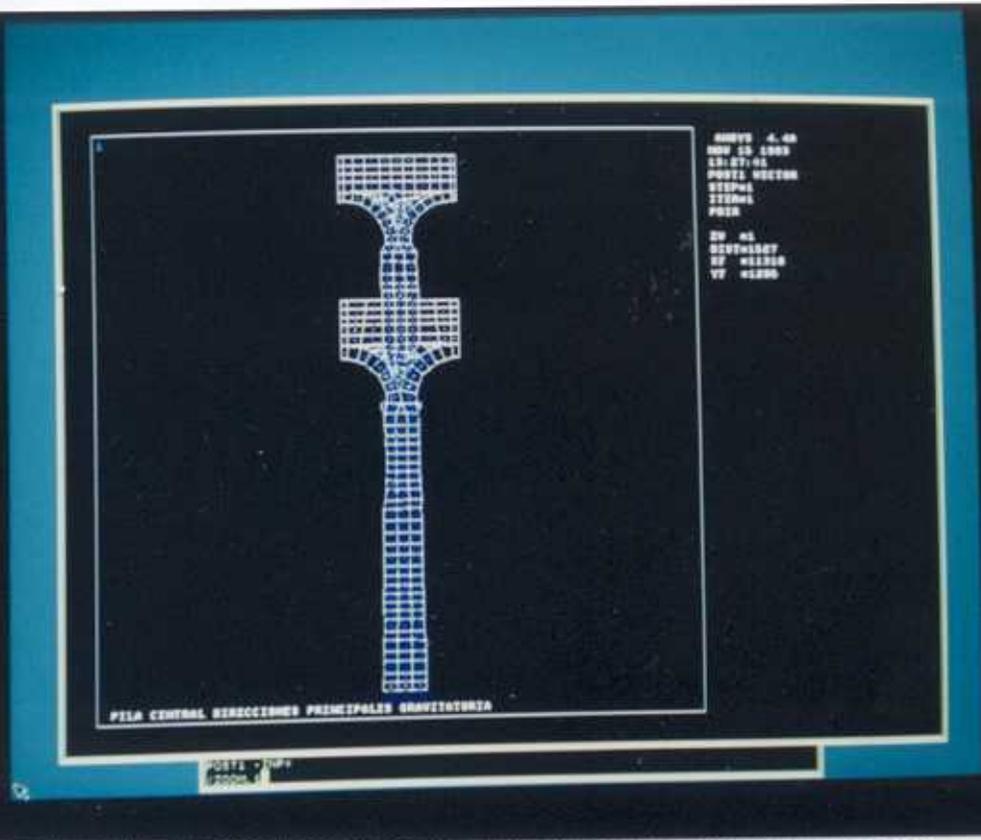


16

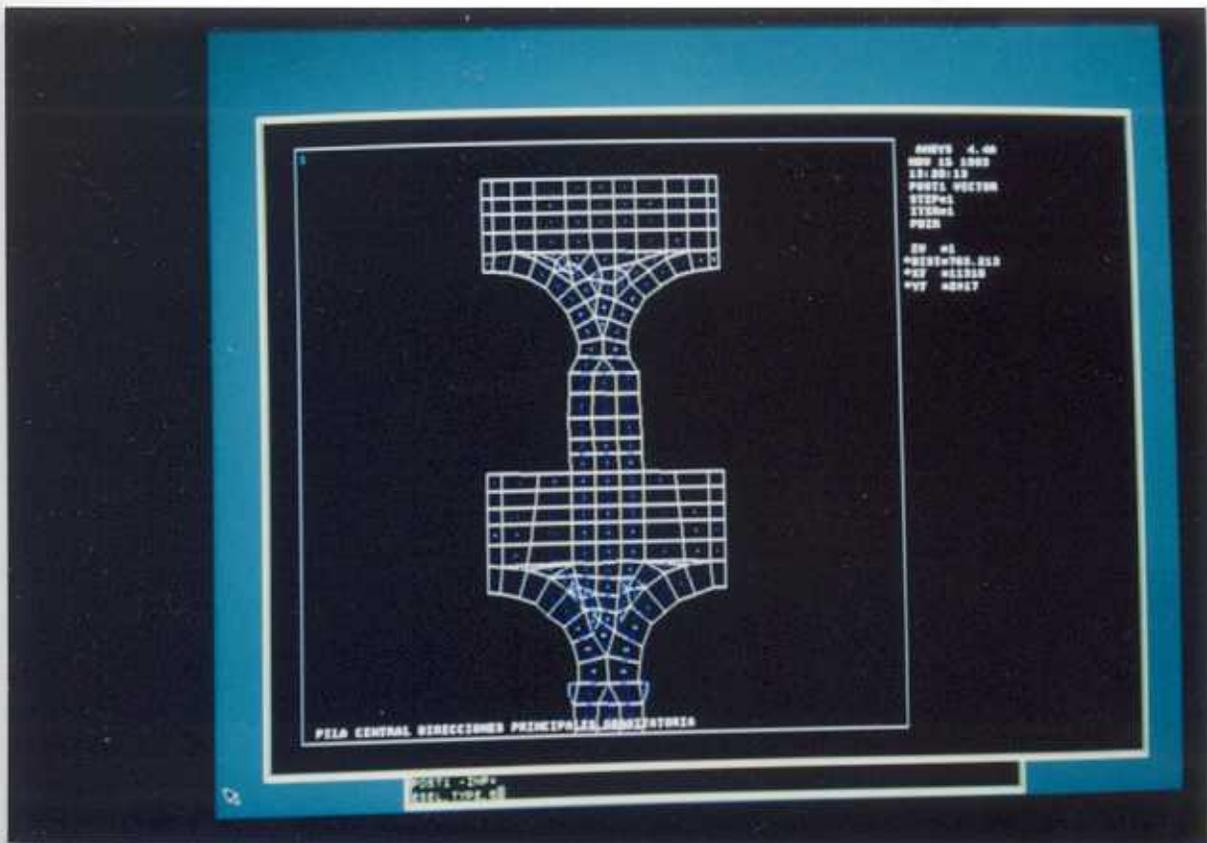
\*\*\*\*\* ENTER HELP, ERROR FOR AN EXPLANATION OF ANSYS ERROR ESTIMATION \*\*\*\*\*  
 POST1 -2MP  
 21MAY78, UK



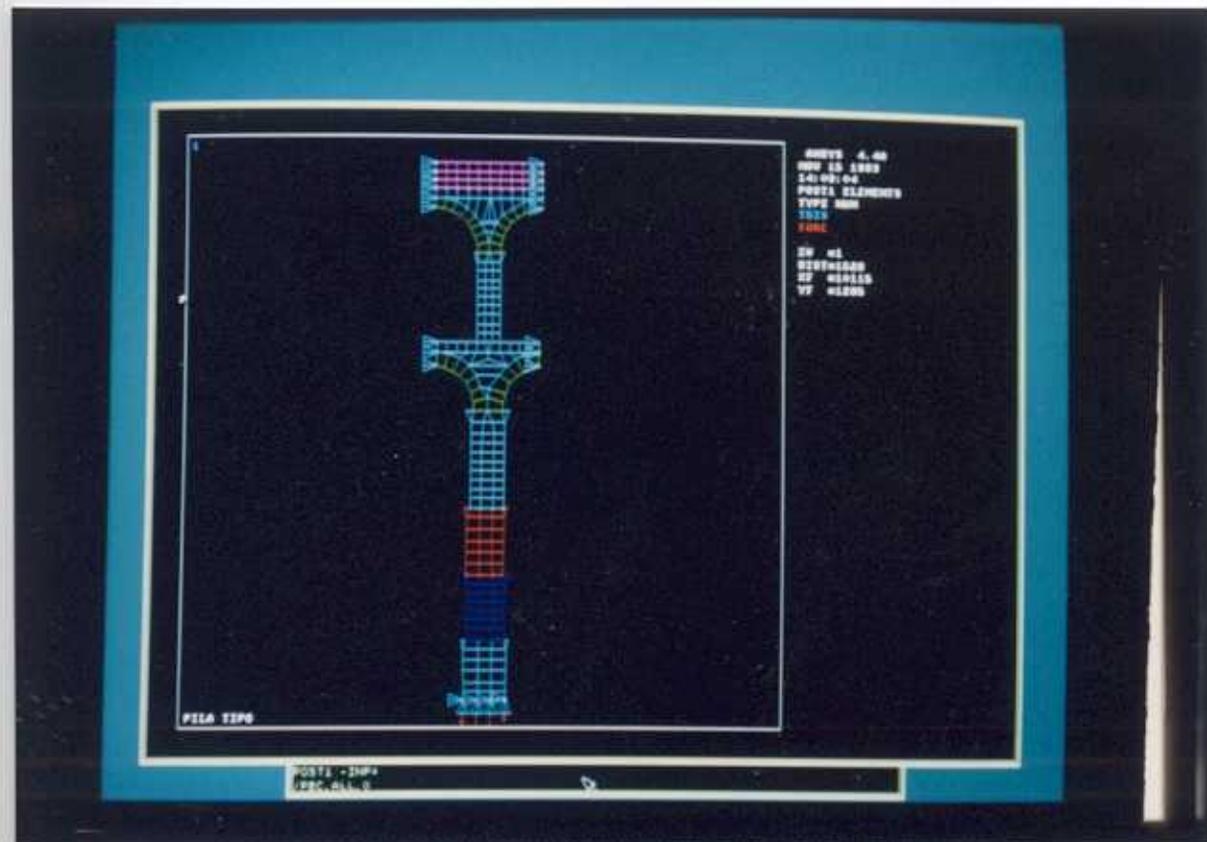
PRODUCE STRESS PLOT, LABEL=SI, PAVIS=0  
 \*\*\*\*\*



POST1 -2MP  
 21MAY78, UK



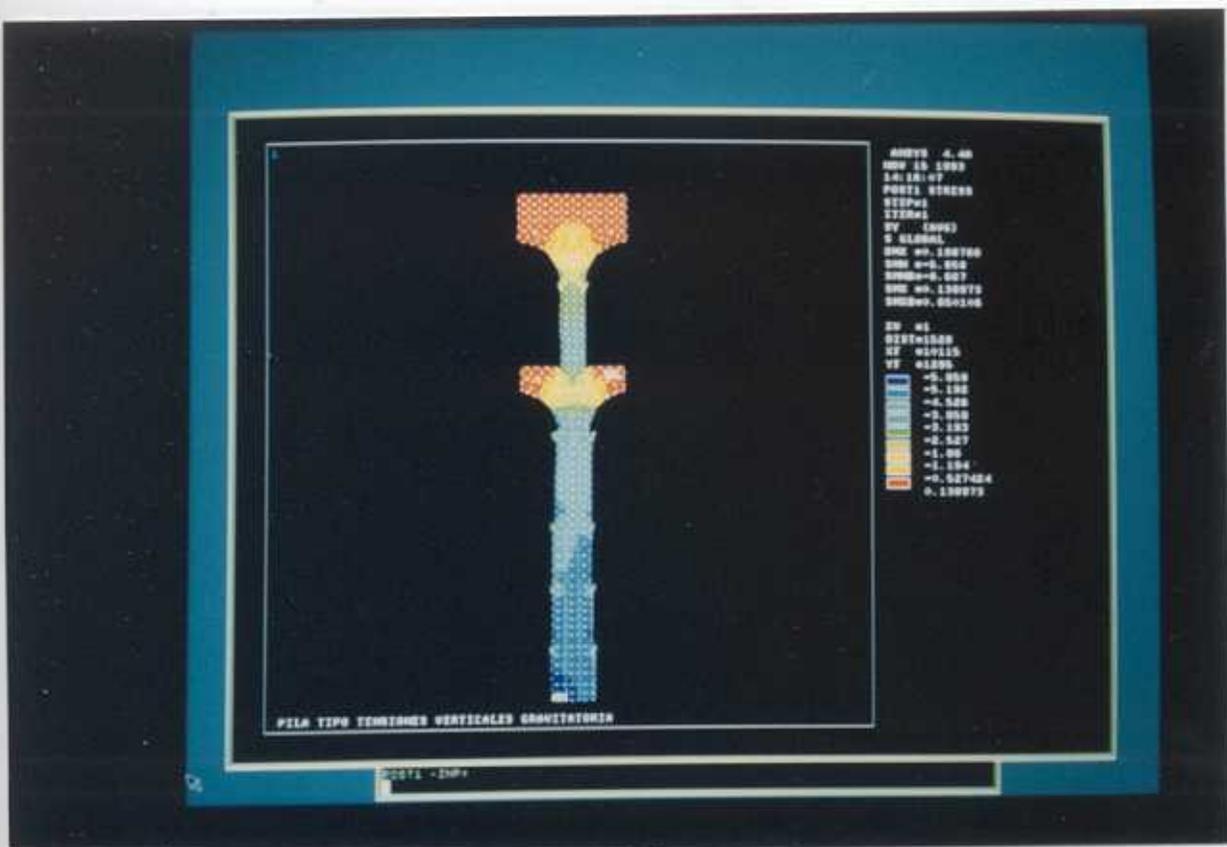
19



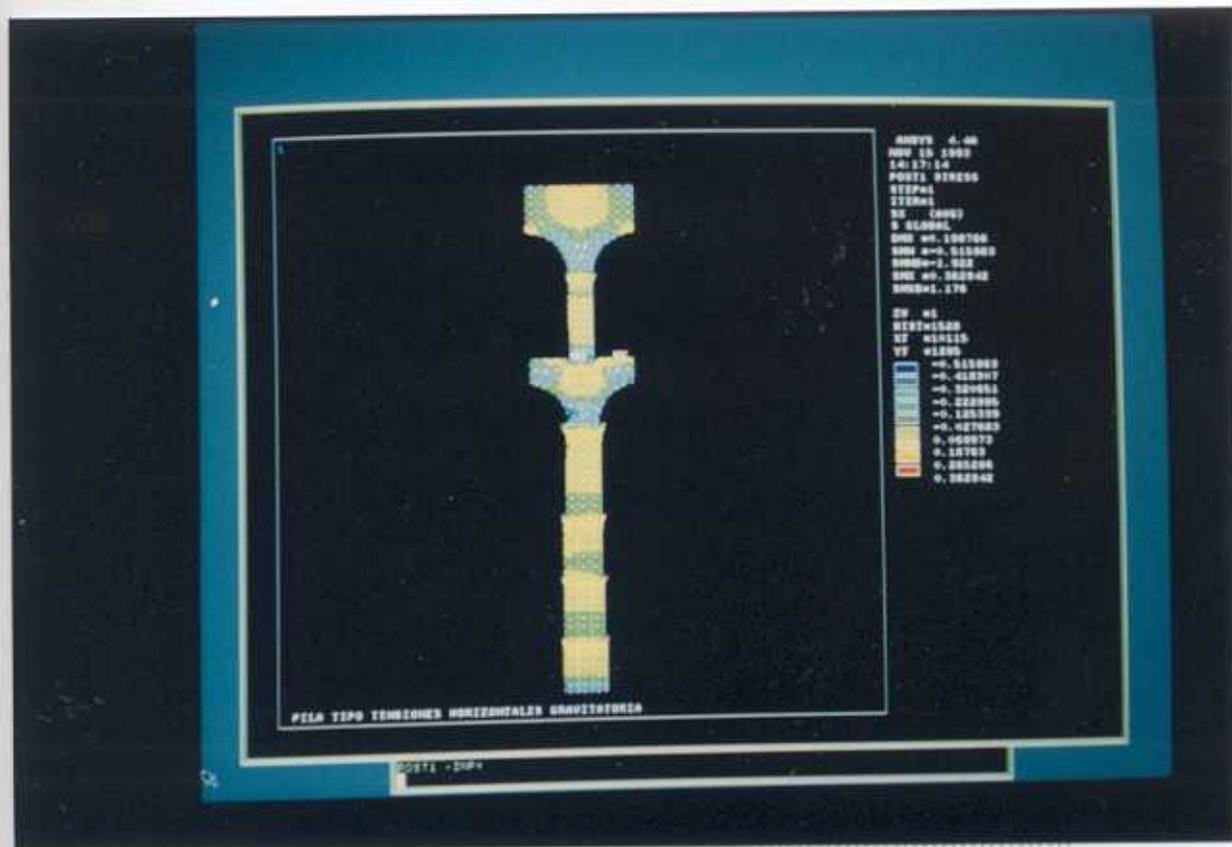
20







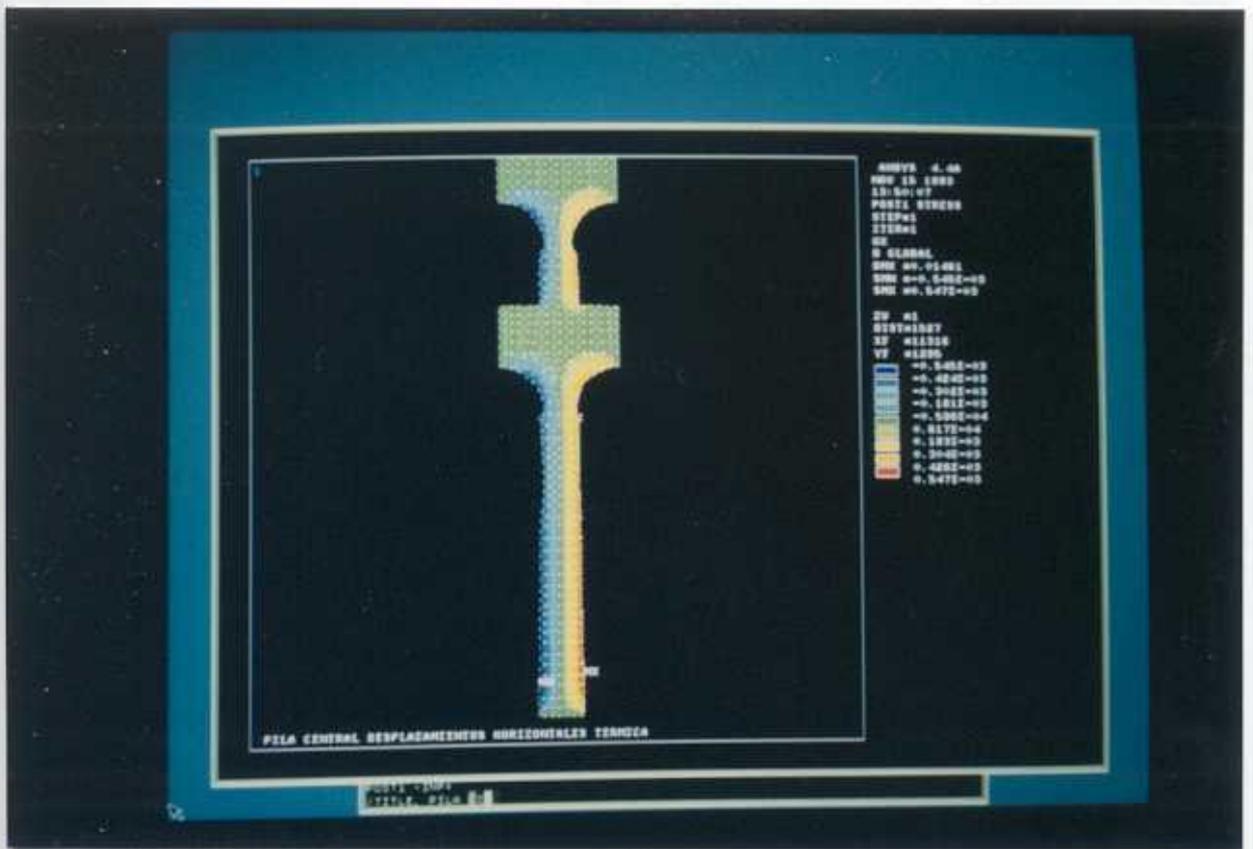
25



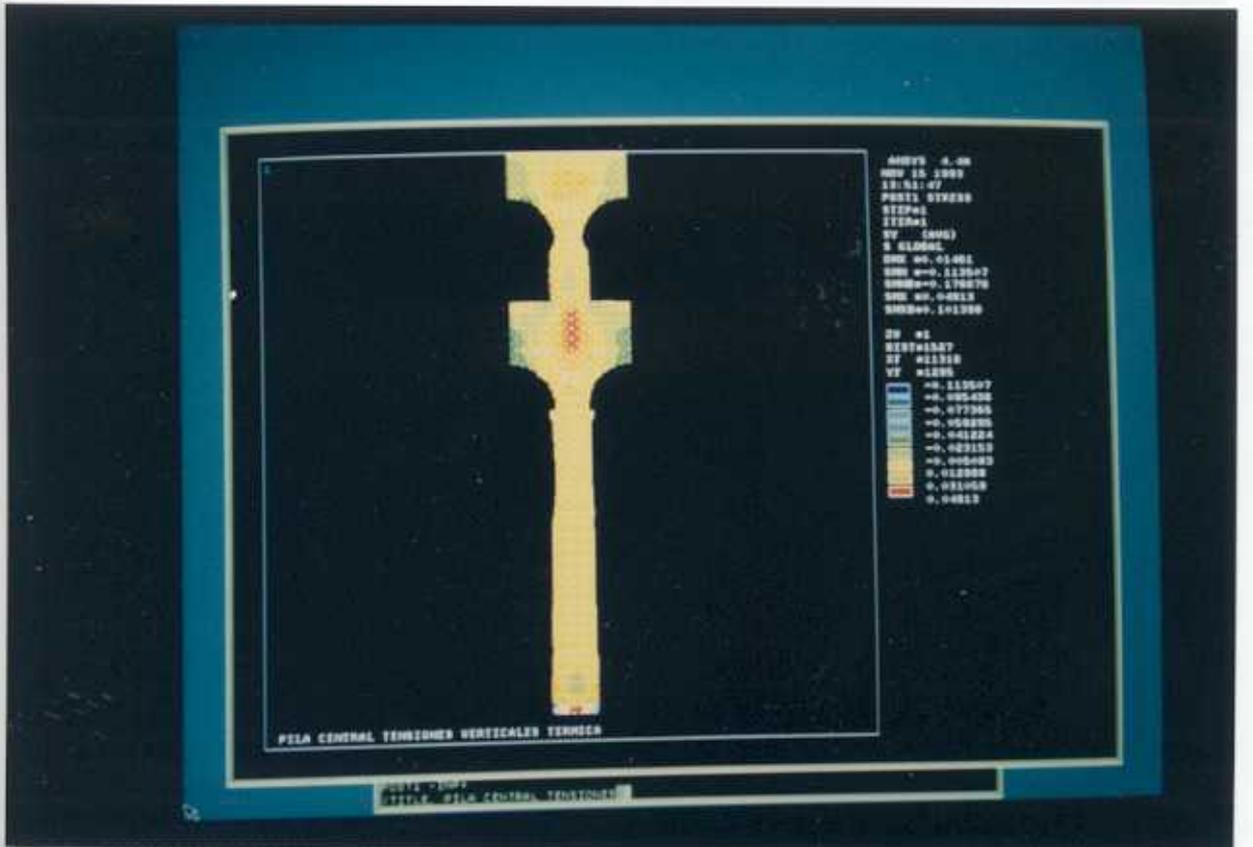
26



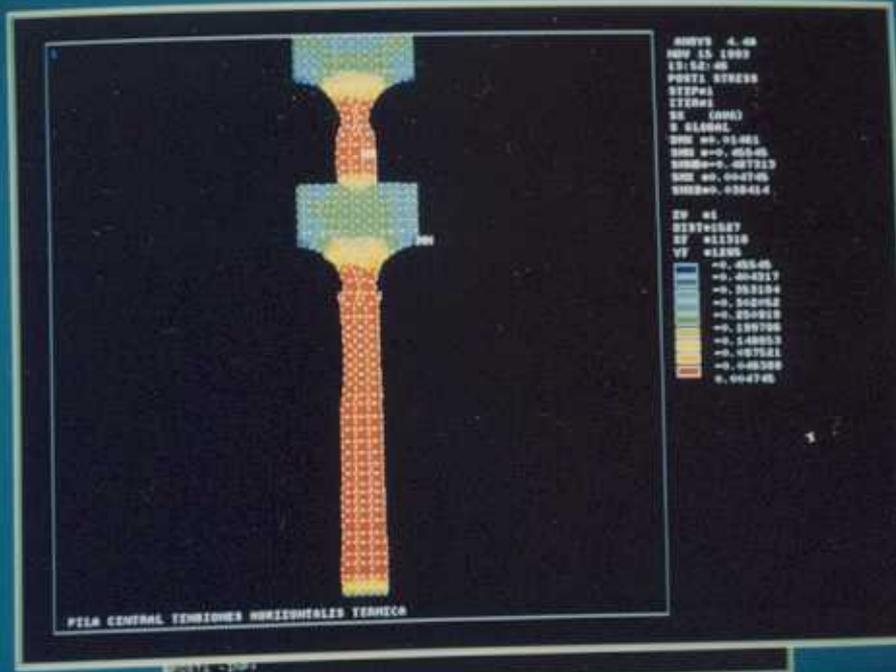




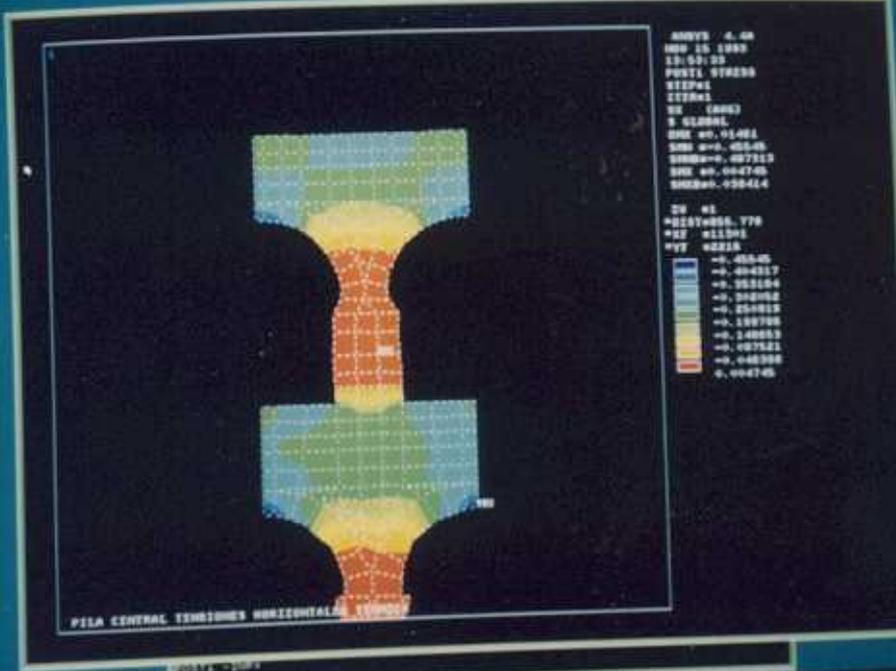
31



32

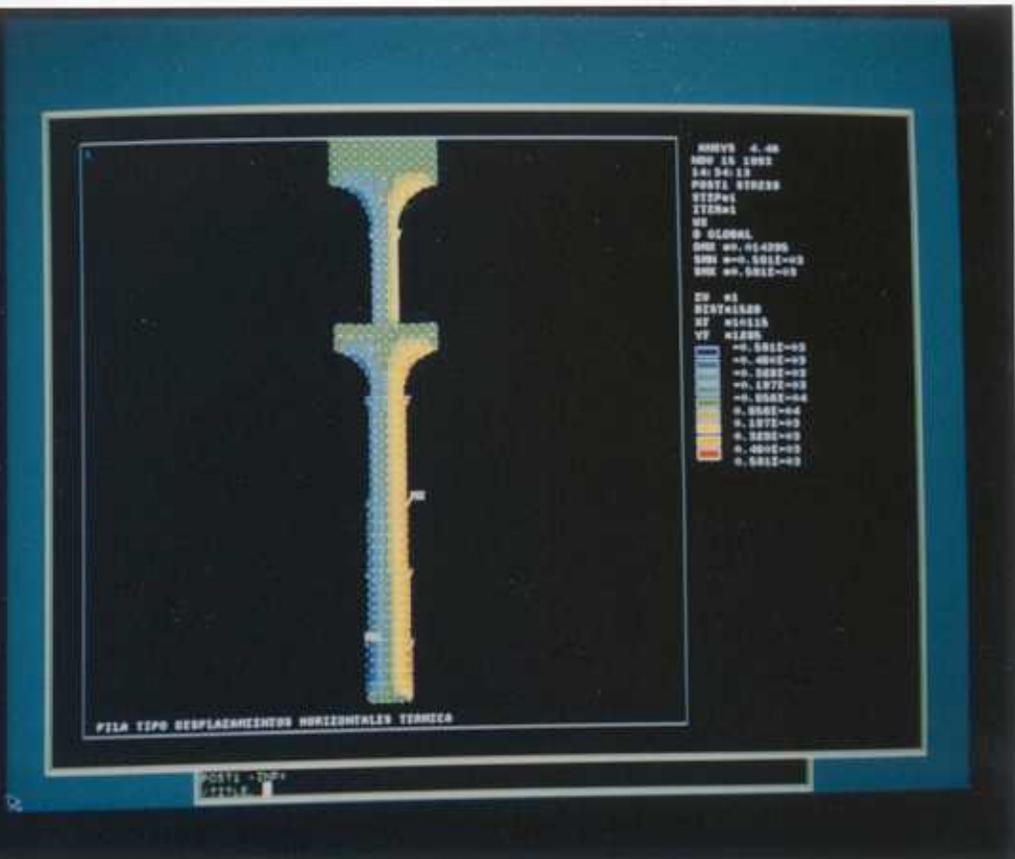


33

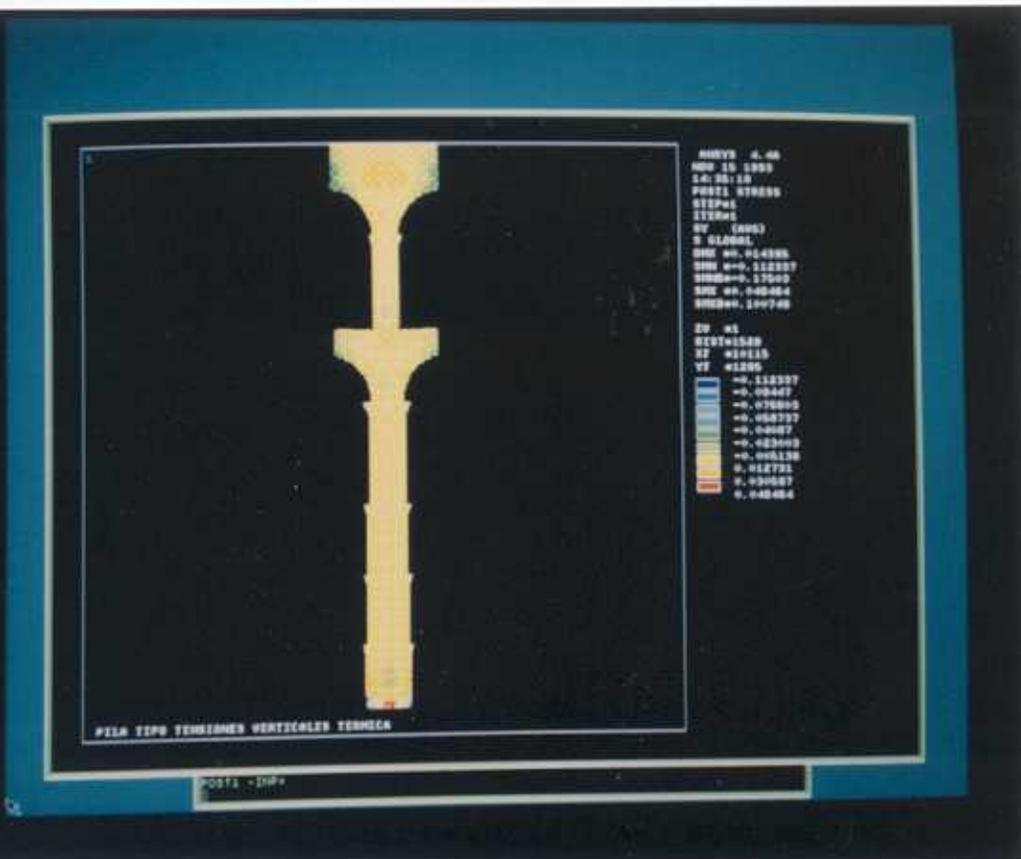


34



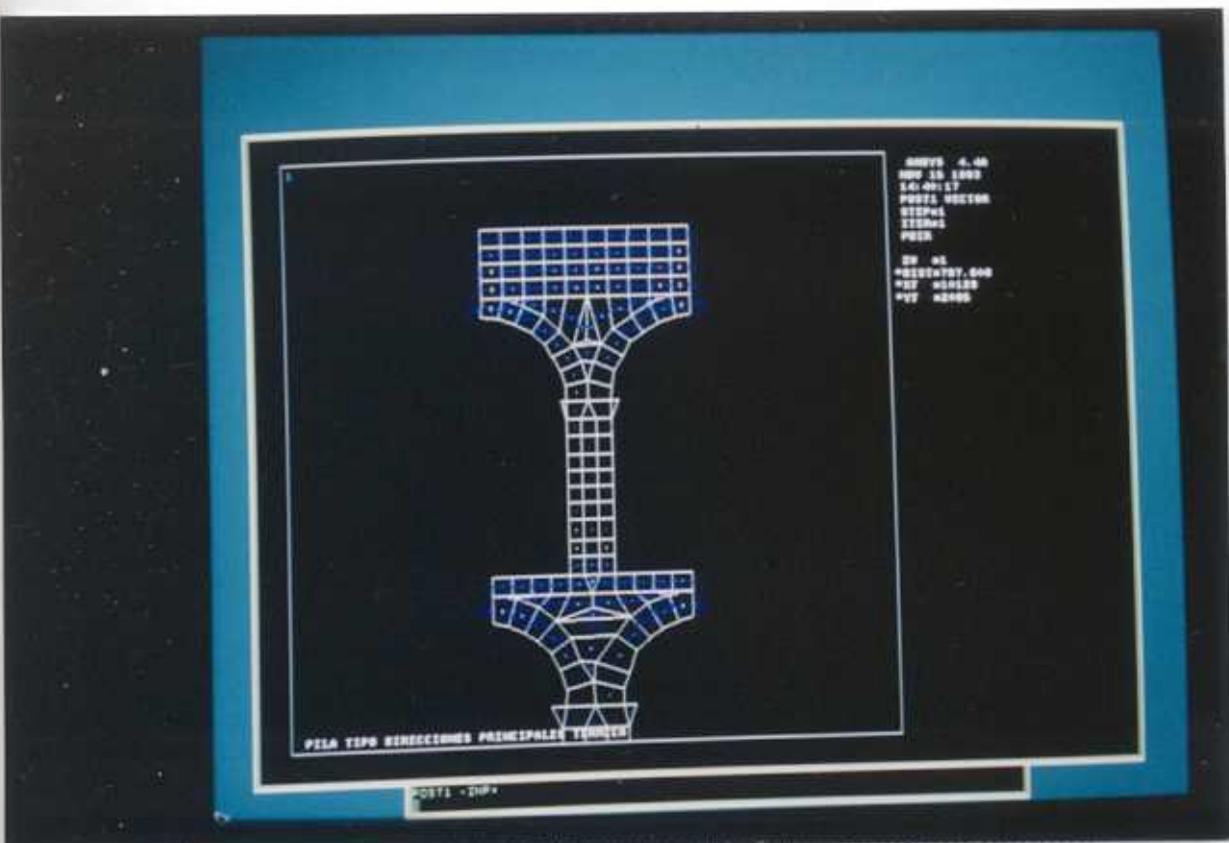


37

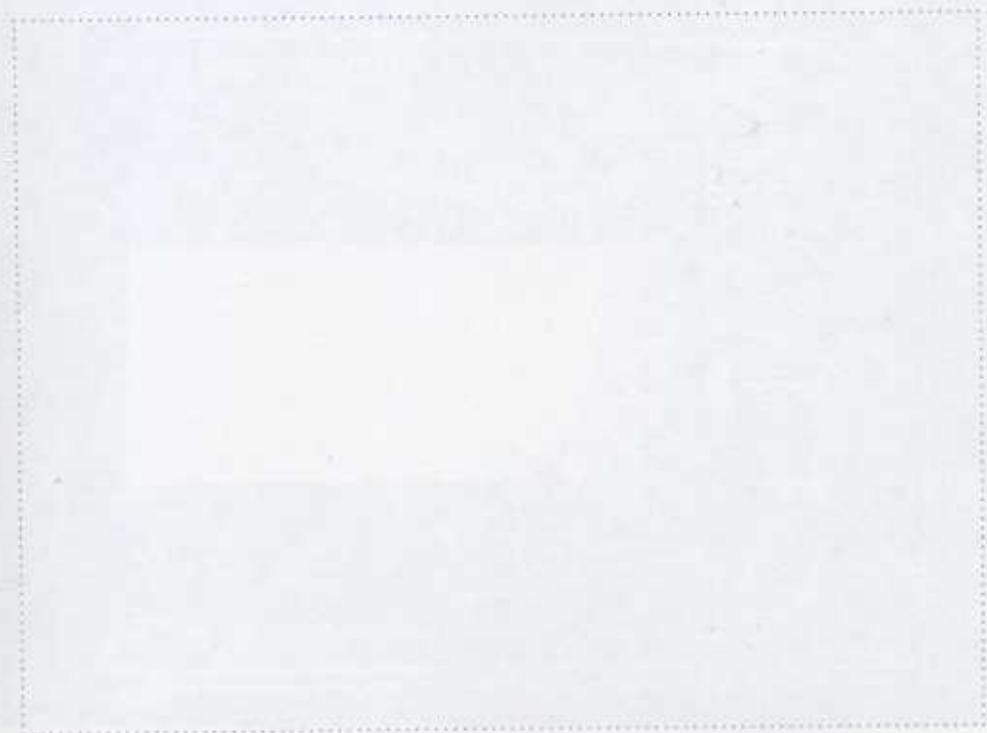


38





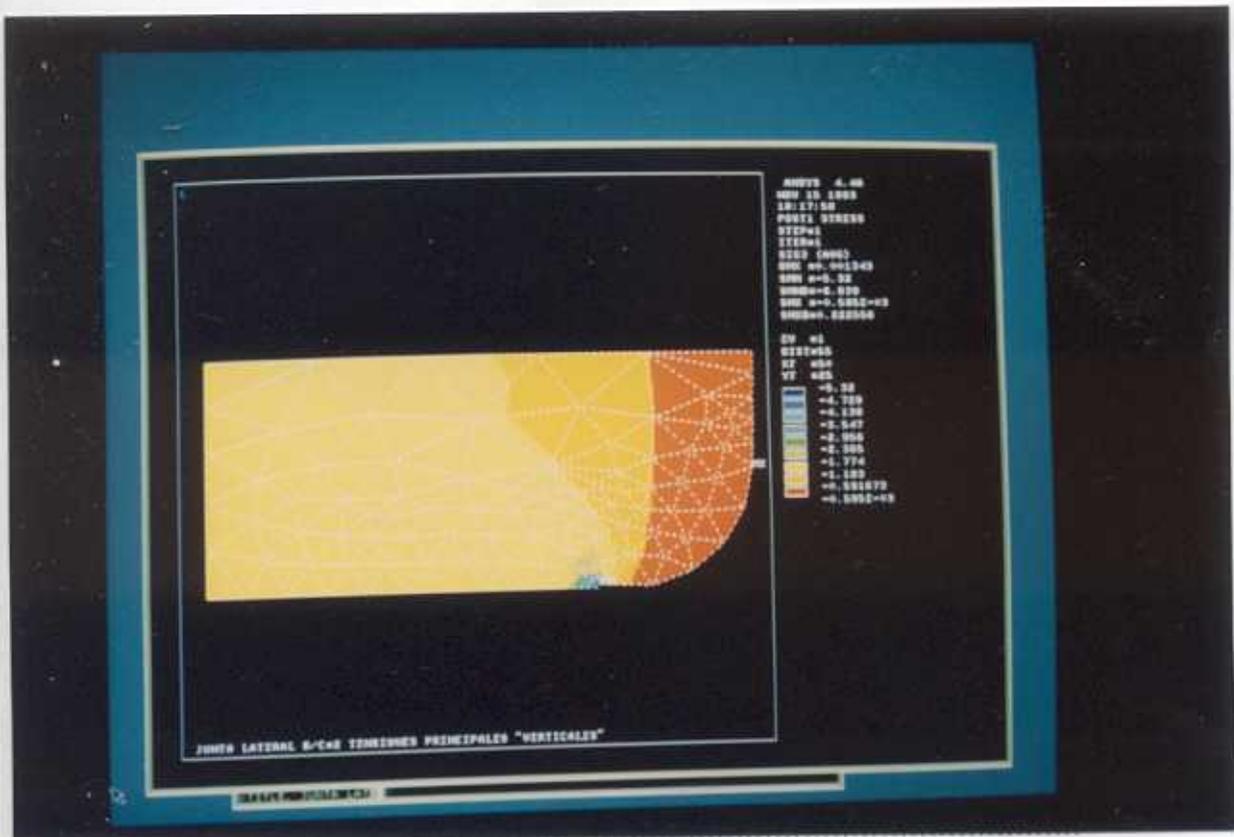
41



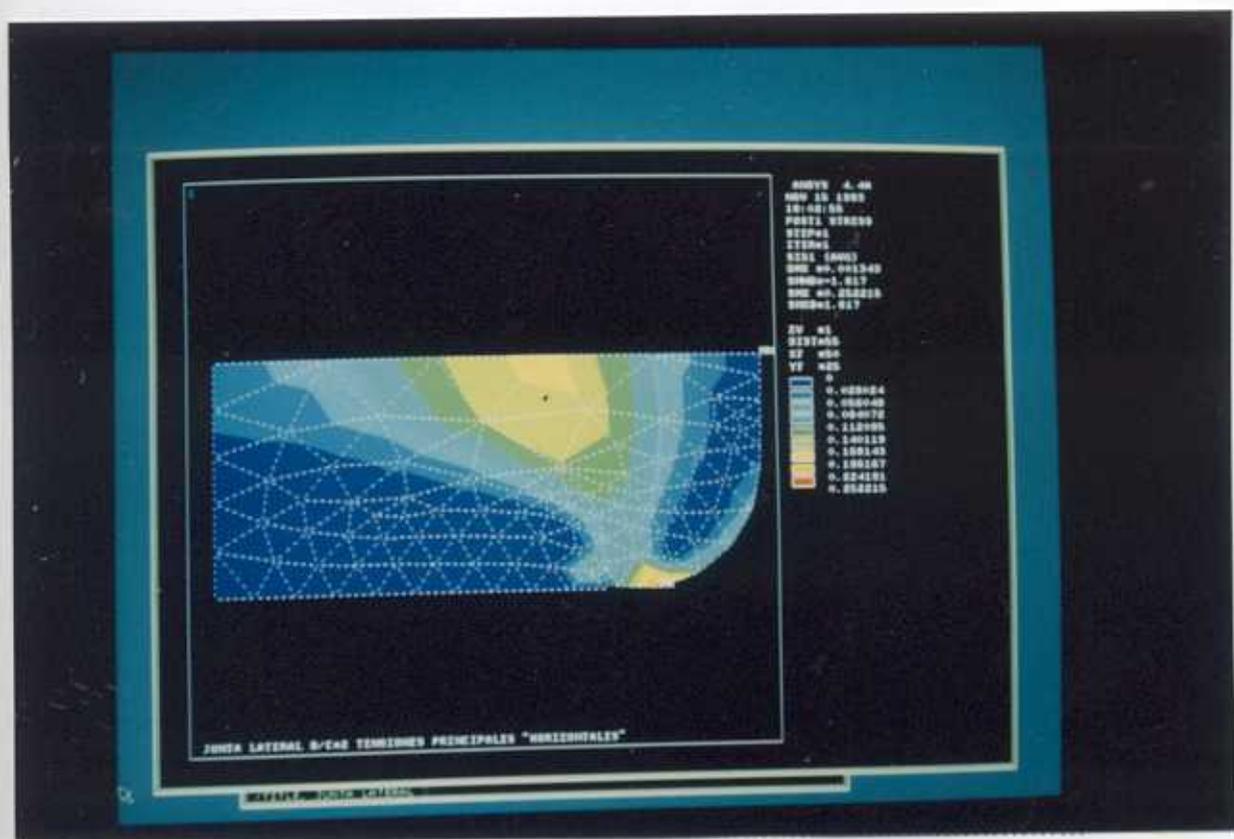
42





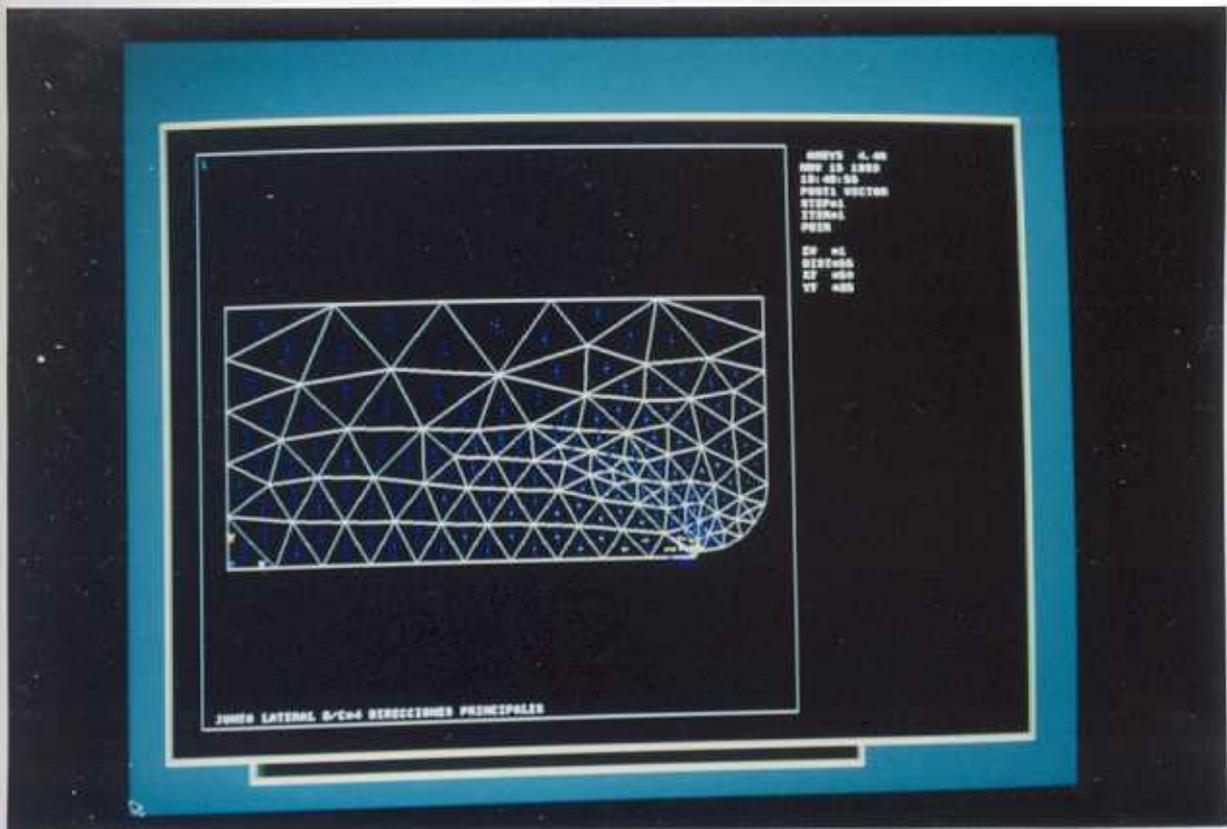


61

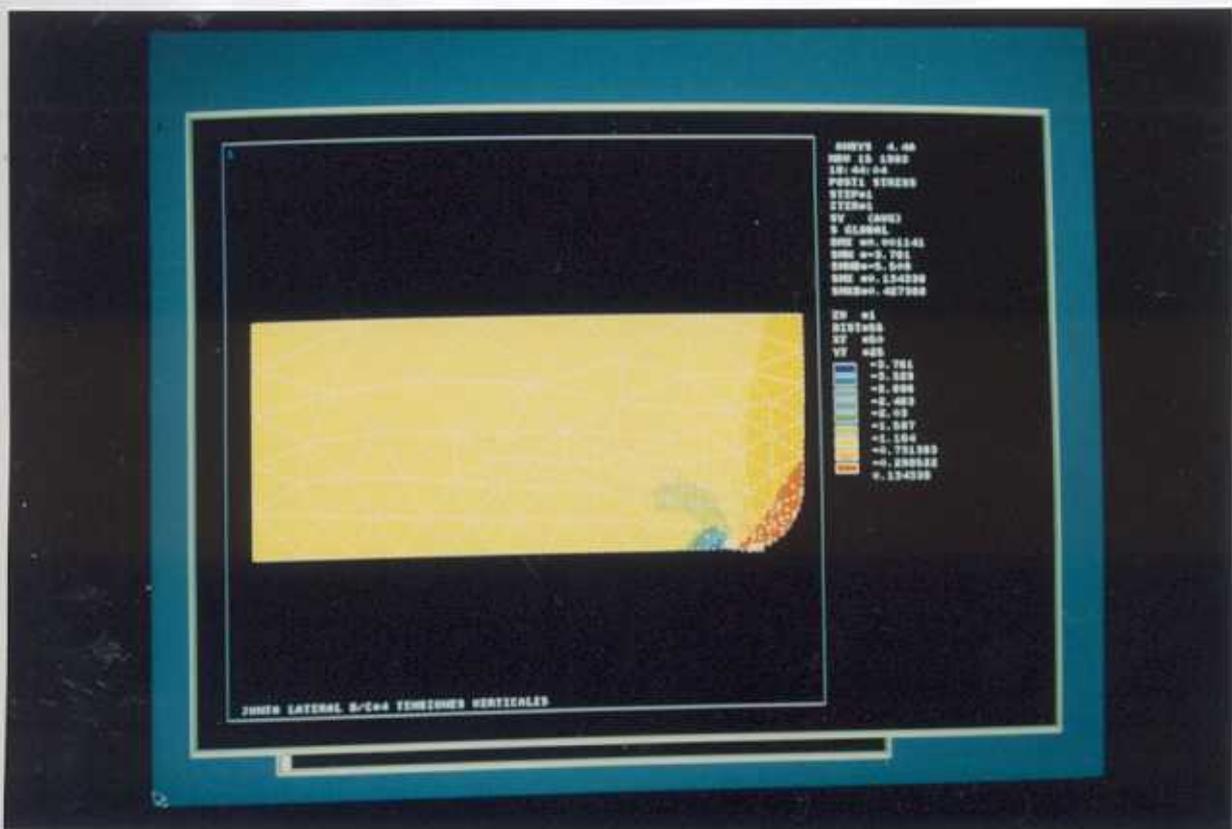


62



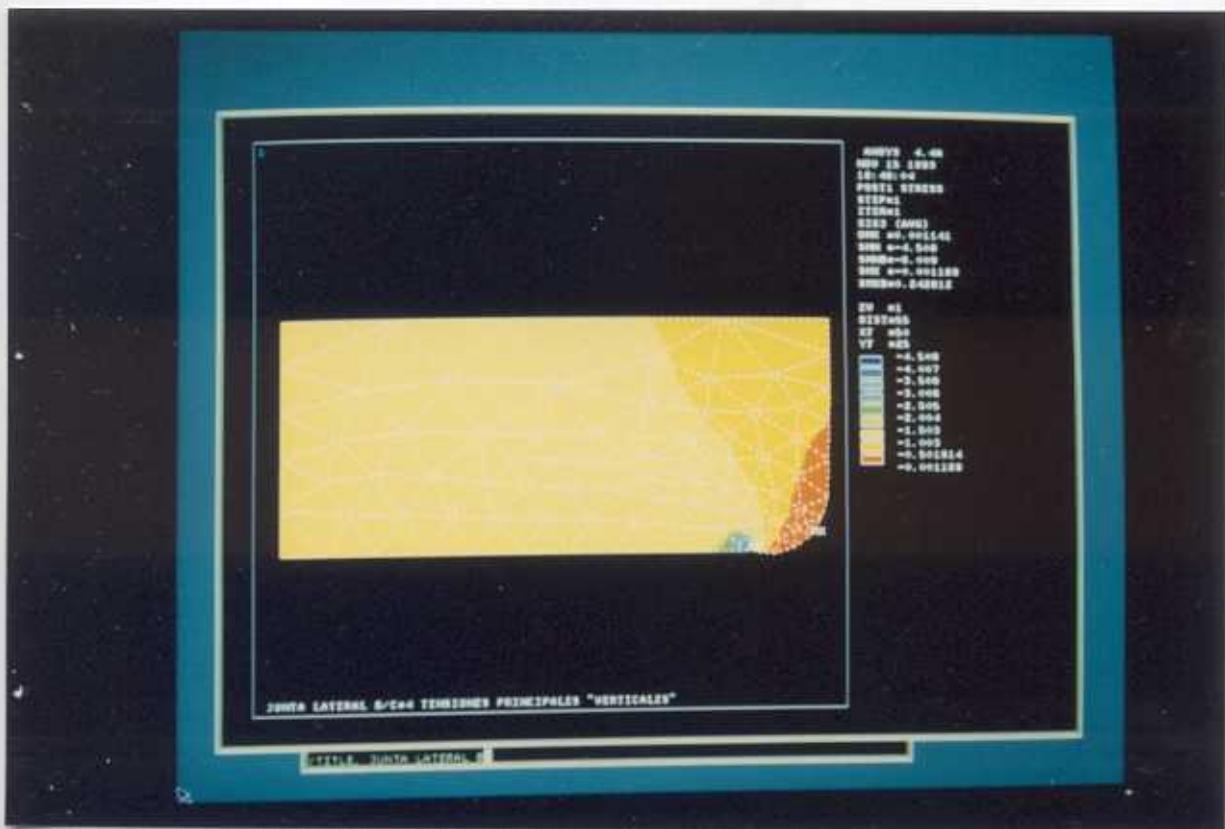


65

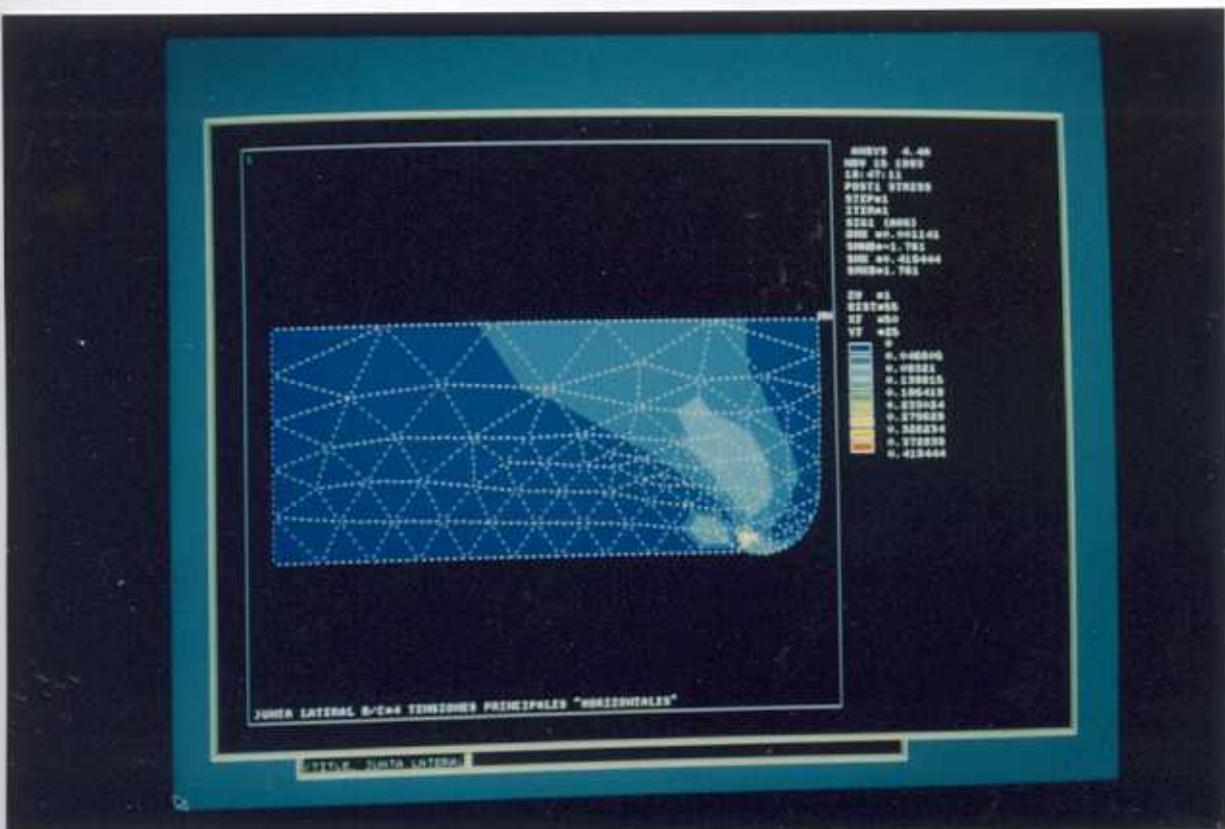


66

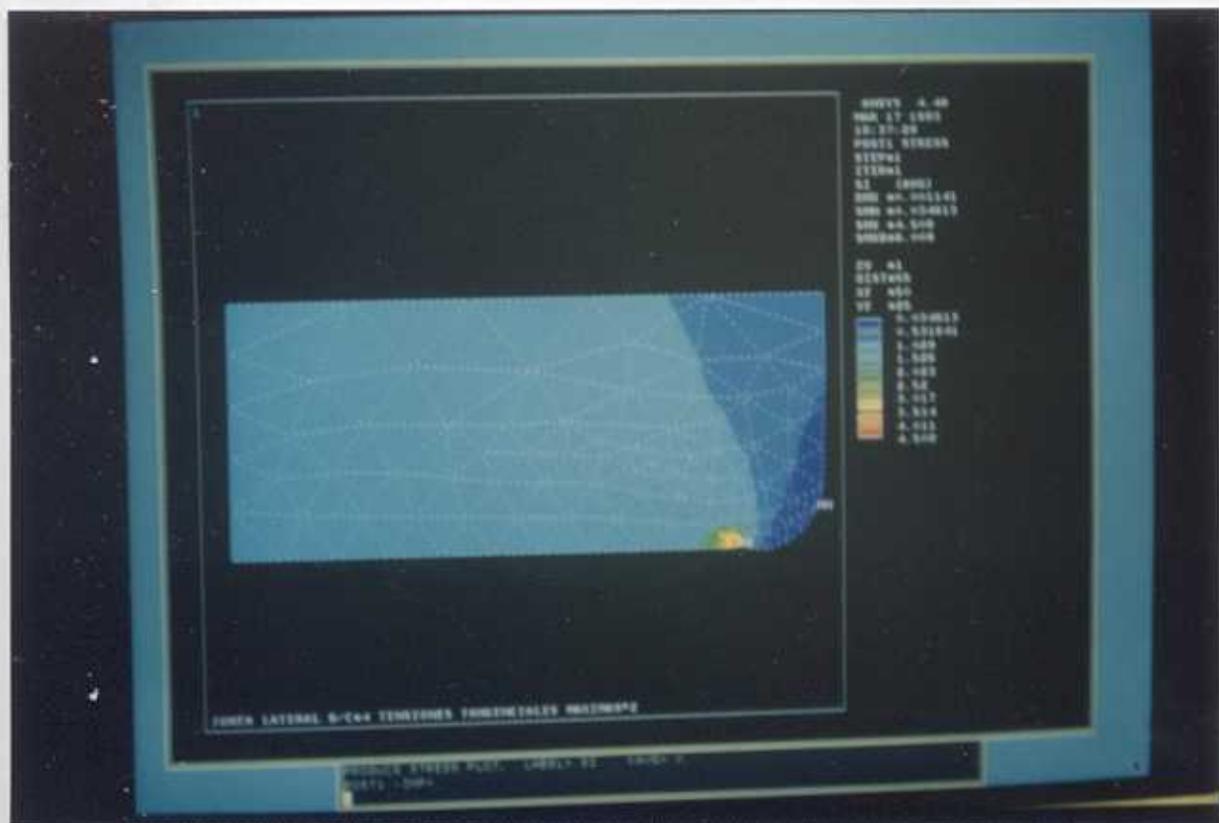




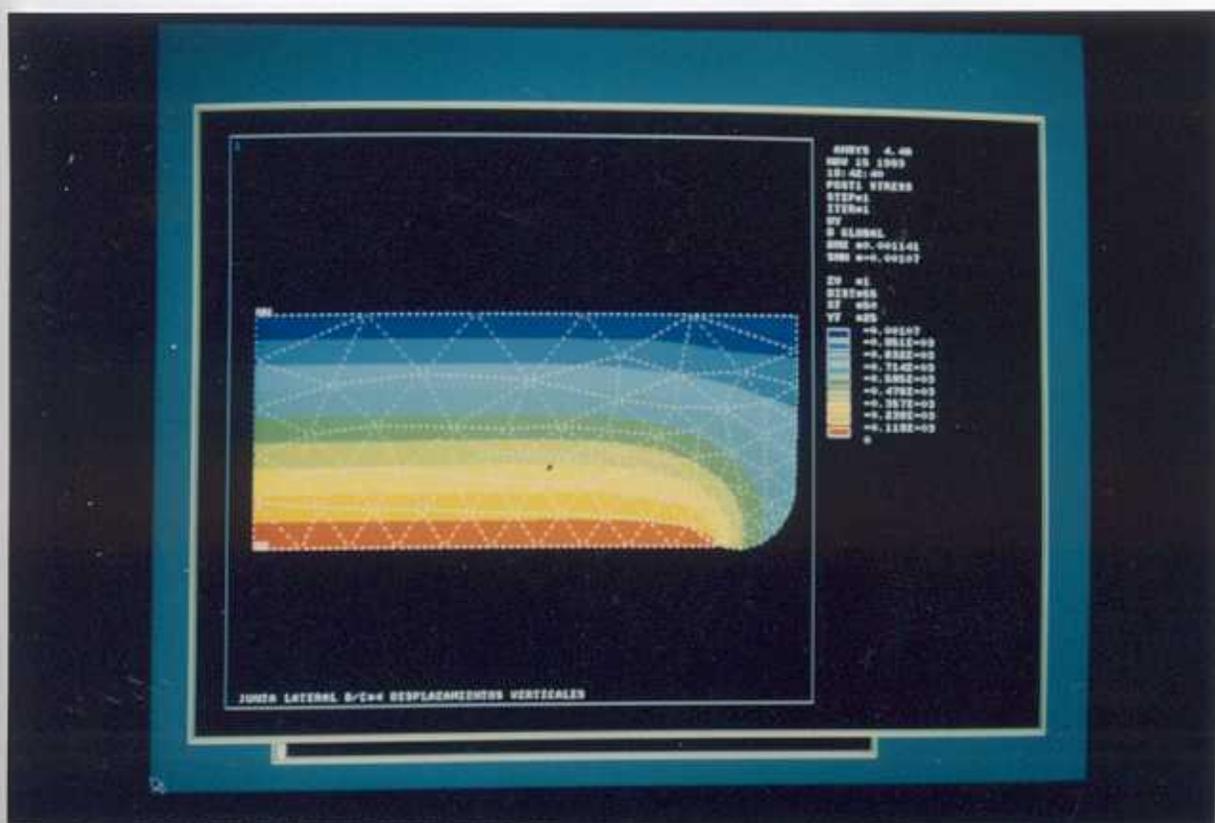
69



70



71

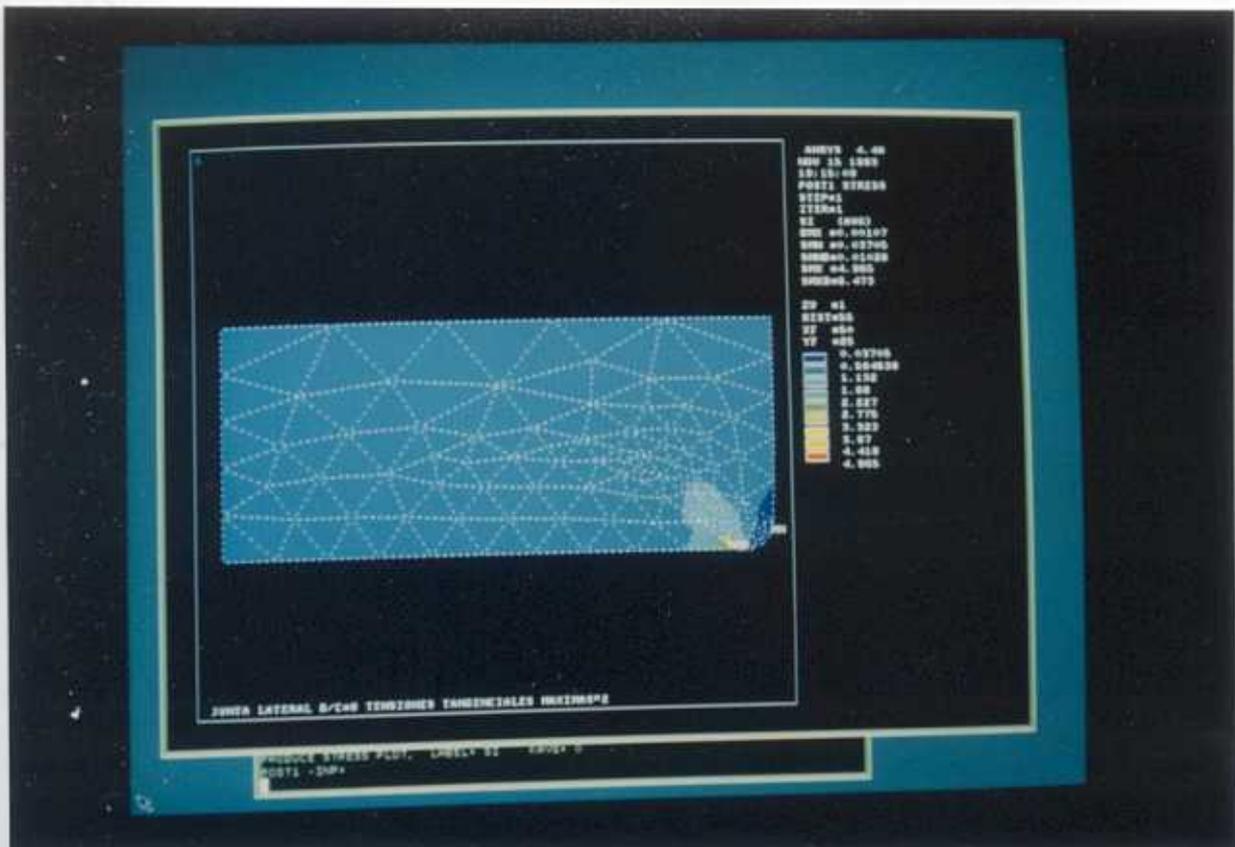


72

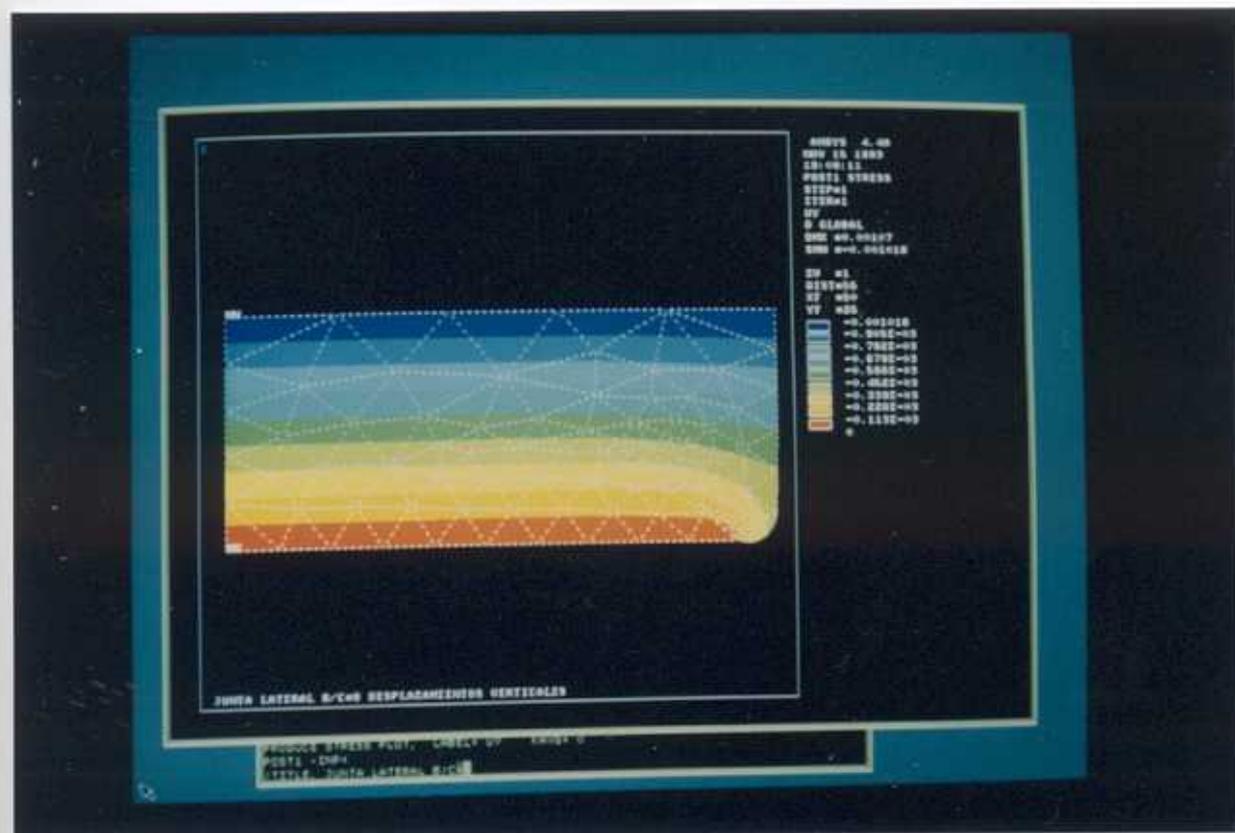






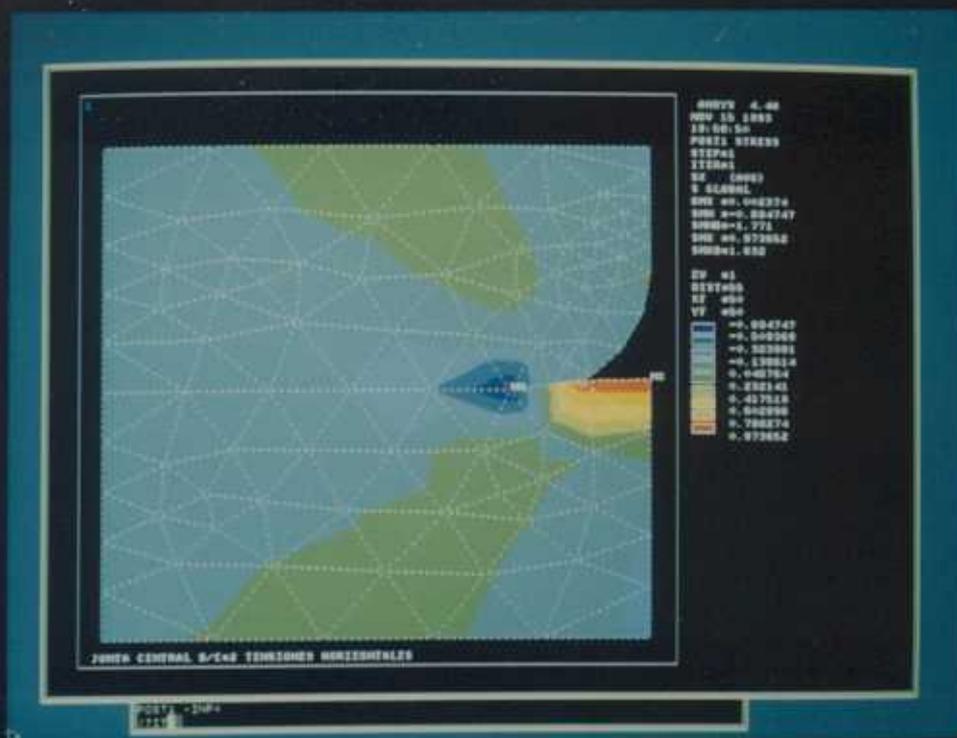


79

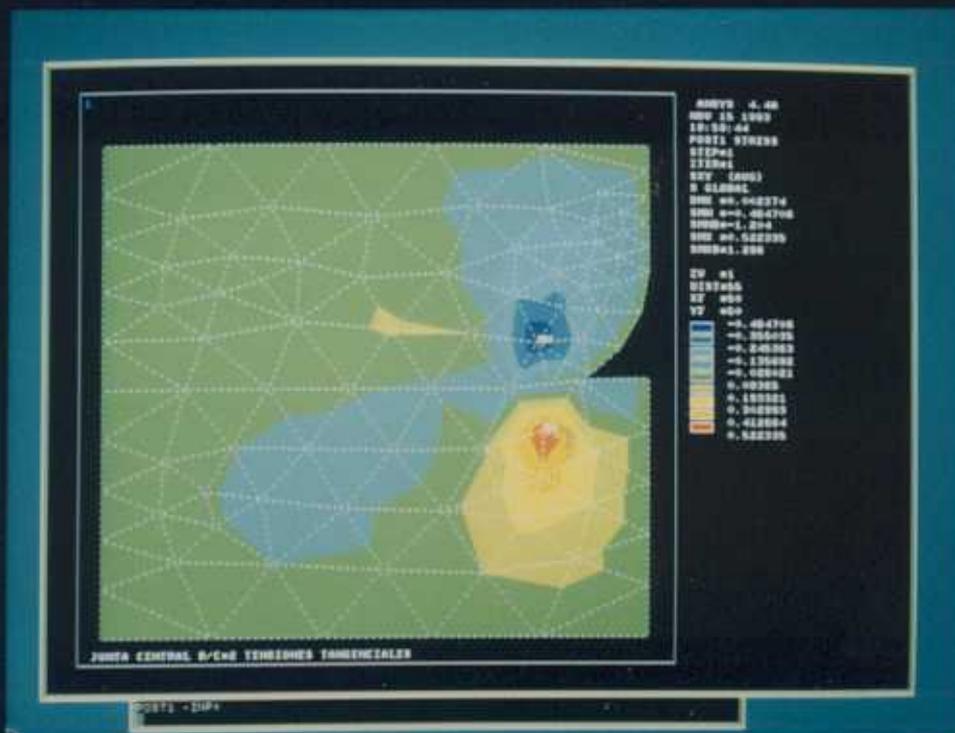


80





83



84

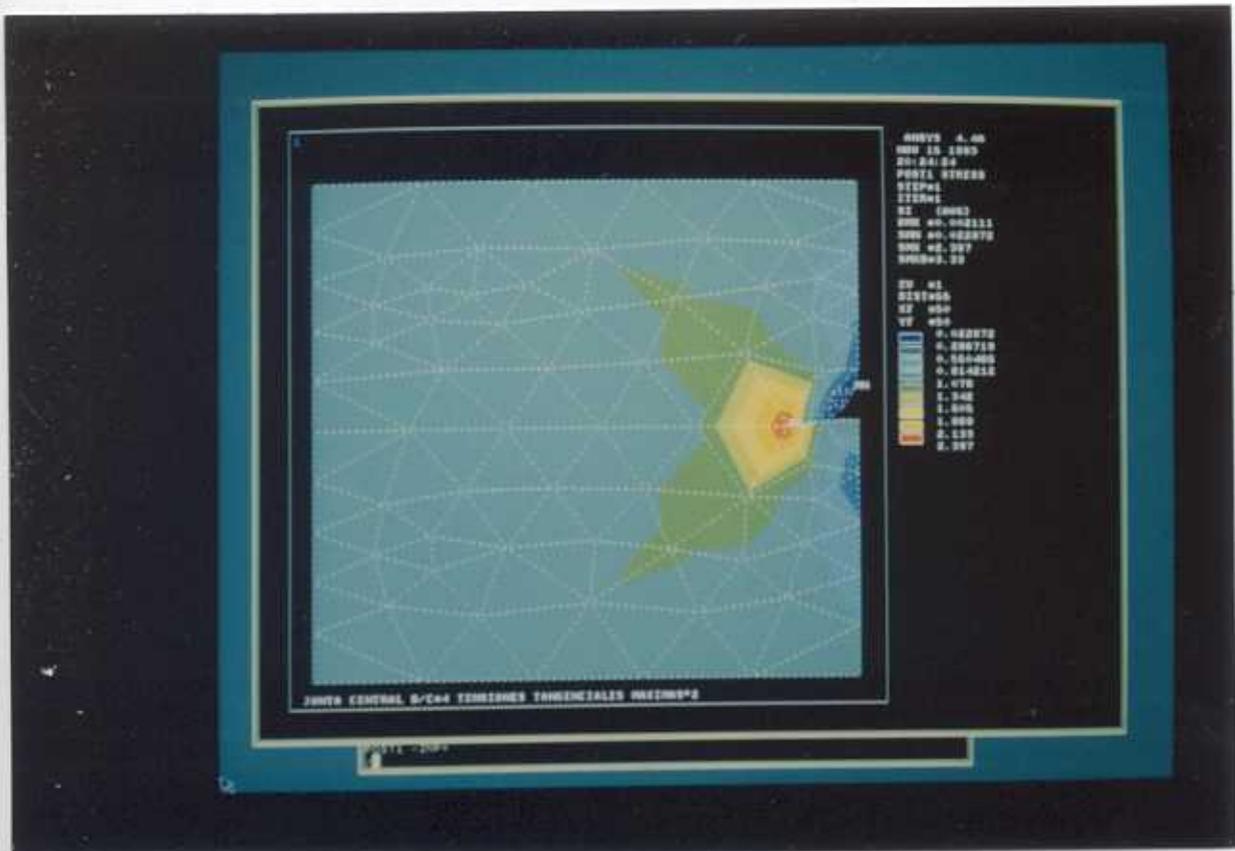




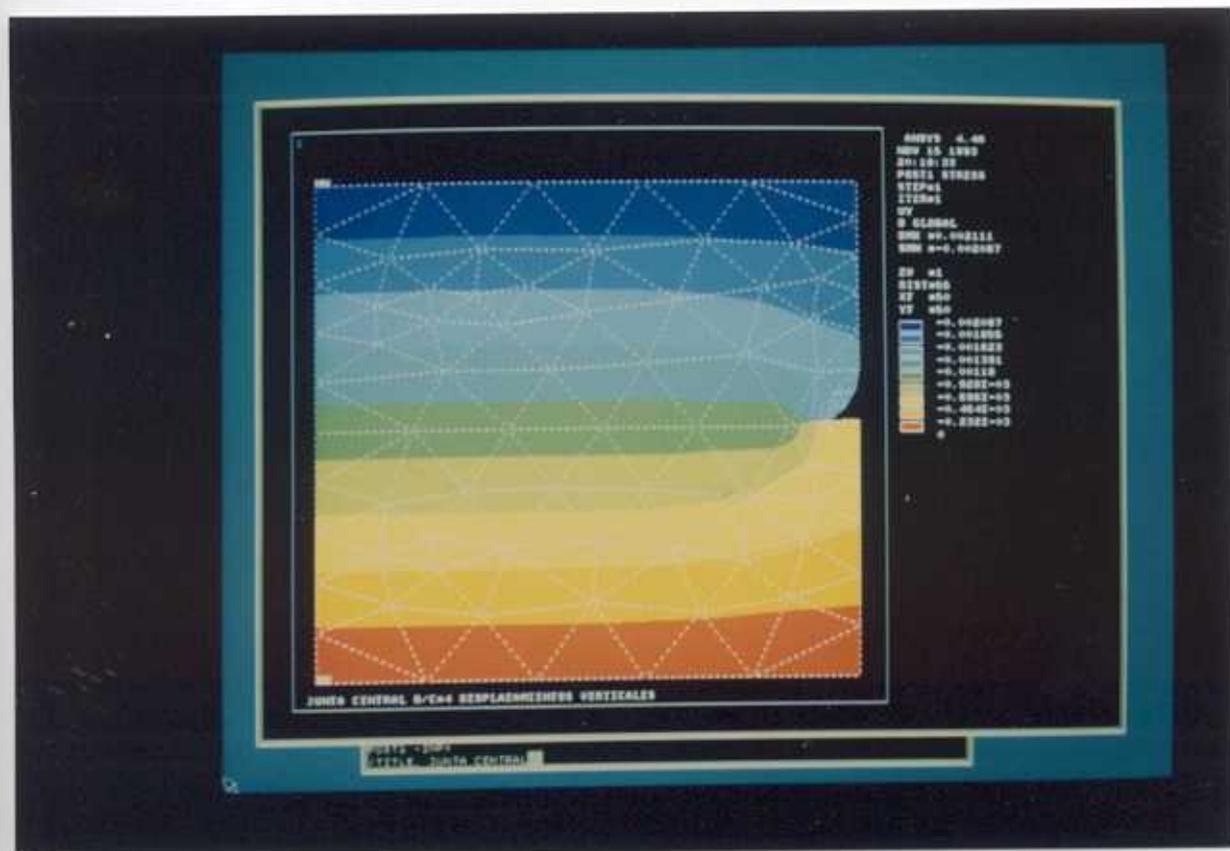




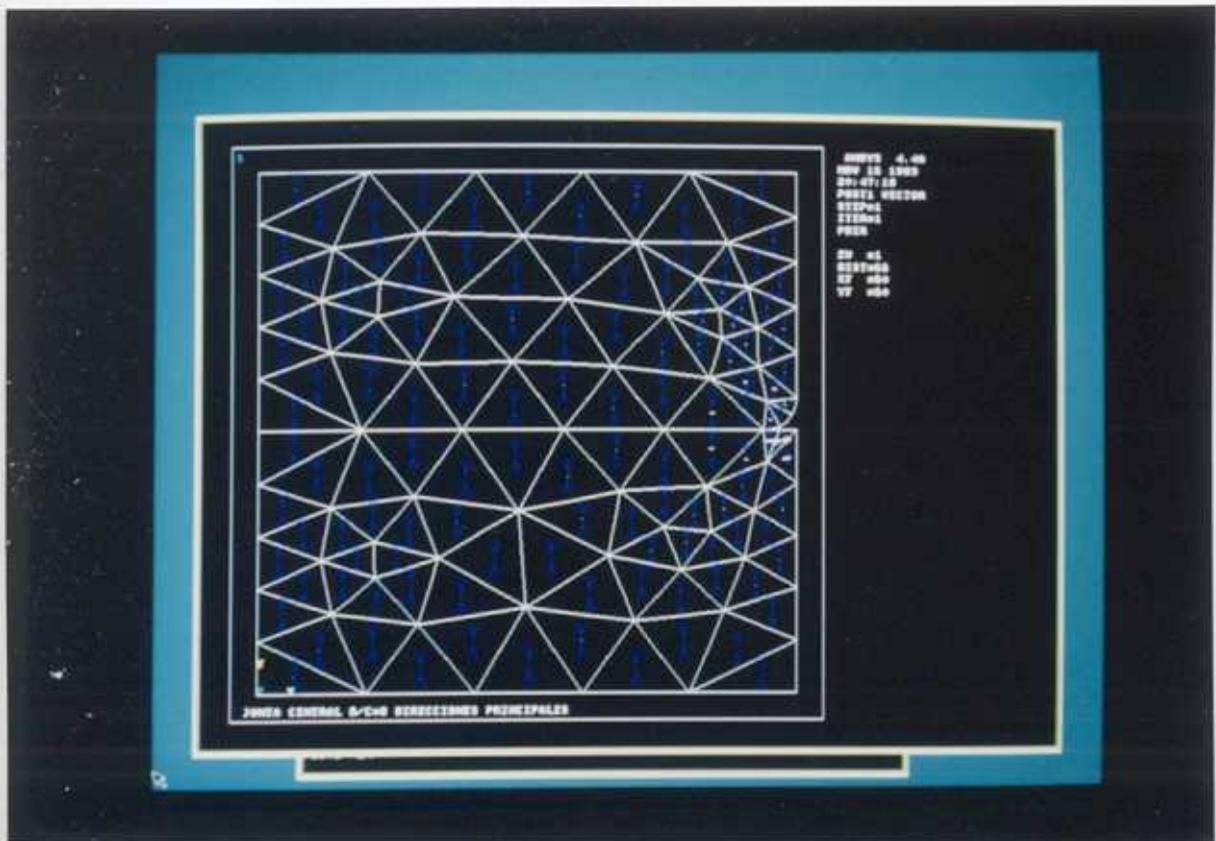




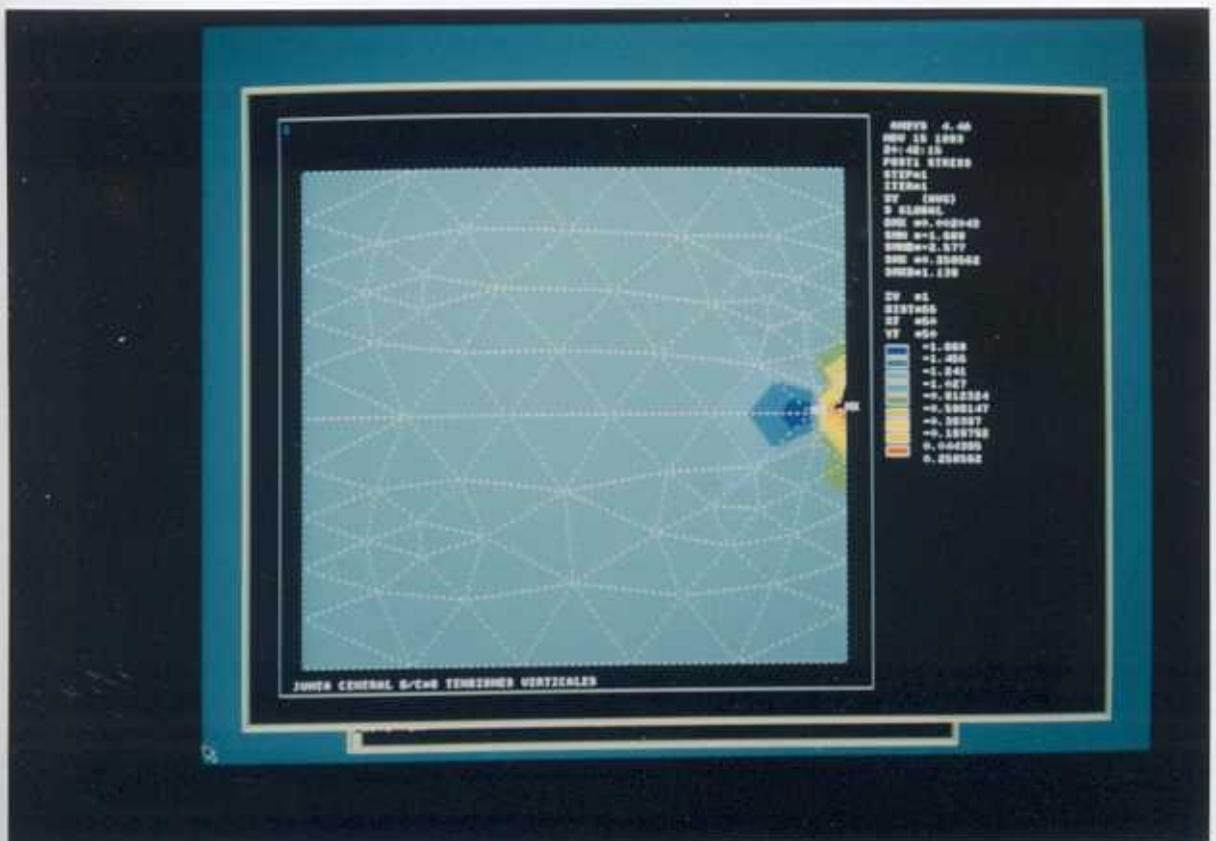
95



96

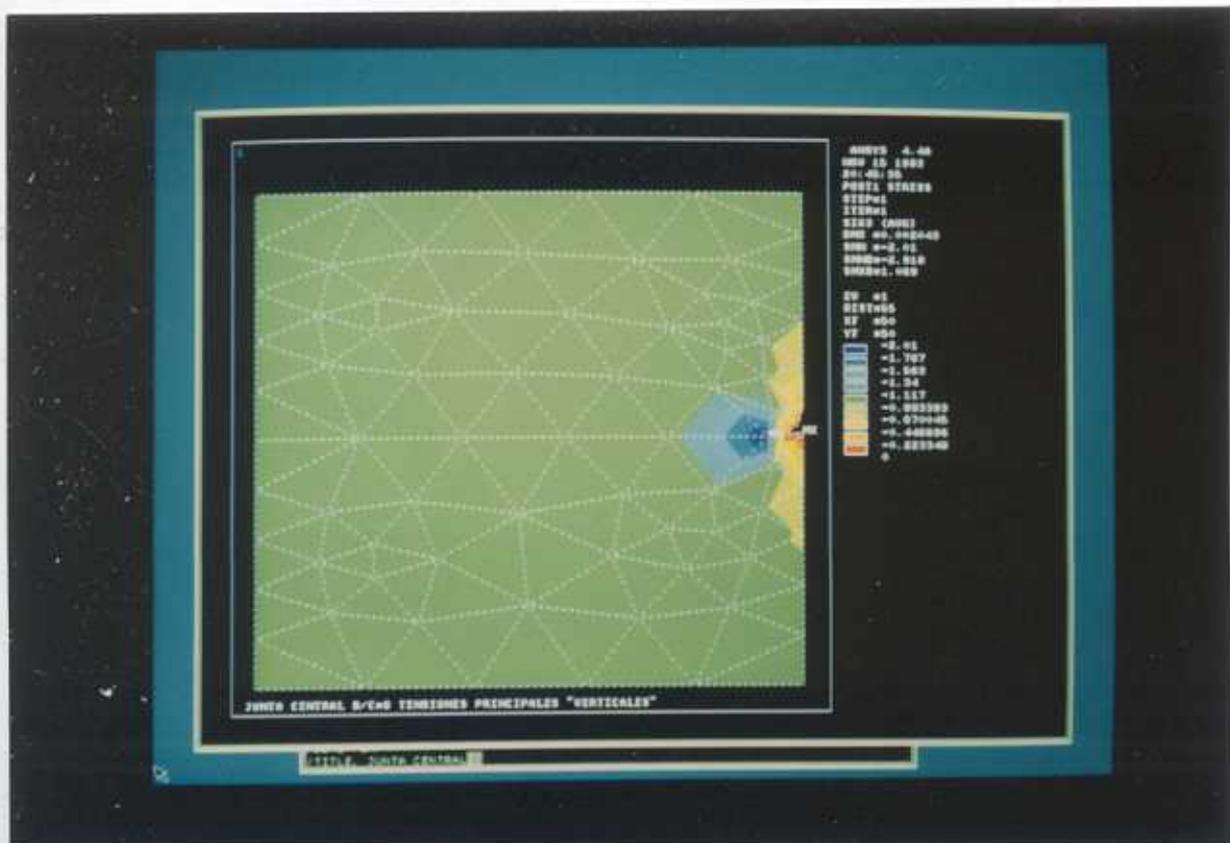


97

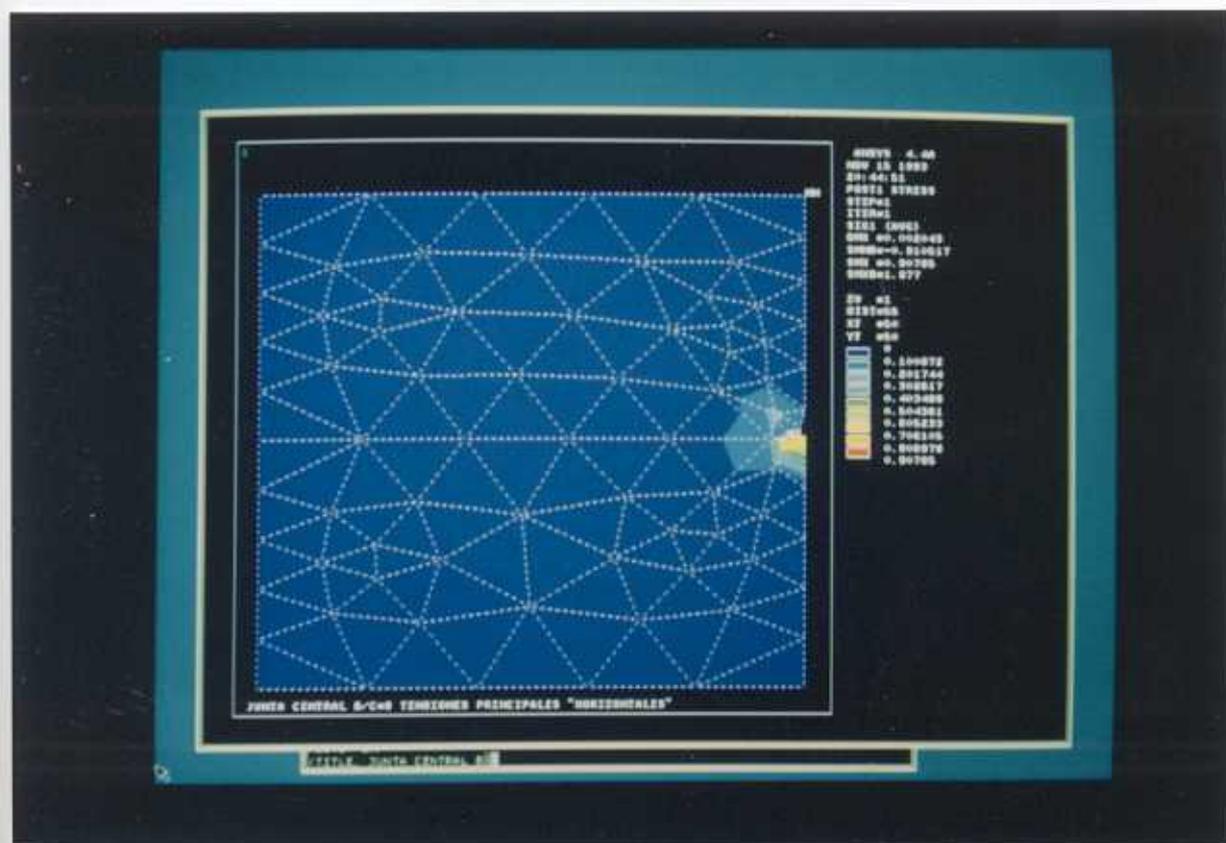


98



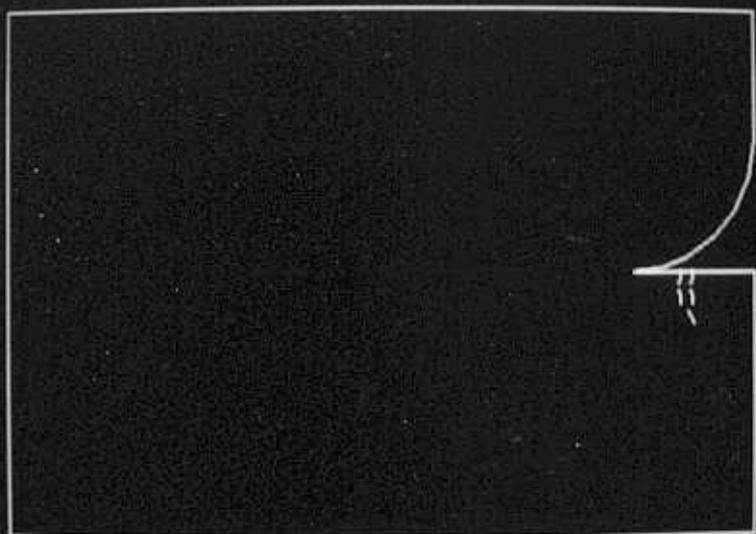


101

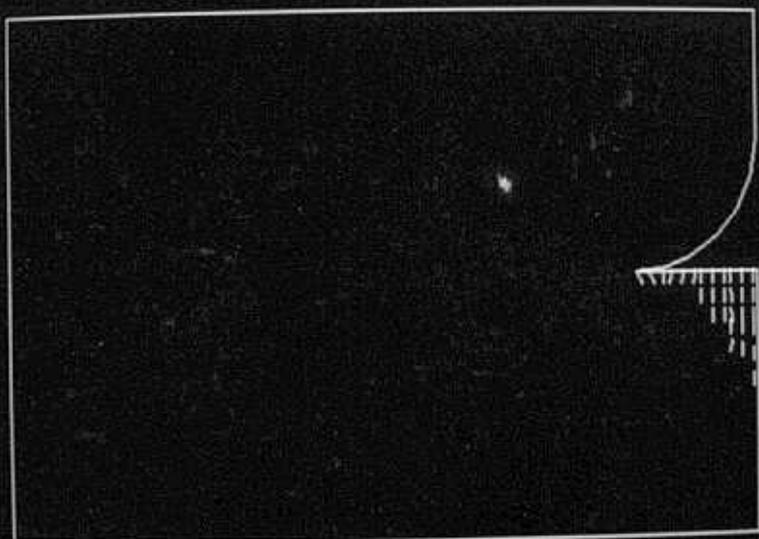


102

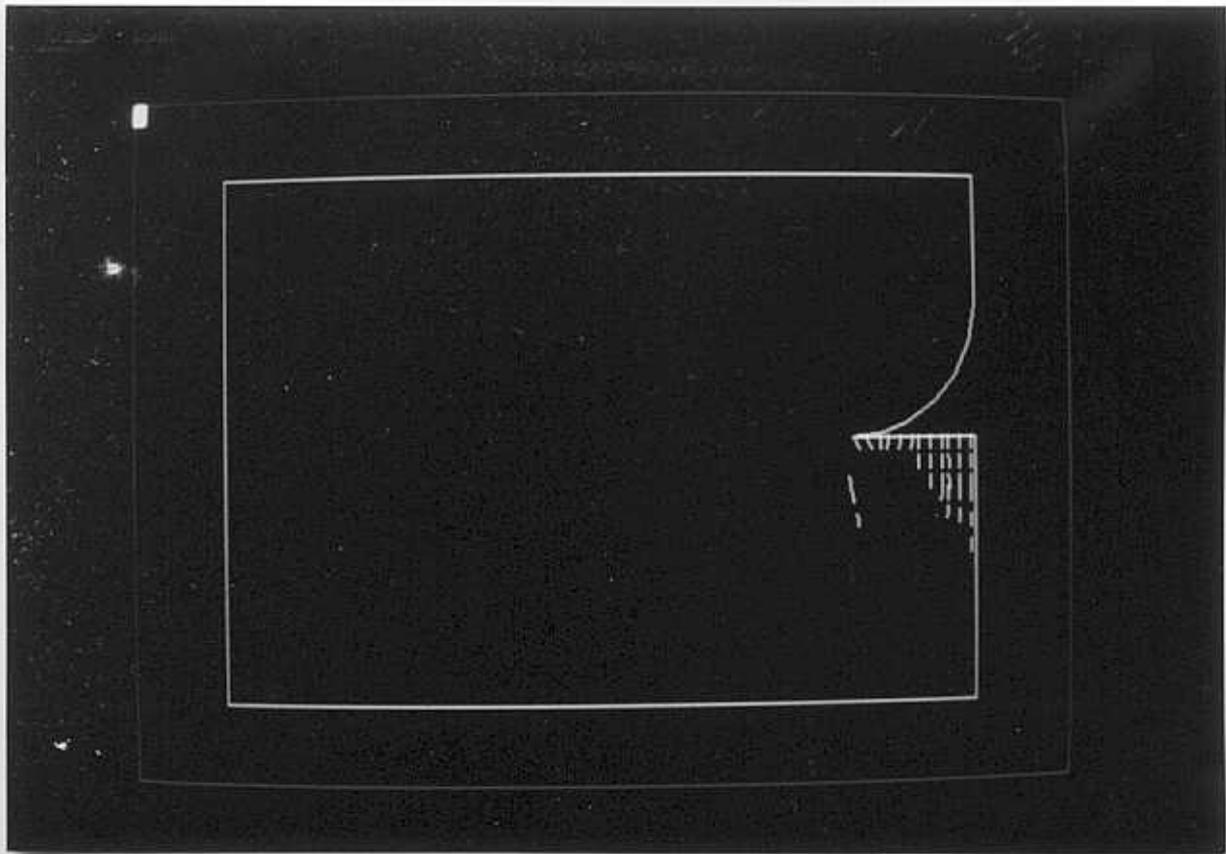




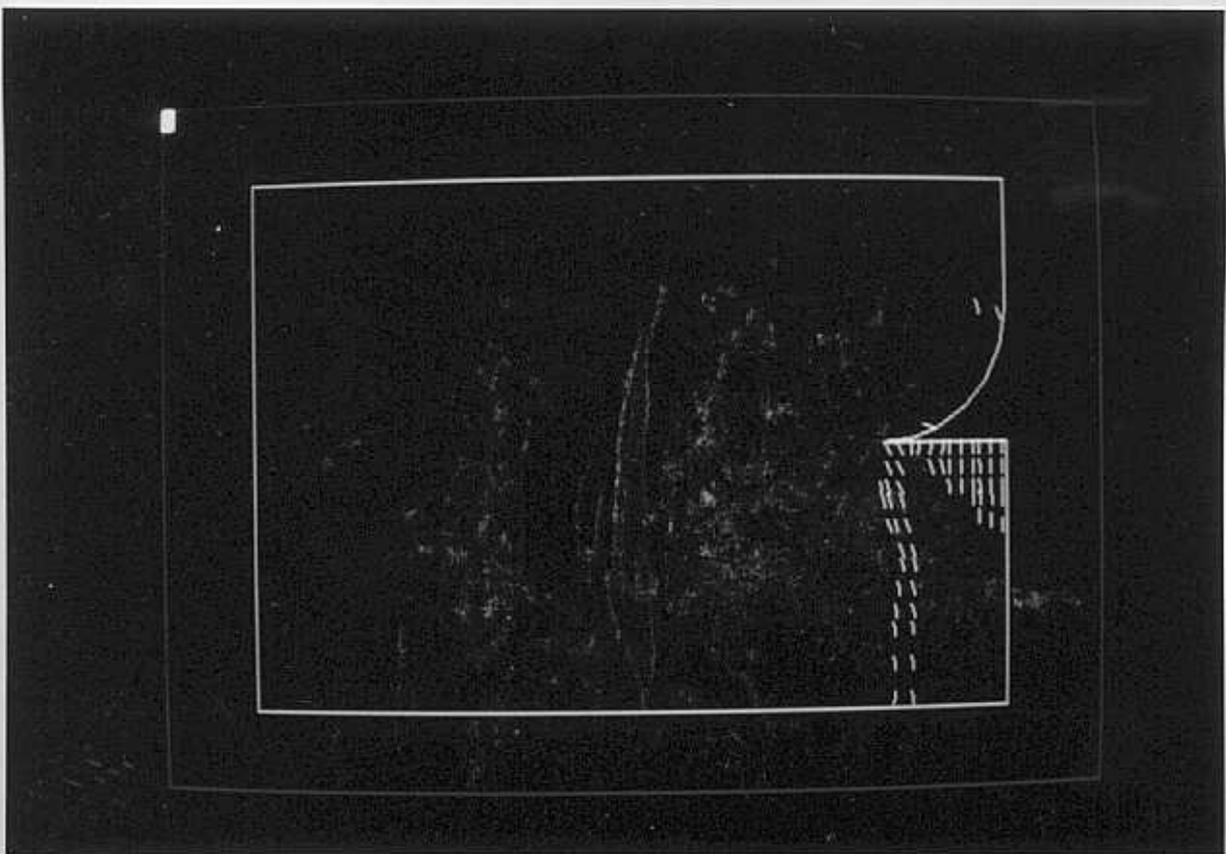
105



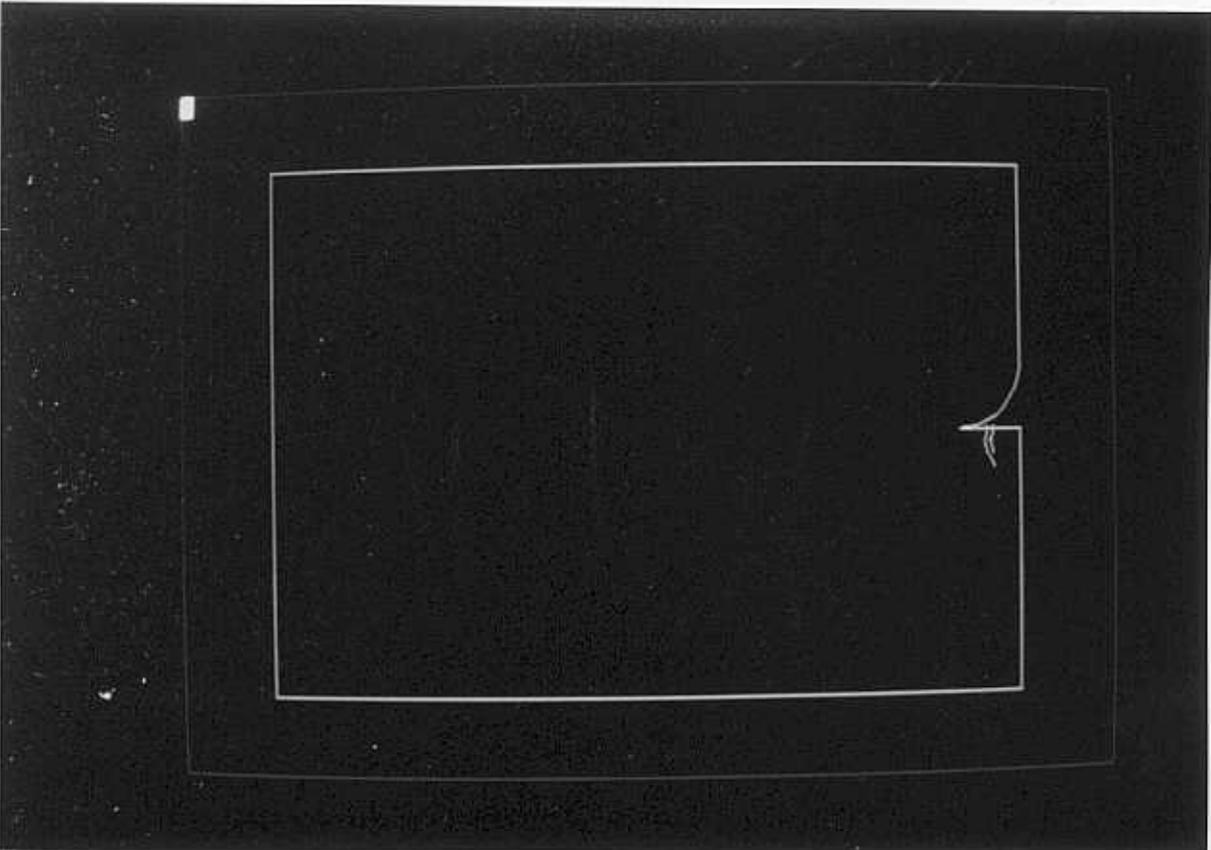
106



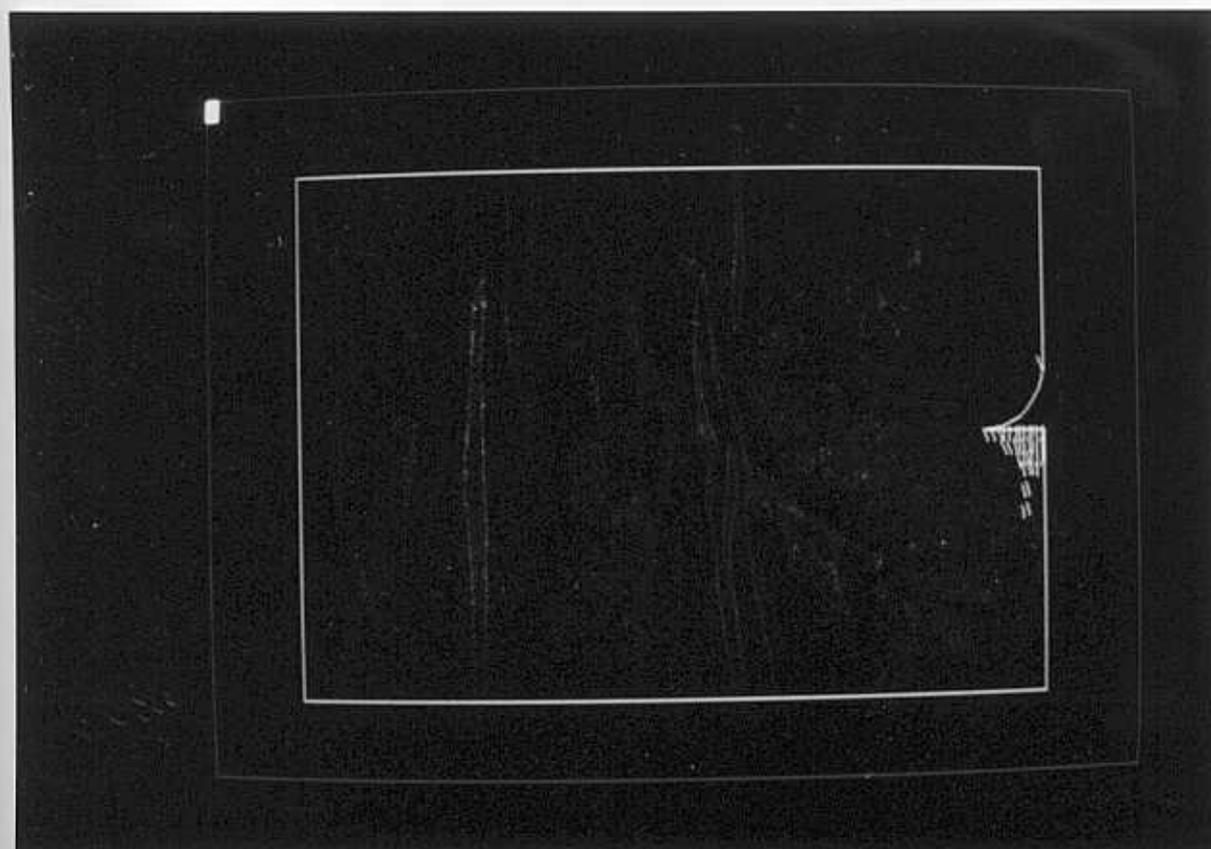
107



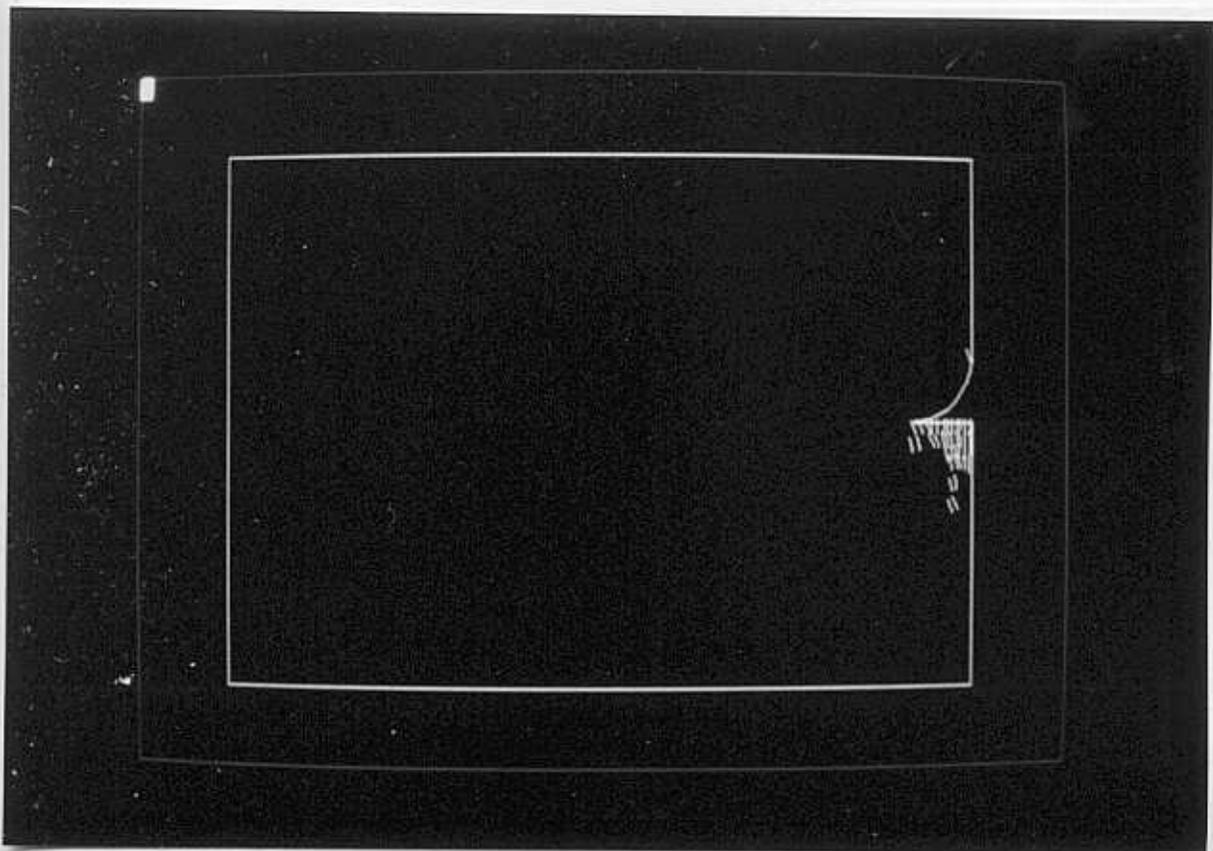
108



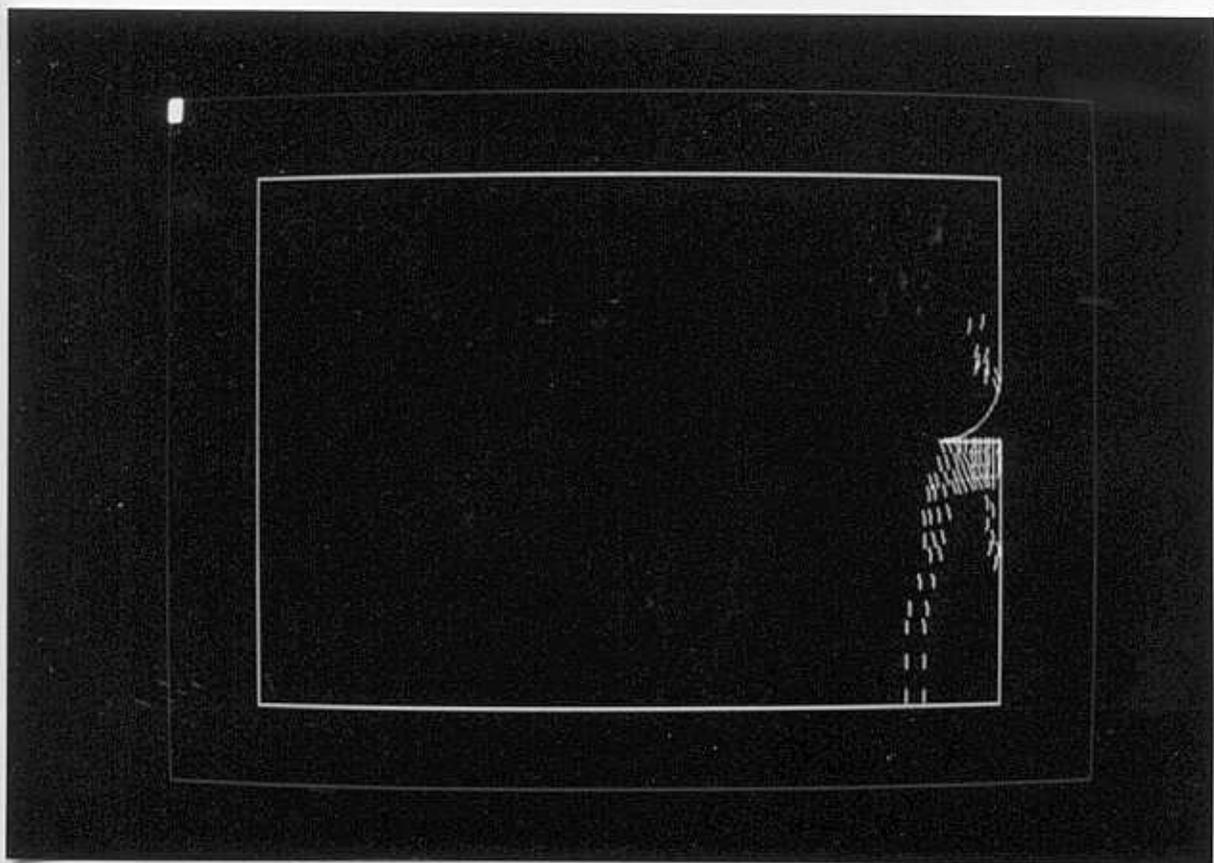
109



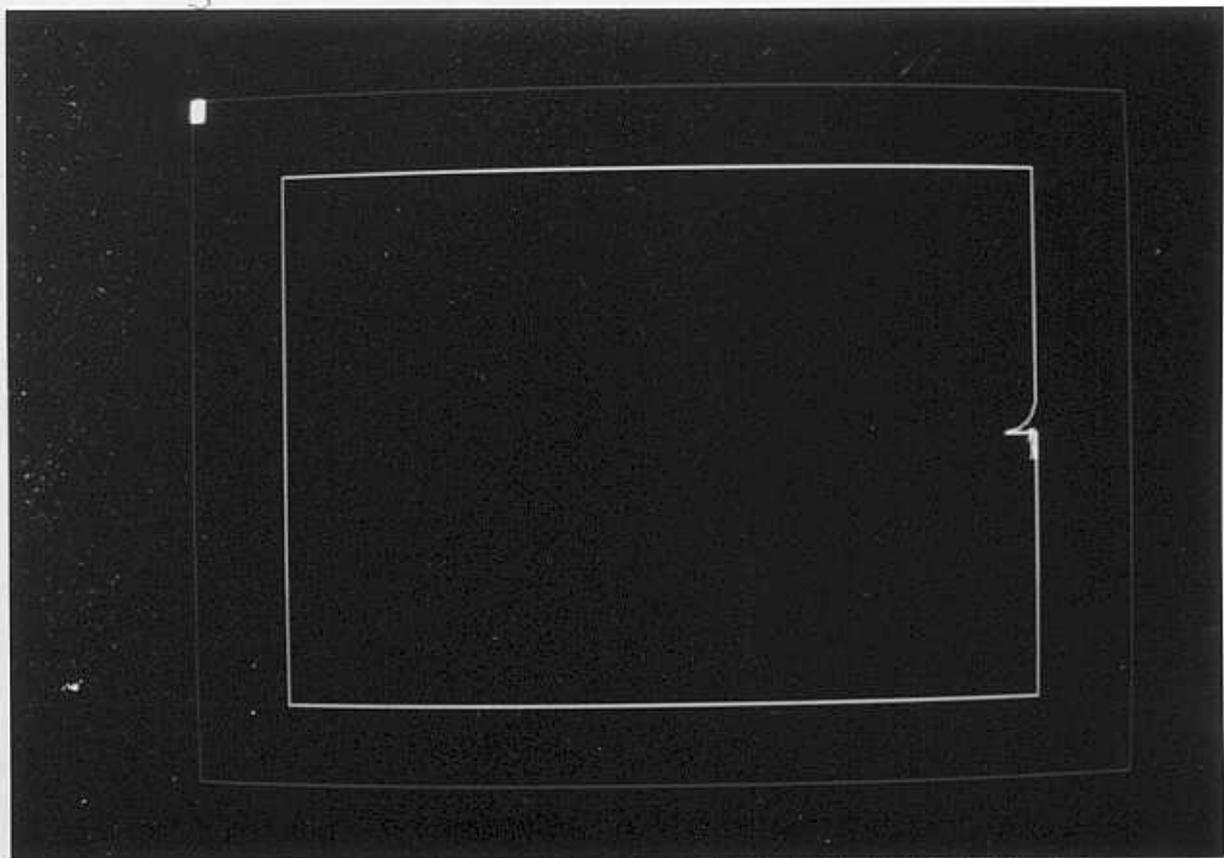
110



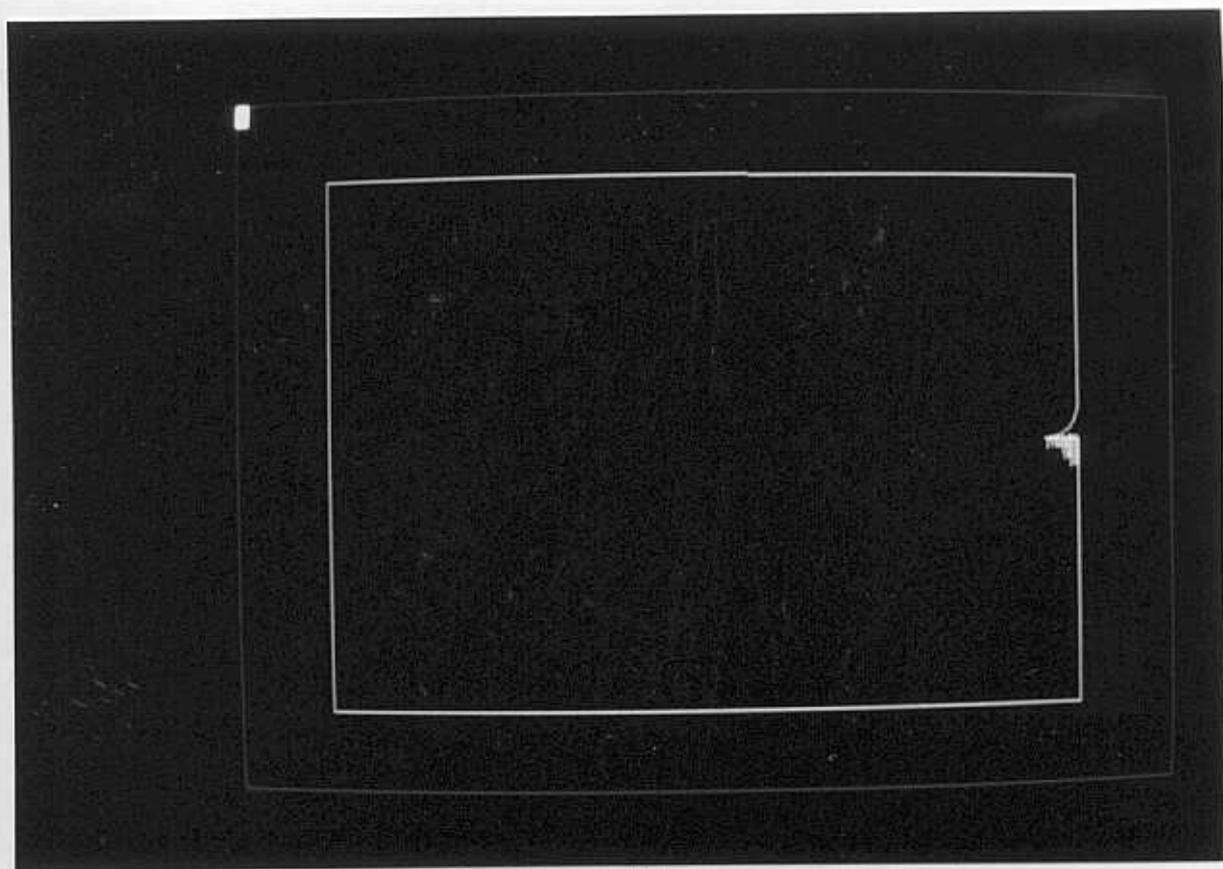
111



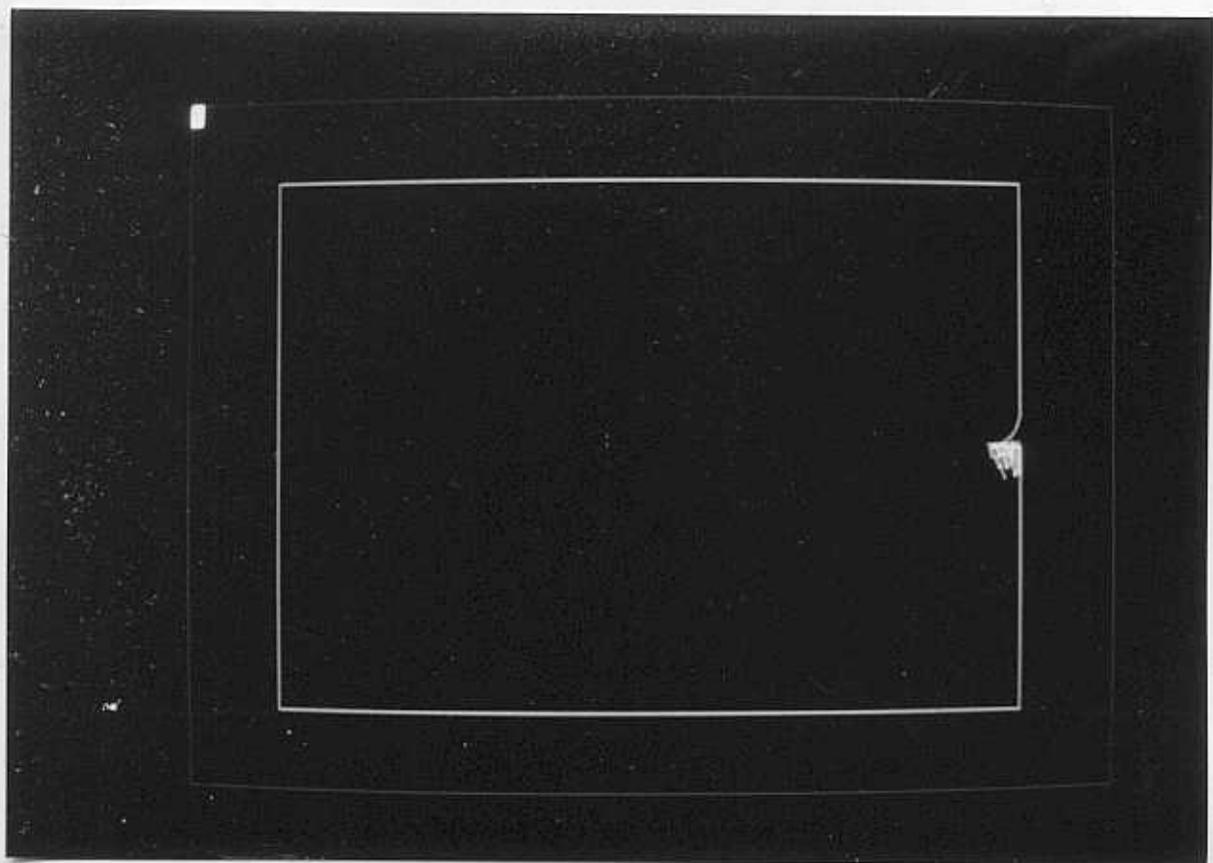
112



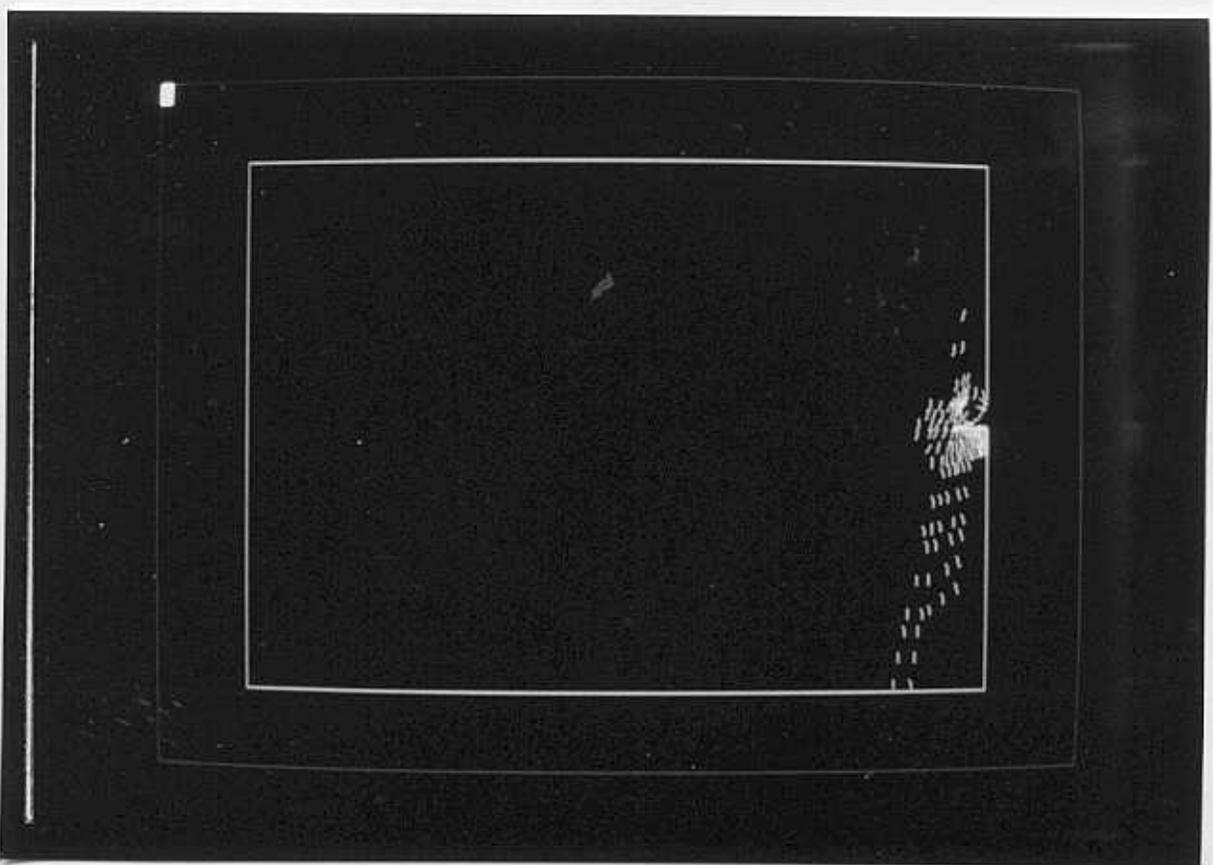
113



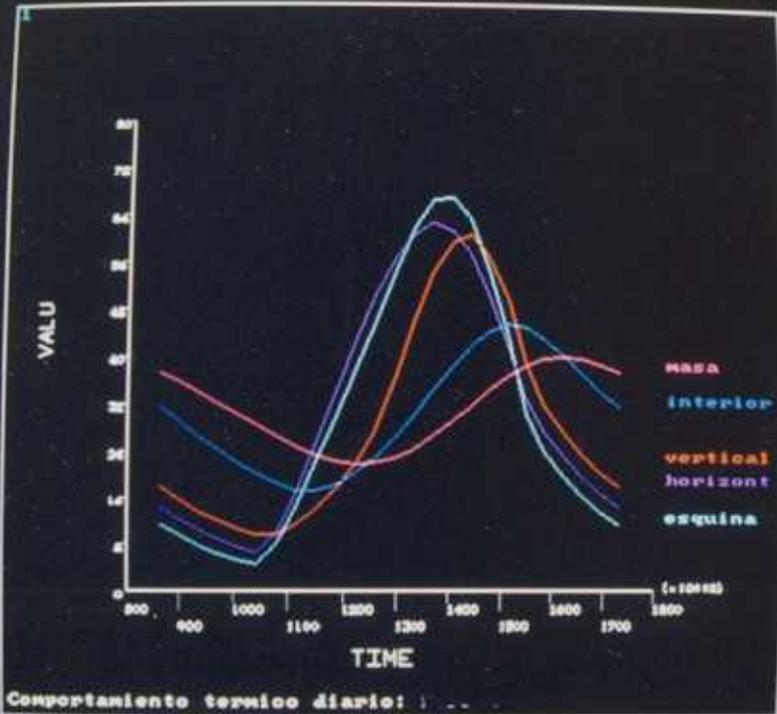
114



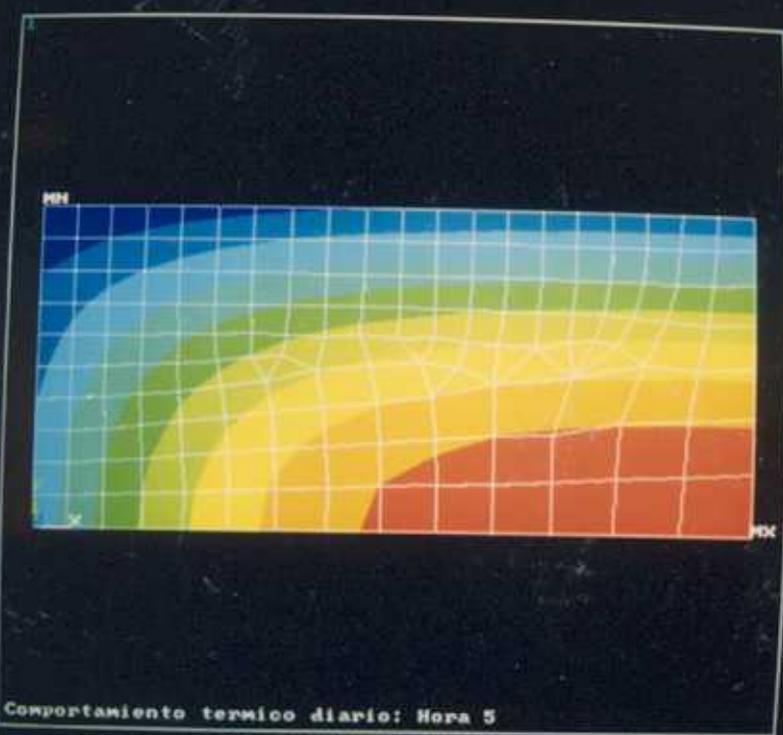
115



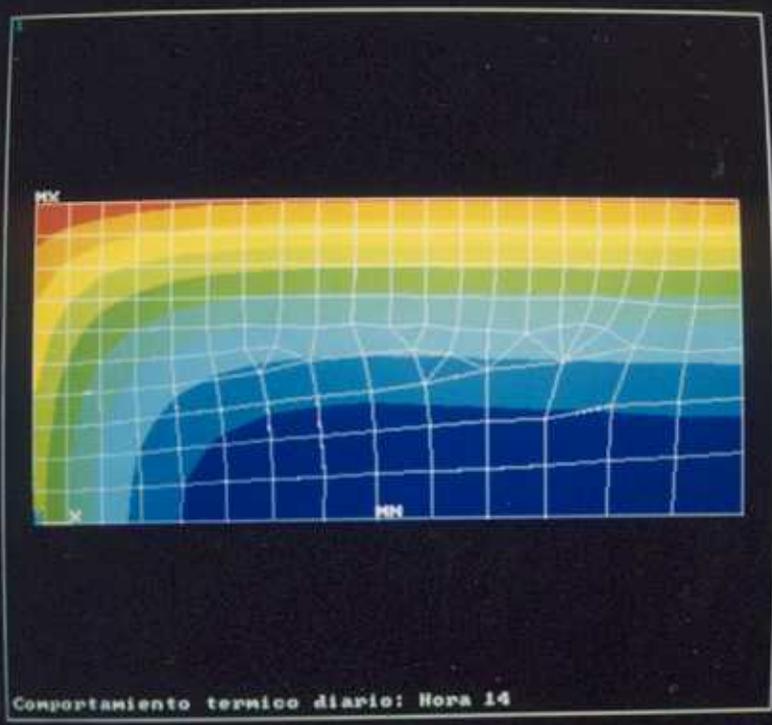
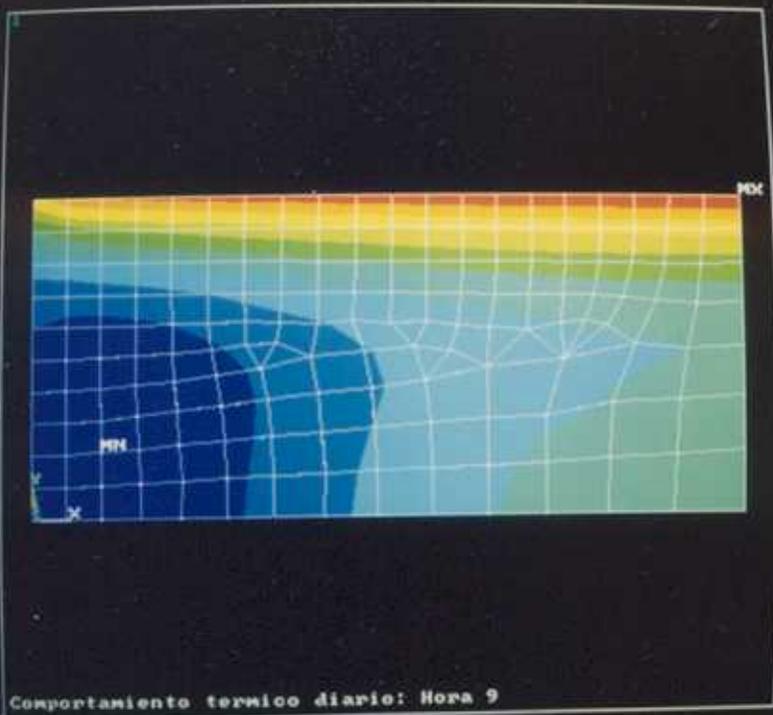
116

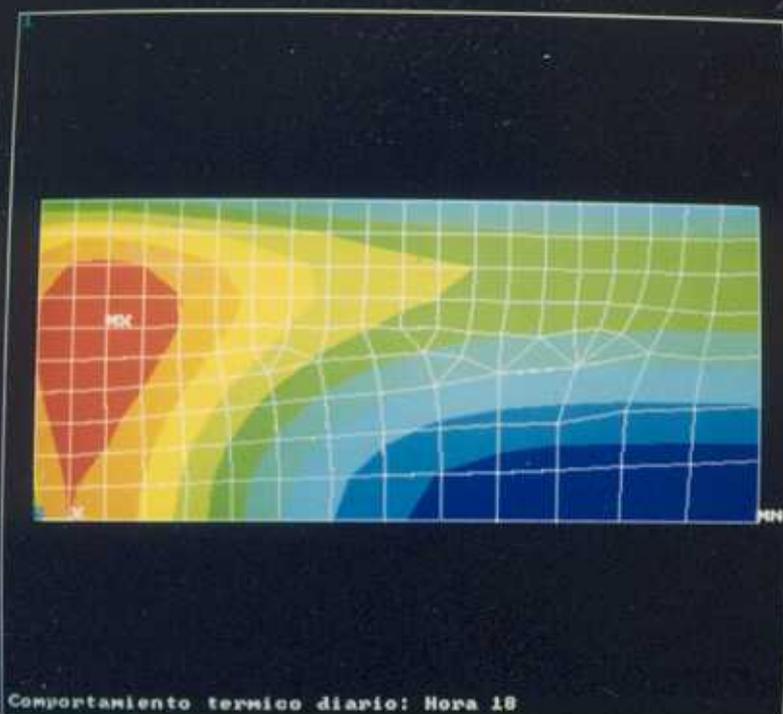


ANSYS 5.0 ED  
 DEC 28 1993  
 14:12:13  
 POST26  
 SU = 1  
 DIST=0.75  
 NX = 0.5  
 NY = 0.5  
 NZ = 0.5  
 CENTROID HIDDEN



ANSYS 5.0 ED  
 DEC 28 1993  
 14:31:02  
 NODAL SOLUTION  
 STEP=38  
 SUB = 4  
 TIME=104400  
 TEMP  
 TEPG=7.191  
 SMN = 4.654  
 SMX = 29.14  
 4.654  
 7.375  
 10.095  
 12.016  
 15.536  
 18.257  
 20.978  
 23.698  
 26.419  
 29.14

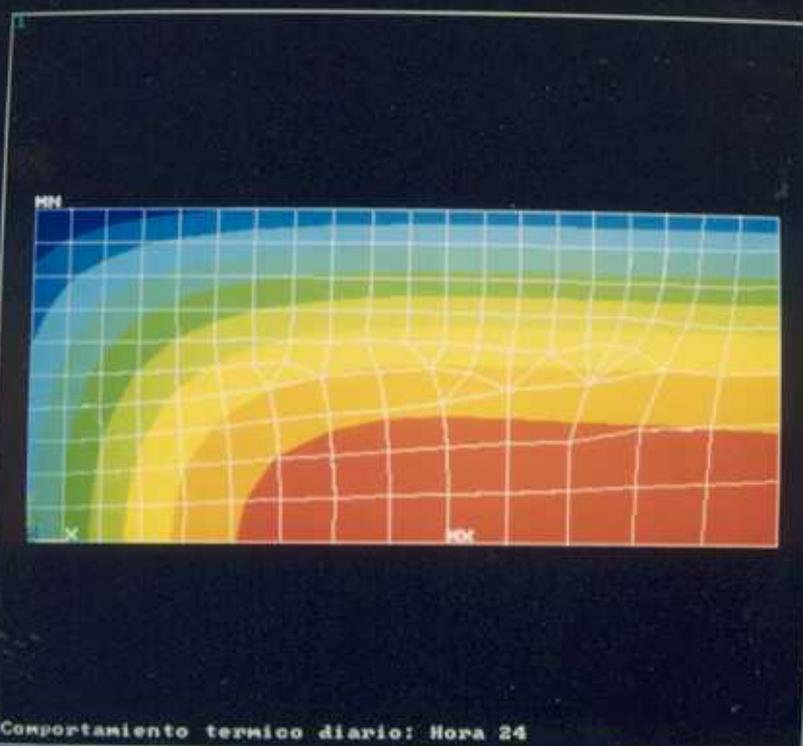




ANSYS 5.0 ED  
 DEC 28 1993  
 14:36:33  
 MODAL SOLUTION  
 STEP=43  
 SUB =4  
 TIME=151200  
 TEMP  
 TEPG=3.871  
 SMN =36.134  
 SMX =51.533

36.134
37.843
39.554
41.267
42.978
44.689
46.4
48.111
49.822
51.533

Comportamiento termico diario: Hora 18



ANSYS 5.0 ED  
 DEC 29 1993  
 15:02:57  
 MODAL SOLUTION  
 STEP=49  
 SUB =4  
 TIME=172800  
 TEMP  
 TEPG=5.698  
 SMN =11.356  
 SMX =37.486

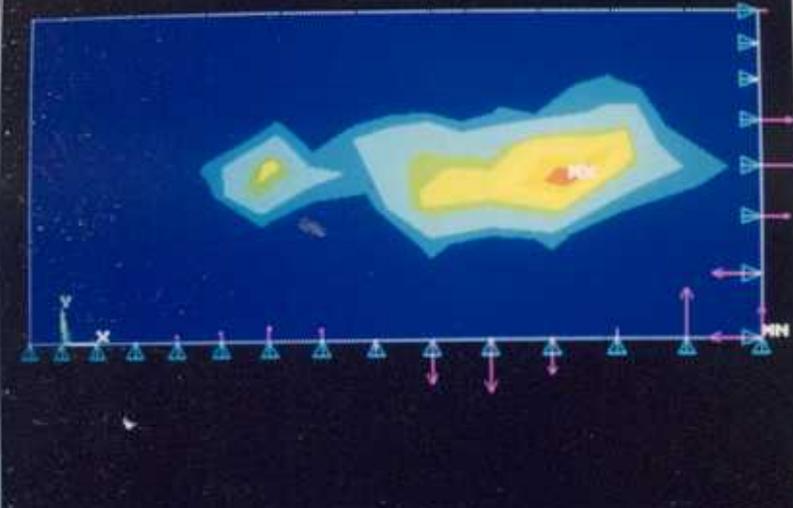
11.356
14.259
17.162
20.066
22.969
25.872
28.776
31.679
34.582
37.486

Comportamiento termico diario: Hora 24

```

ANSYS 5.0 ED
JAN 17 1994
17:50:07
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=0.01
SI (AUC)
DMX =0.224E-04
SMNB=-0.323E-07
SMX =0.411E-07
SMNB=0.061E-07
U
RFOR

```

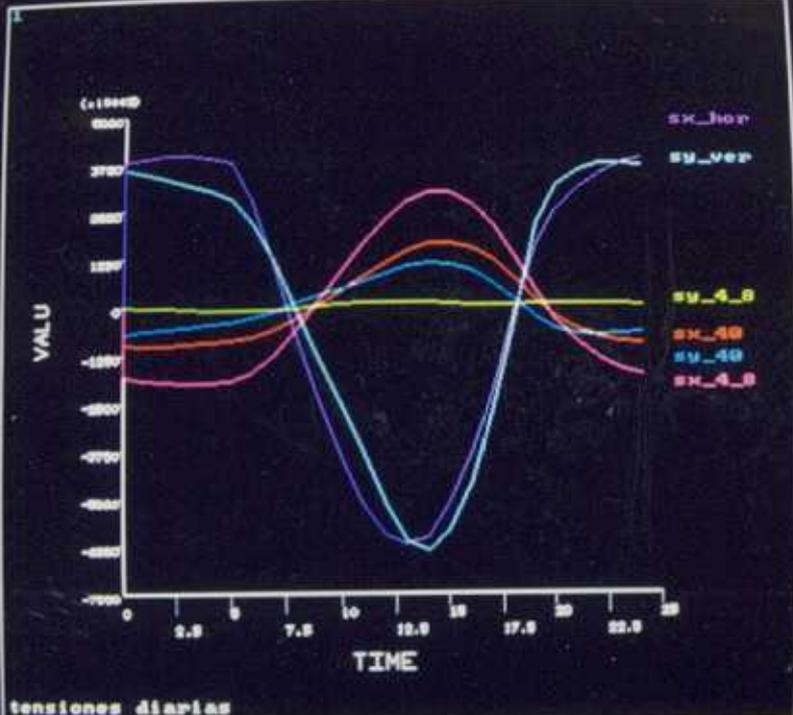


COMPORTAMIENTO TERMICO, ESFUERZOS dilatacion 5 grados

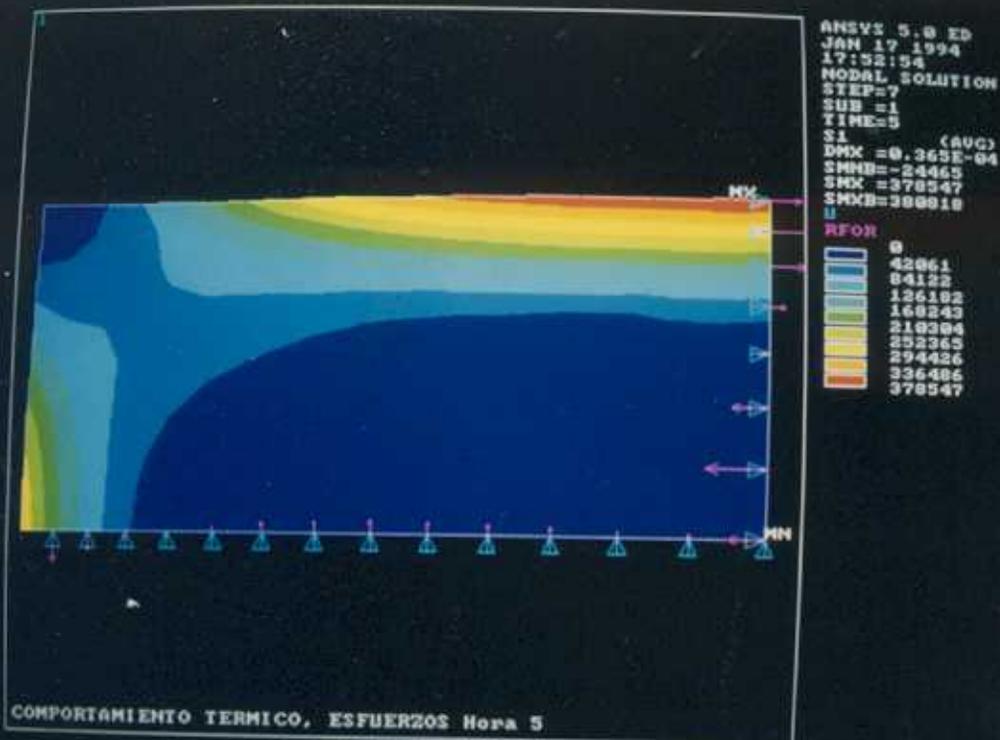
```

ANSYS 5.0 ED
JAN 17 1994
17:45:29
POST26
SU =1
DIST=0.75
MP =0.5
VP =0.5
ZF =0.5
CENTROID HIDDEN
EDGE

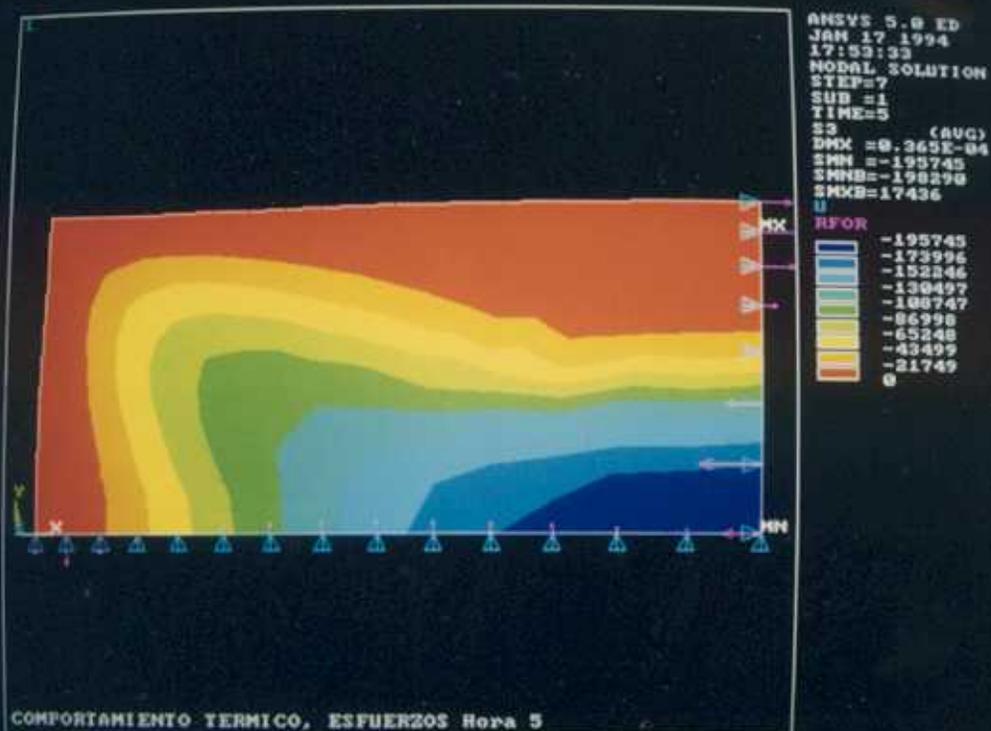
```



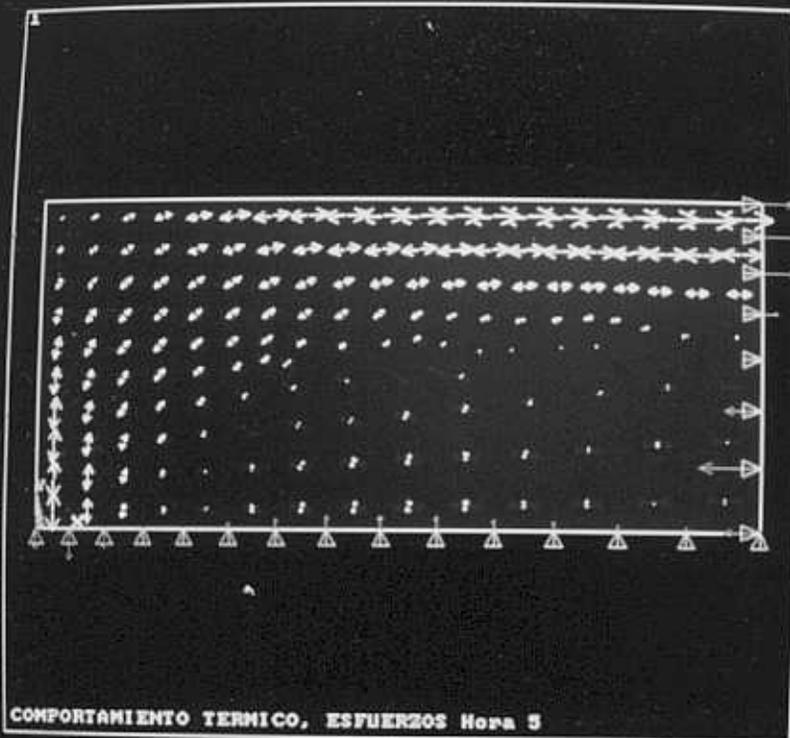
tensiones diarias



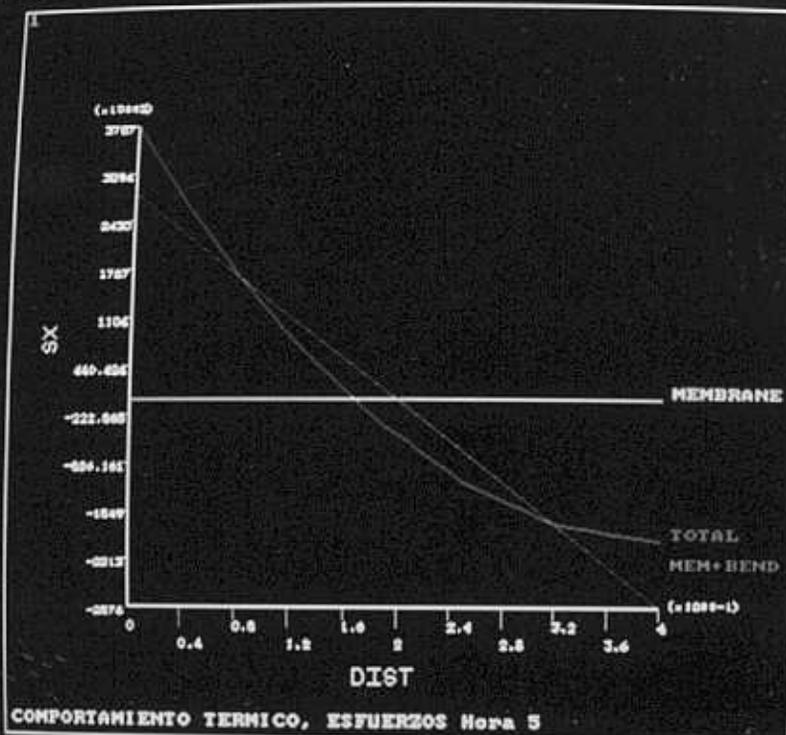
167



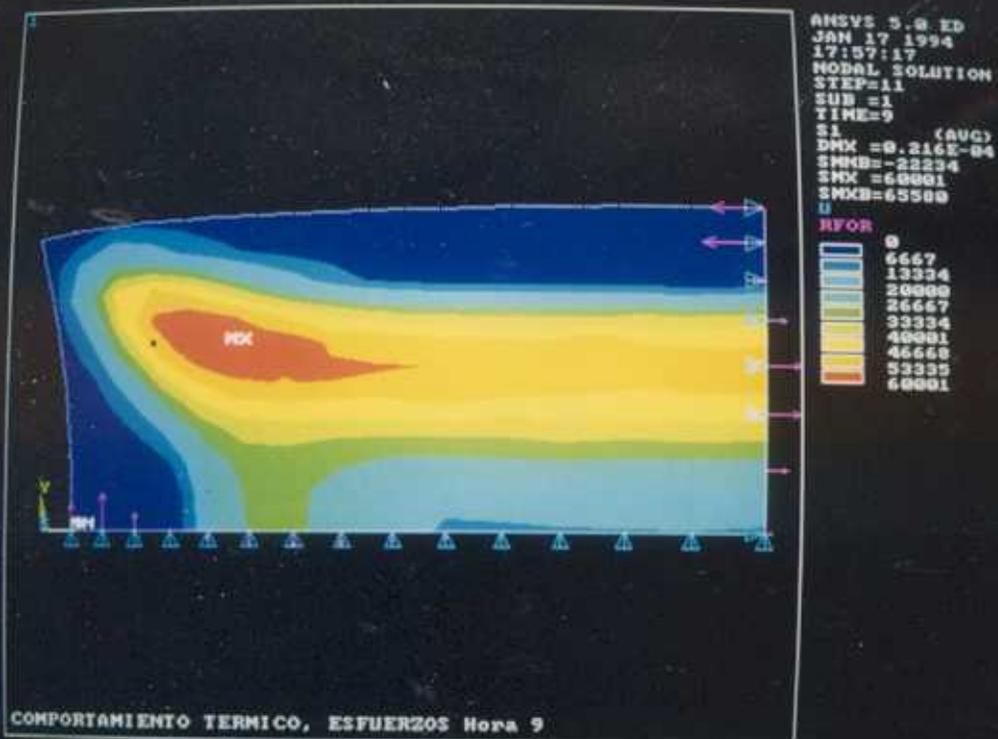
168



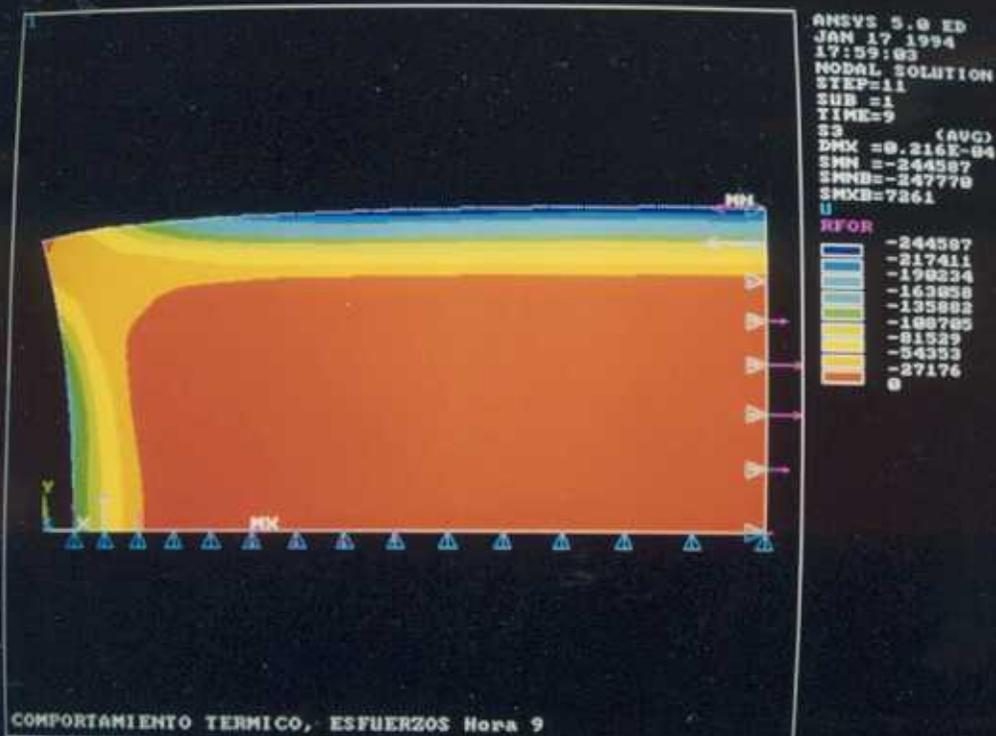
169



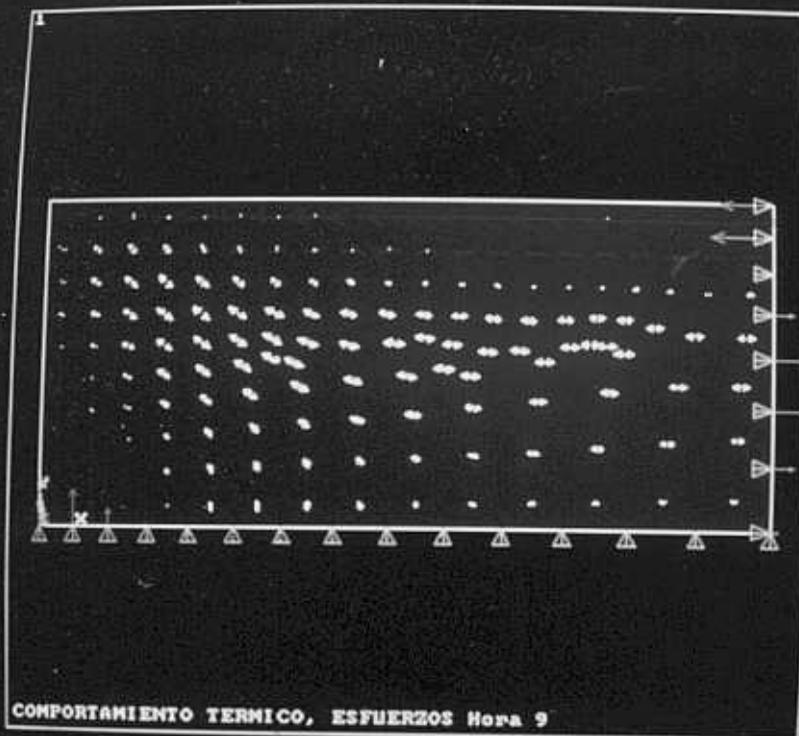
170



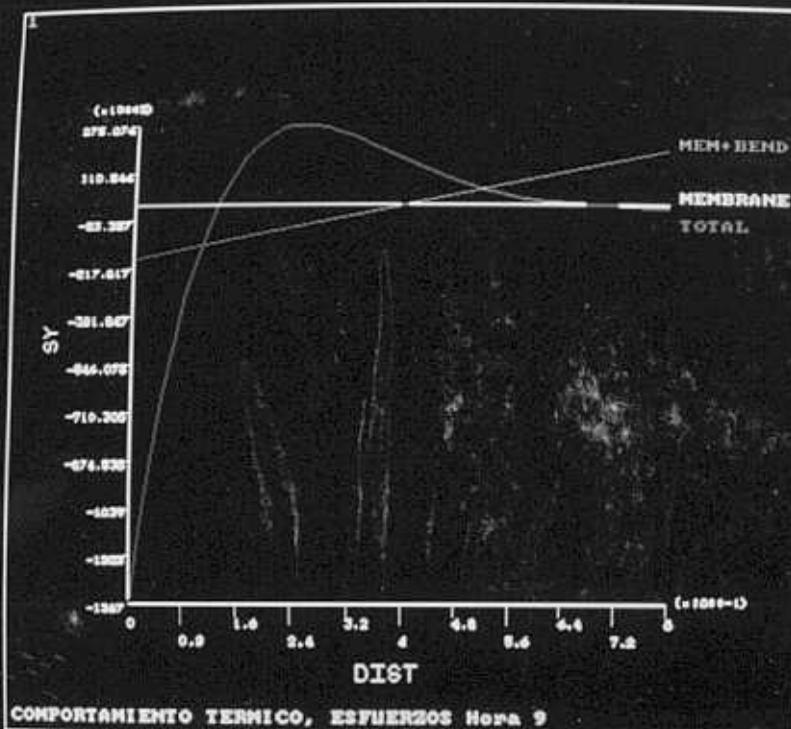
171



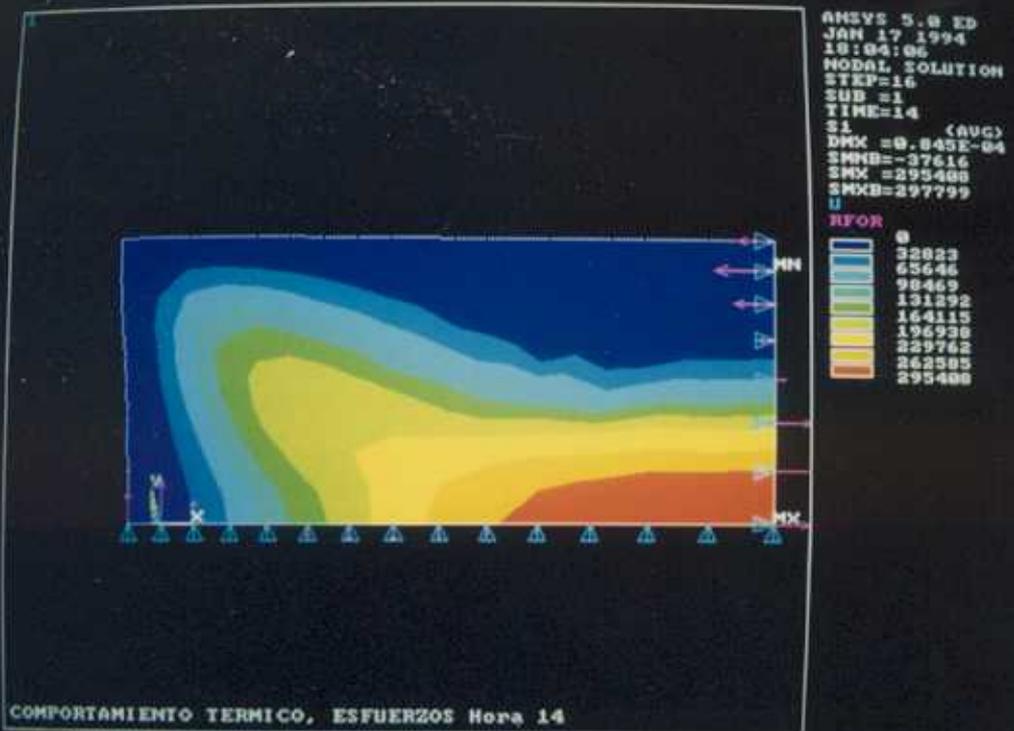
172



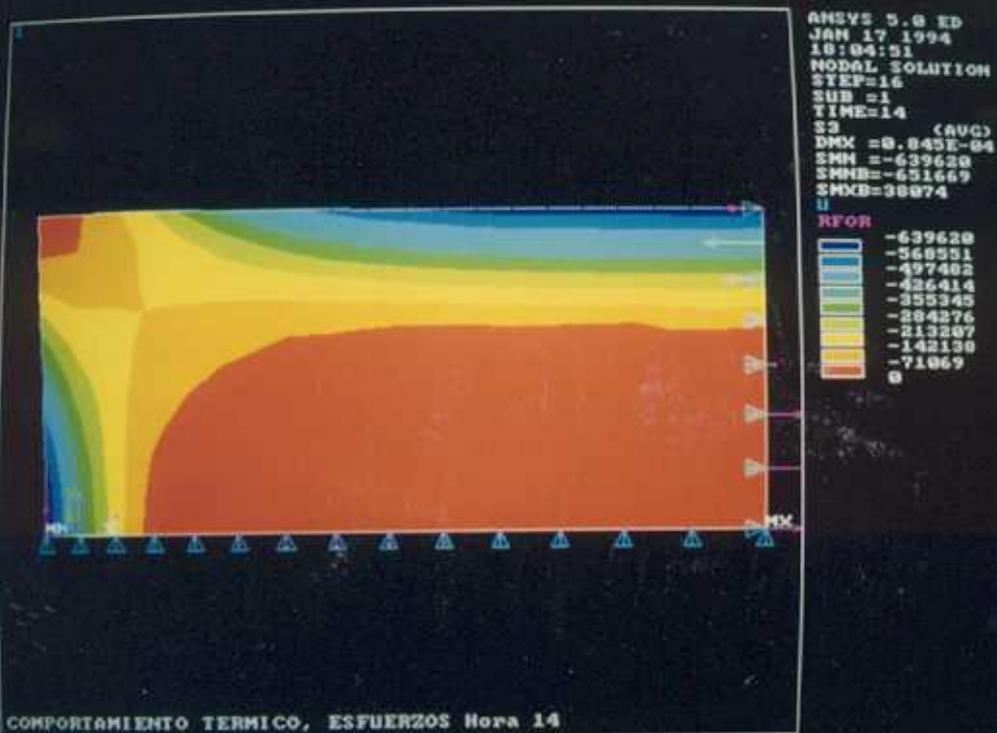
173



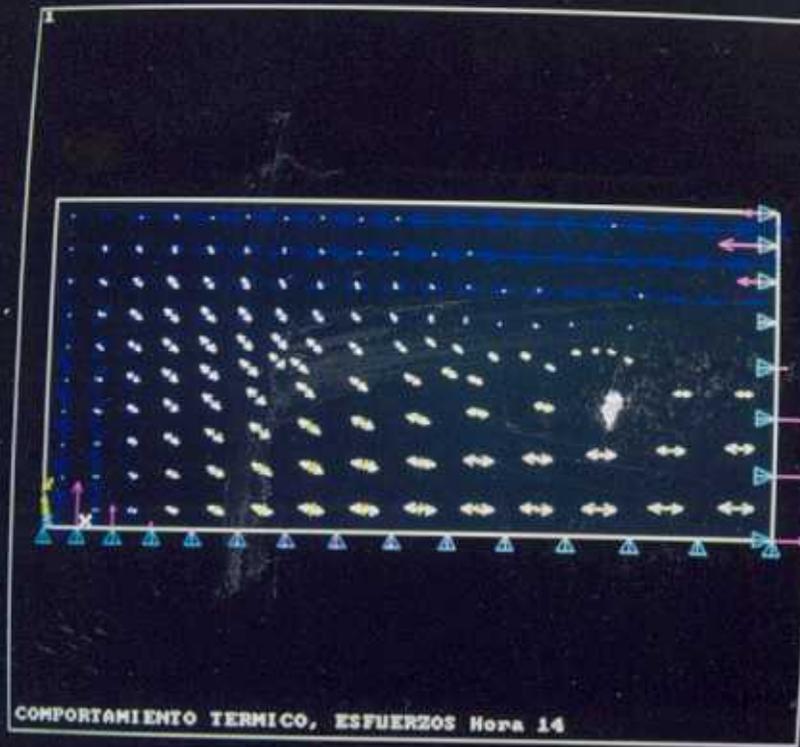
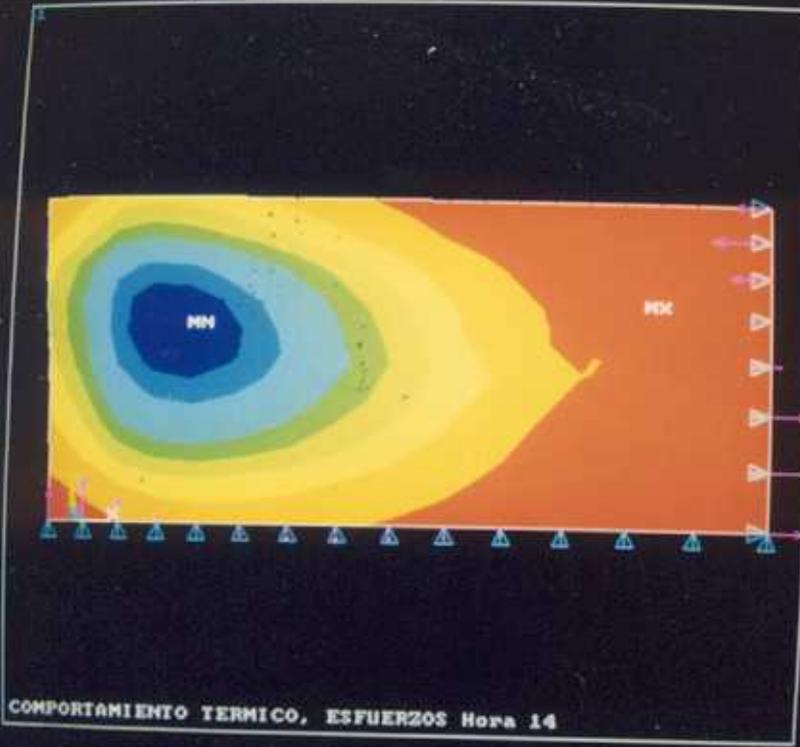
174

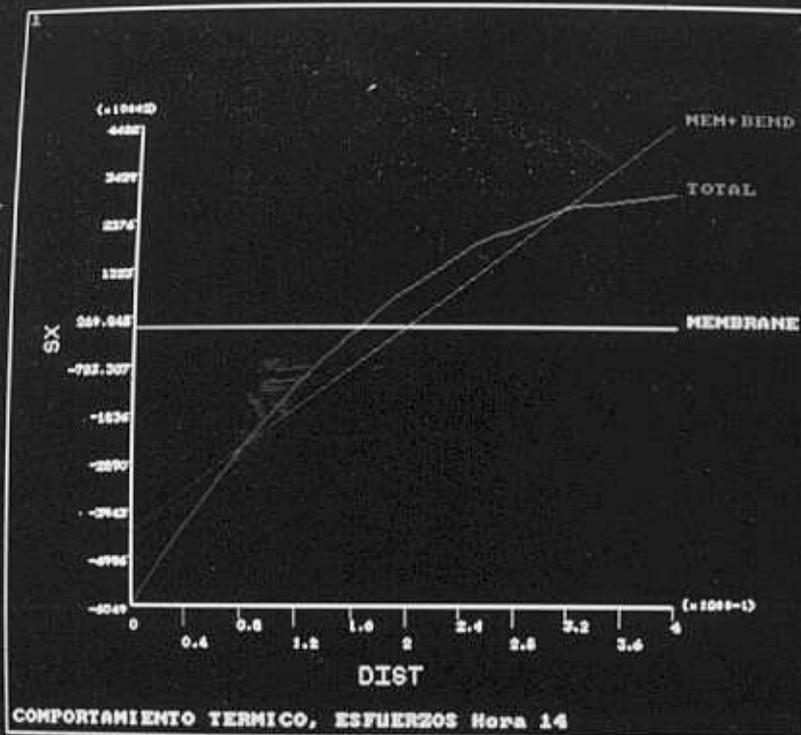


175

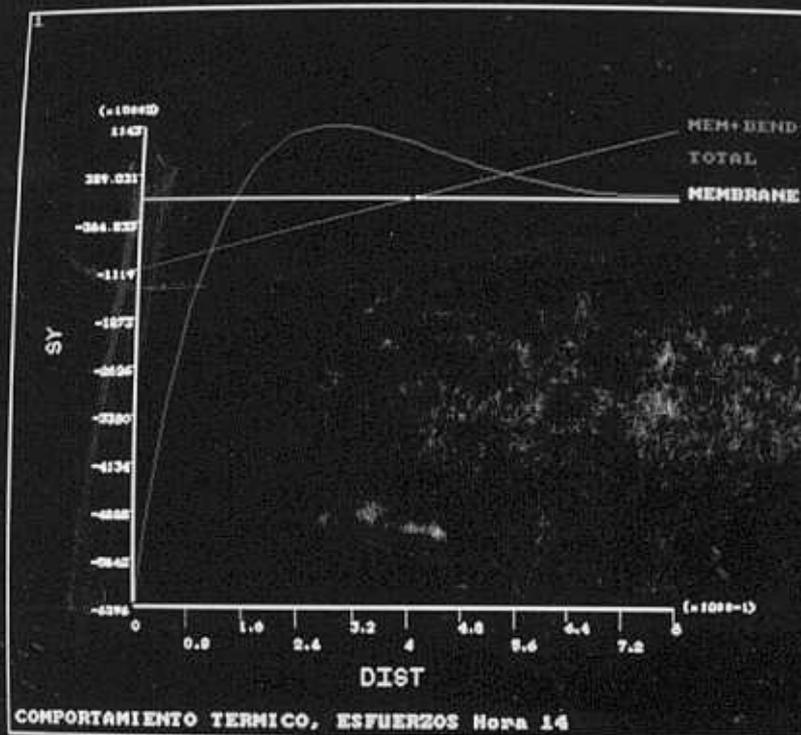


176

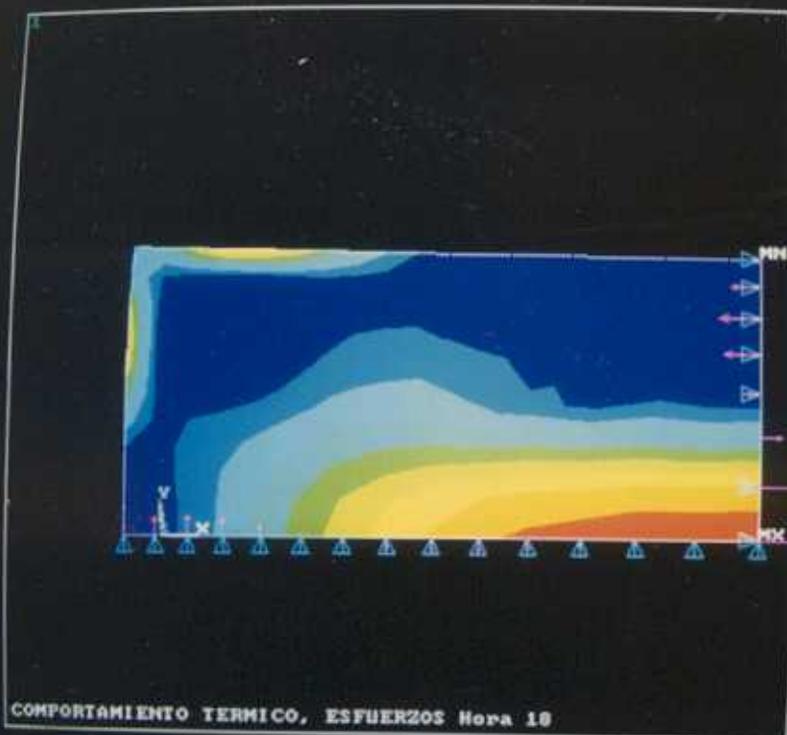




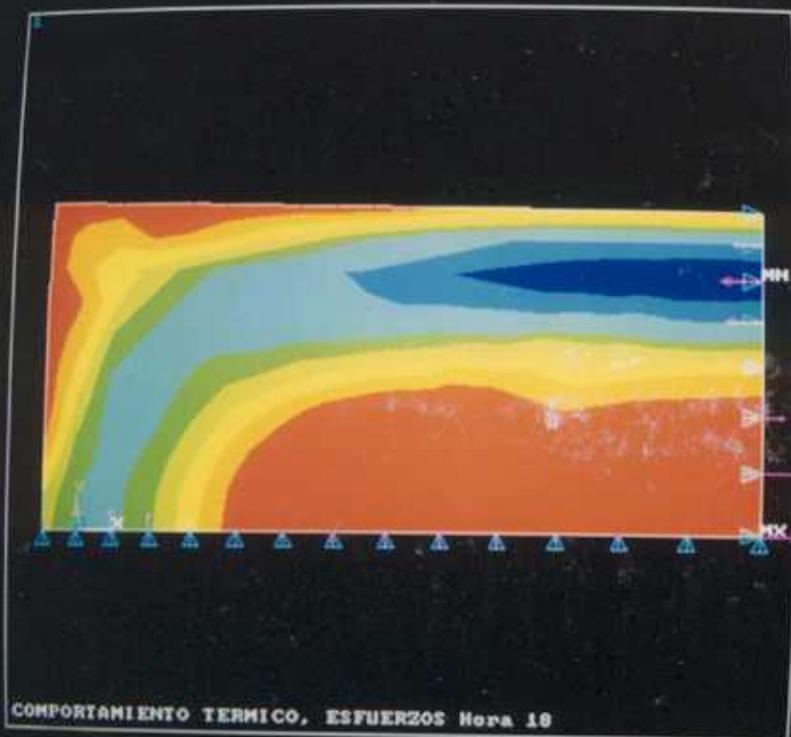
179



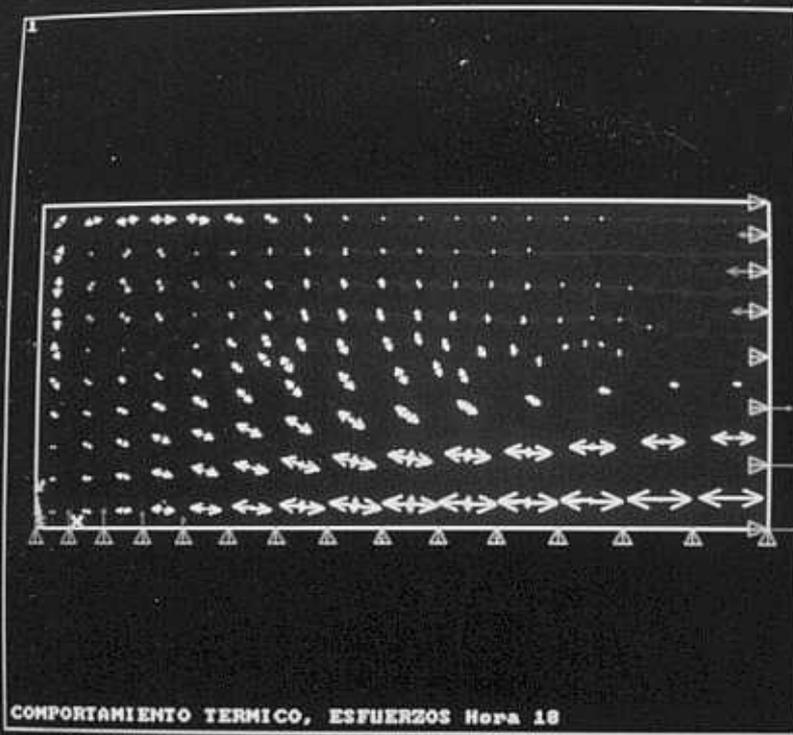
180



181



182

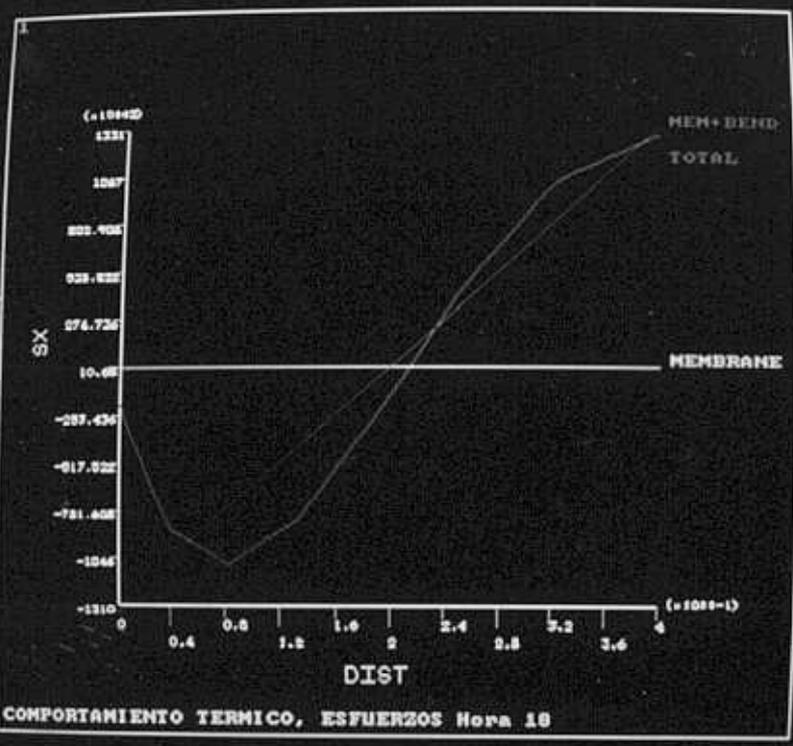


ANSYS 5.0 ED  
 JAN 17 1994  
 18:07:52  
 SECTOR  
 STEP=20  
 SUB =1  
 TIME=18  
 2

PRIN1  
 PRIN2

U  
 RFOR

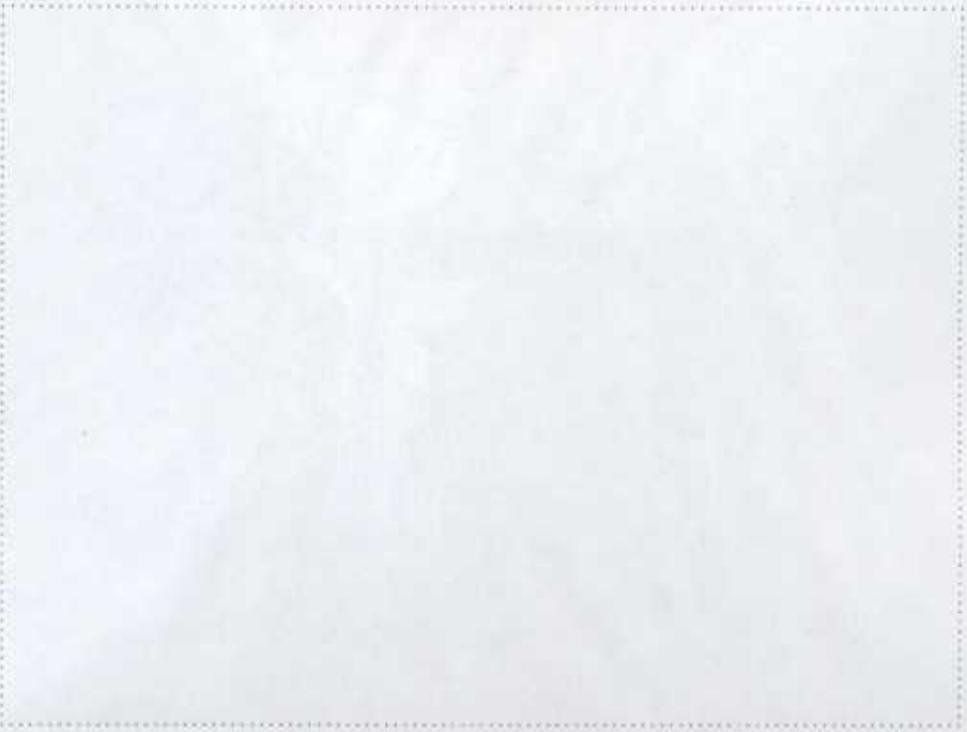
COMPORTAMIENTO TERMICO, ESFUERZOS Hora 18



ANSYS 5.0 ED  
 JAN 17 1994  
 18:08:43  
 POST1  
 STEP=20  
 SUB =1  
 TIME=18  
 SECTION PLOT  
 MOD1=16  
 MOD2=2  
 SX  
 STRESS GLOBAL

SU =1  
 DIST=0.75  
 KY =0.3  
 KY =0.3  
 KY =0.3  
 CENTROID HIDDEN  
 EDGE

COMPORTAMIENTO TERMICO, ESFUERZOS Hora 18



193



194



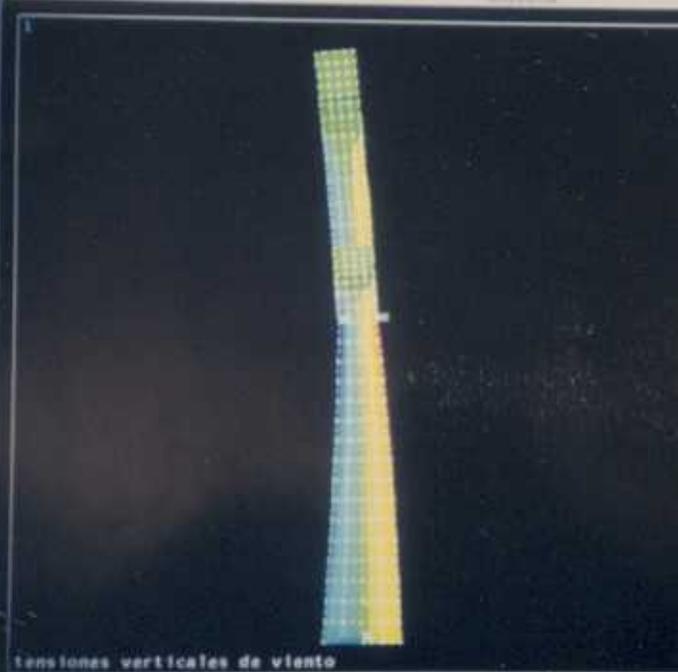
ANSYS 5.0  
 JAN 26 1994  
 16:27:19  
 DISPLACEMENT  
 STEP=1  
 SUB =1  
 FREQ=1.157  
 REVS=0  
 SMM =0.003712

QSCA=31789  
 NV =2  
 TV =5  
 ZV =3  
 RST=2177  
 RF =-1.121  
 YF =-1374  
 ZF =13.787  
 CENTROID HIDDEN

PILA TIPO DEFORMADA

POST1:

I



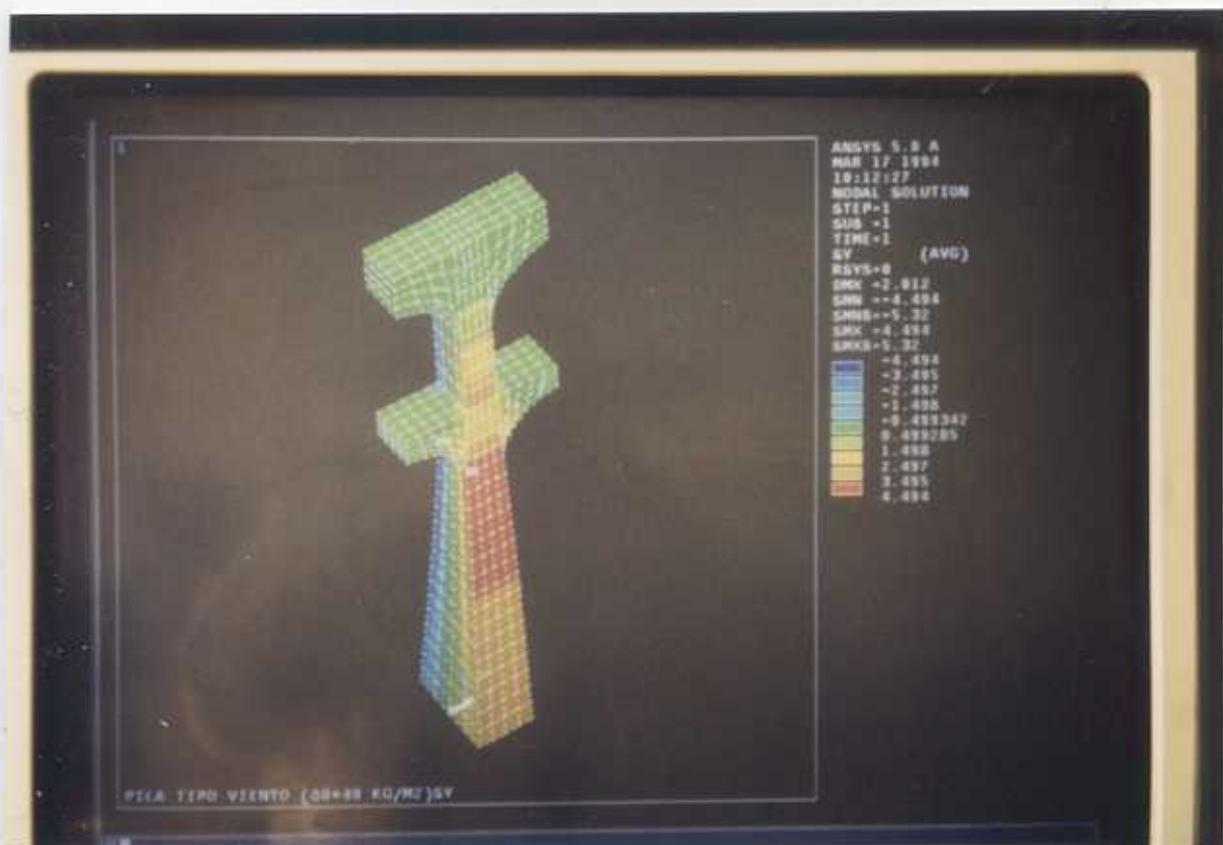
ANSYS 5.0  
 JAN 26 1994  
 16:26:27  
 NODAL SOLUTION  
 STEP=1  
 SUB =1  
 TIME=1  
 S (AVG)  
 REVS=0

SMN	=13.543
SMM	=-29954
SMX	=-25443
SMY	=29950
SMZ	=31456
SMN	=-29954
SMX	=-23290
SMY	=-18447
SMZ	=-9906
SMN	=-2329
SMX	=3376
SMY	=9802
SMZ	=16830
SMN	=23294
SMX	=29950

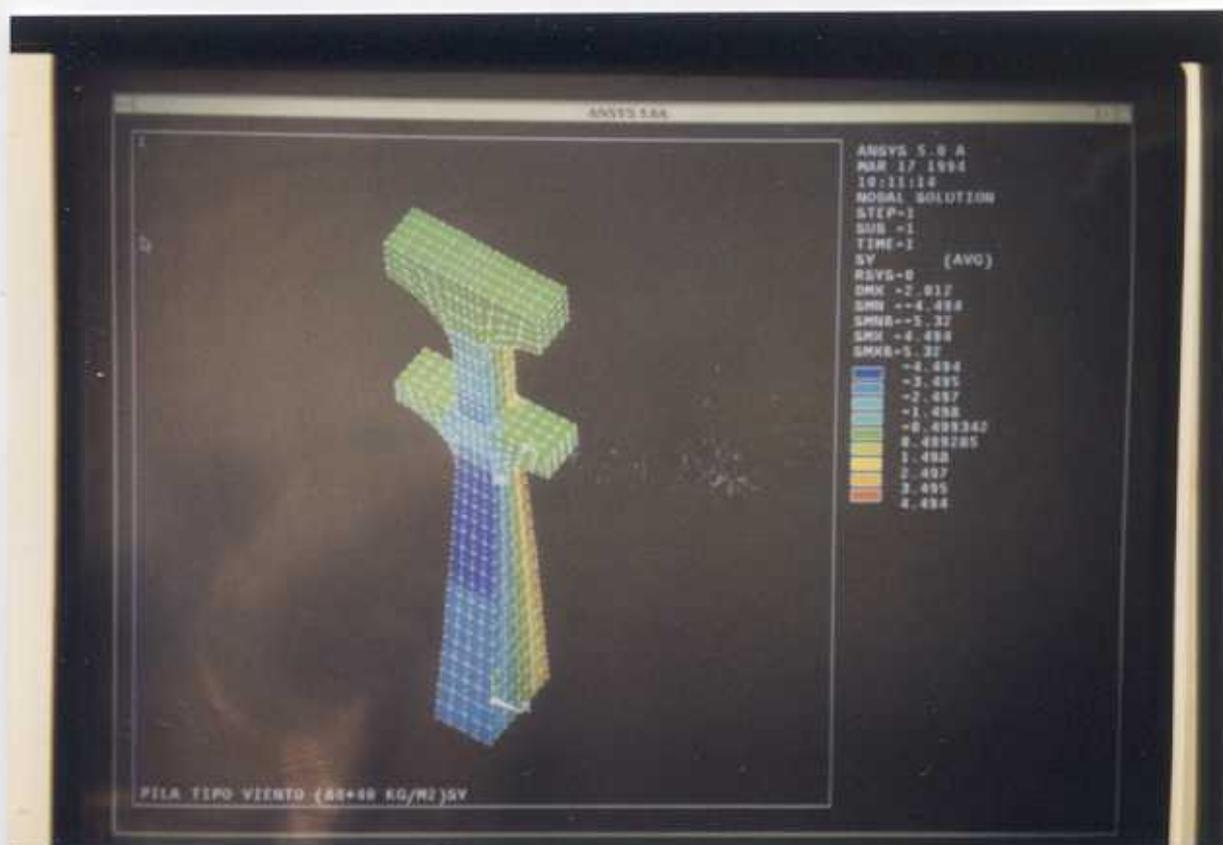
tensiones verticales de viento

POST1:

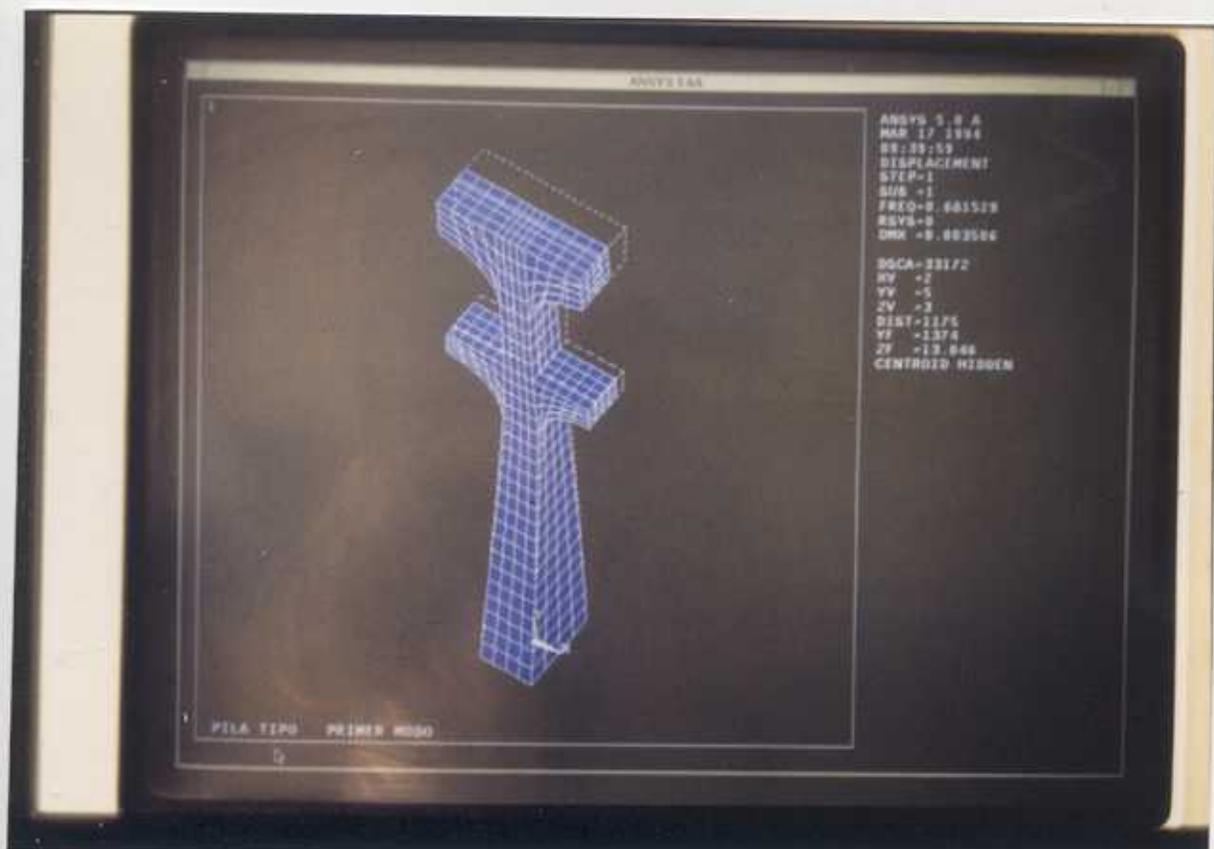
I



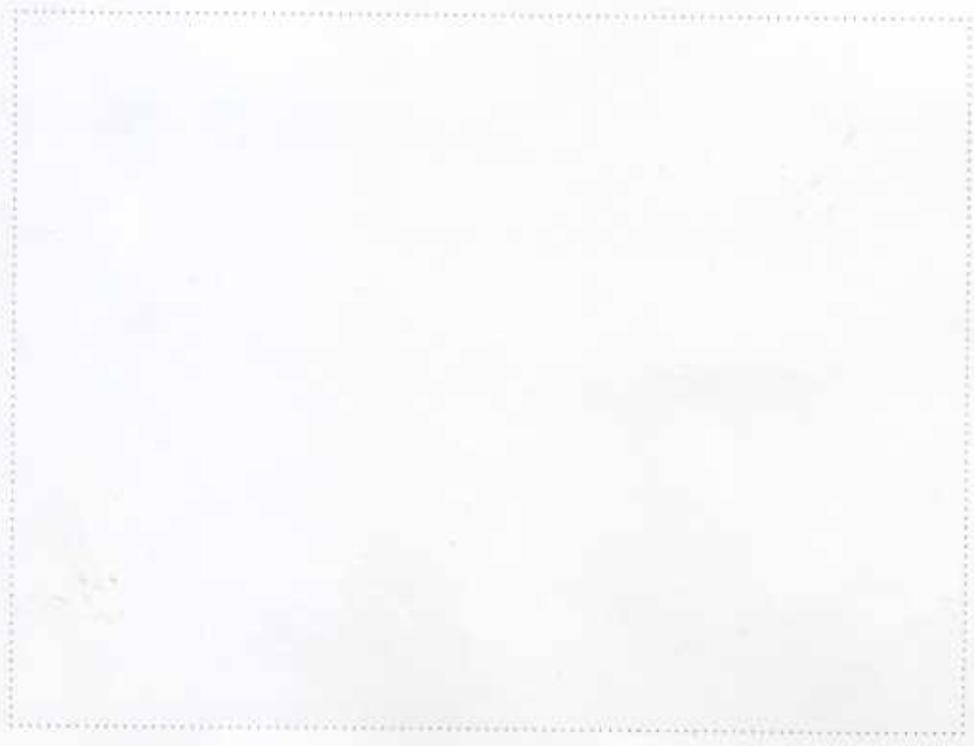
197



198



199



200



