ESTUDIO DE LA FRECUENCIA DE VIBRACIÓN EN VIGAS

[1]Maganto Suárez, F.*; [1]Tremps Guerra, E.; [2]Maganto Suárez, F*.; [1]García García, A.; [3]Somolinos Sánchez, J.A.; [4]González Redondo, M. [1]Morón Fernández, C.

[1] Dpto. de Tecnología de la Edificación E.U. Arquitectura Técnica de Madrid,
[2] Dpto. de S. I. A., Escuela Universitaria de Informática
[3] Dpto. Sistemas Oceánicos y Navales, ETSI Navales
[4] Dpto. de Física e Instalaciones Aplicadas a la Edificación. E.T.S. Arquitectura.
Universidad Politécnica de Madrid.
email:fernandojose.maganto@upm.es

RESUMEN

En este trabajo se ha realizado el estudio de la frecuencia de oscilación de distintos elementos estructurales. En concreto se han analizado de forma exacta las frecuencias naturales de oscilación de vigas. Se ha aplicado a los casos de fuerzas uniformemente distribuidas y puntuales aplicadas en el centro de la viga en los casos de vigas apoyadas en los extremos, vigas empotradas en los extremos y vigas apoyadas en un extremo y empotradas en el otro.

1.- Introducción

Las frecuencias naturales de oscilación de vigas vienen dadas por la expresión [1-4]:

$$\omega = \sqrt{\frac{\Phi_L \cdot K}{\Phi_M \cdot m}}$$

donde:

- K : rigidez efectiva.
- Φ_L: factor que multiplica o bien a la fuerza uniformemente distribuida o a la fuerza puntual.
- Φ_M: factor que multiplica a la masa uniformemente distribuida o puntual; estas serán respectivamente: *pl*/*g* o *P*/*g* según un caso u otro.

Se ha aplicado a los casos de fuerzas uniformemente distribuidas y puntuales aplicadas en el centro de la viga en los casos de:

- Vigas apoyadas en los extremos.
- Vigas empotradas en los extremos.
- Vigas apoyadas en un extremo y empotradas en el otro.

Vamos a realizar el estudio de las frecuencias propia de vibración de una viga en función del tipo de sujeción de la misma y del tipo de carga a la que esté sometida. Por último se aplicará el cálculo obtenido al caso de una viga de acero de coeficiente de elasticidad E = 200000 MPa, del tipo IPN-200, cuyo momento de inercia es I = 2140 cm^4 y va a estar sometida a una carga uniforme p = 19600 N/m en unos casos y puntual P = 19600 N en otros con una longitud l = 5 m.

2.- Viga apoyada en los extremos

2.1.- Viga sometida a una carga uniforme por uniformidad de longitud

La frecuencia propia de vibración de una viga sometida a una carga uniforme p por unidad de longitud (Fig. 1) vendrá dada por

$$m = \frac{pl}{g} \quad ; \quad \Phi_L = 0,637 \quad ; \quad \Phi_M = 0,5 \quad ; \quad K = \frac{384EI}{5l^3}$$

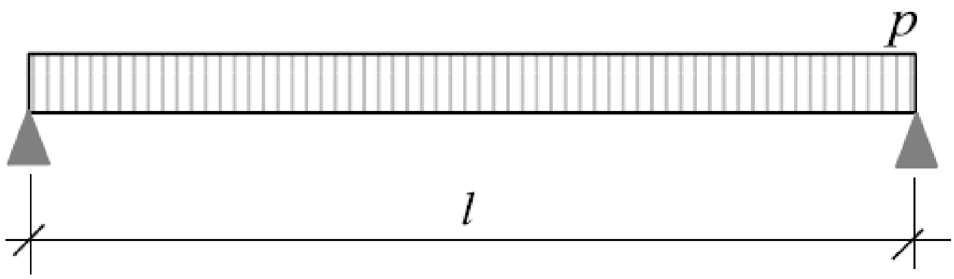

Figura 1. Viga apoyada en los extremos y sometida a una carga uniforme p en toda la viga.

Por tanto:

$$\omega = \sqrt{\frac{0,637 \times 384EI}{0,5\frac{pl}{g} \cdot 5l^3}} = \sqrt{\frac{0,637 \times 384}{5 \times 0,5}} \cdot \sqrt{\frac{gEI}{pl^4}}$$

es decir

$$\omega = 9,8915 \cdot \sqrt{\frac{gEI}{pl^4}} \quad \Rightarrow \quad f = 1,5743 \cdot \sqrt{\frac{gEI}{pl^4}} \text{ Hz}$$

$$f = 1,5743 \cdot \sqrt{\frac{gEI}{pl^4}} = 1,5743\sqrt{\frac{9,8 \times 2^{11} \times 2140 \times 10^{-8}}{19600 \times 5^4}} = 2,91 \text{ Hz}$$

2.2.- Viga sometida a una carga puntual en el centro

$$m = \frac{P}{g} \quad ; \quad \Phi_L = 1,00 \quad ; \quad \Phi_M = 1,00 \quad ; \quad K = \frac{48EI}{l^3}$$

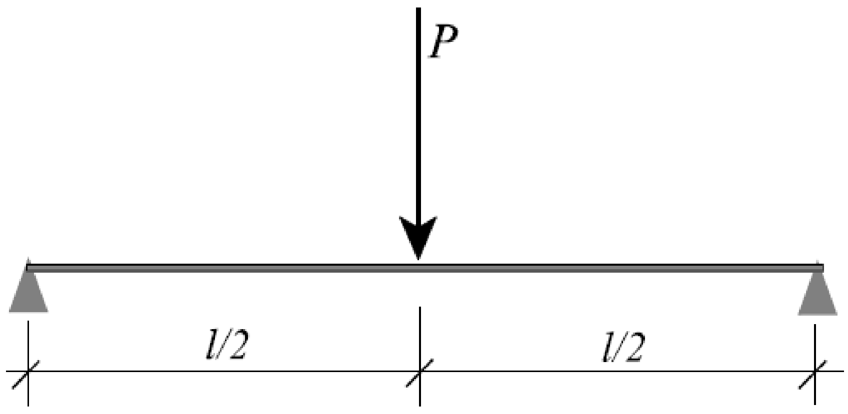

Figura 2. Viga apoyada en los extremos y sometida a una carga puntual P en el centro de la viga.

Por tanto:

$$\omega = \sqrt{\frac{484EI}{\frac{P}{g}\cdot l^3}} = \sqrt{48}\cdot\sqrt{\frac{gEI}{Pl^3}}$$

es decir,

$$\omega = 6,9282\cdot\sqrt{\frac{gEI}{Pl^3}} \quad \Rightarrow \quad f = 1,1026\cdot\sqrt{\frac{gEI}{Pl^3}}\ \mathrm{Hz}$$

$$f = 1,1026\cdot\sqrt{\frac{gEI}{Pl^3}} = 1,1026\sqrt{\frac{9,8\times 2^{11}\times 2140\times 10^{-8}}{19600\times 5^3}} = 4,56\ \mathrm{Hz}$$

3.- Viga empotrada en los extremos

3.1.- Viga sometida a una carga uniforme por uniformidad de longitud

$$m = \frac{pl}{g} \quad ; \quad \Phi_L = 0,523 \quad ; \quad \Phi_M = 0,396 \quad ; \quad K = \frac{384EI}{l^3}$$

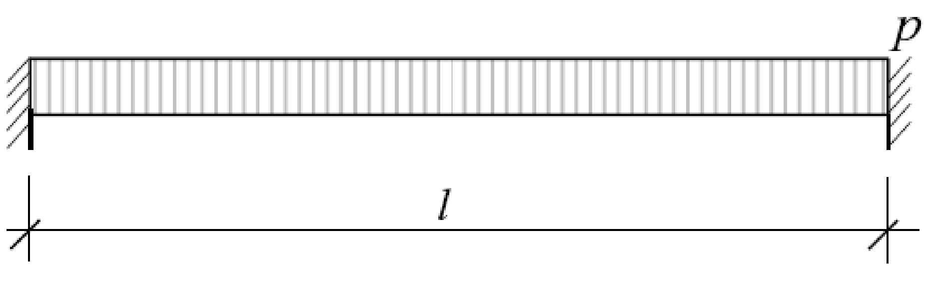

Figura 3. Viga empotrada en los extremos y sometida a una carga uniforme p en toda la viga.

Por tanto la frecuencia propia de vibración de la viga será:

$$\omega = \sqrt{\frac{0,523 \times 384 EI}{0,396 \frac{pl}{g} \cdot l^3}} = \sqrt{\frac{0,523 \times 384}{0,396}} \cdot \sqrt{\frac{gEI}{pl^4}}$$

es decir

$$\omega = 22,5200 \cdot \sqrt{\frac{gEI}{pl^4}} \quad \Rightarrow \quad f = 3,5842 \cdot \sqrt{\frac{gEI}{pl^4}} \text{ Hz}$$

$$f = 3,5842 \cdot \sqrt{\frac{gEI}{pl^4}} = 3,5842 \sqrt{\frac{9,8 \times 2^{11} \times 2140 \times 10^{-8}}{19600 \times 5^4}} = 6,62 \text{ Hz}$$

3.2.- Viga sometida a una carga aplicada en el centro de la viga

$$m = \frac{P}{g} \quad ; \quad \Phi_L = 1,00 \quad ; \quad \Phi_M = 1,00 \quad ; \quad K = \frac{192 EI}{l^3}$$

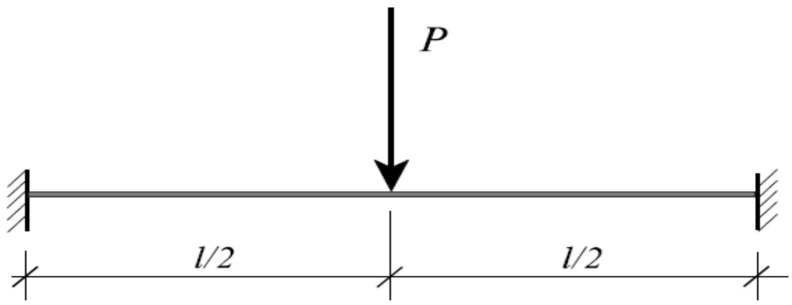

Figura 4. Viga sometida a una carga puntual P aplicada en el centro de la viga y empotrada en los extremos.

Por tanto:

$$\omega = \sqrt{\frac{192 EI}{\frac{P}{g} \cdot l^3}} = \sqrt{192} \cdot \sqrt{\frac{gEI}{Pl^3}}$$

es decir

$$\omega = 13,8564 \cdot \sqrt{\frac{gEI}{Pl^3}} \quad \Rightarrow \quad f = 2,2053 \cdot \sqrt{\frac{gEI}{Pl^3}} \text{ Hz}$$

$$f = 2,2053 \cdot \sqrt{\frac{gEI}{Pl^3}} = 2,2053\sqrt{\frac{9,8 \times 2^{11} \times 2140 \times 10^{-8}}{19600 \times 5^3}} = 9,12 \text{ Hz}$$

4.- Viga apoyada en un extremo y empotrada en el otro

4.1.- Viga sometida a una carga uniforme por uniformidad de longitud

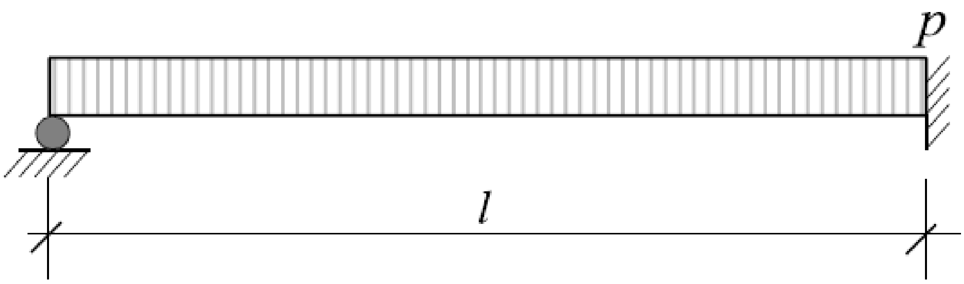

Figura 5. Viga sometida a una carga uniforme p en toda la viga, apoyada en un extremo y empotrada en el otro.

$$m = \frac{pl}{g} \quad ; \quad \Phi_L = 0,595 \quad ; \quad \Phi_M = 0,479 \quad ; \quad K = \frac{185EI}{l^3}$$

Por tanto

$$\omega = \sqrt{\frac{0,595 \times 185EI}{0,479\frac{pl}{g} \cdot l^3}} = \sqrt{\frac{0,595 \times 185}{0,479}} \cdot \sqrt{\frac{gEI}{pl^4}}$$

es decir

$$\omega = 15,1592 \cdot \sqrt{\frac{gEI}{pl^4}} \quad \Rightarrow \quad f = 2,4127 \cdot \sqrt{\frac{gEI}{pl^4}} \text{ Hz}$$

$$f = 2,4127 \cdot \sqrt{\frac{gEI}{pl^4}} = 2,4127\sqrt{\frac{9,8 \times 2^{11} \times 2140 \times 10^{-8}}{19600 \times 5^4}} = 4,46 \text{ Hz}$$

4.2.- Viga sometida a una carga puntual aplicada en el centro de la viga

$$m = \frac{P}{g} \quad ; \quad \Phi_L = 1,00 \quad ; \quad \Phi_M = 1,00 \quad ; \quad K = \frac{107EI}{l^3}$$

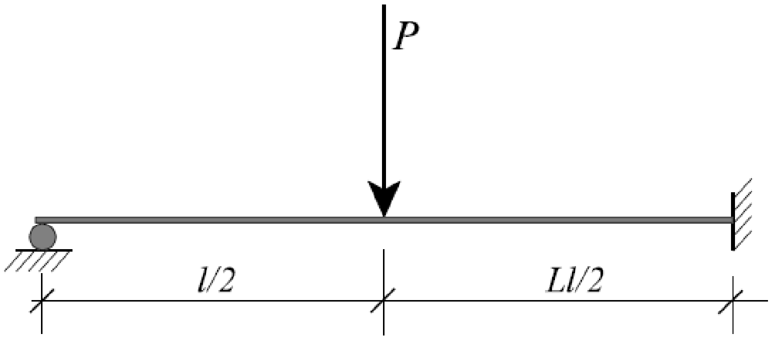

Figura 6. Viga sometida a una carga puntual P aplicada en el centro de la viga, apoyada en un extremo y empotrada en el otro.

Por tanto

$$\omega = \sqrt{\frac{107EI}{\frac{P}{g} \cdot l^3}} = \sqrt{107} \cdot \sqrt{\frac{gEI}{Pl^3}}$$

es decir

$$\omega = 10,3440 \cdot \sqrt{\frac{gEI}{Pl^3}} \quad \Rightarrow \quad f = 1,6463 \cdot \sqrt{\frac{gEI}{Pl^3}} \text{ Hz}$$

$$f = 1,6463 \cdot \sqrt{\frac{gEI}{Pl^3}} = 1,6463\sqrt{\frac{9,8 \times 2^{11} \times 2140 \times 10^{-8}}{19600 \times 5^3}} = 6,81 \text{ Hz}$$

5.- Resultados

Como se ha podido observar las frecuencias propias irán desde 2,91 Hz, caso mas desfavorable, hasta 9,12 Hz, caso mas favorable.
El Código Técnico de la Edificación en su documento básico: Seguridad Estructural, DB-SE establece, respecto a vibraciones, entre otras cosas,
«Se admite que una planta de piso susceptible de sufrir vibraciones por efecto rítmico de las personas, es suficientemente rígido, si la frecuencia propia es mayor de: a) 8 hertzios en gimnasios y polideportivos; b) 7 hertzios en salas de fiestas y locales de pública concurrencia sin asientos fijos; c) 3,4 hertzios en locales de espectáculos con asientos fijos...».
Por lo tanto, con un sensor, por ejemplo de tipo magneto-inductivo de alta precisión, que permita una toma de 100 datos por segundo, como las vibraciones estructurales según hemos visto son del orden de unidades de Hz,

nos permitiría detectar con total seguridad la frecuencia a que puedan estar vibrando, de acuerdo con el teorema de muestreo de Nyquist-Shannon, tanto si la viga forma parte de una estructura isostática como hiperestática.
Aplicamos los casos anteriores a un supuesto muy común: Sea una viga de acero de coefiente de elasticidad E = 200000 MPa, del tipo IPN-200, cuyo momento de inercia I = 2140 cm^4 sometida a una carga uniforme p = 19600 N/m en unos casos y puntual P = 19600 N en otros con una longitud l = 5 m. En este caso las frecuencias propias irán desde 2,91 Hz, caso mas desfavorable, hasta 9,12 Hz, caso mas favorable.

REFERENCIAS

[1] ACHE (Asociación Científico Técnica del Hormigón Estructural, Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Madrid: Problemas de vibraciones en estructuras; Ed.: Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Madrid, 2001.

[2] Clough R.W., Penzien J.: Dynamics of Structures; Ed.: MacGraw-Hill, New York, 1975.

[3] Nyquist H., Certain topics in telegraph transmission theory, Trans. AIEE, vol. 47, 1928.

[4] Thomson W.T.: Theory of vibration, 3a Ed.; Ed.: Prentice-Hall Internacional Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1988.