Sobre la antonimia y su extensión a los conjuntos de Atanassov

Susana Cubillo, Elena E. Castiñeira
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Politécnica de Madrid
28660 Boadilla del Monte
{scubillo,ecastineira}@fi.upm.es

Wilmer Montilla
Área de Matemática
Universidad Nacional Abierta
C.L. Barinas, 5201 Venezuela
wilmer-montilla@hotmail.com

Resumen

Con este trabajo se inicia el estudio de la antonimia en el contexto de los conjuntos borrosos intuicionistas de Atanassov. Para ello, con el objetivo de afinar ciertos aspectos y poder trasladarlos a dicho campo, primero se retoma el concepto de antonimia y la obtención de antónimos en el contexto de los conjuntos borrosos, donde se analiza la construcción mediante involuciones. Después, se introducen los conceptos de conjuntos intuicionistas antónimos y de función antónimo obteniendo una familia de dichas funciones. Finalmente, se trata la relación de la antonimia en ambos campos y se proporcionan un resultado que las relaciona.

Palabras clave: Lógica borrosa, antonimia, conjuntos borrosos intuicionistas de Atanassov.

1. Introducción

La computación con palabras (véase [9]) es una metodología científica en el campo de la Inteligencia Artificial, y más concretamente en el área de la Computación Flexible (Soft-Computing), en la que los objetos que se manejan no son números o símbolos, sino palabras y proposiciones del lenguaje natural. En cierto modo, es un intento de imitar la notable capacidad que el ser humano posee para abstraer, razonar, deducir y predecir sin necesidad de realizar medidas o cálculos.

Uno de los conceptos fundamentales que maneja el lenguaje natural, y en el que se basa el ser humano para realizar muchas de sus tareas cognitivas y deductivas, es el concepto de "antónimo", por lo tanto, éste será también un concepto fundamental en esta nueva metodología. En efecto, en el uso de un predicado no sólo se hace referencia al predicado en sí, sino que también se considera implícitamente su antónimo. Así por ejemplo, a la afirmación "Ana es alta" se llega mediante comparación (medida ésta que solemos hacer sin ningún tipo de cálculo explícito) de la estatura de Ana con la de otras personas que son "bajas", de hecho el concepto "alto" existe en tanto que existe el de "bajo".

El antónimo tiene sentido cuando se trata con predicados imprecisos, pues el antónimo de un predicado preciso, si existe, es justamente su negación. Por tanto, es en el ámbito de la lógica borrosa, o sus extensiones, donde se debe afrontar la formalización de la antonimia. Así, conocida la función de pertenencia μ_A de un predicado borroso A, es decir, el modelo matemático que describe dicho predicado, el problema de modelizar el predicado antónimo de A, aA, se reduce a encontrar mecanismos que permitan describir la función de pertenencia μ_{aA} de aA a través de μ. Sin embargo, la tarea de establecer un modelo general que permita determinar tales mecanismos, incluso que especifique claramente qué se entiende de manera formal por antónimo, es mucho más difícil de lo que podría pensarse y, a menudo, muchos de los intentos de aproximación a este problema producen tan sólo soluciones parciales. En [5], [6] y [7] se destacaron algunas características a considerar, proponiendo una formalización de estas ideas. Sin embargo, se puede profundizar en algunos aspectos refinando el modelo para conseguir una teoría matemáticamente más amplia y compacta.

Por otro lado, y dado el creciente uso de los conjuntos borrosos intuicionistas de Atanassov (AIFSs) [1] en diferentes aplicaciones, parece conveniente estudiar el fenómeno de la antonimia en este campo, tanto desde el punto de vista de la formalización, que resulta aún más complejo que en el caso borroso, como en la de sus posibles aplicaciones.

Por ello, la finalidad de la presente contribución es doble: por una parte, reconsiderar la antonimia en el marco de los conjuntos borrosos con el fin de preci-sar ciertos aspectos teóricos del modelo, y por otra, iniciar un estudio paralelo en el campo de los conjuntos borrosos de Atanassov analizando la relación entre ambos campos.

La organización de este trabajo es la siguiente: En la sección 2, se establecen los preliminares necesarios sobre los conjuntos borrosos y los conjuntos de Atanassov, así como los conectivos y negaciones en ambos campos. En la sección 3, después de recordar los principales resultados obtenidos en [5], [6] y [7] sobre las condiciones que debe cumplir un par de antónimos y la obtención de la función de pertenencia del antónimo de un predicado dado, se aportan algunas ideas nuevas que refinan el modelo anterior proponiendo las que se denominarán "funciones antónimo", y construyendo algunas de estas funciones. A continuación, en la sección 4, tomando como base los resultados obtenidos, se comienza un estudio de la antonimia dentro del campo de los conjuntos de Atanassov, y se presenta un primer teorema que muestra que la antonimia en los dos campos no es independiente. Finalmente, se formulan algunas conclusiones.

2. Preliminares

Como es bien conocido (véase [8]), un conjunto borroso asociado a un predicado impreciso A, definido sobre un universo de discurso $X \neq \emptyset$, es un conjunto de pares $\widetilde{A} = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X$ y $\mu_A : X \to [0,1]\}$, donde la función μ_A se denomina función de pertenencia a $\widetilde{A}$ pues, para cada $x \in X$, $\mu_A(x)$ representa el grado con que el elemento x satisface el predicado A y, por tanto, el grado con el que pertenece al conjunto borroso $\widetilde{A}$. El conjunto de todos los conjuntos borrosos de X es isomorfo al de sus funciones de pertenencia, que se denota por $[0,1]^X$, por lo que es común identificar el conjunto $\widetilde{A}$ con su función de pertenencia μ_A.

Una negación en $[0,1]$ es una función $N : [0,1] \to [0,1]$ decreciente que verifica $N(0) = 1$ y $N(1) = 0$. Además, si para todo $x \in [0,1]$, se tiene que $N(N(x)) = x$, se dice que la negación es fuerte. La función definida en $[0,1]$ por $N_s(x) = 1 - x$ es una negación fuerte que suele denominarse negación estándar. Una negación N permite, dado $\mu \in [0,1]^X$, obtener su complemento respecto a dicha negación, o N-complemento, considerando $N \circ \mu \in [0,1]^X$.

Una involución en un intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ es una función $\alpha : [a,b] \to [a,b]$ decreciente que verifica $\alpha(a) = b$, $\alpha(b) = a$ y $\alpha(\alpha(x)) = x$ para todo $x \in [a,b]$.

La teoría de los conjuntos borrosos intuicionistas introducida por Atanassov (véase [1]) es una herramienta para tratar la vaguedad que puede ser considerada una extensión de la teoría de los conjuntos borrosos de Zadeh, y a la que muchos autores han dedicado parte de sus estudios en las últimas décadas. Un conjunto borroso intuicionista de Atanassov (AIFS) asociado a un predicado impreciso A, dado sobre un universo $X \neq \emptyset$, es un conjunto de ternas $\widehat{A} = \{(x, \mu_A(x), \nu_A(x)) : x \in X\}$ donde $\mu_A, \nu_A : X \to [0,1]$ son funciones verificando que $\mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1$ para todo $x \in X$, que se denominan funciones de pertenencia y no-pertenencia a $\widehat{A}$, respectivamente. La función $\chi^A = (\mu_A, \nu_A)$ toma valores en el conjunto $\mathbb{L} = \{(a_1, a_2) \in [0,1]^2 : a_1 + a_2 \leq 1\}$, que se puede ordenar, de forma parcial, mediante la relación: $\overline{a} = (a_1, a_2) \leq_{\mathbb{L}} (b_1, b_2) = \overline{b}$ si y sólo si $a_1 \leq b_1$ y $a_2 \geq b_2$, resultando un retículo acotado cuyo elemento mínimo el $0_{\mathbb{L}} = (0,1)$ y máximo $1_{\mathbb{L}} = (1,0)$. De esta manera, $\widehat{A}$ es un $\mathbb{L}$-conjunto borroso de Goguen [4] siendo χ^A su función de $\mathbb{L}$-pertenencia. El conjunto de todos los AIFSs sobre X es isomorfo al de sus funciones de $\mathbb{L}$-pertenencia, que se denota por $\mathbb{L}^X$, por lo que también se suele identificar la función de $\mathbb{L}$-pertenencia χ^A con el AIFS $\widehat{A}$.

Una negación borrosa intuicionista (IFN) es una función $\mathcal{N} : \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ decreciente verificando que $\mathcal{N}(0_{\mathbb{L}}) = 1_{\mathbb{L}}$ y $\mathcal{N}(1_{\mathbb{L}}) = 0_{\mathbb{L}}$. Además, si $\mathcal{N}(\mathcal{N}(\overline{a})) = \overline{a}$ para todo $\overline{a} \in \mathbb{L}$, se dice que la negación es fuerte. Deschrijver *et al.* (véanse [2, 3]) probaron que cualquier negación borrosa intuicionista fuerte $\mathcal{N}$ se caracteriza mediante una negación fuerte N a través de la fórmula $\mathcal{N}(a,b) = (N(1-b), 1-N(a))$.

Finalmente, debemos observar que el modelo teórico de la antonimia que aquí se trata sólo se puede aplicar a predicados que admiten una característica numérica, por lo que directamente consideraremos universos X que son intervalos de la recta real. A pesar de esta restricción, el modelo resultante se puede aplicar a una amplia clase de predicados borrosos, por ejemplo, el predicado "viejo" admite la característica numérica "edad", el predicado "alto" la "estatura", etc.

3. Conjuntos borrosos antónimos

En [5], [6] y [7], para poder establecer las propiedades que deben verificar las funciones de pertenencia correspondientes a predicados antónimos, se señalan, entre otras, tres características esenciales atendiendo a su uso en el lenguaje natural. Analicemos el clásico ejemplo del par de antónimos viejo-joven para deducirlas.

1. La primera idea que se puede apuntar es que cuando a un individuo se le califica de "viejo" siempre se entiende que no es joven; sin embargo, si no se puede calificar de joven, no se puede concluir que sea viejo. Una primera aproximación formal de esta afirmación sería: Dado un predicado A, si aA es antónimo de A, se verifica que si "x es aA", entonces "x es no-A", pero que "x sea no-A" no implica que "x sea aA".
2. Cuanto más viejo sea un individuo, menos joven es, y viceversa. Esto es, cuanto más aplicable es un predicado A a un elemento de un universo, menos aplicable es aA a dicho elemento, y cuanto menos aplicable es A más aplicable es aA.
3. Finalmente, se puede decir que "viejo" es antónimo de "joven" y "joven" lo es de viejo, por lo que "viejo" es antónimo de su antónimo. Así, se puede establecer que (A, B) es un par de antónimos si B es antónimo de A ($B = aA$) y A es antónimo de B ($A = aB$), de lo que se deduce que $A = aB = a(aA)$ y $B = a(aB)$.

La formalización precisa de la primera de las ideas anteriores es inmediata: si $\mu, \tilde{\mu} \in [0,1]^X$ con $X \subset \mathbb{R}$ intervalo son antónimos respecto a una negación fuerte N, ha de verificarse que $\tilde{\mu} \leq N \circ \mu$. Sin embargo, la segunda necesita una mayor elaboración, pues, según se argumentó en los mencionados artículos, no basta con exigir que $\mu(x) \leq \mu(y)$ implique que $\tilde{\mu}(y) \leq \tilde{\mu}(x)$, o viceversa; por lo que los autores optaron por formularla estableciendo un preorden en el universo X a través de la función de pertenencia, denominado preorden "sharpened". Para presentar dicho preorden y porque será de utilidad posteriormente, introducimos la siguiente definición.

Definición 3.1. *Sean un intervalo $X \subset \mathbb{R}$ y un predicado A sobre X con función de pertenencia μ_A. Si existe una partición finita $\mathcal{P} = \{X_i\}_{i=1}^k$ de X tal que $\mu_A : X_i \to [0,1]$ es monótona para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, diremos que A, ó μ_A, es $\mathcal{P}$-monótono.*

Definición 3.2. *Dado un intervalo $X \subset \mathbb{R}$, si $\mu \in [0,1]^X$ es $\mathcal{P}$-monótono respecto de una partición $\mathcal{P} = \{X_i\}_{i=1}^k$ de X, la función μ permite definir una relación en X como sigue: Dados $x, y \in X$, $x \leq_\mu y$ si existe $i \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $x, y \in X_i$ y $\mu(x) \leq \mu(y)$.*

La relación $\leq_\mu$ hereda las propiedades reflexiva y transitiva del orden usual en $\mathbb{R}$, pero no la antisimétrica, por lo que es un preorden sobre X, denominado preorden "sharpened" según μ. Utilizando este preorden, se puede precisar el punto 2 sobre los antónimos: Si $\mu, \tilde{\mu} \in [0,1]^X$ son antónimos han de verificar que, para todo $x, y \in X$, $x \leq_\mu y$ si y sólo si $y \leq_{\tilde{\mu}} x$.

A continuación se establece una definición de antónimo para conjuntos borrosos $\mathcal{P}$-monótonos, donde $\mathcal{P}$ es una partición finita de X. Denotaremos por $\mathbb{P}_F(X)$ al conjunto de todas las particiones finitas de X.

Definición 3.3. *Sean $X \subset \mathbb{R}$ un intervalo, N una negación fuerte y $\mu \in [0,1]^X$ $\mathcal{P}$-monótono, siendo $\mathcal{P} \in \mathbb{P}_F(X)$. Se dice que $\tilde{\mu} \in [0,1]^X$ es N-antónimo de μ si es $\mathcal{P}$-monótono y se verifica:*

(A1) $\tilde{\mu} \leq N \circ \mu$.

(A2) Dados $x, y \in X$, $x \leq_\mu y$ si y sólo si $y \leq_{\tilde{\mu}} x$.

Obsérvese que como N es decreciente e involutiva, resulta que $\tilde{\mu} \leq N \circ \mu$ es equivalente a $\mu \leq N \circ \tilde{\mu}$, y la definición anterior recoge la idea, señalada en el punto 3, de que un predicado es antónimo de su antónimo, por lo que también diremos que $(\mu, \tilde{\mu})$ forman un par de antónimos.

Hasta aquí sólo se ha especificado la noción de antónimo en un determinado contexto, pero queda por estudiar cómo obtener la función de pertenencia del antónimo de un predicado en función de la del propio predicado μ. La forma habitual de construir el antónimo de μ es considerando una involución α en X y definiendo $Ant(\mu) = \mu \circ \alpha$. En [5] los autores generalizaron esta técnica a conjuntos μ monótonos sobre una cantidad finita de intervalos (es decir, $\mathcal{P}$-monótonos), la idea consiste en considerar una involución α_i en cada intervalo cerrado $\overline{X_i}$ de monotonía y definir $\alpha : \overline{X} \to \overline{X}$ como $\alpha(s) = \alpha_i(s)$ si $s \in X_i$ (para las definiciones de α, α_i se considera la adherencia de los intervalos pues no tienen por qué ser cerrados).

Por ejemplo, sean $X = [0, 10]$ y $\mu \in [0,1]^X$ definida por (véase Fig. 1):

$$\mu(x) = \begin{cases} -\frac{x}{4} + 1, & \text{si } 0 \leq x < 4; \\ 0, & \text{si } 4 \leq x < 6; \\ \frac{x}{4} - \frac{3}{2}, & \text{si } 6 \leq x \leq 10. \end{cases}$$

Si se consideran las involuciones α_1 en $[0, 5]$ y α_2 en $[5, 10]$ con puntos fijos los puntos medios de los intervalos, dadas por $\alpha_1(x) = 5 - x$ y $\alpha_2(x) = 15 - x$, entonces el antónimo de μ que determinan viene dado por (véase Fig. 1):

$$Ant(\mu)(x) = \begin{cases} \mu(\alpha_1(x)), & \text{si } 0 \leq x < 5; \\ \mu(\alpha_2(x)), & \text{si } 5 \leq x \leq 10. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x < 1; \\ \frac{x}{4} - \frac{1}{4}, & \text{si } 1 \leq x < 5; \\ -\frac{x}{4} + \frac{9}{4}, & \text{si } 5 \leq x < 9; \\ 0, & \text{si } 9 \leq x \leq 10. \end{cases}$$

La construcción anterior es correcta pues

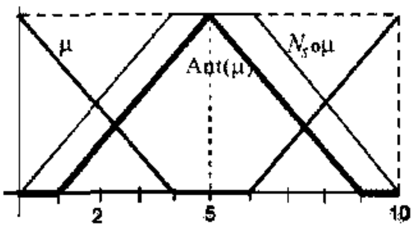

Figura 1: μ y $Ant(\mu)$ mediante involuciones

$(\mu, Ant(\mu))$ es un par de antónimos respecto de la negación estándar N_s (en la figura 1 se puede apreciar que $Ant(\mu)$ es menor o igual que $N_s \circ \mu$). Sin embargo, si queremos que el mecanismo de construcción de antónimos sea una función, el primer inconveniente que esta técnica presenta es que la forma de obtener el antónimo no es única. En efecto, podemos considerar las involuciones $\tilde{\alpha_1}$ en $[0, 4]$ y $\tilde{\alpha_2}$ en $[4, 10]$, también con puntos fijos los puntos medios de los intervalos, dadas por $\tilde{\alpha_1}(x) = 4 - x$ y $\tilde{\alpha_2}(x) = 14 - x$, puesto que μ es monótono en cada uno de dichos intervalos. Así, se tiene el siguiente conjunto borroso

$$\widetilde{Ant}(\mu)(x) = \begin{cases} \mu(\tilde{\alpha}_1(x)), & \text{si } 0 \leq x < 4; \\ \mu(\tilde{\alpha}_2(x)), & \text{si } 4 \leq x \leq 10. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{x}{4}, & \text{si } 0 \leq x < 4; \\ 2 - \frac{x}{4}, & \text{si } 4 \leq x < 8; \\ 0, & \text{si } 8 \leq x \leq 10. \end{cases}$$

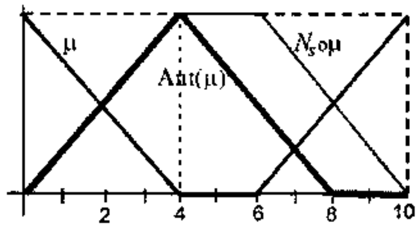

Figura 2: μ y $\widetilde{Ant}(\mu)$ mediante involuciones

De nuevo, se tiene que $(\mu, \widetilde{Ant}(\mu))$ es un par de antónimos respecto a la negación estándar (la figura 2 muestra que $\widetilde{Ant}(\mu)$ es menor o igual que $N_s \circ \mu$). Si queremos definir una función que devuelva antónimos, puesto que cualquiera de ellos es válido, ¿qué conjunto asignamos a μ? Veamos que este inconveniente es fácilmente evitable si determinamos qué se entiende por función antónimo de forma adecuada. Para su formalización es necesario definir previamente el siguiente conjunto.

Definición 3.4. *SDado un intervalo $X \subset \mathbb{R}$, se define*
$\Lambda(X) = \{\mu_{\mathcal{P}} \in [0,1]^X : \mu_{\mathcal{P}}$ *es* $\mathcal{P}$ *– monótono para alguna* $\mathcal{P} \in \mathbb{P}_F(X)\}$.

En $\Lambda(X)$ se distinguen elementos asociados a distintas particiones, es decir, se considera que si $\mathcal{P}, \tilde{\mathcal{P}} \in \mathbb{P}_F(X)$ verifican que $\mathcal{P} \neq \tilde{\mathcal{P}}$, entonces $\mu_{\mathcal{P}} \neq \mu_{\tilde{\mathcal{P}}}$, aunque $\mu_{\mathcal{P}}(x) = \mu_{\tilde{\mathcal{P}}}(x)$ para todo $x \in X$.

Definición 3.5. *Una función $A_N : \Lambda(X) \to \Lambda(X)$ es una función antónimo respecto de la negación fuerte N, o función N-antónimo, si:*

(i) $A_N(\mu) \leq N \circ \mu$ para todo $\mu \in \Lambda(X)$.

(ii) Para todo $\mu \in \Lambda(X)$ y $x, y \in X$, si $x \leq_\mu y$, entonces $y \leq_{A_N(\mu)} x$.

(iii) $A_N(A_N(\mu)) = \mu$ para todo $\mu \in \Lambda(X)$.

El primer resultado inmediato es:

Proposición 3.6. *Si A_N es una función antónimo, entonces $(\mu, A_N(\mu))$ es un par de antónimos.*

Otro inconveniente que presenta la técnica anterior es que no proporciona una fórmula general, sino que cada antónimo se construye "ad hoc". En efecto, fijada una negación, no podemos asegurar que el conjunto construido mediante un algoritmo que considere las involuciones de los intervalos de $\mathcal{P}$ sea un antónimo de $\mu_\mathcal{P}$, ya que puede suceder que el conjunto obtenido no cumpla alguna de la condiciones requeridas. Esto sugiere que las involuciones no se puedan tomar a priori, sino que deban ser diseñadas según los valores de μ en cada intervalo. Veamos un ejemplo: Sean $X = [0,1]$, $N = N_s$ y $\mu \in [0,1]^X$ definido, para cada $x \in [0,1]$, por $\mu(x) = \sqrt{2x - x^2}$; entonces, tomando la involución en $[0,1]$ dada por $\alpha(x) = 1 - x$, se tiene que $\mu(\alpha(x)) = \sqrt{1 - x^2}$ y $N(\mu(x)) = 1 - \sqrt{2x - x^2}$, con lo que la desigualdad $\mu(\alpha(x)) \leq N(\mu(x))$ no se verifica (véase la figura 3).

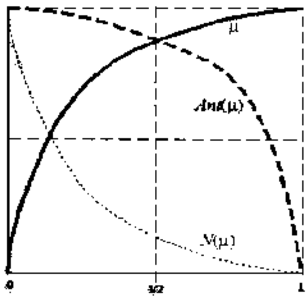

Figura 3: Contraejemplo

El siguiente resultado, aunque no tiene en cuenta involuciones, sí proporciona una familia de funciones antónimo.

Proposición 3.7. *Dados un intervalo $X \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ y una negación fuerte N, la función $Ant^n : \Lambda(X) \to \Lambda(X)$ definida, para cada $\mu_\mathcal{P} \in \Lambda(X)$ siendo $\mathcal{P} = \{X_i\}_{i=1}^k \in \mathbb{P}(X)$, por:*

$$Ant^n(\mu_\mathcal{P})(x) = \begin{cases} (N(\mu_\mathcal{P}(x)))^n, & \text{si } \begin{cases} x \in X_i \\ \mu_\mathcal{P} \mid_{X_i} \text{ creciente} \end{cases} \\ N((\mu_\mathcal{P}(x))^{1/n}), & \text{si } \begin{cases} x \in X_i \\ \mu_\mathcal{P} \mid_{X_i} \text{ decreciente} \end{cases} \end{cases}$$

es una función N-antónimo.

Demostración. (i) Dado $x \in X$, se verifica:

1. $(N(\mu_\mathcal{P}(x)))^n \leq N(\mu_\mathcal{P}(x))$.

2. $(\mu_\mathcal{P}(x))^{1/n} \geq \mu_\mathcal{P}(x)$, y como N es decreciente, se sigue que $N((\mu_\mathcal{P}(x))^{1/n}) \leq N(\mu_\mathcal{P}(x))$.

Por tanto, $Ant^n(\mu_\mathcal{P})(x) \leq N(\mu_\mathcal{P}(x))$ para todo $x \in X$.

(ii) Sea $X_i \in \mathcal{P}$ tal que $\mu_\mathcal{P} \mid_{X_i}$ es creciente. Si $x, y \in X_i$ verifican que $x \leq_{\mu_\mathcal{P}} y$, entonces $\mu_\mathcal{P}(x) \leq \mu_\mathcal{P}(y)$, y por tanto, $Ant^n(\mu_\mathcal{P})(x) = (N(\mu_\mathcal{P}(x)))^n \geq (N(\mu_\mathcal{P}(y)))^n = Ant^n(\mu_\mathcal{P})(y)$, lo que se traduce en el preorden de X como $y \leq_{Ant^n(\mu_\mathcal{P})} x$. De forma similar, se obtiene el resultado cuando $\mu_\mathcal{P} \mid_{X_i}$ decrece.

(iii) Sea $x \in X_i$ y supongamos que $\mu_\mathcal{P} \mid_{X_i}$ es creciente, entonces como $Ant^n(\mu_\mathcal{P}) \mid_{X_i}$ es decreciente, se tiene $Ant^n(Ant^n(\mu_\mathcal{P}))(x) = Ant^n((N(\mu_\mathcal{P}(x)))^n) = N(N(\mu_\mathcal{P}(x))) = \mu_\mathcal{P}(x)$. De forma similar, se obtiene si $\mu_\mathcal{P} \mid_{X_i}$ es decreciente. □

4. Conjuntos de Atanassov antónimos

Para establecer el concepto de antonimia en la teoría de los conjuntos borrosos intuicionistas de Atanassov, seguiremos un procedimiento similar al caso borroso. Así, comenzaremos definiendo AIFSs monótonos respecto a una partición y estableciendo el preorden "sharpened" en este nuevo contexto.

Definición 4.1. *Sea un intervalo $X \subset \mathbb{R}$ y $\chi \in \mathbb{L}^X$. Si existe $\mathcal{P} = \{X_i\}_{i=1}^k \in \mathbb{P}_F(X)$ tal que para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ se tiene que que la función $\chi \mid_{X_i}$ es monótona, se dice que χ es $\mathcal{P}$-monótono.*

Obsérvese que si $\chi = (\mu, \nu)$ es $\mathcal{P}$-monótono, entonces $\mu \mid_{X_i}$ y $\nu \mid_{X_i}$ son funciones monótonas (μ y ν son conjuntos borrosos $\mathcal{P}$-monótonos) y con el orden inverso.

Definición 4.2. *Dado un intervalo $X \subset \mathbb{R}$, si $\chi \in \mathbb{L}^X$ es $\mathcal{P}$-monótono respecto de alguna $\mathcal{P} = \{X_i\}_{i=1}^k \in \mathbb{P}_F(X)$, la función χ permite definir una relación en X como sigue: Dados $x, y \in X$, $x \leq_\chi y$ si existe $i \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $x, y \in X_i$ y $\chi(x) \leq_{\mathbb{L}} \chi(y)$.*

De nuevo, la relación $\leq_\chi$ es un preorden en X, denominado preorden "sharpened" respecto a χ.

Una vez definido el preorden inducido por un $\chi \in \mathbb{L}^X$, podemos establecer qué se entiende por conjunto antónimo de un AIFS.

Definición 4.3. *Sean un intervalo $X \subset \mathbb{R}$ y $\mathcal{N}$ una IFN fuerte en $\mathbb{L}$. Se dice que $\tilde{\chi} \in \mathbb{L}^X$ es antónimo de χ respecto de $\mathcal{N}$, o $\mathcal{N}$-antónimo, si ambos son $\mathcal{P}$-monótonos para alguna $\mathcal{P} \in \mathbb{P}_F(X)$ y se verifica:*

(i) $\tilde{\chi} \leq_{\mathbb{L}} \mathcal{N} \circ \chi$.

(ii) Para todo $x, y \in X$, se verifica $x \leq_\chi y$ si y sólo si $x \geq_{\tilde{\chi}} y$.

Por ser $\mathcal{N}$ una negación fuerte, se tiene que si $\tilde{\chi}$ es antónimo de χ, entonces también es χ antónimo de $\tilde{\chi}$, en cuyo caso diremos que $(\chi, \tilde{\chi})$ es un par de antónimos.

Observación 4.4. En el caso borroso no podemos aplicar la definición de antónimo a conjuntos cuya función de pertenencia presente una cantidad infinita de intervalos de monotonía con orden alterno (por ejemplo, no podemos hablar del antónimo de $\mu : (0,1] \to [0,1]$ definido por $\mu(x) = \text{sen}(1/x)$); lo mismo sucede con los AIFSs que presenten este tipo de comportamiento. Sin embargo, en el caso de los AIFSs aún existen más restricciones debidas a que $(\mathbb{L}, \leq_{\mathbb{L}})$ no es un retículo totalmente ordenado, como ocurre con el retículo $([0,1], \leq)$ donde toman los valores los conjuntos borrosos. Por ejemplo, si $X = [0,2]$, no podemos hablar de antónimo del AIFS $\chi \in \mathbb{L}^X$ definido, para cada $x \in X$, por (véase Fig. 4)

$$\chi(x) = \begin{cases} (x/2, x/2), & \text{si } 0 \leq x \leq 1; \\ (x/2, 1 - x/2), & \text{si } 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

ya que no es existe $\mathcal{P} \in \mathbb{P}_F(X)$ tal que χ sea $\mathcal{P}$-monótono. En efecto, dada $\mathcal{P} = \{X_i\}_{i=1}^k \in \mathbb{P}_F(X)$ existe un $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $X_i \cap [0,1]$ es un intervalo cuyas imágenes por χ no son comparables, luego $\chi \mid_{X_i}$ no es monótona. Por otra parte, este ejemplo pone de manifiesto que el contexto elegido para la definición de antónimos (los conjuntos $\mathcal{P}$-monótonos) es adecuado, pues no se puede modelizar la propiedad del punto 2 (sección 3) si los $\mathbb{L}$-valores por χ no son comparables.

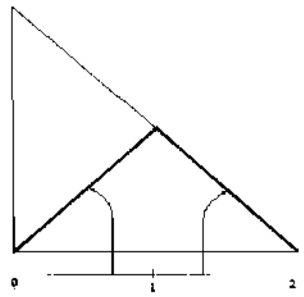

Figura 4: AIFS no $\mathcal{P}$-monótono

Proposición 4.5. *Sean un intervalo $X \subset \mathbb{R}$ y $\mathcal{N}$ una IFN fuerte en $\mathbb{L}$. Si $\chi, \tilde{\chi} \in \mathbb{L}^X$ son antónimos respecto de $\mathcal{N}$:*

(a) Si $\overline{a} \in \mathbb{L}$ verifica que $\overline{a} \leq_{\mathbb{L}} \chi(x)$ entonces $\tilde{\chi}(x) \leq_{\mathbb{L}} \mathcal{N}(\overline{a})$; y si $\overline{a} \leq_{\mathbb{L}} \tilde{\chi}(x)$ entonces $\chi(x) \leq_{\mathbb{L}} \mathcal{N}(\overline{a})$.

(b) Si $\chi(x) = 1_{\mathbb{L}}$, entonces $\tilde{\chi}(x) = 0_{\mathbb{L}}$. Si $\tilde{\chi}(x) = 1_{\mathbb{L}}$, entonces $\chi(x) = 0_{\mathbb{L}}$.

Demostración. (a) Dado que $\mathcal{N}$ es decreciente, de $\overline{a} \leq_{\mathbb{L}} \chi(x)$ se sigue que $\mathcal{N}(\chi(x)) \leq_{\mathbb{L}} \mathcal{N}(\overline{a})$, por lo tanto, $\tilde{\chi}(x) \leq_{\mathbb{L}} \mathcal{N}(\overline{a})$.
(b) Basta considerar $\overline{a} = 1_{\mathbb{L}}$ en (a). □

Para poder definir qué se entiende por "función antónimo" en la teoría de AIFSs definamos previamente el conjunto dominio de tales funciones.

Definición 4.6. *Dado un intervalo $X \subset \mathbb{R}$, se define*
$\Delta(X) = \{\chi^{\mathcal{P}} \in \mathbb{L}^X : \chi^{\mathcal{P}}$ *es* $\mathcal{P}$ *− monótono para alguna* $\mathcal{P} \in \mathbb{P}_F(X)\}$.

En $\Delta(X)$ se distinguen elementos asociados a distintas particiones: si $\mathcal{P}, \tilde{\mathcal{P}} \in \mathbb{P}_F(X)$ verifican que $\mathcal{P} \neq \tilde{\mathcal{P}}$, entonces $\chi^{\mathcal{P}} \neq \chi^{\tilde{\mathcal{P}}}$, aunque $\chi^{\mathcal{P}}(x) = \chi^{\tilde{\mathcal{P}}}(x)$ para todo $x \in X$.

Definición 4.7. *$A_{\mathcal{N}} : \Delta(X) \to \Delta(X)$ es una función antónimo respecto de la IFN fuerte $\mathcal{N}$ si:*

(i) $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}(\chi) \leq_{\sqsubseteq} \mathcal{N}(\chi)$ *para todo* $\chi \in \Delta(X)$.

(ii) Para todo $\chi \in \Delta(X)$, *y* $x, y \in X$, *si* $x \leq_\chi y$, *entonces* $y \leq_{\mathcal{A}_{\mathcal{N}}(\chi)} x$.

(iii) $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}(\mathcal{A}_{\mathcal{N}}(\chi)) = \chi$ *para todo* $\chi \in \Delta(X)$.

Proposición 4.8. *Si* $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ *es una función antónimo en* $\Delta(X)$, *entonces* $(\chi, \mathcal{A}_{\mathcal{N}}(\chi))$ *es un par de antónimos.*

Proposición 4.9. *Sean* $X \subset \mathbb{R}$ *intervalo y* $\mathcal{N}$ *la IFN fuerte asociada a* N, *es decir,* $\mathcal{N}(a,b) = (N(1-b), 1-N(a))$. *Para cualquier* $n \in \mathbb{N}$, *la función* $\mathcal{A}^n_{\mathcal{N}} : \Delta(X) \to \Delta(X)$ *dada, para cada* $\chi = (\mu, \nu) \in \Delta(X)$, *por*

$$\mathcal{A}^n_{\mathcal{N}}(\chi) = ((N(1-\nu))^n, (1-N(\mu))^{1/n}),$$

es una función antónimo respecto de $\mathcal{N}$.

5. Relación entre conjuntos borrosos antónimos y AFSs antónimos

Teorema 5.1. *Sean un intervalo* $X \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{N}$ *una IFN fuerte asociada a la negación fuerte* N *y* $\chi = (\mu, \nu)$, $\tilde{\chi} = (\tilde{\mu}, \tilde{\nu}) \in \Delta(X)$. *Se verifica que* $(\chi, \tilde{\chi})$ *es un par de* $\mathcal{N}$*-antónimos si y sólo si* $(\mu, 1-\tilde{\nu})$ *y* $(1-\nu, \tilde{\mu})$ *son dos pares de* N*-antónimos.*

Demostración. Lo primero que hay que observar es que χ y $\tilde{\chi}$ son $\mathcal{P}$-monótonos, para alguna $\mathcal{P} \in \mathbb{P}_F(X)$, si y sólo si los son $\mu, \tilde{\mu}, 1-\nu$ y $1-\tilde{\nu}$. Veamos los axiomas de antónimo:

(i) Como $\mathcal{N} \circ \chi = (N \circ (1-\nu), 1 - N \circ \mu)$, entonces

$$\tilde{\chi} \leq_{\sqsubseteq} \mathcal{N} \circ \chi \iff \begin{cases} \tilde{\mu} \leq N \circ (1-\nu) \\ \tilde{\nu} \geq 1 - N \circ \mu \end{cases} \iff \begin{cases} 1-\nu \leq N \circ \tilde{\mu} \\ \mu \leq N \circ (1-\tilde{\nu}) \end{cases}$$

(ii) Sea $\mathcal{P} = \{X_i\}_{i=1}^K \in \mathbb{P}_F(X)$ tal que todos los conjuntos son $\mathcal{P}$-monótonos; entonces

$$x \leq_\chi y \iff x \geq_{\tilde{\chi}} y$$

es equivalente a que $\forall x, y \in X_i$, se verifica que

$$\begin{cases} \mu(x) \leq \mu(y) \\ \nu(x) \geq \nu(y) \end{cases} \text{y} \begin{cases} \tilde{\mu}(x) \geq \tilde{\mu}(y) \\ \tilde{\nu}(x) \leq \tilde{\nu}(y) \end{cases}$$

o bien

$$\begin{cases} \mu(x) \geq \mu(y) \\ \nu(x) \leq \nu(y) \end{cases} \text{y} \begin{cases} \tilde{\mu}(x) \leq \tilde{\mu}(y) \\ \tilde{\nu}(x) \geq \tilde{\nu}(y) \end{cases}$$

lo que equivale a que $\forall x, y \in X_i$, se verifica que

$$\begin{cases} \mu(x) \leq \mu(y) \\ 1-\nu(x) \leq 1-\nu(y) \end{cases} \text{y} \begin{cases} \tilde{\mu}(x) \geq \tilde{\mu}(y) \\ 1-\tilde{\nu}(x) \geq 1-\tilde{\nu}(y) \end{cases}$$

o bien

$$\begin{cases} \mu(x) \geq \mu(y) \\ 1-\nu(x) \geq 1-\nu(y) \end{cases} \text{y} \begin{cases} \tilde{\mu}(x) \leq \tilde{\mu}(y) \\ 1-\tilde{\nu}(x) \leq 1-\tilde{\nu}(y) \end{cases}$$

y que, finalmente, equivalente a:

$$\begin{array}{lcl} x \leq_\mu y & \iff & x \geq_{1-\tilde{\nu}} y \\ x \leq_{1-\nu} y & \iff & x \geq_{\tilde{\mu}} y \end{array}$$

□

Observación 5.2. En el teorema es necesaria la hipótesis general de que $\chi = (\mu, \nu), \tilde{\chi} = (\tilde{\mu}, \tilde{\nu}) \in \Delta(X)$, pues en otro caso, puede suceder que $(\mu, 1-\tilde{\nu})$ y $(1-\nu, \tilde{\mu})$ sean dos pares de antónimos y, sin embargo, $\chi = (\mu, \nu)$ y $\tilde{\chi} = (\tilde{\mu}, \tilde{\nu})$ no lo sean. En efecto, consideremos la negación estÃ¡ndar N_s y los conjuntos borrosos $\mu, 1-\tilde{\nu}, 1-\nu$ y $\tilde{\mu}$ definidos, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \begin{cases} x/2, & \text{si } 0 \leq x \leq 1; \\ 1 - x/4, & \text{si } 1 < x \leq 4; \end{cases} \\ 1-\tilde{\nu}(x) &= \begin{cases} 1 - x/2, & \text{si } 0 \leq x \leq 1; \\ x/4, & \text{si } 1 < x \leq 4; \end{cases} \\ 1-\nu(x) &= \begin{cases} 1 - x/8, & \text{si } 0 \leq x \leq 2; \\ 1 - x/4, & \text{si } 2 < x \leq 4; \end{cases} \\ \tilde{\mu}(x) &= \begin{cases} x/8, & \text{si } 0 \leq x \leq 2; \\ x/4, & \text{si } 2 < x \leq 4, \end{cases} \end{aligned}$$

entonces el AIFS definido, para todo $x \in X$, por

$$\begin{aligned} \chi(x) &= (\mu(x), \nu(x)) \\ &= \begin{cases} (x/2, x/8), & \text{si } 0 \leq x \leq 1; \\ (1 - x/4, x/8), & \text{si } 1 < x \leq 2; \\ (1 - x/4, x/4), & \text{si } 2 < x \leq 4, \end{cases} \end{aligned}$$

no es monótono a trozos, ya que existen intervalos de X donde las imágenes no son comparables, y entonces no hay monotonía. Y por lo tanto, $\chi = (\mu, \nu)$ y $\tilde{\chi} = (\tilde{\mu}, \tilde{\nu})$ no son antónimos.

6. Conclusiones

En este trabajo se ha iniciado el estudio de la antonimia en el contexto de los conjuntos borrosos intuicionistas de Atanassov. Para ello, primero se comenzó repasando y profundizando en algunos aspectos de la antonimia en la teoría de los conjuntos borrosos. Y, posteriormente, se formalizó la noción de conjuntos de Atanassov antónimos y se construyeron funciones que permiten obtener el antónimo de un AIFS dado. Además, se obtuvo un primer resultado en el que se evidencia la relación entre los conjuntos borrosos antónimos y los conjuntos de Atanassov antónimos.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por CICYT (España) mediante el proyecto TIN2008-06890-C02-01, por UPM-CAM y por el Consejo de Investigaciones y Postgrado de la UNA (Venezuela).

Referencias

[1] Atanassov K.T., "Intuitionistic Fuzzy Sets", Physica-Verlag, Heidelbert, 1999.

[2] G. Deschrijver, C. Cornelis y E. Kerre, "Intuitionistic fuzzy connectives revisited", *Proc. of Ninth In. Conference on Information Processing and Management of Uncertainty (IPMU)*, Annecy, Francia, pp. 1839-1844, 2002.

[3] G. Deschrijver, C. Cornelis y E. Kerre, "On the representation of intuitionistic fuzzy t-norms and t-conorms", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 12(1), pp. 45-61, 2004.

[4] J. A. Goguen, "L-fuzzy sets", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 18(1), pp. 623-668, 1967.

[5] E. Trillas y S. Cubillo, "On a type of antonymy in $F([a,b])$", *Proc. of eighth In. Conference on Information Processing and Management of Uncertainty (IPMU)*, Madrid, España, pp. 1728-1734, 2000.

[6] E. Trillas, S. Cubillo y E. Castiñeira, "On antonymy from fuzzy logic", *Actas del X Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (ESTYLF)*, Sevilla, España, pp. 79-84, 2000.

[7] E. Trillas, C. Moraga, S. Guadarrama, S. Cubillo y E. Castiñeira, "Computing with Antonyms", *Forging New Frontiers: Fuzzy Pioneers I, Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer*, pp. 133-153, 2007.

[8] L. A. Zadeh, "Fuzzy sets", *Information and Control*, vol. 8, pp. 338-353, 1965.

[9] L. A. Zadeh, "Fuzzy logic = computing with words", *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 4(2), pp. 103-111, 1996.