

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID



POLITÉCNICA

**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE
TELECOMUNICACIÓN**



Tesis Doctoral

**Restauración de imágenes con
desensibilización de estimaciones**

MIGUEL ÁNGEL SANTIAGO CABELLO
Ingeniero de Telecomunicación

Madrid, 2011

DEPARTAMENTO DE SEÑALES, SISTEMAS Y
RADIOCOMUNICACIONES

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE
TELECOMUNICACIÓN

TESIS DOCTORAL

**Restauración de imágenes con desensibilización
de estimaciones**

Autor: Miguel Ángel Santiago Cabello
Ingeniero de Telecomunicación

Directores: Emiliano Bernués del Río
Dr. Ingeniero de Telecomunicación

Guillermo Cisneros Pérez
Dr. Ingeniero de Telecomunicación

2011

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE
TELECOMUNICACIÓN

DEPARTAMENTO DE SEÑALES, SISTEMAS Y RADIOCOMUNICACIONES

“Restauración de imágenes con desensibilización de
estimaciones”

Autor: Miguel Ángel Santiago Cabello
Directores: Dr. Emiliano Bernués del Río
Dr. Guillermo Cisneros Pérez

El tribunal nombrado para juzgar la tesis arriba indicada el día de de
2011, compuesto de los siguientes doctores:

Presidente: _____

Vocal: _____

Vocal: _____

Vocal: _____

Secretario: _____

Realizado el acto de lectura y defensa de la Tesis Doctoral, en Madrid, a de
de 2011, acuerdan otorgarle la calificación de:

Calificación _____

EL PRESIDENTE

LOS VOCALES

EL SECRETARIO

Agradecimientos

Cuando empecé esta tesis, un nuevo reto investigador comenzaba en mi vida y ponía a prueba mi intelecto, mis fuerzas y mi afán de superación. Y más aún era la exigencia sabiendo que simultaneaba con mi carrera profesional en el sector empresarial. Sin embargo, mis Directores de tesis han sabido marcarme unas pautas de trabajo adecuadas para llegar a un resultado del que todos nos sentimos muy satisfechos. Además, he podido contar con la colaboración especial de autores reconocidos en el campo de la restauración de imágenes como Dr. Rafael Molina o Dr. José M. Bioucas Dias, a los que quería expresar mi agradecimiento.

En el terreno más personal, he disfrutado de la compañía de unas personas entrañables que han hecho posible que avanzara con tesón en este largo camino. Por eso, quería también dedicarles unas palabras de agradecimiento expresando abiertamente mis sentimientos. Espero que el lector comprenda mi deseo de separar por unos momentos las cuestiones técnicas y dar protagonismo a las personas que más han significado para mí.

Aurora, gracias por aparecer en mi vida hace cinco maravillosos años. Tú mejor que nadie sabe lo que ha supuesto trabajar en esta tesis. En los momentos más duros has conseguido acompañarme, sonreírme, y volverme a animar para que siguiera adelante con más energía. Tu ilusión y tu amor han sido mis mejores compañeros de viaje y se hacían más intensos a cada momento. Mi querida Aurora, el tiempo que he compartido contigo sólo es el principio de una larga vida juntos que empieza ahora en nuestro nuevo hogar.

A mis padres y hermano, responsables de lo que soy como persona, de los magníficos valores humanos que me habéis transmitido, de la fortaleza y la gran mentalidad trabajadora que he aprendido de vosotros. Me habéis dado todo para que me sintiera en las mejores condiciones y así pudiera conseguir todos mis retos.

Quisiera extender este agradecimiento al resto de mi familia que ha estado apoyándome en todo momento. Ojalá mi abuelo hubiera podido ver a su nieto como Doctor tal y como deseaba. Seguro que desde algún lugar podrás escuchar estas palabras.

A todos mis amigos, que habéis sido tolerantes con la falta de mi tiempo por los interminables quehaceres. Y a pesar de ello, cuando os he necesitado habéis estado ahí de forma incondicional. Son las cosas que demuestran la verdadera amistad que lleváis dentro y de la que me siento muy orgulloso.

A todos, deciros que estas palabras son sólo una pequeña introducción, pues prefiero compartir el resto de mis sentimientos con todos vosotros en persona...

Resumen

El marco de esta tesis es la restauración digital de imágenes, esto es, el proceso por el cual se recupera una imagen original que ha sido degradada por las imperfecciones del sistema de adquisición: emborronamiento y ruido. Restaurar esta degradación es un problema mal condicionado pues la inversión directa por mínimos cuadrados amplifica el ruido en las altas frecuencias. Por ello, se utiliza la regularización matemática como medio para incluir información a priori de la imagen que consiga estabilizar la solución. Durante la primera parte de la memoria se hace un repaso de ciertos algoritmos del estado del arte, que se usarán posteriormente como métodos de comparación en los experimentos.

Para resolver el problema de regularización, la restauración de imágenes tiene dos requisitos previos. En primer lugar, es necesario realizar hipótesis sobre el comportamiento de la imagen fuera de sus fronteras, debido a la propiedad no local de la convolución que modela la degradación. La ausencia de condiciones de frontera en la restauración da lugar al artefacto conocido como *boundary ringing*. En segundo lugar, los algoritmos de restauración dependen de un número importante de parámetros divididos en tres grupos: parámetros respecto al proceso de degradación, al ruido y a la imagen original. Todos ellos necesitan de una estimación a priori suficientemente precisa, pues pequeños errores respecto a sus valores reales producen importantes desviaciones en los resultados de restauración. El **problema de frontera** y la **sensibilidad a estimaciones** son los objetivos a resolver en esta tesis mediante dos algoritmos iterativos.

El primero de los algoritmos afronta el problema de frontera partiendo de una imagen truncada en el campo de visión como observación real. Para resolver esta no linealidad, se utiliza una red neuronal que minimiza una función de coste definida principalmente por la regularización por variación total, pero sin incluir ningún tipo de información a priori sobre las fronteras ni requerir entrenamiento previo de la

red. Como resultado, se obtiene una imagen restaurada sin efectos de *ringing* en el campo de visión y además las fronteras truncadas son reconstruidas hasta el tamaño original. El algoritmo se basa en la técnica de retro-propagación de energía, con lo que la red se convierte en un ciclo iterativo de dos procesos: *forward* y *backward*, que simulan una restauración y una degradación por cada iteración.

Siguiendo el mismo concepto iterativo de restauración-degradación, se presenta un segundo algoritmo en el dominio de la frecuencia para reducir la dependencia respecto a las estimaciones de parámetros. Para ello, se diseña un nuevo filtro de restauración desensibilizado como resultado de aplicar un algoritmo iterativo sobre un filtro original. Estudiando las propiedades de sensibilidad de este filtro y estableciendo un criterio para el número de iteraciones, se llega a una expresión para el algoritmo de desensibilización particularizado a los filtros Wiener y Tikhonov. Los resultados de los experimentos demuestran el buen comportamiento del filtro respecto al error dependiente del ruido, con lo que la estimación que se hace más robusta es la correspondiente a los parámetros del ruido, si bien la desensibilización se extiende también al resto de estimaciones.

Abstract

The framework of this thesis is digital image restoration, that is to say, the process of recovering an original image which has been degraded due to the imperfections in the acquisition system: blurring and noise. Restoring this degradation is an ill-posed problem since the inverse solution using least-squares leads to excessive noise amplification. For that reason, mathematical regularization is used to include prior knowledge about the image which allows the stabilization of the solution in the face of noise. In the first part of the thesis, we provide a review of the state-of-the-art methods which will be used later in the experimental results.

To deal with a regularization problem, image restoration imposes two main requirements. First, it is necessary to make assumptions about how the image behaves outside the field of view, as a result of the non-local property of the underlying convolution. The absence of boundary conditions in the restoration problem produces the so-called boundary ringing artifact. Secondly, the restoration methods depend on a wide set of parameters which can be largely grouped into three categories: parameters with respect to the degradation process, the noise and the original image. All parameters require an accurate prior estimation because small errors in their values lead to important deviations in the restoration results. The **boundary problem** and the **sensitivity to estimations** are the issues to resolve in this thesis by means of two iterative algorithms.

The first algorithm copes with the boundary problem taking a truncated image in the field of view as a real observation. To resolve the nonlinearity in the observation, we use a neural network that minimizes a cost function mainly defined by the total variation regularization, but with neither prior assumption as regards the boundaries nor previous training in the net. It yields a restored image without ringing artifacts and, moreover, the truncated boundaries are reconstructed according to the original image size. The algorithm is based on the backpropagation

method, which turns out an iterative cycle of two steps: forward and backward, simulating respectively restoration and degradation processes at each iteration.

Following the same iterative concept of restoration-degradation, we present a second algorithm in the frequency domain to reduce the dependency on the estimation of parameters. Hence, a novel desensitized restoration filter is designed by applying an iterative algorithm over the original filter. Analyzing the sensitivity properties of this filter and setting a criterion to choose the number of iterations, we come up with an expression for the desensitized algorithm that is particularized to the Wiener and the Tikhonov filters. Experimental results demonstrate the desensitizing behavior with respect to the noise-dependent error and a consequent robustness to the noise parameters, although the desensitization also applies to the rest of the estimations.

Reglas de nomenclatura

A lo largo de esta tesis aparece un número importante de conceptos para los cuales se requiere bastante nomenclatura. En esta sección se destacan algunos apuntes globales y se emplaza al texto de la memoria para obtener la descripción de una variable concreta en las Definiciones recuadradas.

En general, las matrices correspondientes a las imágenes se simbolizan por letras mayúsculas en negrita tales como \mathbf{X} , si bien es más habitual utilizar su notación como función discreta real $x(i, j)$. La única excepción aplica a la función de emborronamiento $h(i, j)$, cuya matriz se escribe como $\bar{\mathbf{H}}$, para no confundir con la matriz de convolución \mathbf{H} que aparece durante toda la memoria. Una de las primeras indicaciones que se hacen respecto a simbología es la utilización de vectores lexicográficos en vez de matrices. Así pues, siguiendo el ejemplo anterior, este vector se representa con letra minúscula y en negrita \mathbf{x} , y cada uno de sus elementos se indica por el subíndice k , i.e. x_k . Las transformadas de Fourier de las imágenes se describen como funciones escalares usando letras tipo manuscrito en mayúsculas, esto es, $\mathcal{X}(\omega_i, \omega_j)$ definidas para cada componente de frecuencia. Para representar los dominios de definición de las imágenes se emplean también letras manuscritas como \mathcal{L} , cuya dimensión se indica en mayúsculas L y equivale a la multiplicación de las componentes horizontal y vertical $L = L_1 \times L_2$.

Por último, señalar que los algoritmos propuestos en la tesis son métodos iterativos y utilizan la variable m para indicar el número de iteración. Así pues, la imagen restaurada $\hat{\mathbf{x}}$ por cada iteración se denota como $\hat{\mathbf{x}}^{(m)}$ y el número de total de iteraciones se simboliza por \bar{m} . Por tanto, la utilización del circunflejo representa una estimación, en este caso, la imagen restaurada. Otro tipo de énfasis de variables es la tilde $\tilde{\mathcal{L}}$ para indicar la dimensión alterada por la convolución, o el símbolo $\check{\mathbf{H}}$ para transformar la matriz de convolución en su ecuación normal.

Índice

AGRADECIMIENTOS	I
RESUMEN	III
ABSTRACT	V
REGLAS DE NOMENCLATURA	VII
ÍNDICE	IX
CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN Y MOTIVACIÓN	1
1.1 HISTORIA DE LA RESTAURACIÓN DE IMÁGENES	1
1.2 CONCEPTOS DE LA RESTAURACIÓN DE IMÁGENES.....	4
1.3 CONTRIBUCIONES Y ORGANIZACIÓN DE LA TESIS.....	6
CAPÍTULO 2 STATU QUO DE LA RESTAURACIÓN DE IMÁGENES .	9
2.1 PROCESO DE ADQUISICIÓN DE IMÁGENES.....	10
2.2 MODELOS DE LA PSF.....	14
2.2.1 <i>Emborronamiento por movimiento lineal uniforme</i>	14
2.2.2 <i>Emborronamiento por desenfoco uniforme</i>	14
2.2.3 <i>Emborronamiento uniforme bidimensional</i>	15
2.2.4 <i>Emborronamiento por turbulencia atmosférica</i>	15
2.3 PROCESO DE RESTAURACIÓN DE IMÁGENES	15
2.3.1 <i>La necesidad de regularización</i>	18
2.3.2 <i>Métodos de regularización directa</i>	22
Regularización Tikhonov	22
Regularización por variación total (TV).....	24
Filtro de restauración.....	27

2.3.3	<i>Métodos Bayesianos</i>	27
	Modelo Gaussiano	28
	Modelo simultáneo autorregresivo (SAR)	29
	Modelo variacional total (TV)	30
2.3.4	<i>Métodos iterativos</i>	31
	Método de gradiente descendente	32
	Método de gradiente conjugado.....	34
2.3.5	<i>Parámetro de regularización</i>	35
	Regularización algebraica	35
	Paradigma Bayesiano	36
	Regularización iterativa.....	38
2.4	MÉTRICAS DE RESTAURACIÓN	38
2.4.1	<i>BSNR</i>	38
2.4.2	<i>ISNR</i>	38
2.4.3	<i>Desviación de la imagen restaurada</i>	39
2.4.4	<i>Errores de restauración</i>	39
CAPÍTULO 3 REQUISITOS DE LA RESTAURACIÓN: CONDICIONES DE FRONTERA Y ESTIMACIONES DE PARÁMETROS		41
3.1	PROBLEMAS DE FRONTERA	42
3.1.1	<i>Condiciones de frontera para una dimensión</i>	46
	BC Cero (Dirichlet).....	47
	BC Periódica	48
	BC Reflexiva (Neumann)	48
	BC Anti-reflexiva.....	49
3.1.2	<i>Condiciones de frontera para imágenes bidimensionales</i>	49
	BC Cero (Dirichlet).....	50
	BC Periódica	51
	BC Reflexiva (Neumann)	51
	BC Anti-reflexiva (Neumann)	51
3.1.3	<i>Dominio de Fourier</i>	51
3.2	SENSIBILIDAD A ESTIMACIONES DE PARÁMETROS	55
3.2.1	<i>Métodos de restauración a desensibilizar</i>	56
	Filtro Wiener.....	56
	Regularización Tikhonov	57
3.2.2	<i>Estimaciones de la PSF</i>	57
	Transformada de Radon.....	57
	Valores propios.....	58
CAPÍTULO 4 RED NEURONAL MLP PARA IMÁGENES OBSERVADAS REALES		61
4.1	FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	62
4.2	DEFINICIÓN DE LA MLP	66
4.3	AJUSTE DE LA RED NEURONAL	68
4.3.1	<i>Capa de salida</i>	69
	Regularizador ℓ_2	69
	Regularizador ℓ_1	71
4.3.2	<i>Cualquier capa oculta i</i>	71
4.3.3	<i>Algoritmo</i>	73

4.3.4	<i>Reconstrucción de fronteras</i>	73
4.3.5	<i>Ajuste de los parámetros λ y η</i>	76
4.4	RESULTADOS EXPERIMENTALES	77
4.4.1	<i>Experimento 1</i>	80
4.4.2	<i>Experimento 2</i>	84
4.4.3	<i>Experimento 3</i>	90
4.4.4	<i>Complejidad computacional</i>	94
4.5	DEMOSTRACIÓN DE ECUACIONES	94
4.5.1	<i>Demostración de (4.18)</i>	94
CAPÍTULO 5 FILTRO DESENSIBILIZADO RESPECTO A ESTIMACIONES ERRÓNEAS		97
5.1	FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	98
5.2	DEFINICIÓN DEL FILTRO DESENSIBILIZADO	99
5.3	SENSIBILIDAD DEL FILTRO DE RESTAURACIÓN	100
5.3.1	<i>Definiciones de sensibilidad</i>	100
5.3.2	<i>Análisis de condiciones de desensibilización</i>	102
5.3.3	<i>Análisis de errores de restauración</i>	103
5.3.4	<i>Número recomendado de iteraciones m</i>	106
5.4	RESULTADOS EXPERIMENTALES	107
5.4.1	<i>Experimento 1</i>	109
5.4.2	<i>Experimento 2</i>	114
5.4.3	<i>Experimento 3</i>	115
5.4.4	<i>Experimento 4</i>	120
5.5	DEMOSTRACIÓN DE ECUACIONES	120
5.5.1	<i>Demostración de (5.22)</i>	120
5.5.2	<i>Demostración de (5.23)</i>	122
CAPÍTULO 6 CONCLUSIONES		125
6.1	RESUMEN DE CONTRIBUCIONES	125
6.2	POSIBLES LÍNEAS DE TRABAJO FUTURO	127
BIBLIOGRAFÍA		129

Capítulo 1

Introducción y motivación

1.1 Historia de la restauración de imágenes

En las décadas de los 50 y 60 del pasado siglo, los Estados Unidos así como la antigua Unión Soviética iniciaron programas espaciales que significaron un gran avance científico. La misión principal de estos programas era la obtención de imágenes de la Tierra y del Sistema Solar para facilitar futuros viajes espaciales. Misiones tales como “Ranger”, “Lunar Orbiter” y “Mariner” (véase Figura 1.1) proporcionaron una gran cantidad de fotografías sobre las diferentes superficies planetarias. Sin embargo, se comprobó que muchas de aquellas imágenes sufrían importantes degradaciones debido a las difíciles condiciones de adquisición de las sondas espaciales: vibración de la maquinaria, movimientos de rotación de la aeronave y velocidad de desplazamiento. Incluso en posteriores misiones tripuladas donde las fotografías eran tomadas por astronautas, las imágenes presentaban zonas borrosas ya que no podían mantenerse inmóviles en las condiciones de ingravidez. Todo esto significaba perder información muy valiosa por los efectos de degradación y, más aún, considerando la importante inversión que suponían estos programas espaciales. Esta situación motivó la aparición de un nuevo campo científico denominado **restauración digital de imágenes** [43][1][67], como evolución de los trabajos anteriores sobre procesamiento de señales unidimensionales.

Los primeros algoritmos surgidos en esta nueva disciplina tuvieron muy buenos resultados, mejorando considerablemente la calidad de las imágenes adquiridas. De esta forma, las imágenes espaciales se convirtieron en una de las principales aplicaciones de la restauración digital, no sólo las provenientes de las aeronaves sino

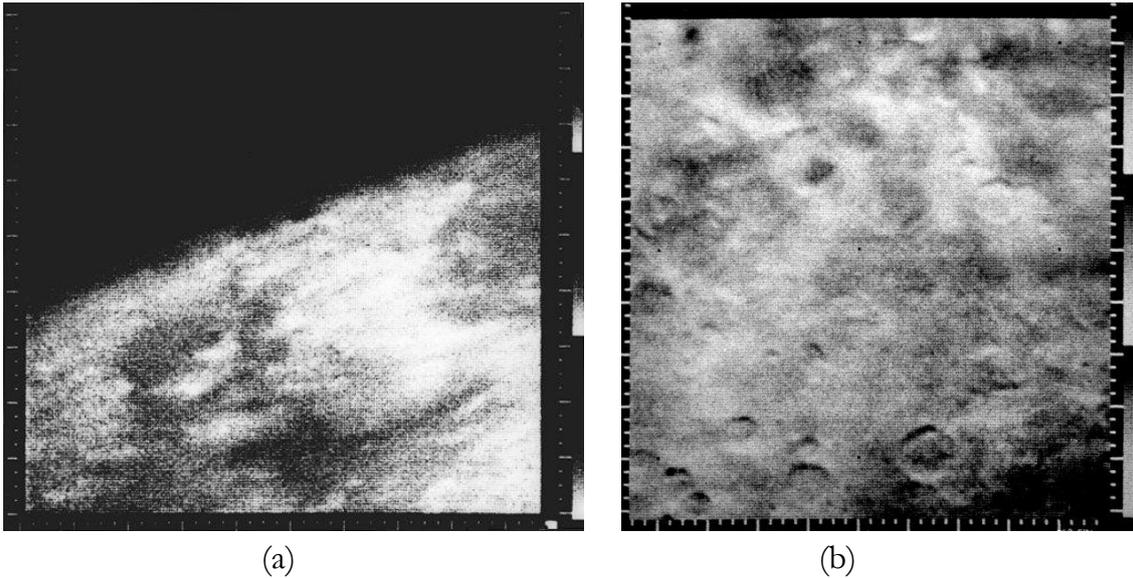


Figura 1.1: Imágenes del programa espacial “Mariner 4” en el año 1965 que muestran el primer plano tomado de la superficie de Marte (a) y los primeros indicios de cráteres sobre el planeta (b). Cortesía de la web “Nasa Images”: <http://www.nasaimages.org>

también las captadas con telescopios astronómicos desde la propia Tierra. Así pues, la restauración de imágenes ha dedicado bastante esfuerzo en conocer los fenómenos de degradación que intervienen durante la adquisición [101][104]. A saber, los continuos cambios del índice de refracción de la atmósfera o los tiempos de obturación demasiado largos con respecto a los movimientos de la aeronave son causa de emborronamiento en las imágenes. Con respecto al ruido, el fenómeno de Poisson aparece al tratar de adquirir fuentes de luz demasiado bajas y el ruido Gaussiano encuentra su origen en las fluctuaciones de los componentes electrónicos del sistema de adquisición o en la propia transmisión de las imágenes a la Tierra.

La puesta en órbita del telescopio espacial Hubble (HST) en 1990 dio origen a una de las aplicaciones más destacadas de la restauración de imágenes. El espejo primario del telescopio fue pulido con un dispositivo defectuoso y, como resultado, el espejo presentaba una aberración esférica que generaba imágenes desenfocadas. Este hecho hizo presagiar un fracaso en una inversión de casi 2.000 millones de dólares. Sin embargo, la comunidad científica reaccionó entonces con una enorme cantidad de material sobre algoritmos de restauración, aportando soluciones a los defectos de las imágenes del HST [99][39][32], como por ejemplo, el algoritmo Richardson-Lucy aplicado sobre la Figura 1.2.

Con el paso del tiempo los algoritmos de restauración han ido mejorando ostensiblemente y se han extendido a más campos de aplicación además de la propia astronomía [64][8]. Concretamente, se puede destacar la presencia de la restauración en el área de las imágenes médicas para reconstruir las degradaciones producidas por el equipamiento médico (principalmente ruido) y asegurar un diagnóstico más fiable de las patologías. Las principales tecnologías de adquisición pueden dividirse en tres grupos: la tomografía (rayos X) [94][96][48], la resonancia magnética (MRI)

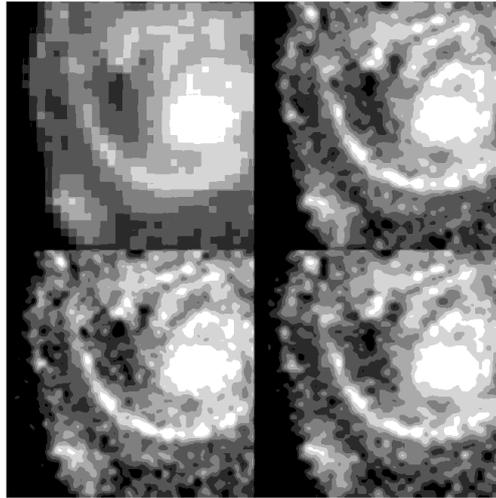


Figura 1.2: Restauración mediante el algoritmo Richardson-Lucy [87] sobre la imagen superior izquierda adquirida por la cámara del HST. Se puede observar claramente el aumento en la resolución de la imagen. Cortesía de la web “Space Telescope Science Institute”: <http://www.stsci.edu/hst>

[1][22][78] y el ultrasonido [60][103][70]. Estas referencias demuestran que las últimas tecnologías de adquisición requieren de un proceso de restauración para que las pruebas médicas sean inocuas y poco invasivas. Un ejemplo es la *tomografía computarizada helicoidal* (HCT) que consigue una resolución de imágenes mayor que la tomografía convencional, pero supone un tiempo de exposición al paciente hasta cuatro veces mayor. Es por tanto necesario reducir la intensidad de la corriente de radiación, lo que implica que la calidad de la imagen esté afectada por un mayor ruido cuántico. Un proceso de restauración a posteriori es requerido para reducir los efectos del ruido [94][96].

Otro de los campos con más presencia de la restauración de imágenes es la codificación de vídeo. Actualmente, la mayor parte de los sistemas adoptados para la compresión de vídeo están basados en la *Transformada Discreta del Coseno* (DCT) y, en particular, los estándares de codificación de vídeo como H.264, H.263, MPEG-4 y MPEG-2 hacen uso de esta transformada para la codificación de los bloques que componen cada cuadro. En consecuencia, se consigue que el volumen de datos requerido para transmitir las secuencias de vídeo sea reducido significativamente, pero el proceso de descodificación puede introducir artefactos visibles que reducen la calidad visual de las aplicaciones de vídeo, entre ellos, el conocido como *blocking*. Una de las soluciones para reducir este efecto es precisamente la implementación de filtros de restauración en el lado del descodificador [75][80][30][105], con la premisa de mantener la nitidez y los bordes de las imágenes.

La restauración tiene por tanto cabida en todos aquellos campos de la ciencia donde se manejen imágenes sometidas a proyecciones, interferometría u otras perturbaciones en la adquisición de la señal.

1.2 Conceptos de la restauración de imágenes

En una escena real, los dispositivos ópticos de adquisición (cámaras digitales, telescopios, microscopios,...) registran la luz que interactúa con los objetos físicos y la proyectan sobre una imagen bidimensional. Ahora bien, dado que los sistemas de adquisición no son perfectos y las condiciones de adquisición tampoco son ideales, el resultado es una imagen degradada básicamente por dos fenómenos: el **emborronamiento** y el **ruido** (se descartan las aberraciones geométricas). Con respecto al emborronado, son varias las fuentes deterministas que lo producen: variación de temperatura, humedad, exposición al sol o desenfoque de la cámara entre otros. En el caso del ruido, responde a la parte estocástica del problema dando origen a errores en la representación de la imagen, cuya causa principal es inherente a los componentes electrónicos del sistema de adquisición.

La restauración de imágenes es el campo de la ingeniería que estudia los métodos para recuperar la imagen original a partir de aquella observación degradada de la escena. Otra denominación común al problema es la *desconvolución*, pues el emborronamiento suele representarse como un operador lineal de convolución que se invierte durante la restauración. Cuando se considera una observación sólo alterada por ruido, el proceso de restauración se conoce como *denoising* en terminología inglesa. De ahora en adelante, se manejarán indistintamente los términos restauración y desconvolución de imágenes, dado que los fenómenos de degradación considerados estarán compuestos tanto por emborronamiento como por ruido.

Invertir el proceso de degradación introduce un número importante de problemas. En primer lugar, la inversión directa del proceso implica que el ruido sea amplificado en el resultado y, en el caso de que el proceso no sea invertible, son varias las soluciones posibles. Por otro lado, la imagen observada es una versión truncada de la escena, así pues se requiere información en los límites de la imagen para poder realizar la inversión. Finalmente, todas estas opciones asumen tener un conocimiento preciso del modelo de degradación de la imagen, lo cual no suele ser cierto ya sea porque se desconozca, no sea fácilmente accesible o se conozca sólo en términos probabilísticos.

La Figura 1.3 representa los diferentes parámetros que forman parte de un proceso de adquisición y, en consecuencia, que son necesarios para modelar la degradación de una imagen. Dicho modelo depende de elementos como la función característica del detector, u otros parámetros deterministas como los parámetros de distorsión (p.ej., ganancia, cuantificación) y los parámetros de aberración (p.ej., ancho de banda). Una vez obtenido este modelo es necesario ajustarlo a las condiciones reales de experimentación y, en definitiva, se requiere una calibración posterior de los datos con otros parámetros de ajuste.

Para conseguir una buena estimación de la imagen original, los algoritmos de restauración necesitan incorporar conocimiento *a priori* sobre los tres elementos principales del modelo: el emborronamiento, el ruido y la propia imagen original. Con respecto a la imagen, pueden considerarse las condiciones más triviales como que la intensidad de luz de la escena esté representada por un rango de valores

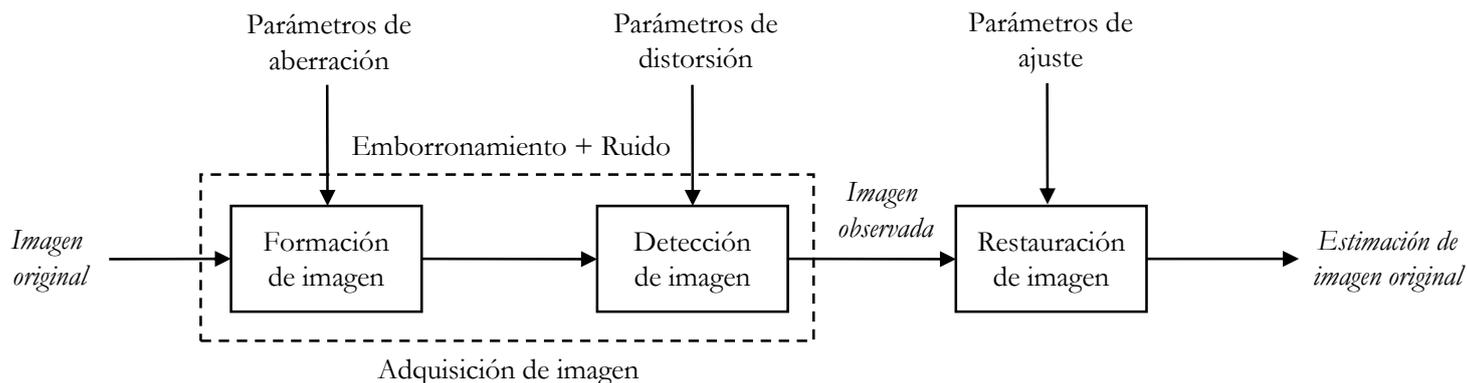


Figura 1.3: Proceso completo de adquisición y restauración de imagen.

concretos. O hipótesis comunes como el comportamiento *suavizado* de la imagen original, es decir, la existencia de una correlación positiva entre un píxel y sus vecinos en la imagen.

Con respecto al emborronamiento, el objetivo es disponer de la función dispersión puntual (PSF) que describe la degradación. Dada la importante dependencia de parámetros que se ha visto anteriormente, es necesario realizar estimaciones a priori de sus valores. En el caso del ruido, se suele asumir como Gaussiano, aditivo y con media nula en la mayor parte de los problemas de restauración, pero obviamente requiere la estimación de la varianza del ruido y, en algunas situaciones, la naturaleza del ruido puede ser diferente.

La dependencia que presenta la restauración a toda esta información a priori es muy acusada y, de hecho, pequeñas variaciones respecto a los valores reales suponen resultados de restauración muy alejados de su óptimo. Por ello, existe una amplia gama de algoritmos que tratan de estimar los parámetros de la mejor manera posible [54][79][61][24][63].

Cabe destacar que no sólo se busca una mayor calidad de restauración, sino también un compromiso con la complejidad de procesamiento. Un algoritmo de restauración debe encontrar el compromiso entre tres criterios fundamentales:

- ◆ calidad restauración;
- ◆ complejidad de cómputo¹;
- ◆ automatización².

Para finalizar este apartado, se comentan las principales diferencias de la **restauración** respecto a otros campos del procesamiento de imágenes como la **mejora** y la **reconstrucción** de imágenes. Típicamente la mejora de imágenes se refiere a aquellas operaciones que aportan una mayor calidad subjetiva de la imagen, posiblemente para facilitar su interpretación. Estas operaciones suelen basarse en primitivas genéricas del procesamiento de imágenes –tales como procesamiento

¹ Incluye tanto requisitos de CPU como de memoria.

² En el sentido de minimizar la interacción del usuario.

morfológico o mejora de características de la imagen— que nada tienen que ver con el proceso físico de adquisición. Esto contrasta con la restauración de imágenes que lo que busca es una mejora cuantitativa de la calidad de la imagen basándose en los aspectos físicos de la observación. Las técnicas de reconstrucción también son generalmente tratadas de forma separada a la restauración, puesto que operan sobre un conjunto de proyecciones de la imagen y no sobre la imagen completa. Restauración y reconstrucción comparten en sí el mismo objetivo de recuperar una imagen original, pero la interpretación de los datos en la reconstrucción requiere de unas transformaciones numéricas previas y conllevan a que el dominio de observación sea diferente del dominio de la imagen real. Todas estas consideraciones pueden encontrarse resumidas en la Tabla 1.1.

1.3 Contribuciones y organización de la tesis

Esta memoria describe el trabajo y los resultados obtenidos en el proyecto de tesis del autor dentro de la restauración de imágenes. En particular, las investigaciones se han dirigido a resolver dos problemas conocidos en este campo. Por un lado, modelar la degradación como una convolución implica que los algoritmos de restauración requieran información a priori sobre las fronteras de la imagen original. En segundo lugar, ya se ha adelantado en la sección anterior la importante dependencia que tiene la restauración respecto a la estimación de parámetros. Esta tesis presenta dos algoritmos para afrontar estos problemas con una organización de capítulos como sigue.

La base matemática en la que se apoya la restauración de imágenes y su evidencia como problema mal condicionado son el primer objetivo del Capítulo 2. A raíz de esto, se presenta la regularización como herramienta matemática para invertir el fenómeno de degradación, junto con el paradigma Bayesiano. Los algoritmos que son objeto de comparativa en la tesis son analizados en mayor detalle, con especial mención a los métodos por variación total (TV) [73].

El Capítulo 3 realiza un análisis completo de los dos requisitos de restauración comentados anteriormente: las condiciones de frontera y la necesidad de estimaciones. En primer lugar, se muestran las consecuencias de no disponer de unas condiciones de frontera adecuadas en forma del *boundary ringing* y las hipótesis más comunes del estado del arte: cero, periódicas, reflexivas y anti-reflexivas [59]. La segunda parte del capítulo asume condiciones periódicas, lo cual supone convertir el problema de restauración al dominio de la frecuencia. Es en términos de Fourier en los que se presentan las dependencias del filtro de restauración frente a las estimaciones de parámetros respecto al proceso de degradación, al ruido y a la imagen original. En particular, son estudiados los parámetros de los filtros Wiener y Tikhonov [34] del Capítulo 2 y se incluyen dos métodos reales de estimación de la PSF para servir de referencia en la desensibilización.

El primer algoritmo iterativo de la tesis se describe en el Capítulo 4 para resolver un problema real de restauración donde sólo se dispone del campo de visión de la imagen observada. Así pues, se utiliza un modelo de imagen degradada no lineal descrito como un truncamiento, cuya restauración se lleva a cabo mediante un

Campos del procesamiento de imágenes	Estructura del modelo de degradación	Naturaleza del problema de inversión	Relación entre dominio original y de observación
Reconstrucción de imágenes	Débil (p.ej., no cartesiana, variante espacial,...)	Mal condicionado	Dominios con diferente geometría y/o dimensionalidad
Restauración de imágenes	Fuerte (invariante espacial)	Mal condicionado	Dominios cualitativamente iguales
	<i>Denoising</i>	Bien condicionado	Dominios exactamente iguales
Mejora de imágenes	No considerado	No aplica	Dominios asumidos como iguales

Tabla 1.1: Comparación de la restauración con otros campos del procesamiento de imágenes: reconstrucción y mejora.

perceptrón multicapa (MLP). El análisis de la estructura de la red neuronal y el ajuste de sus pesos sinápticos a través de una función de coste regularizada ocupan el grueso del capítulo. La última parte refleja los resultados de una serie de experimentos para diferentes combinaciones de imágenes, intensidades de ruido y filtros de degradación. Como resultado, se muestran las propiedades de la MLP de forma numérica y a través de imágenes restauradas, en comparación con otros métodos aparecidos en el Capítulo 2.

Por último, el Capítulo 5 expone el segundo de los algoritmos iterativos de la tesis dedicado a la desensibilización del filtro de restauración. La definición del algoritmo en el dominio de la frecuencia, la descripción formal de las propiedades de sensibilidad y el cálculo del número total de iteraciones, ocupan la primera mitad del capítulo. Posteriormente, se particulariza el algoritmo con los filtros Wiener y Tikhonov a partir de los cuales se obtiene una serie de experimentos para diferentes combinaciones de errores, ya sean sobre los parámetros del ruido o de la PSF. Diferentes gráficas y tablas numéricas demuestran los resultados objetivos de la desensibilización, en comparación con el caso del filtro de restauración usando estimaciones óptimas y el filtro original con estimaciones erróneas.

El trabajo vertido por el autor en esta tesis ha tenido como resultado la publicación de varios artículos citados en la bibliografía [83][84][20][81].

Capítulo 2

Statu quo de la restauración de imágenes



El capítulo de introducción definía la restauración de imágenes como el proceso de invertir las perturbaciones debidas a la adquisición, a saber, el emborronamiento y el ruido. En este capítulo se va a modelar matemáticamente dicho proceso atendiendo a un sistema lineal e invariante espacial (LSI) como el que define la ecuación de Fredholm de primera clase [51] y se comprobará su mal condicionamiento según los criterios de Hadamard [41][26][36]. Así pues, se mostrará la notación básica, algunos conceptos generales y, sobre todo, diferentes algoritmos de restauración que utilizan el método de regularización o el paradigma Bayesiano [64][86].

Por último, los parámetros utilizados a lo largo de la memoria para medir la calidad de la restauración, así como los diferentes tipos de emborronamiento que se aplican en los experimentos son presentados en este capítulo.

2.1 Proceso de adquisición de imágenes

El estudio de la restauración comienza por conocer en detalle el fenómeno de degradación ocurrido en la captación de la imagen. Así pues, se define una imagen observada como el resultado de proyectar una escena real en un sistema de adquisición bidimensional, sometida a los efectos de degradación del medio, de los dispositivos y de las fuentes externas o internas del sistema. En el contexto de esta tesis, sólo se consideran imágenes en tono de grises que miden la componente de intensidad de luz y descartan la información de crominancia representativa del color.

Definición 2.1. *Una imagen observada en tono de grises se define como una función $y(s, t)$ donde el valor de la función corresponde a la intensidad o brillantez positiva de cada punto (s, t) de la imagen tal que:*

$$y(s, t) : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+,$$

donde Ω es el dominio de la imagen.

Durante el proceso de adquisición de esta imagen, pueden aparecer distorsiones que se agrupan principalmente en dos categorías: **deterministas** y **estocásticas**. Las distorsiones deterministas proceden de la difracción óptica, la turbulencia atmosférica, el desenfoque y los movimientos ocurridos entre la cámara y la escena durante el tiempo de captura de imagen. Aunque estas distorsiones podrían llegar a ser muy complejas, el resultado final sobre la imagen observada es una reducción del ancho de banda de la escena o emborronamiento, que acepta un modelado matemático. En el caso más desfavorable, el grado con el que actúa el emborronamiento puede variar en función de la posición de la imagen y, por tanto, se convierte en un proceso variante espacial.

Otro tipo de distorsiones deterministas ocurridas en el sensor de la cámara podrían tener un comportamiento no lineal. En estas circunstancias, se intenta buscar las condiciones de adquisición donde se puede aproximar linealmente la respuesta de los sensores. Por ejemplo, el comportamiento logarítmico de un medio fotográfico se hace lineal cuando la imagen es de bajo contraste tal y como demuestra la curva HD [28]. Si esta linealización no es posible y se incorpora la

respuesta del sensor al modelo de formación de la imagen, la complejidad de los algoritmos de restauración crece. En estos casos, se trata normalmente de invertir la no linealidad del sensor antes de cualquier otro procesamiento. Dentro de esta tesis, se contempla una de las no linealidades ocurridas dentro del sistema de adquisición, a saber, el truncamiento de los límites de la imagen.

Definición 2.2. *Sea un sistema lineal de adquisición de imágenes descrito por una función de transferencia $h(s, t; s', t')$ conocida como **función de dispersión puntual** o **PSF**, entonces el proceso de formación de la imagen observada se describe por la siguiente ecuación integral en el dominio continuo*

$$y(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(s, t; s', t') x(s', t') ds' dt' \quad (s, t) \in \Omega.$$

Cabe destacar que ambas imágenes original $x(s, t)$ y observada $y(s, t)$ son distribuciones de intensidades reales y no negativas, y por tanto, la función de transferencia PSF también lo es.

La expresión de la Definición 2.2 equivale a una ecuación integral de Fredholm de primera clase [51]. Este tipo de ecuaciones advierten la dificultad en la determinación de $x(s, t)$, puesto que la combinación de la integración y la multiplicación con $h(s, t; s', t')$ se traduce en un menor ancho de banda de la imagen original $x(s, t)$ y, por tanto, resulta un efecto de emborronamiento. Además, la inversión de este tipo de problemas es complicada puesto que la presencia de ruido en $y(s, t)$ causa una amplificación de las altas frecuencias en la solución. Esto es lo que se conoce típicamente como un **problema mal condicionado**.

A pesar de que la ecuación Fredholm es lineal, admite que la PSF sea variante espacial. Esta situación complica notablemente la tarea de restauración y suele asumirse que $h(s, t; s', t')$ tan solo depende de las diferencias $s - s'$ y $t - t'$, es decir, presenta un comportamiento invariante a la posición absoluta. De esta manera, se puede reescribir la expresión integral como

$$\begin{aligned} y(s, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(s - s', t - t') x(s', t') ds' dt' \quad (s, t) \in \Omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(s', t') x(s - s', t - t') ds' dt' \\ &= h(s, t) ** x(s, t) \quad (s, t) \in \Omega, \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde ****** identifica la operación de convolución bidimensional. A este tipo de sistemas se les denomina **lineal e invariante espacial (LSI)**.

Dado que esta tesis estudia la restauración para el caso de imágenes digitales, se requiere entonces una representación discreta de la ecuación (2.1). Para ello, se realiza un muestreo de la imagen sobre un dominio finito, de tal manera que se eviten los efectos de *aliasing* (condición de Nyquist). En particular,

Definición 2.3. *Una imagen $y(s, t)$ se convierte a su homóloga discreto $y(i, j)$ tras muestrear la región continua $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a un soporte discreto $\mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^2$ formado por L_1 filas y L_2 columnas, i.e.*

$$\mathcal{L} = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2: 0 \leq i \leq L_1 - 1, 0 \leq j \leq L_2 - 1\}.$$

La dimensión de este soporte se indica por $L = L_1 \times L_2$.

De igual manera, la función PSF se muestrea sobre un soporte discreto $\mathcal{M} \subset \mathbb{Z}^2$ cuya dimensión se compone de M_1 filas y M_2 columnas, i.e., $M = M_1 \times M_2$. Siguiendo esta terminología, la imagen observada se expresa en forma de sumatorio representando la **convolución lineal discreta**

$$\begin{aligned} y(i, j) &= \sum_{(k, l) \in \mathcal{M}} h(k, l) x(i - k, j - l) \quad (i, j) \in \mathcal{L} \\ &= h(i, j) ** x(i, j), \end{aligned} \quad (2.2)$$

Debido al comportamiento no local de la convolución, el tamaño de la imagen degradada $y(i, j)$ se expande a un nuevo soporte $\tilde{\mathcal{L}} \subset \mathbb{Z}^2$ cuya dimensión cumple que $\tilde{L} > L$. Así pues, en adelante se asumirán dos soportes diferentes \mathcal{L} y $\tilde{\mathcal{L}}$ para $x(i, j)$ e $y(i, j)$ respectivamente.

Como se indicaba al principio de esta sección, la imagen captada no sólo está expuesta a fenómenos deterministas como la PSF, sino que también es susceptible a distorsiones estocásticas como el ruido. Estas distorsiones pueden ser introducidas por variaciones aleatorias en el proceso de formación de la imagen, en el medio de transmisión o en el soporte de almacenamiento. Incluso el error generado por el proceso de cuantificación de la imagen continua a digital, se aproxima como un error estocástico superpuesto a la imagen observada. Así pues, se incorpora el término de incertidumbre sobre la ecuación de (2.2) como sigue

$$\begin{aligned} y(i, j) &= \sum_{(k, l) \in \mathcal{M}} h(k, l) x(i - k, j - l) + n(i, j) \quad (i, j) \in \tilde{\mathcal{L}} \\ &= h(i, j) ** x(i, j) + n(i, j), \end{aligned} \quad (2.3)$$

siendo $n(i, j)$ una muestra de ruido normalmente modelada como un proceso Gaussiano aditivo y de media nula que está incorrelado con las imágenes. Esta distribución normal se denota por $N(0, \sigma_n^2 \mathbf{I})$ donde σ_n^2 es la varianza del ruido e \mathbf{I} es la matriz identidad de dimensión \tilde{L} . La hipótesis de un ruido Gaussiano no siempre refleja la realidad, ya que algunos tipos de ruido pueden ser dependientes de la imagen de entrada o, incluso, no ser aditivos. No obstante, es aplicable a un importante número de problemas donde se cumplen estas premisas y, por tanto, será el tipo de ruido considerado en la memoria.

Con el objetivo de simplificar la notación del proceso de degradación, se recurre a la versión lexicográfica de las imágenes.

Definición 2.4. La versión lexicográfica o función vec de $x(i, j)$ devuelve un vector compuesto por la sucesión de columnas de la imagen tal que

$$\mathbf{x} = \text{vec}\{x(i, j)\} = \begin{pmatrix} x(:, 1) \\ x(:, 2) \\ \vdots \\ x(:, L_2) \end{pmatrix},$$

donde $x(:, j)$ denota la j -ésima columna de $x(i, j)$, i.e., $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^L$.

La versión lexicográfica de $x(i, j)$ se representa con el nombre de la variable en negrita y en minúsculas \mathbf{x} . Equivalentemente, se define la versión inversa de la función vec que devuelve la matriz \mathbf{X} con notación en negrita y en mayúsculas.

Definición 2.5. La función vec^{-1} del vector lexicográfico $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^L$ devuelve la matriz asociada $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{L_1 \times L_2}$ tal que

$$\mathbf{X} = \text{vec}^{-1}\{\mathbf{x}\} = [x(:,1) \quad x(:,2) \quad \cdots \quad x(:,L_2)],$$

donde $x(:, j)$ denota de nuevo la j -ésima columna de $x(i, j)$.

Una importante diferencia entre vec y vec^{-1} es que la función inversa necesita conocer las dimensiones de la imagen $x(i, j)$. En consecuencia, esta función no es única a menos que esta información se proporcione.

Tomando en consideración estas notaciones, la ecuación (2.3) se puede describir de forma más compacta como

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n}, \quad (2.4)$$

donde \mathbf{H} se conoce como la **matriz de convolución** de dimensión $\tilde{L} \times L$, i.e., $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{\tilde{L} \times L}$ y las variables $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^L$, $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^{\tilde{L}}$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\tilde{L}}$ son los respectivos vectores lexicográficos de la imagen original $x(i, j)$ de tamaño $L \times 1$, el ruido $n(i, j)$ y la imagen observada $y(i, j)$, ambos con dimensiones $\tilde{L} \times 1$.

A modo de resumen se presenta en la Figura 2.1 un ejemplo de la imagen *Lena* sometida a un proceso de adquisición en el que intervienen fenómenos de emborronamiento y ruido.

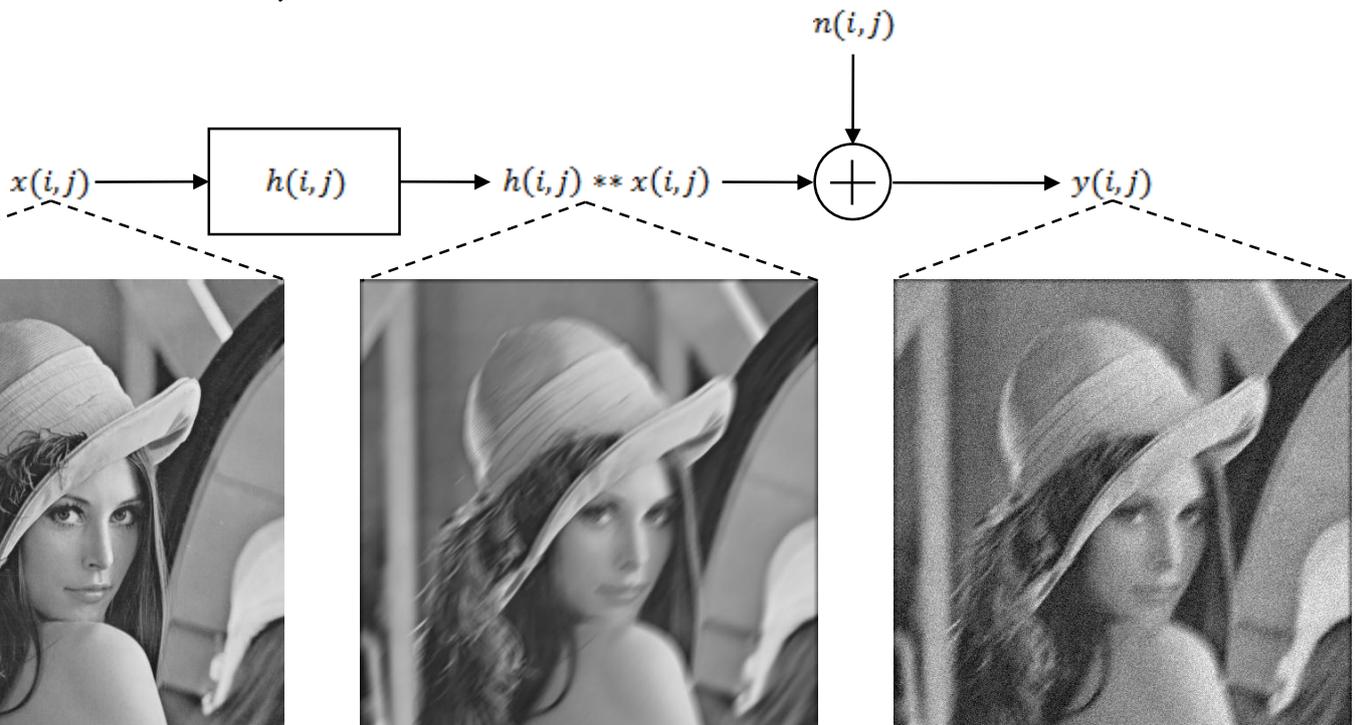


Figura 2.1: Proceso de adquisición de la imagen original $Lena$ $x(i, j)$ sometida a los efectos de emborronamiento por la PSF $h(i, j)$ y la adición del ruido $n(i, j)$. Como resultado se obtiene una imagen degradada $y(i, j)$.

2.2 Modelos de la PSF

Los artículos de restauración han estudiado extensivamente los modelos de PSF que mejor representan las degradaciones en los diferentes campos de aplicación [31][57][92][7]. A continuación, se resumen los emborronamientos más comunes y que serán aplicados en los casos prácticos de esta tesis.

Ya se adelantó en la sección anterior alguna restricción respecto a los valores que puede tomar la PSF. En concreto, como las imágenes original y observada son funciones reales y positivas, consecuentemente la PSF también lo es. Además, ha de tenerse en cuenta que la degradación en un sistema de captación de imágenes es una operación pasiva que ni absorbe ni genera energía sobre la imagen, es decir, toda la energía que acumula un punto de la imagen original es conservada tras pasar el filtro de la PSF. Esto se traduce formalmente en que

$$\sum_{i=0}^{M_1-1} \sum_{j=0}^{M_2-1} h(i,j) = 1. \quad (2.5)$$

2.2.1 Emborronamiento por movimiento lineal uniforme

Son varios los fenómenos de degradación que producen la función de PSF de movimiento: traslaciones, rotaciones y cambios de escala. Sin embargo, el más común de estos efectos es el correspondiente únicamente a la traslación (movimiento lineal uniforme). Así pues, considerando una escena que se desplaza respecto a la cámara a una velocidad constante v , con un ángulo ϕ respecto al eje horizontal y durante un periodo de tiempo T , se define la *longitud del movimiento* como $d = vT$ y la PSF se representa por

$$h(i,j) = \begin{cases} \frac{1}{d}, & \text{si } \sqrt{i^2 + j^2} \leq \frac{d}{2} \text{ y } \frac{j}{i} = -\tan \phi. \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \quad (2.6)$$

Esta expresión asume que todos los objetos de la escena se están moviendo a la vez. En el caso de que alguno se mueva de forma independiente respecto al resto de la escena, el modelado del emborronamiento da lugar a una PSF variante espacial.

2.2.2 Emborronamiento por desenfoque uniforme

El desenfoque de una imagen captada por una cámara se modela en cada punto por el denominado *círculo de confusión*, cuyo radio depende de la longitud focal, la apertura de la lente, la longitud de onda de la luz y la distancia entre la cámara y el objeto. Si el grado del desenfoque (radio del círculo) es grande respecto a las longitudes de onda de la luz que atraviesan la cámara, se utiliza una aproximación geométrica que da lugar a una distribución uniforme dentro del círculo de confusión. En estas condiciones, la PSF se define como

$$h(i, j) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2}, & \text{si } \sqrt{i^2 + j^2} \leq R, \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \quad (2.7)$$

donde R corresponde al radio de la PSF. Este modelo asume que la distancia del objeto desde la cámara es constante en toda la imagen, lo que le permite ser una PSF invariante espacial.

2.2.3 Emborronamiento uniforme bidimensional

Esta forma de emborronamiento supone una aproximación a la degradación por desenfoque anterior y se emplea en un gran número de simulaciones sobre restauración de imágenes. Su expresión viene dada por

$$h(i, j) = \begin{cases} \frac{1}{d^2}, & \text{si } -\frac{d}{2} \leq i, j \leq \frac{d}{2}. \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \quad (2.8)$$

2.2.4 Emborronamiento por turbulencia atmosférica

La degradación debida a los cambios en las condiciones de refracción de la atmósfera tiene una importante influencia en la calidad de las imágenes para teledetección. Este tipo de emborronamiento sin embargo no admite un modelo determinista por su dependencia respecto a factores tales como la temperatura, el tiempo de exposición o las condiciones meteorológicas de la adquisición. Si se considera una exposición prolongada, lo cual suele ser frecuente en las observaciones astronómicas, una buena aproximación de la turbulencia atmosférica es una PSF Gaussiana que responde a la expresión

$$h(i, j) = \frac{1}{2\pi\sigma_R^2} \exp\left\{-\frac{i^2 + j^2}{2\sigma_R^2}\right\}, \quad (2.9)$$

donde σ_R^2 controla la severidad de la degradación.

2.3 Proceso de restauración de imágenes

A la vista de la ecuación (2.4), el proceso de restauración de imágenes equivale a la resolución de un problema inverso en el que se ha de obtener el vector $\hat{\mathbf{x}}$, conocida la imagen observada \mathbf{y} , además de la matriz del sistema de captación \mathbf{H}

$$\hat{\mathbf{x}} | \mathbf{y} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{n}. \quad (2.10)$$

La inversión directa de la matriz \mathbf{H} no es suficiente para resolver esta ecuación, pues la presencia del ruido estocástico \mathbf{n} origina una situación de mal condicionamiento, tal y como se indicó en la ecuación de Fredholm de la Definición 2.2. Hadamard fue el primero en establecer los criterios que marcan el condicionamiento de un problema algebraico como éste [41][26][36].

Definición 2.6. *Un problema está bien condicionado si cumple cada uno de los siguientes criterios:*

1. *Para cualquier dato, existe una solución. (Existencia)*
2. *La solución es única. (Unicidad)*
3. *La solución depende de forma continua de los datos. (Estabilidad)*

En primer lugar, la presencia de ruido puede suponer que no exista ninguna $\hat{\mathbf{x}}$ que resuelva la ecuación (2.10) con igualdad matemática. Seguidamente, aparece el problema de la unicidad de la solución.

Definición 2.7. *El espacio nulo $\mathcal{N}(\cdot)$ de la matriz de convolución $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{\tilde{L} \times L}$ se define como*

$$\mathcal{N}(\mathbf{H}) = \{\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^L \mid \mathbf{H}\mathbf{x}' = \mathbf{0}\},$$

Por tanto, $\mathcal{N}(\mathbf{H})$ representa el conjunto de todas las imágenes de entrada a la PSF que producen una salida nula. Si el espacio nulo de \mathbf{H} no es vacío, entonces existen componentes de la imagen original que no son observadas en \mathbf{y} . En estos casos, son infinitas las posibilidades de $\hat{\mathbf{x}}$ que producen la misma imagen observada y se necesita un criterio para elegir la “correcta” para el problema inverso.

El tercer criterio de Hadamard respecto a la estabilidad es el más crítico, puesto que la solución ha de mantenerse inalterada frente a las perturbaciones en la observación de la imagen, o lo que es lo mismo, a la presencia del ruido \mathbf{n} .

Por último, la ecuación (2.10) sólo representa la solución teniendo en cuenta la imagen observada \mathbf{y} , pero no dice nada en lo que se refiere a conocimiento a priori de la solución. Por lo general, cierta información a priori estará disponible a la hora de resolver el problema de restauración y, por tanto, se requiere algún medio de incluirla en la solución. La **regularización** se emplea como instrumento matemático para resolver todos estos problemas que originan el mal condicionamiento de la restauración de imágenes.

Los artículos de restauración empiezan por plantear la solución de la restauración de imágenes como un problema de **optimización**.

Definición 2.8. *La restauración de una imagen original $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^L$ a partir de su versión observada $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\tilde{L}}$, se define como la obtención de una estimación $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^L$ que minimice una función de coste $\mathcal{C} : \mathbb{R}^L \rightarrow \mathbb{R}$, sobre un conjunto $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{R}^L$ de restricciones para la solución:*

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{Q}, \mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}) \leq \mathcal{C}(\mathbf{x}),$$

i.e.,

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{Q}} \{\mathcal{C}(\mathbf{x})\}.$$

Con esta definición, se recurre al álgebra matemático para resolver un algoritmo de minimización con restricciones. Son varias las definiciones, teoremas y propiedades formulados alrededor de este tipo de algoritmos [92][12][2] y se exponen a continuación los que son de interés para esta tesis.

Propiedad 2.1. Sea $\mathcal{C} : \mathbb{R}^L \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa y $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{R}^L$ un subconjunto cerrado, convexo y no vacío, entonces \mathcal{C} presenta un mínimo global para el conjunto \mathcal{Q} , es decir, existe un vector $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{Q}$ para el cual se cumple la Definición 2.8. Además, si la función \mathcal{C} es estrictamente convexa, entonces este mínimo es único.

La propiedad de convexidad tanto del conjunto \mathcal{Q} como de la función de coste \mathcal{C} , permite establecer una condición necesaria y suficiente para el cálculo del mínimo global mediante la teoría de los subgradientes, incluyendo a las funciones no diferenciables.

Definición 2.9. Para una función $\mathcal{C} : \mathbb{R}^L \rightarrow \mathbb{R}$, un subgradiente en $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^L$ es un vector $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^L$ tal que

$$\forall \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^L, \mathcal{C}(\mathbf{x}') \geq \mathcal{C}(\mathbf{x}) + \langle \mathbf{g}, \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle.$$

El conjunto de todos estos vectores se denomina el subdiferencial de \mathcal{C} en \mathbf{x} y se denota por $\partial\mathcal{C}(\mathbf{x})$.

Aplicando la definición de subdiferencial para la función convexa que se utiliza en la restauración y particularizando al caso diferenciable, se obtiene una nueva propiedad de interés.

Propiedad 2.2. Sea $\mathcal{C} : \mathbb{R}^L \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa y $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{R}^L$ un subconjunto cerrado, convexo y no vacío, entonces

* $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^L$, el subdiferencial $\partial\mathcal{C}(\mathbf{x})$ no está vacío.

* Si \mathcal{C} es diferenciable en \mathbf{x} , entonces el subdiferencial $\partial\mathcal{C}(\mathbf{x})$ contiene exactamente un elemento, que coincide con el gradiente de \mathcal{C} en \mathbf{x}

$$\partial\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \{\nabla\mathcal{C}(\mathbf{x})\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial\mathcal{C}}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial\mathcal{C}}{\partial x_2} \end{array} \right\}.$$

Finalmente, se llega a una propiedad necesaria y suficiente para el cálculo del mínimo global en el problema de restauración, siendo ésta la referencia de los algoritmos del estado del arte.

Propiedad 2.3. Sea $\mathcal{C} : \mathbb{R}^L \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa y $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{R}^L$ un subconjunto cerrado, convexo y no vacío, entonces $\hat{\mathbf{x}}$ es un mínimo global de \mathcal{C} sobre \mathcal{Q} si y sólo si

$$\exists \hat{\mathbf{g}} \in \partial\mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}) \mid \forall \mathbf{x} \in \mathcal{Q}, \langle \hat{\mathbf{g}}, \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \rangle \geq 0.$$

En particular, si $\mathcal{Q} = \mathbb{R}^L$ y la función es diferenciable, esta condición es equivalente al conocido criterio de optimización de gradiente

$$\mathbf{0} \in \partial\mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}) \Rightarrow \nabla\mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}.$$

Cabe destacar que no ha sido necesario hacer explícita ninguna condición respecto a la matriz Hessiana de \mathcal{C} , dado que el hecho de ser una función estrictamente convexa equivale a que dicha matriz sea definida positiva y, por tanto, la función tenga un mínimo global y único. En adelante, los algoritmos que se

presentan asumen la condición de convexidad, diferenciabilidad y sin restricciones $Q = \mathbb{R}^L$.

2.3.1 La necesidad de regularización

En el campo de la optimización, la elección más común para la función de coste $\mathcal{C} : \mathbb{R}^L \rightarrow \mathbb{R}$ es la correspondiente a un problema de mínimos cuadrados, cumpliendo con los criterios de convexidad. Así pues, se particulariza a la ecuación (2.10) de tal manera que la “estimación reemborrada” $\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}$ sea lo más parecida posible a la imagen observada \mathbf{y} , sin considerar la presencia de ruido

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2, \quad (2.11)$$

donde $\|\cdot\|_2$ simboliza la norma ℓ_2 del espacio \mathbb{R}^L o también denominada norma Euclídea (i.e. suma de los cuadrados de cada componente del vector).

Si se considera que la matriz \mathbf{H} tiene un rango completo de columnas, i.e. $\text{rank}(\mathbf{H}) = L$, entonces se deriva que $\mathcal{N}(\mathbf{H}) = \emptyset$ y, por tanto, la estimación $\hat{\mathbf{x}}$ es única. A partir de la Propiedad 2.3, se resuelve el operador gradiente $\nabla \mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}})$ y se obtiene una expresión de $\hat{\mathbf{x}}$ por mínimos cuadrados [10]

$$(\mathbf{H}^T \mathbf{H})\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}^T \mathbf{y}, \quad (2.12)$$

que podría despejarse hasta obtener una solución $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}^\dagger \mathbf{y}$, donde $\mathbf{H}^\dagger = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T$ se conoce como la **matriz Moore-Penrose pseudoinversa** [33]. En el caso de que la matriz \mathbf{H} fuera cuadrada y $\text{rank}(\mathbf{H}) = L$, entonces $\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{H}^{-1}$.

Cuando el espacio nulo de \mathbf{H} no es vacío, $\mathcal{C}(\mathbf{x})$ no tiene un único mínimo y se requiere entonces algún criterio para elegir la solución más adecuada entre todas las posibles. Lo que habitualmente se hace es seleccionar la estimación $\hat{\mathbf{x}}$ que cumple con la ecuación (2.12) y además tiene la menor norma Euclídea $\|\hat{\mathbf{x}}\|_2^2$. A este criterio se le denomina **solución generalizada**. Esta solución implica que la estimación $\hat{\mathbf{x}}$ no incluye las componentes no observables en la imagen \mathbf{y} , pues éstas aumentan la energía global. O dicho de otra forma, la solución generalizada $\hat{\mathbf{x}}$ es aquella que prescinde de los elementos pertenecientes al espacio $\mathcal{N}(\mathbf{H})$.

Para poder comprobar la inestabilidad que presenta la solución (2.12) y evidenciar el mal condicionamiento de la restauración, se recurre de forma teórica a la descomposición de la matriz \mathbf{H} en sus valores singulares (SVD).

Definición 2.10. Sea la matriz $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{\tilde{L} \times L}$, entonces se define la descomposición en valores singulares (SVD) de \mathbf{H} como

$$\mathbf{H} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{V}^T = \sum_{k=1}^L s_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^T,$$

donde $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{L \times L} = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_L)$ es una matriz diagonal real cuyos elementos diagonales s_k son los valores singulares de \mathbf{H} , mientras que los vectores singulares \mathbf{u}_k y \mathbf{v}_k son las columnas k -ésimas de las matrices ortogonales $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{\tilde{L} \times \tilde{L}}$ y $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{L \times L}$.

En el caso de que el rango de la matriz \mathbf{H} no sea completo, $\text{rank}(\mathbf{H}) = r < L$ y $\mathcal{N}(\mathbf{H}) \neq \emptyset$, entonces se cumple que

$$s_1 \geq \dots \geq s_r > s_{r+1} = \dots = s_L = 0. \quad (2.13)$$

Así pues, la solución generalizada para este caso se obtiene sustituyendo la Definición 2.10 en la ecuación (2.12) y haciendo uso de operaciones matriciales [33]

$$\hat{\mathbf{x}} = \sum_{k=1}^r \frac{\mathbf{u}_k^T \mathbf{y}}{s_k} \mathbf{v}_k. \quad (2.14)$$

En esta expresión se observa que las componentes de la imagen restaurada llegan hasta r y el resto son omitidas. Esta situación es consecuencia de la solución generalizada, en la que se prescinde de todas las componentes que pertenezcan al espacio nulo de \mathbf{H} , i.e, $\forall k \in [r + 1, L] \mid s_k = 0$. De esta forma, se evita que los ceros de la matriz \mathbf{H} se conviertan en polos de la solución $\hat{\mathbf{x}}$.

Además, conviene matizar que la ecuación (2.14) equivale a representar la imagen restaurada en el espacio formado por los vectores ortonormales $\{\mathbf{v}_k\}$, cuyos pesos son los coeficientes $\mathbf{u}_k^T \mathbf{y} / s_k$. Estos pesos a su vez representan la descomposición de la imagen observada \mathbf{y} en el espacio vectorial ortonormal $\{\mathbf{u}_k\}$ donde los coeficientes son escalados por $1/s_k$

Dado que la mayoría de las PSF son paso-bajo, como las que se vieron en la Sección 2.2, la matriz \mathbf{H} tiene la propiedad de que sus valores singulares s_k tienden gradualmente a cero a medida que aumenta k y sus correspondientes vectores singulares \mathbf{u}_k y \mathbf{v}_k tales que $\mathbf{H}\mathbf{v}_k = s_k \mathbf{u}_k$ son elementos de alta frecuencia en la imagen restaurada. Las consecuencias de este comportamiento son críticas para la estabilidad de la solución (2.14). Para demostrarlo, cada coeficiente k de la estimación $\hat{\mathbf{x}}$ se reescribe sustituyendo (2.4) por el vector \mathbf{y}

$$\frac{\mathbf{u}_k^T \mathbf{y}}{s_k} = \mathbf{v}_k^T \mathbf{x} + \frac{\mathbf{u}_k^T \mathbf{n}}{s_k}, \quad (2.15)$$

en el que se ha utilizado la propiedad de ortonormalidad de los vectores \mathbf{u}_k y \mathbf{v}_k , es decir, $\mathbf{u}_k^T \mathbf{u}_k = 1$ y $\mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k = 1$ que permite expresar $\mathbf{v}_k^T = \mathbf{u}_k^T \mathbf{H} / s_k$.

A la derecha de la ecuación (2.15) se identifican dos términos: el primero de ellos se refiere a la imagen original \mathbf{x} y el segundo alberga la componente de ruido \mathbf{n} . Para valores altos de k y, por tanto, altas frecuencias, la contribución de la imagen original $\mathbf{v}_k^T \mathbf{x}$ será generalmente mucho menor que la debida al ruido $\mathbf{u}_k^T \mathbf{n}$, dado que en las imágenes reales lo que predomina son las componentes de baja frecuencia a diferencia del ruido. Si además se le une que el término de ruido está amplificado por el factor $\frac{1}{s_k}$ cuyo valor es muy elevado para las altas frecuencias ($s_k \rightarrow 0$), el resultado sobre $\hat{\mathbf{x}}$ es que está dominado por términos oscilatorios debidos al ruido. Así pues, por pequeñas que sean las perturbaciones originadas por el ruido en la imagen observada, la imagen restaurada presenta una gran inestabilidad que hace inviable una solución por mínimos cuadrados.

Estas dificultades son un reflejo del mal condicionamiento de la restauración de imágenes y encuentran la alternativa en la **regularización**. El propósito de esta

técnica matemática es incluir **información a priori** que permita estabilizar la imagen restaurada frente a la magnificación del ruido. La forma más sencilla de regularización a partir de la expresión (2.15) es el truncamiento de todos aquellos coeficientes que estén causando la influencia crítica del ruido. A este procedimiento se le conoce como **regularización por SVD truncada (TSVD)** [41][10]. Al igual que el rango no completo de la matriz \mathbf{H} está contribuyendo a que se eliminen los componentes del $\mathcal{N}(\mathbf{H})$, lo que se pretende ahora es incrementar este truncado a un mayor número de coeficientes. De hecho, una manera de interpretar el método TSVD es mediante la definición de una solución

$$\hat{\mathbf{x}} = \sum_{k=1}^r f_k \frac{\mathbf{u}_k^T \mathbf{y}}{s_k} \mathbf{v}_k, \quad (2.16)$$

donde $\{f_k\}$ define el conjunto de **factores de filtrado** que la diferencian de la solución de mínimos cuadrados en (2.14) y su expresión viene dada por una función pulso

$$f_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k > \bar{r} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}. \quad (2.17)$$

La elección del valor de $\bar{r} \geq r$ depende del conocimiento a priori sobre la influencia del ruido.

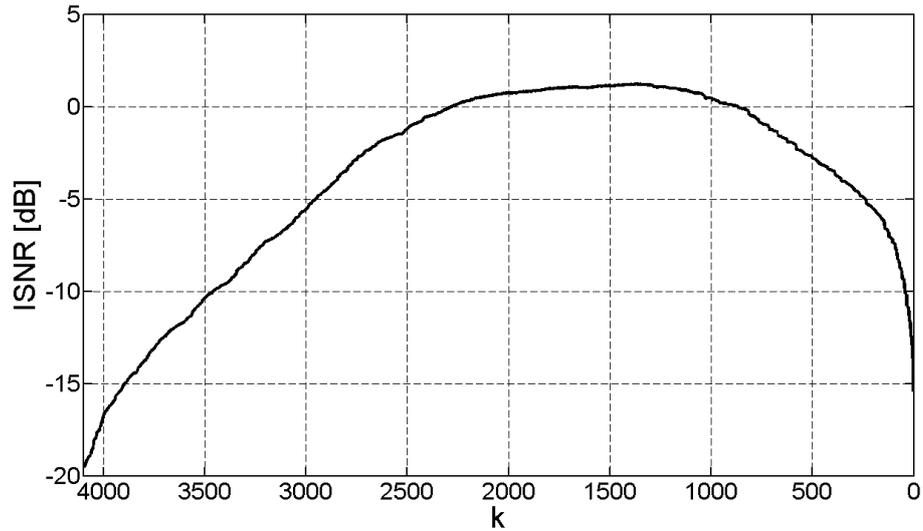
Un ejemplo práctico de esta situación se puede observar en la Figura 2.2, donde se representa la evolución de la calidad de restauración según se van truncando coeficientes de la expresión (2.14). Por cuestiones de cómputo, se ha realizado el ejemplo para una imagen *Lena* de reducido tamaño 64×64 , degradada por un filtro de movimiento uniforme y con dos niveles diferentes de ruido (mayor ruido en la gráfica (a)). En consecuencia, un total de $L = 4096$ coeficientes son posibles y están representados sobre el eje de abscisas en sentido decreciente. Como ya se adelantaba, la amplificación del ruido hace que la calidad de la imagen restaurada sea muy mala si se mantienen todos los coeficientes, pero va aumentando a medida que se eliminan coeficientes. Se llega a un punto \bar{r} donde el número de coeficientes es óptimo y se obtiene el mejor valor de calidad, es decir, el resultado correspondiente al método TSVD. Comparando ambas figuras, se observa que este valor de \bar{r} es mayor para un nivel de ruido más bajo (entorno a 2500 frente a los 1500 coeficientes del ruido más alto) y la calidad obtenida es mejor numéricamente. A partir de este punto, la imagen restaurada vuelve a decrecer en calidad pues se están eliminando coeficientes que son fundamentales para la representación de la imagen.

La regularización matemática se puede generalizar como un problema alternativo a la restauración original, que cumple con las condiciones de Hadamard (Definición 2.6) y, por tanto, está bien condicionado.

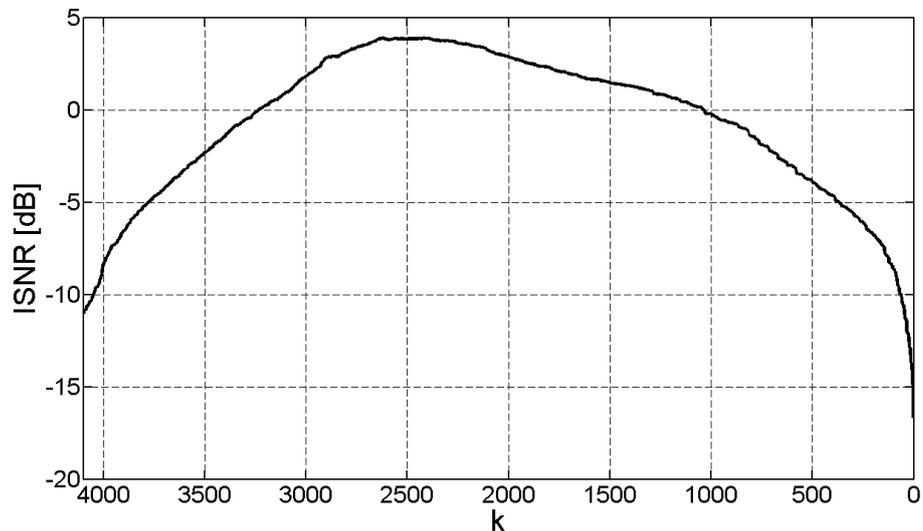
Definición 2.11. *La restauración regularizada extiende la Definición 2.8 con la particularidad de que la función de coste $\mathcal{C} : \mathbb{R}^L \rightarrow \mathbb{R}$ cumple con la siguiente estructura*

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \mathcal{D}(\mathbf{x}) + \lambda \mathcal{R}(\mathbf{x}),$$

donde $\mathcal{D}(\mathbf{x})$ es el término de datos, $\mathcal{R}(\mathbf{x})$ es el término de regularización y λ es el parámetro de regularización tal que $\lambda \geq 0$.



(a)



(b)

Figura 2.2: Evolución del parámetro de calidad ISNR respecto al número de coeficientes empleados en el método TSVD. Imagen emborronada de ejemplo con tamaño 64×64 , i.e., $L = 4096$ y dos niveles de ruido: (a) mayor que (b).

Analizando cada elemento por separado:

- ◊ $\mathcal{D}(\mathbf{x})$: es el término de datos que se encarga de asegurar la fidelidad de la imagen estimada a los datos de la imagen observada.
- ◊ $\mathcal{R}(\mathbf{x})$: es el término de regularización que se construye usando información a priori sobre la imagen original y favorece típicamente la aparición de imágenes restauradas con propiedades de *suavizado*. También se conoce como el término de penalización o la norma de *suavizado*, y se encarga de penalizar

las altas frecuencias en la solución y dejar pasar sin regularizar sólo las bajas frecuencias.

- ◊ λ : es el parámetro de regularización que determina la influencia de ambos términos, controlando el impacto de los datos y el correspondiente a la información a priori. El valor de este parámetro es crítico para conseguir un buen equilibrio entre la estabilidad de la solución (i.e. propagación del ruido) y la calidad de los datos. De hecho, si se asocia un valor de λ demasiado alto, se obtiene una solución *sobre-regularizada*, donde el *suavizado* en la imagen restaurada es excesivo. O, por el contrario, si el parámetro λ es demasiado bajo se llegaría a la misma solución inestable que la conseguida por mínimos cuadrados en presencia de ruido. Por ello, se tiene que llegar a un valor de compromiso.

El estado del arte ofrece una cantidad importante de métodos de restauración que responden a la Definición 2.11 y que se conocen como métodos de regularización o **directos**, a los que se unen otros paradigmas de restauración como los métodos **Bayesianos** e **iterativos**. A continuación, se realiza un repaso de los métodos que van a ser objeto de comparativa con los algoritmos propuestos en esta tesis. Para conseguir una revisión más extensa de otras técnicas se remite a referencias como [34][8][11][19].

2.3.2 Métodos de regularización directa

Reciben este nombre aquellos métodos de restauración cuya solución se obtiene resolviendo la función de optimización $\mathcal{C}(\mathbf{x})$. No obstante, muchos de ellos recurren a mecanismos iterativos para conseguir una solución viable en términos de complejidad computacional.

Regularización Tikhonov

Puede que sea el método de restauración más referenciado en el estado del arte, como alternativa de regularización al método de mínimos cuadrados. En particular, se basa en la función de coste [89]

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2 \\ \lambda \mathcal{R}(\mathbf{x}) = \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{D}\mathbf{x}\|_2^2 \end{array} \right\}, \quad (2.18)$$

donde $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{U \times L}$ representa la matriz de convolución de un filtro paso alto $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^U$, que se elige normalmente como el operador Laplaciano. El hecho de incluir este tipo de regularización implica que la solución tenga una limitada energía de alta frecuencia, dado que son las bajas frecuencias las que pasan a la solución sin ser regularizadas. Como resultado, se obtiene una imagen restaurada en la que los bordes de la escena pierden nitidez, tanto más cuanto mayor sea la regularización. Esta última situación es la que motiva la aplicación de otras regularizaciones no cuadráticas.

Tras aplicar el proceso de minimización indicado en la Propiedad 2.3 y resolviendo el operador gradiente $\nabla \mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}})$, se llega a una expresión para el vector $\hat{\mathbf{x}}$ con la regularización de Tikhonov [8]

$$(\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \lambda \mathbf{D}^T \mathbf{D}) \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}^T \mathbf{y}, \quad (2.19)$$

donde se pueden observar las similitudes con respecto a la ecuación (2.12). En este caso, la unicidad de la solución $\hat{\mathbf{x}}$ se consigue si $\mathcal{N}(\mathbf{H}) \cap \mathcal{N}(\mathbf{D}) = \emptyset$.

Particularizando al caso en el que el filtro \mathbf{D} es la matriz identidad \mathbf{I} , se obtiene una expresión muy significativa a efectos de la regularización. Sustituyendo $\mathbf{D} = \mathbf{I}$ y aplicando la descomposición SVD sobre la matriz \mathbf{H} [10], resulta que

$$\hat{\mathbf{x}} = \sum_{k=1}^r f_{k,\lambda} \frac{\mathbf{u}_k^T \mathbf{y}}{s_k} \mathbf{v}_k, \quad (2.20)$$

donde $\{f_{k,\lambda}\}$ el conjunto de factores de filtrado que toman una expresión como

$$f_{k,\lambda} = \frac{s_k^2}{s_k^2 + \lambda}. \quad (2.21)$$

Estos factores tienen la importante propiedad de que según s_k va decreciendo, el correspondiente $f_{k,\lambda}$ tiende a cero, de tal forma que los coeficientes con valores singulares más pequeños son filtrados de manera eficiente y se evita la amplificación del ruido en las altas frecuencias. A diferencia del método TSVD que se limitaba a truncar coeficientes a partir de un determinado valor de $k = \bar{r}$, en este caso se realiza un filtrado más *suave* sobre los coeficientes según la expresión (2.21). El factor de *roll-off* de este filtro depende del parámetro de regularización λ . Así pues, una buena elección de λ permite obtener un resultado más estable frente a las perturbaciones del ruido. Como única condición, se debe cumplir que $\lambda > s_1^2$, siendo s_1 el mayor de los valores singulares.

Para el caso en que $\mathbf{D} \neq \mathbf{I}$, el resultado es aún más interesante pero más complejo de analizar. De hecho, es necesario definir una nueva forma de representación SVD para ambas matrices que se denomina descomposición generalizada en valores singulares (GSVD)

Definición 2.12. Sea la matriz $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{\bar{L} \times L}$ y $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{U \times L}$ tal que $\mathcal{N}(\mathbf{H}) \cap \mathcal{N}(\mathbf{D}) = \emptyset$, entonces se define la descomposición generalizada en valores singulares (GSVD) del par de matrices (\mathbf{H}, \mathbf{D}) como

$$\mathbf{H} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \mathbf{S} & \\ & \mathbf{I} \end{pmatrix} \boldsymbol{\Theta}^{-1}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{V}(\mathbf{M}, \mathbf{0}) \boldsymbol{\Theta}^{-1},$$

donde las columnas de $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{\bar{L} \times \bar{L}}$ y $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{U \times U}$ son ortonormales, $\boldsymbol{\Theta} \in \mathbb{R}^{L \times L}$ es una matriz no singular, $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{U \times U} = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_U)$ y $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{U \times U} = \text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_U)$ son matrices diagonales e $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{(L-U) \times (L-U)}$ es la matriz identidad. Además, \mathbf{S} y \mathbf{M} están escaladas tal que $\mathbf{S}^T \mathbf{S} + \mathbf{M}^T \mathbf{M} = \mathbf{I}$, y los valores singulares generalizados se definen como $\gamma_k = \frac{s_k}{m_k}$ para $k = 1, \dots, U$ tal que $\gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_U$.

La solución de Tikhonov para esta nueva descomposición se puede escribir como una combinación lineal de las columnas de $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \dots, \boldsymbol{\theta}_L)$ tal y como sigue [10]

$$\hat{\mathbf{x}} = \sum_{k=1}^U f_{k,\lambda} \frac{\mathbf{u}_k^T \mathbf{y}}{\sigma_k} \boldsymbol{\theta}_k + \sum_{k=U+1}^L (\mathbf{u}_k^T \mathbf{y}) \boldsymbol{\theta}_k, \quad (2.22)$$

donde los factores de filtrado en este caso se expresan en función de los valores singulares generalizados, esto es,

$$f_{k,\lambda} = \frac{\gamma_k^2}{\gamma_k^2 + \lambda}, \quad (2.23)$$

y han de cumplir que $\lambda > \gamma_U^2$ para que el efecto de filtrado sobre los valores singulares sea satisfactorio. El aspecto más significativo de la expresión generalizada (2.22) es que el segundo término puede formar parte del espacio nulo de \mathbf{D} y, por tanto, la solución está haciendo una extrapolación de componentes que no son observables en la imagen adquirida. Este problema se puede generalizar aún más, añadiendo múltiples términos en la forma $\|\mathbf{D}_k \mathbf{x}\|_2$ a la ecuación (2.18) y así derivar en una solución de la norma de Sobolev [71].

Si bien las ecuaciones (2.20) y (2.22) ofrecen una expresión explícita para el cálculo de la estimación $\hat{\mathbf{x}}$, la realidad es que los problemas con imágenes suelen ser de un tamaño que hace inviable computacionalmente los cálculos de la SVD o de la GSVD (típicamente $L = 256 \times 256$, lo que significa por ejemplo que la matriz \mathbf{H} tenga una dimensión superior a 65536×65536). Incluso, si se intenta despejar $\hat{\mathbf{x}}$ de la expresión (2.19) conlleva una operación matricial inversa inabordable. Por ello, se recurre habitualmente a los algoritmos iterativos y a las propiedades de la matriz \mathbf{H} en cada caso.

Regularización por variación total (TV)

Como alternativa a la norma ℓ_2 de Tikhonov, la regularización por variación total propuesta por Rudin, Osher y Fatemi [73] se ha utilizado mayoritariamente en las últimas publicaciones de restauración [95][102][13][72][6]. En este caso, el problema de restauración se define por una nueva función de coste

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2 \\ \lambda \mathcal{R}(\mathbf{x}) = \lambda \text{TV}(\mathbf{x}) \end{array} \right\}, \quad (2.24)$$

donde $\text{TV}(\cdot)$ simboliza el operador de variación total.

Definición 2.13. Sea una función $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y diferenciable, la variación total de esta función se define como

$$\text{TV}(f) = \int_{\bar{\Omega}} |\nabla f(t)| dt,$$

donde $\bar{\Omega}$ es el dominio de definición y

$$|\nabla f(t)| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial t_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial t_p}\right)^2}.$$

De esta definición se extrae que el operador TV es una integración de todos los gradientes de una función en cualquier punto de su dominio. Y dado que el gradiente es una medida de la variación de la función en un punto, entonces la variación total representa la cantidad total de cambio que contiene la función.

La razón de utilizar el operador TV como término de regularización es gracias a su propiedad de incorporar los gradientes más acusados y variables en la solución, a diferencia del comportamiento suavizado que ofrecía la norma ℓ_2 . Pensando en imágenes, esto supone que la imagen restaurada además de evitar las oscilaciones producidas por el ruido, también mantiene la información de los bordes de los objetos de la escena. Los resultados comparativos entre los métodos de Tikhonov y TV son muy visibles desde el punto de vista subjetivo y han convertido a la regularización por variación total en la herramienta elegida para la desconvolución de imágenes reales [18].

Ahora bien, a la hora de plantearse la minimización del problema según la Propiedad 2.3, la resolución se complica al no cumplirse la condición de diferenciabilidad del operador TV, debido a la presencia de la función de valor absoluto en la Definición 2.13. Esta tarea ha sido objeto de estudio de muchos trabajos en esta última década [13][18][16][17][23][29][97]. Muchos de los algoritmos de variación total abordan la optimización de la ecuación (2.24) desde el punto de vista continuo y luego discretizan la solución para ser aplicable en la restauración de imágenes. Sin embargo, el planteamiento de interés para esta tesis es el que toma como primer paso la discretización del problema y luego se recurre a un método de optimización de dimensión finita. En particular, se va a prestar una atención especial al algoritmo presentado por Bioucas-Dias et al. [13][72][29] que pertenece a la rama de los métodos de **maximización-minimización** (MM).

Cuando la función sobre la que se calcula la variación total es una imagen bidimensional $y(s, t) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$, es decir, con dos direcciones de referencia: horizontal y vertical, se puede describir la Definición 2.13 en su versión discreta siguiendo la terminología actual $TV : \mathbb{R}^L \rightarrow \mathbb{R}$

$$TV(\mathbf{x}) = \sum_k \sqrt{(\Delta_k^h \mathbf{x})^2 + (\Delta_k^v \mathbf{x})^2}, \quad (2.25)$$

donde Δ_k^h y Δ_k^v representan los operadores lineales correspondientes a las diferencias finitas de primer orden horizontal y vertical respectivamente en el pixel k . Esto es, $\Delta_k^h \mathbf{x} = x_k - x_{r(k)}$, siendo $r(k)$ una función que devuelve el valor del pixel más cercano a la derecha del pixel k , y $\Delta_k^v \mathbf{x} = x_k - x_{b(k)}$, en el que la función $b(k)$ devuelve el valor del pixel más cercano debajo del pixel k . Dada las propiedades de cuadratura del operador TV, se puede demostrar que esta función es convexa, aunque no lo sea estrictamente y, por tanto, el mínimo de la ecuación (2.24) no sea único. Es conveniente mencionar que en muchos artículos cuando se habla de variación total se recurre a una aproximación lineal de esta ecuación, esto es,

$$\text{TV}(\mathbf{x}) \approx \sum_k |\Delta_k^h \mathbf{x}| + |\Delta_k^v \mathbf{x}|, \quad (2.26)$$

lo que equivale a la norma ℓ_1 . Por ello, habitualmente se usan indistintamente los términos de TV y ℓ_1 , pero es importante tener en cuenta la diferencia en cuanto a expresiones matemáticas. De hecho, la regularización por variación total consigue mejores resultados que su aproximación de norma ℓ_1 tal y como se ilustra en [13]. En esta tesis, se usarán ambos conceptos pero la expresión de referencia será la ecuación (2.25).

Mediante un desarrollo basado en MM [72], se consigue una función cuadrática que maximiza el operador TV y que permite convertir el problema de optimización en un sistema lineal de ecuaciones equivalente al caso de Tikhonov

$$\text{TV}(\mathbf{x}) \leq Q_{\text{TV}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{D}^T \boldsymbol{\Sigma}_\beta(\mathbf{x}) \mathbf{D} \mathbf{x} + K, \quad (2.27)$$

donde K es una constante irrelevante y se identifican una serie de matrices

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}^h \\ \mathbf{D}^v \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

siendo $\mathbf{D}^h \in \mathbb{R}^{U \times L}$ y $\mathbf{D}^v \in \mathbb{R}^{U \times L}$ matrices tales que $\mathbf{D}^h \mathbf{x}$ y $\mathbf{D}^v \mathbf{x}$ producen los vectores que contienen las diferencias de primer orden horizontal y vertical respectivamente, es decir, $\mathbf{D}^h \mathbf{x} = [\Delta_1^h \mathbf{x} \ \cdots \ \Delta_U^h \mathbf{x}]$ y $\mathbf{D}^v \mathbf{x} = [\Delta_1^v \mathbf{x} \ \cdots \ \Delta_U^v \mathbf{x}]$. Por otro lado, aparece una nueva matriz diagonal $\boldsymbol{\Sigma}_\beta(\mathbf{x})$ que depende de la imagen \mathbf{x} y cuya expresión es

$$\boldsymbol{\Sigma}_\beta(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \Lambda_\beta(\mathbf{x}) & \\ & \Lambda_\beta(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

donde $\beta > 0$ es una constante que aparece en la definición de la matriz $\Lambda_\beta(\mathbf{x})$

$$\Lambda_\beta(\mathbf{x}) = \text{diag} \left(\frac{1}{2\sqrt{(\mathbf{D}^h \mathbf{x})^2 + (\mathbf{D}^v \mathbf{x})^2 + \beta}} \right). \quad (2.30)$$

Trasladando el maximizador cuadrático $Q_{\text{TV}}(\mathbf{x})$ sobre la función de optimización $\mathcal{C}(\mathbf{x})$ (2.24) y aplicando el operador gradiente sobre la nueva expresión diferenciable, se obtiene una solución para la regularización por variación total cuando $\beta \rightarrow 0$ [13]

$$(\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \lambda \mathbf{D}^T \boldsymbol{\Sigma}_\beta(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{D}) \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}^T \mathbf{y}, \quad (2.31)$$

que puede compararse con la solución homóloga de Tikhonov en (2.19). De hecho, son equivalentes para el caso en que $\boldsymbol{\Sigma}_\beta(\mathbf{x})$ fuera la matriz identidad. El efecto por tanto del operador TV sobre la restauración es una matriz de pesos variante espacial, tal y como demuestra cada uno de los elementos de la diagonal (2.30). Así pues, cuando las diferencias finitas $\mathbf{D}^h \mathbf{x}$ y $\mathbf{D}^v \mathbf{x}$ son pequeñas, estos pesos tienen un valor elevado e imponen una mayor *suavidad* de la solución en esas regiones. Por otro lado, aquellas zonas de la imagen donde las diferencias finitas sean elevadas, dicese bordes, los pesos tienen un valor pequeño lo que permite que estos gradientes se

mantengan en los coeficientes de la solución. De esta forma, se demuestra el buen comportamiento que se anticipaba de la variación total respecto a la conservación de los bordes.

Desde el punto de vista computacional, la ecuación (2.31) es no lineal dado que la matriz de pesos $\Sigma_{\beta}(\mathbf{x})$ depende de la imagen \mathbf{x} y requiere entonces la aplicación de un algoritmo iterativo para su resolución.

Filtro de restauración

Ya se ha comentado la dificultad computacional que supone resolver de forma directa las ecuaciones de mínimos cuadrados (2.12) y de Tikhonov (2.19). La misma situación aplica a la variación total, donde además la ecuación (2.31) es no lineal. No obstante, por cuestiones de notación y como paso intermedio al dominio de la frecuencia, se define el **filtro de restauración** para las ecuaciones lineales

Definición 2.14. *Sea una función de coste $\mathcal{C} : \mathbb{R}^L \rightarrow \mathbb{R}$ que deriva en un problema de optimización lineal para el que se obtiene una estimación $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^L$, entonces se define el filtro de restauración $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{L \times L}$ tal que*

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{G}\mathbf{y}.$$

Aplicando esta definición a los métodos con optimización lineal, se obtiene una expresión concreta para el filtro de restauración [34]

◇ Mínimos cuadrados

$$\mathbf{G} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T = \mathbf{H}^{\dagger}. \quad (2.32)$$

◇ Regularización Tikhonov

$$\mathbf{G} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \lambda \mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} \mathbf{H}^T. \quad (2.33)$$

El filtro de restauración por mínimos cuadrados (2.32) demuestra la misma problemática que se analizó en la Sección 2.3.1. Dado que este filtro equivale a la inversa de la PSF, las componentes de \mathbf{H} que tienden a cero se convierten en polos por parte del filtro de restauración \mathbf{G} . Así pues, como la PSF es paso bajo, la presencia de ruido en la imagen es amplificada tras la restauración. La regularización Tikhonov resuelve este problema en el filtro de restauración añadiendo el término de regularización $\mathbf{D}^T \mathbf{D}$ multiplicado por λ y evita así las componentes nulas en la inversa. Puede demostrarse además que la matriz \mathbf{G} equivale un sistema LSI, al igual que lo es \mathbf{H} . Sin embargo, no se ha definido una expresión para el filtro de restauración en el caso de la variación total, dada la dependencia con $\Sigma_{\beta}(\hat{\mathbf{x}})$ en la ecuación (2.31) que la convierte en una expresión no lineal.

2.3.3 Métodos Bayesianos

Hasta ahora se ha analizado la restauración desde el punto de vista de la regularización algebraica, optimizando una función de coste como se indicaba en la Definición 2.8. Sin embargo, la restauración de imágenes tiene también otro

enfoque basado en el campo de la estadística y concretamente aplicando la teoría Bayesiana. Una presentación detallada de esta desconvolución Bayesiana se puede encontrar en artículos de restauración dentro del ámbito de la astronomía [64][86] y se resume como

Definición 2.15. Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^L$ un campo aleatorio³ que representa la imagen original y del que se conoce la distribución de probabilidad $p(\mathbf{x})$, también denominada modelo a priori. Entonces, la restauración mediante el paradigma Bayesiano equivale a estimar $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^L$ maximizando la distribución a posteriori $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$, esto es, la probabilidad de \mathbf{x} asumiendo que se conoce la imagen observada $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^L$

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\mathbf{x}} \{p(\mathbf{x}|\mathbf{y})\},$$

i.e. el máximo a posteriori (MAP).

Aplicando la regla de Bayes sobre esta probabilidad a posteriori, se obtiene que

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{p(\mathbf{y})} = \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{x})p(\mathbf{x})}{p(\mathbf{y})}, \quad (2.34)$$

donde $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ representa el modelo de observación de la imagen original tras su degradación. Maximizar la probabilidad $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ con respecto a \mathbf{x} es equivalente a maximizar el producto $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})p(\mathbf{x})$, dado que $p(\mathbf{y})$ es independiente de \mathbf{x} . Y considerando la propiedad de monotonía creciente de la función neperiano, se demuestra que

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\mathbf{x}} \{\ln p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) + \ln p(\mathbf{x})\}, \quad (2.35)$$

Esta expresión es comparable con la función de coste de la Definición 2.11 en el método de regularización, donde el término de datos $\mathcal{D}(\mathbf{x})$ es equivalente al de la probabilidad $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$, pues asegura la fidelidad de la imagen estimada a los datos. Con respecto al término de regularización $\mathcal{R}(\mathbf{x})$, éste corresponde al modelo a priori de la imagen $p(\mathbf{x})$ y su elección deriva en diferentes algoritmos de restauración.

Modelo Gaussiano

Las condiciones a priori más simples para el paradigma Bayesiano es asumir distribuciones Gaussianas multivariantes tanto para la imagen original como para el ruido, es decir, $N(0, \mathbf{R}_x)$ y $N(0, \mathbf{R}_n)$, donde $\mathbf{R}_x \in \mathbb{R}^{L \times L}$ y $\mathbf{R}_n \in \mathbb{R}^{\tilde{L} \times \tilde{L}}$ son respectivamente las matrices de covarianza de los campos aleatorios \mathbf{x} y \mathbf{n} . En estas condiciones, se definen las siguientes distribuciones [40]

$$p(\mathbf{x}) \propto |\mathbf{R}_x|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{x} \right\}, \quad (2.36)$$

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \propto |\mathbf{R}_n|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T \mathbf{R}_n^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}) \right\}, \quad (2.37)$$

³ Un campo aleatorio es un conjunto de variables aleatorias correspondientes a cada uno de los píxeles.

donde $|\cdot|$ simboliza el operador determinante que se calcula sobre las matrices de covarianza con valor distinto de cero y, por tanto, indicando la existencia de inversa. Trasladando estas expresiones sobre la ecuación (2.35) y cambiando de signo, se llega al criterio de optimización para la imagen restaurada

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_{\mathbf{R}_n^{-1}}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{R}_x^{-1}}^2 \right\}, \quad (2.38)$$

tal que $\|\mathbf{z}\|_{\mathbf{R}}^2 = \mathbf{z}^T \mathbf{R} \mathbf{z}$. Esta expresión demuestra las similitudes con la ecuación de Tikhonov en (2.18) cuando $\mathbf{D} = \mathbf{I}$. Es más, si se asumen valores de covarianza según $\mathbf{R}_x = \sigma_x^2 \mathbf{I}$ y $\mathbf{R}_n = \sigma_n^2 \mathbf{I}$, la ecuación anterior se simplifica a

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2 + \frac{1}{2} \frac{\sigma_n^2}{\sigma_x^2} \|\mathbf{x}\|_2^2 \right\}, \quad (2.39)$$

que incluye el equivalente del parámetro de regularización $\lambda = \sigma_n^2 / \sigma_x^2$.

Si se resuelve el caso más general con matrices de covarianza y se aplica la minimización como en la sección anterior, se llega a una expresión para $\hat{\mathbf{x}}$

$$(\mathbf{H}^T \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{H} + \mathbf{R}_x^{-1}) \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}^T \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{y}, \quad (2.40)$$

que representa la conocida solución de restauración **Wiener** [34]. Cabe señalar que se hubiera llegado a la misma ecuación (2.40) en el caso de haber planteado el criterio de optimización como un error cuadrático medio (MMSE), esto es, obtener la estimación que minimiza la esperanza matemática $E\{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2^2\}$ sin necesidad de fijar un modelo Gaussiano a la imagen original. Por ello, la solución de Wiener se considera una restauración óptima lineal en la medida que se conozcan las matrices de covarianza.

A partir de la ecuación (2.40), se define el equivalente filtro de restauración en el dominio espacial como

$$\mathbf{G} = (\mathbf{H}^T \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{H} + \mathbf{R}_x^{-1})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}_n^{-1}. \quad (2.41)$$

Modelo simultáneo autorregresivo (SAR)

Este modelo establece una expresión concreta para la probabilidad a priori de la imagen original [62]

$$p(\mathbf{x}) \propto \alpha^{L/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \alpha \|\mathbf{D}\mathbf{x}\|_2^2 \right\}, \quad (2.42)$$

donde $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{U \times L}$ representa la misma matriz del operador Laplaciano que se usaba el método de Tikhonov y α es una constante. Para ser precisos, debería usarse $L - 1$ en vez de L , dada la singularidad de esta distribución $\|\mathbf{D}\mathbf{x}\|_2^2 = 0$ cuando $\mathbf{x} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{I}$. Para el caso del modelo de observación, la distribución de probabilidad depende de las características del ruido y se elige como un proceso Gaussiano independiente $N(0, \sigma^2 \mathbf{I})$. Así pues,

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \propto \beta^{L/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \beta \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2 \right\}, \quad (2.43)$$

tal que $\sigma_n^2 = \beta^{-1}$.

Sustituyendo estas expresiones sobre la estimación de (2.35) y cambiando el signo, se obtiene que

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \left\{ \frac{1}{2} \beta \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2 + \frac{1}{2} \alpha \|\mathbf{D}\mathbf{x}\|_2^2 \right\}, \quad (2.44)$$

donde se puede comprobar la analogía con la función de coste de Tikhonov (2.18). Aplicando el mismo proceso de minimización indicado en aquella sección se llega una solución por álgebra directa

$$(\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \frac{\alpha}{\beta} \mathbf{D}^T \mathbf{D}) \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}^T \mathbf{y}, \quad (2.45)$$

en la que se identifica el equivalente al parámetro de regularización como $\lambda = \alpha/\beta$. El binomio (α, β) se le conoce como los **hiperparámetros** del modelo Bayesiano. La resolución de esta ecuación sería por tanto equivalente a la del método de Tikhonov, encontrando las mismas dificultades debido a la dimensionalidad de las variables.

Modelo variacional total (TV)

Como se indicaba en el apartado de regularización por variación total, este término de penalización ofrece unas mejores prestaciones respecto a la calidad subjetiva de la imagen restaurada (conservación de los bordes). Por ello, el paradigma Bayesiano también se hace eco de este operador $\text{TV} : \mathbb{R}^L \rightarrow \mathbb{R}$ en (2.25) y define un nuevo modelo a priori de la imagen [6]

$$p(\mathbf{x}) \propto \frac{1}{\mathcal{Z}_{\text{TV}}(\alpha)} \exp\{-\alpha \text{TV}(\mathbf{x})\}, \quad (2.46)$$

donde $\mathcal{Z}_{\text{TV}}(\alpha)$ es la función de partición (o constante de normalización) y está definida por

$$\mathcal{Z}_{\text{TV}}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^L} \exp[-\alpha \text{TV}(\mathbf{x})] d\mathbf{x}. \quad (2.47)$$

El cálculo de esta expresión sería complicado para incluirlo en el proceso de optimización. Por eso, se recurre a una aproximación [13]

$$\iint \exp(-\alpha \sqrt{u^2 + v^2}) du dv = \frac{2\pi}{\alpha^2}, \quad (2.48)$$

que simplifica la probabilidad a priori de la imagen como

$$p(\mathbf{x}) \propto \alpha^{L/2} \exp\{-\alpha \text{TV}(\mathbf{x})\}. \quad (2.49)$$

Para el caso de la probabilidad del modelo de observación, se asume de nuevo como una distribución Gaussiana $N(0, \sigma^2 \mathbf{I})$, por lo que $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ toma la misma definición que en la ecuación (2.43).

Si se traslada estas distribuciones de probabilidad a la estimación de (2.35) y se realiza el cambio de signo, se llega a un problema análogo al de regularización por variación total de (2.24)

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \left\{ \frac{1}{2} \beta \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2 + \alpha \text{TV}(\mathbf{x}) \right\}, \quad (2.50)$$

donde los hiperparámetros se relacionan en el parámetro de regularización $\lambda = \alpha/\beta$.

Podría seguirse una resolución idéntica a la propuesta por Bioucas-Dias et al. en la Sección 2.3.2, pero el paradigma Bayesiano utiliza un procedimiento particular basado en métodos variacionales. Estos métodos permiten relajar la complejidad que sería trabajar directamente con $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ debido al operador TV, usando para ello distribuciones aproximadas $q(\mathbf{x})$ [9]. En particular, para poder realizar la optimización del problema se recurre a la divergencia de Kullback-Leibler (KL) [52][53] que se define por

Definición 2.16. Sea $p(\alpha, \beta, \mathbf{x}|\mathbf{y})$ la probabilidad conjunta a posteriori con los hiperparámetros (α, β) y $q(\alpha, \beta, \mathbf{x})$ su aproximación variacional, entonces se define la divergencia Kullback-Leibler como

$$C_{KL}\{q(\alpha, \beta, \mathbf{x})||p(\alpha, \beta, \mathbf{x}|\mathbf{y})\} = \int_{\alpha} \int_{\beta} \int_{\mathbf{x}} q(\alpha, \beta, \mathbf{x}) \ln \left(\frac{q(\alpha, \beta, \mathbf{x})}{p(\alpha, \beta, \mathbf{x}|\mathbf{y})} \right) d\alpha d\beta d\mathbf{x},$$

que es siempre mayor que cero, salvo en el caso de que $p(\alpha, \beta, \mathbf{x}|\mathbf{y}) = q(\alpha, \beta, \mathbf{x})$ en el que la divergencia vale cero.

En vez de minimizar directamente esta divergencia, se utiliza un maximizador de $C_{KL}\{q(\alpha, \beta, \mathbf{x})||p(\alpha, \beta, \mathbf{x}|\mathbf{y})\}$ que permite obtener una expresión de $q(\mathbf{x})$ [63]

$$\hat{q}(\mathbf{x}) = \arg \min_{q(\mathbf{x})} \left\{ \int_{\alpha} \int_{\beta} \int_{\mathbf{x}} q(\alpha, \beta) q(\mathbf{x}) \ln \left(\frac{q(\alpha, \beta) q(\mathbf{x})}{F(\alpha, \beta, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{y})} \right) d\alpha d\beta d\mathbf{x} \right\}, \quad (2.51)$$

donde $F(\alpha, \beta, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{y}) \leq p(\alpha, \beta, \mathbf{x}, \mathbf{y})$. Molina et al. [6] proponen dos algoritmos diferentes para optimizar este problema en función de si se tiene en cuenta o no una hipótesis a priori de $q(\mathbf{x})$. Dicha hipótesis asume que la distribución $q(\mathbf{x})$ es degenerada, es decir, que toma un único valor con probabilidad uno y el resto a cero

$$q(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^i) = f(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} = \mathbf{x}^i \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}. \quad (2.52)$$

La resolución de ambos algoritmos se puede ver en detalle [6], donde se recurre a un algoritmo iterativo para obtener no sólo la expresión de $\hat{\mathbf{x}}$, sino también la de los hiperparámetros siguiendo el paradigma jerárquico Bayesiano.

2.3.4 Métodos iterativos

Los métodos de restauración que se han planteado hasta ahora tienen una enorme complejidad computacional (factorizaciones e inversión de matrices) para obtener la

solución exacta con los tamaños de imágenes habituales $L = 256 \times 256$. Por ello, los métodos iterativos son una buena alternativa para obtener una solución aproximada con una carga de cómputo más reducida. Y lo que aún es más, estos métodos consiguen también un efecto de *suavizado* sobre la solución cuando se finalizan antes de la convergencia (**semi-convergencia**). La razón de este comportamiento se debe a que las componentes de baja frecuencia de la solución tienden a converger antes que las de alta frecuencia. Así pues, el número total de iteraciones juega el mismo papel que la inversa del parámetro de regularización λ en la Definición 2.11, por lo que cuantas menos iteraciones se realicen mayor será el grado de regularización [92]. Se puede generalizar la restauración iterativa como

Definición 2.17. Sea $\Phi: \mathbb{R}^L \rightarrow \mathbb{R}^L$ una función vectorial que tiene como raíz la imagen original $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^L$, i.e., $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ y $\mathbf{x}^{(m)} \in \mathbb{R}^L$ representa la aproximación a \mathbf{x} en la m -ésima iteración, entonces un método iterativo de restauración obtiene una serie de aproximaciones

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{x}^{(m)} + \tau \Phi(\mathbf{x}^{(m)}),$$

hasta una iteración $m = \bar{m}$ que corresponde a la imagen restaurada $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^{(\bar{m})}$, siendo $\tau > 0$ un parámetro de convergencia.

Si se cumplen los criterios de convergencia del problema, entonces la imagen restaurada es una solución de punto fijo, es decir, $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^{(\bar{m})} = \mathbf{x}^{(\bar{m}+1)}$ y, en consecuencia, $\Phi(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$. Sin embargo, a pesar de que exista una raíz (o varias) para la función Φ , puede que el método iterativo no converja a la solución. En estos casos los métodos iterativos pueden finalizar el proceso en el momento apropiado y así conseguir el efecto regularización deseado. Otro de los aspectos necesarios en el método iterativo es la elección de unas condiciones iniciales adecuadas. Típicamente se selecciona $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.

Tal y como se exponía en la Definición 2.8, la restauración equivale a un proceso de minimización de la función de coste convexa y diferenciable \mathcal{C} . En consecuencia, la función Φ está relacionada con esta función \mathcal{C} , de tal manera que el cálculo de la raíz \mathbf{x} de la primera equivale a obtener el mínimo absoluto de la segunda.

Método de gradiente descendente

Usando el criterio de optimización de la Propiedad 2.3, se llega a una de las técnicas más sencilla de los métodos iterativos donde la función Φ equivale al gradiente de la función de coste \mathcal{C} y además en sentido negativo por ser un proceso de minimización [5]

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{x}^{(m)} - \tau \nabla \mathcal{C}(\mathbf{x}^{(m)}). \quad (2.53)$$

Para presentar los efectos de este método iterativo sobre la restauración, se emplea la ecuación anterior sobre el método de mínimos cuadrados en (2.11) y se llega al algoritmo de Landweber [56]

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{x}^{(m)} + \tau \mathbf{H}^T (\mathbf{y} - \mathbf{H} \mathbf{x}^{(m)}), \quad (2.54)$$

donde $0 < \tau < 2/s_1^2$ para asegurar la convergencia y s_1 es el mayor valor singular de la matriz de convolución \mathbf{H} . Si se considera que $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ y se aplica la descomposición SVD de \mathbf{H} , se llega a una solución equivalente a las de regularización

$$\hat{\mathbf{x}} = \sum_{k=1}^r f_{k,\bar{m}} \frac{\mathbf{u}_k^T \mathbf{y}}{s_k} \mathbf{v}_k, \quad (2.55)$$

donde los factores de filtrado ahora dependen del número total de iteraciones \bar{m} y disponen de una estructura en forma de pulso con transición suave, tendiendo a cero a medida que s_k se va haciendo más pequeño

$$f_{k,\bar{m}} = 1 - (1 - \tau s_k^2)^{\bar{m}}. \quad (2.56)$$

En este caso, las iteraciones \bar{m} hacen el papel inverso al parámetro de regularización λ en la ecuación de Tikhonov (2.21), pues cuanto mayor es el número de iteraciones, menor es el efecto de regularización y viceversa. Por tanto, la elección de un criterio de parada adecuado para el método iterativo determina el buen comportamiento frente a la regularización [26].

De igual manera que se ha realizado para los mínimos cuadrados, se puede aplicar la expresión (2.53) para resolver las ecuaciones de los métodos regularizados de la Sección 2.3.2. Así pues:

◆ Regularización Tikhonov

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{x}^{(m)} + \tau [\mathbf{H}^T \mathbf{y} - (\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \lambda \mathbf{D}^T \mathbf{D}) \mathbf{x}^{(m)}]. \quad (2.57)$$

◆ Regularización por variación total

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{x}^{(m)} + \tau [\mathbf{H}^T \mathbf{y} - (\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \lambda \mathbf{D}^T \Sigma_{\beta}(\mathbf{x}^{(m)}) \mathbf{D}) \mathbf{x}^{(m)}]. \quad (2.58)$$

Los valores que puede tomar el parámetro τ vienen determinados por la matriz $\check{\mathbf{H}}$ de la correspondiente ecuación normal. En concreto, $0 < \tau < 2/\check{s}_1$ donde \check{s}_1 es el mayor valor singular de $\check{\mathbf{H}}$.

Los métodos Bayesianos SAR y TV de la Sección 2.3.3 se expresaron de forma análoga a las ecuaciones de Tikhonov y TV en los métodos directos, con la particularidad de que $\lambda = \alpha/\beta$; por tanto, las ecuaciones (2.57) y (2.58) son igualmente válidas para los métodos Bayesianos. Además, en el algoritmo de Molina et. al para resolver el problema de TV, se requiere un método iterativo para la minimización de la divergencia de Kullback-Leibler y no tener que implementar matrices inversas de covarianzas. Una de las alternativas empleadas es el método del gradiente descendente [6].

Igualmente, en el caso de la ecuación Wiener de (2.40) se plantea un algoritmo iterativo para resolver el desconocimiento de la matriz de covarianza de la imagen original \mathbf{R}_x [46].

Método de gradiente conjugado

El método de gradiente descendente tiene una aplicación muy sencilla sobre la restauración, pero no tiene un buen comportamiento respecto a la velocidad de convergencia. De hecho, la ecuación (2.53) asume que la dirección en la que la función de coste \mathcal{C} se hace mínima es la línea de puntos formada por el gradiente en sentido negativo, pero esta condición puede suponer una velocidad de convergencia bastante lenta. Por ello, el método del gradiente conjugado propone minimizar \mathcal{C} sobre el hiperplano compuesto por todas las direcciones de búsqueda acumuladas en cada paso, lo que se conoce como subespacio de Krylov [82].

Este método busca resolver un problema algebraico $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, donde la matriz \mathbf{A} es simétrica⁴ y definida positiva⁵. Esta situación no es el caso de la restauración (2.4), donde la matriz de convolución es rectangular $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{\tilde{L} \times L}$. Sin embargo, existe otro planteamiento del gradiente conjugado usando las denominadas ecuaciones normales

Definición 2.18. Sea $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{\tilde{L} \times L}$, entonces se define una ecuación normal asociada al problema de restauración tal que

$$\check{\mathbf{H}}\mathbf{x} = \check{\mathbf{y}},$$

donde $\check{\mathbf{H}} = \mathbf{H}^T \mathbf{H}$ es una matriz simétrica y semidefinida positiva e $\check{\mathbf{y}} = \mathbf{H}^T \mathbf{y}$.

Se observa inmediatamente que la Definición 2.18 corresponde a la solución de restauración obtenida para el método de mínimos cuadrados en (2.12). Así pues, la solución del sistema de ecuaciones anterior, equivale a obtener el mínimo $\hat{\mathbf{x}}$ de la función de coste \mathcal{C} para mínimos cuadrados. Para ello, se podría aplicar el método de gradiente conjugado partiendo de estas condiciones de inicio

$$\mathbf{r}^{(0)} = \check{\mathbf{y}} - \check{\mathbf{H}}\mathbf{x}^{(0)} \quad \text{y} \quad \mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)}, \quad (2.59)$$

donde el vector $\mathbf{r}^{(m)}$ es el vector residual en la iteración m y $\mathbf{p}^{(m)}$ es el vector que indica la dirección de búsqueda para esa iteración y que forma parte del subespacio de Krylov junto con $\mathbf{p}^{(m-1)}, \dots, \mathbf{p}^{(0)}$. Con estas premisas, la expresión del método de conjugado gradiente según la Definición 2.17 responde al siguiente esquema

$$\begin{aligned} \tau^{(m)} &= \frac{\mathbf{r}^{(m)T} \mathbf{r}^{(m)}}{\mathbf{p}^{(m)T} \check{\mathbf{H}} \mathbf{p}^{(m)}} \\ \mathbf{x}^{(m+1)} &= \mathbf{x}^{(m)} + \tau^{(m)} \mathbf{p}^{(m)} \\ \mathbf{r}^{(m+1)} &= \mathbf{r}^{(m)} - \tau^{(m)} \check{\mathbf{H}} \mathbf{p}^{(m)}, \\ \xi^{(m)} &= \frac{\mathbf{r}^{(m+1)T} \mathbf{r}^{(m+1)}}{\mathbf{r}^{(m)T} \mathbf{r}^{(m)}} \\ \mathbf{p}^{(m+1)} &= \mathbf{r}^{(m+1)} + \xi^{(m)} \mathbf{p}^{(m)} \end{aligned} \quad (2.60)$$

⁴ Simétrica, i.e., $\mathbf{H}^T = \mathbf{H}$

⁵ Definida positiva, i.e., $\mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} > 0$ para cualquier vector no nulo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^L$. Si no es estrictamente mayor que cero, se denomina semidefinida positiva.

A partir de estas expresiones del método de gradiente conjugado, se puede obtener una ecuación para $\hat{\mathbf{x}}$ mediante descomposición en SVD, tal y como se hizo en la ecuación (2.55). En este caso, se obtienen unos factores de filtrado $f_{k,\bar{m}}$ basados en el polinomio de Ritz [41] que tiene un comportamiento de atenuación similar al del algoritmo de Landweber [56], con un factor de roll-off dependiente del número de iteraciones.

Al igual que se ha definido una ecuación normal para el método de mínimos cuadrados, puede asociarse una expresión de este tipo que resuelva los métodos de regularización de la Sección 2.3.2 con el gradiente conjugado.

◆ Regularización Tikhonov

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H}^T \mathbf{H} + \lambda \mathbf{D}^T \mathbf{D} \quad , \quad \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{H}^T \mathbf{y} . \quad (2.61)$$

Esta misma expresión puede reescribirse mediante lo que se conoce como ecuación aumentada y demuestra que la matriz $\tilde{\mathbf{H}}$ de la ecuación (2.61) es simétrica y definida positiva

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \lambda \mathbf{D} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \lambda \mathbf{D} \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{H}^T \mathbf{y} . \quad (2.62)$$

◆ Regularización por variación total

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H}^T \mathbf{H} + \lambda \mathbf{D}^T \Sigma_{\beta}(\hat{\mathbf{x}}_{TV}) \mathbf{D} \quad , \quad \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{H}^T \mathbf{y} . \quad (2.63)$$

Los mismos comentarios realizados para el paradigma Bayesiano en el método iterativo de gradiente descendente, son de aplicación para el gradiente conjugado. Así pues, las ecuaciones (2.61) y (2.63) son igualmente válidas para resolver los problemas de SAR y TV en la Sección 2.3.3. En el caso de TV, también se resuelve el problema de la minimización de la divergencia de Kullback-Leibler mediante métodos de gradiente conjugado [6].

2.3.5 Parámetro de regularización

Las secciones anteriores han demostrado el papel tan importante que juega el parámetro λ en la regularización. La elección de un valor adecuado determina que la solución de restauración no esté ni sobre-regularizada ni amplificada por el ruido (relación de compromiso). Por ello, los artículos de restauración han dedicado un importante esfuerzo en conseguir parámetros de regularización lo más precisos posibles desde el punto de vista de la regularización algebraica o usando el paradigma Bayesiano.

Regularización algebraica

En el marco de la regularización, la versión más sencilla para calcular λ es usando el conocimiento a priori de la varianza σ_n^2 del ruido \mathbf{n} , tal que $\|\mathbf{n}\|_2^2 = \tilde{L}\sigma_n^2$ (media nula). Contando con este conocimiento, se propone el *principio de la discrepancia* que establece un valor del parámetro de regularización cumpliendo con la siguiente igualdad [65]

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}(\lambda)\|_2^2 = \|\mathbf{n}\|_2^2. \quad (2.64)$$

Este criterio obtiene un buen resultado siempre que la estimación de σ_n^2 sea suficientemente precisa. Sin embargo, una estimación por debajo de su valor real es muy probable que conduzca a una imagen restaurada con amplificación del ruido. Por otro lado, si la estimación ha sido por encima, produce una solución sobre-regularizada con un error importante de restauración.

La aplicación del principio de discrepancia supone minimizar una función objetivo $\Phi(\lambda) = \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}(\lambda)\|_2^2 - \|\mathbf{n}\|_2^2$ [34], respecto al algoritmo de restauración Tikhonov $\hat{\mathbf{x}}(\lambda)$ en (2.19). Igualmente se aplica sobre la regularización por variación total [98], adaptando el valor de λ en el caso de una solución iterativa.

Otro de los métodos que recurren a la información de la varianza del ruido para determinar λ se conoce como el estimador predictivo de riesgo imparcial (UPRE), para ambos regularizadores ℓ_1 y ℓ_2 . Cuando no se tiene información sobre la varianza del ruido, se utilizan otros algoritmos que extraen la información necesaria de la imagen observada \mathbf{y} . Entre ellos, los más conocidos son la búsqueda del córner en la *curva-L* y la validación cruzada generalizada (GCV). Una revisión detallada de todos estos métodos puede encontrarse en [93] y todas sus referencias. Esto métodos están planteados usando el término de regularización $\mathcal{R}(\mathbf{x})$ de Tikhonov, pero existen pocas referencias para resolver el problema para la regularización TV. De hecho, es habitual recurrir al paradigma Bayesiano para obtener el parámetro de regularización en estos casos.

Paradigma Bayesiano

A partir del criterio de optimización de la solución Wiener (2.39), se presentaba un valor del parámetro de regularización en condiciones de hipótesis Gaussianas, a saber, $\lambda = \sigma_n^2/\sigma_x^2$. Así pues, una de las estimaciones más básicas que se deducen para λ es la inversa de la relación señal-ruido.

Por otro lado, se define el parámetro de regularización como una relación entre los hiperparámetros (α, β) tal que $\lambda = \alpha/\beta$, para lo cual el paradigma Bayesiano incorpora una nueva etapa dedicada a su estimación. En la Sección 2.3.3, para simplificar la notación, se habían omitido en las distribuciones de probabilidad la dependencia respecto a (α, β) . Ahora se define una nueva distribución conjunta que permite la obtención de estos hiperparámetros.

Definición 2.19. Sea $p(\alpha)$ y $p(\beta)$ las distribuciones a priori de los hiperparámetros (α, β) , entonces se define la probabilidad conjunta

$$p(\alpha, \beta, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = p(\alpha)p(\beta)p(\mathbf{x}|\alpha)p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \beta),$$

que se integra para obtener el valor de los hiperparámetros [6]

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}, \hat{\beta} &= \arg \max_{\alpha, \beta} \{p(\alpha, \beta|\mathbf{y})\} = \arg \max_{\alpha, \beta} \left\{ \int_{\mathbf{x}} p(\alpha, \beta, \mathbf{x}|\mathbf{y}) d\mathbf{x} \right\} \\ &= \arg \max_{\alpha, \beta} \left\{ \int_{\mathbf{x}} p(\alpha, \beta, \mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} \right\}. \end{aligned}$$

Esta última igualdad hace uso del teorema de Bayes equivalente a la ecuación (2.34), pero incorporando los hiperparámetros (α, β) y descartando la dependencia de $p(\mathbf{y})$ respecto a los mismos. Por tanto, la Definición 2.15 se reescribe ahora usando las estimaciones de los hiperparámetros como

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\mathbf{x}} \{p(\mathbf{x}|\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \mathbf{y})\}. \quad (2.65)$$

El caso más sencillo de análisis para la estimación de hiperparámetros corresponde al modelo de imágenes SAR y descartando la información a priori de los parámetros, es decir, asumiendo $p(\alpha)$ y $p(\beta)$ como constantes. De esta forma, la probabilidad conjunta $p(\alpha, \beta, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ se obtiene a partir de las ecuaciones (2.42) y (2.43) como

$$p(\alpha, \beta, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \propto \alpha^{L/2} \beta^{L/2} \exp \left\{ - \left(\frac{1}{2} \beta \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2 + \frac{1}{2} \alpha \|\mathbf{D}\mathbf{x}\|_2^2 \right) \right\}. \quad (2.66)$$

Integrando esta expresión y realizando el proceso de maximización usando funciones neperiano se obtiene una expresión para cada hiperparámetro [62]

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{L} \|\mathbf{D}\mathbf{x}\|_2^2 + \frac{1}{L} \text{tr}(\mathbf{Q}^{-1}(\alpha, \beta) \mathbf{D}^T \mathbf{D}) \\ \beta &= \frac{1}{L} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2 + \frac{1}{L} \text{tr}(\mathbf{Q}^{-1}(\alpha, \beta) \mathbf{H}^T \mathbf{H}) \end{aligned}, \quad (2.67)$$

donde $\text{tr}\{\cdot\}$ es el operador de traza de una matriz y \mathbf{Q} se define por

$$\mathbf{Q}(\alpha, \beta) = \alpha \mathbf{D}^T \mathbf{D} + \beta \mathbf{H}^T \mathbf{H}. \quad (2.68)$$

Estas expresiones de hiperparámetros toman parte de un proceso iterativo que va adaptando progresivamente su valor y la matriz \mathbf{Q} se calcula usando las estimaciones (α, β) de la iteración anterior, como se comprueba en [62]. Pueden obtenerse expresiones aún más complicadas para el caso en que se incluyan modelos a priori $p(\alpha)$ y $p(\beta)$ de los hiperparámetros, comúnmente asumidos como distribuciones gamma. En el caso del modelo variacional, Molina et. al continúan este mismo análisis [6] según los dos algoritmos que se comentaron en la Sección 2.3.3 y usando la aproximación de Kullback-Leibler. Las expresiones de los hiperparámetros aparecen descritas en esta referencia con modelos a priori en forma de distribuciones gamma.

Una versión más simplificada de cálculo del parámetro de regularización λ para el modelo TV es propuesto por Bioucas et al. [72], considerando modelos a priori directamente para λ . En concreto, utilizan una primera versión en el que $p(\lambda)$ sigue una distribución de Jeffrey tal que $p(\lambda) \propto 1/\lambda$ y un segundo algoritmo donde se asume una distribución gamma, i.e., $p(\lambda) \propto \lambda^{\mu-1} \exp(-\varphi\lambda)$. Se comprueba inmediatamente que los resultados para ambas distribuciones serían iguales cuando $(\mu, \varphi) \rightarrow 0$. Por ello, se presenta la expresión más generalizada

$$\lambda = \frac{\sigma^2(\mu + \theta L)}{\text{TV}(\mathbf{x}) + \varphi}, \quad (2.69)$$

donde $0 < \theta < 1$ es una constante con valores heurísticos para ajustar mejor los resultados.

Regularización iterativa

En la Sección 2.3.4, se demostró la propiedad del número total de iteraciones \bar{m} como mecanismo de regularización y el concepto de semiconvergencia. Al igual que ocurría con la regularización algebraica, el principio de discrepancia es una alternativa común para calcular el parámetro \bar{m} cuando se cumpla que

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}^{(\bar{m})}\|_2^2 > \|\mathbf{n}\|_2^2. \quad (2.70)$$

Otras opciones más complejas computacionalmente recurren al algoritmo de GCV para obtener el valor de \bar{m} [76]. Sin embargo, lo más habitual es establecer un criterio de parada cuando la función de coste $\mathcal{C}(\mathbf{x})$ está por debajo de un umbral a lo largo de una serie de iteraciones. O bien comparando visualmente imágenes restauradas entre iteraciones y verificando el nivel de cambio.

2.4 Métricas de restauración

Los métodos de restauración anteriores utilizan una serie de parámetros a la hora de establecer medidas tanto del proceso de degradación como de la calidad de restauración. En este apartado se presentan los parámetros que se usarán en los experimentos de la tesis.

2.4.1 BSNR

El acrónimo BSNR hace referencia al término inglés *Blurred Signal-to-Noise Ratio*, esto es, la relación entre la señal emborronada y el ruido definida como

Definición 2.20. Sea $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{\bar{L}}$ la imagen emborronada sin presencia de ruido, i.e., $\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{n}$, entonces se define el parámetro

$$\text{BSNR} = 10 \log_{10} \left\{ \frac{\frac{1}{\bar{L}} \sum_{k=1}^{\bar{L}} (z_k - \bar{z})^2}{\sigma_n^2} \right\} [\text{dB}],$$

donde \bar{z} es la media de los valores de \mathbf{z} y la unidad de medida es el dB.

El numerador de la expresión interior refleja la varianza estadística de la imagen emborronada \mathbf{z} y podría haberse representado por σ_z^2 .

El parámetro BSNR es, por tanto, una medida de la cantidad de ruido que se añade en el proceso de degradación, en relación a la potencia de señal disponible una vez emborronada por la PSF.

2.4.2 ISNR

El parámetro ISNR (*Improvement Signal-to-Noise Ratio*) es el valor más habitual para medir objetivamente la calidad de un algoritmo de restauración y se expresa como

Definición 2.21. Sea $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^L$ la imagen estimada por un método de restauración, entonces se mide su calidad por el parámetro

$$\text{ISNR} = 10 \log_{10} \left\{ \frac{\sum_{k,p=1}^L (x_k - y_p)^2}{\sum_{k=1}^L (x_k - \hat{x}_k)^2} \right\} [\text{dB}],$$

donde $\{x_k\}_{k=1}^L$ y $\{y_p\}_{p=1}^L$ son los valores correspondientes de píxeles homólogos en las imágenes original $x(i, j) = \text{vec}^{-1}\{\mathbf{x}\}$ y degradada $y(i, j) = \text{vec}^{-1}\{\mathbf{y}\}$. La unidad de medida es el dB.

Dada la dependencia con la imagen original \mathbf{x} , esta métrica sólo puede usarse para casos de simulación donde se dispone de la imagen original. No obstante, esta medida es ampliamente extendida para comparar de forma estándar diferentes técnicas de restauración.

2.4.3 Desviación de la imagen restaurada

Una de las particularidades del parámetro ISNR es su dependencia sobre el modelo de degradación \mathbf{H} , dado que la imagen degradada \mathbf{y} forma parte de la Definición 2.21. Para independizar la calidad de restauración respecto al modelo de degradación se emplea la desviación típica del error de restauración.

Definición 2.22. Sea $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^L$ la imagen estimada por un método de restauración y su correspondiente error de restauración $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$, entonces se calcula la desviación típica

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{k=1}^L (e_k - \bar{e})^2},$$

donde \bar{e} es la media de los valores de \mathbf{e} y la unidad de medida es la luminosidad de la imagen.

Por tanto, la versión cuadrática de esta desviación σ_e^2 es una medida absoluta de la potencia de la imagen de error $e(i, j) = \text{vec}^{-1}\{\mathbf{e}\}$.

2.4.4 Errores de restauración

Los parámetros indicados hasta ahora son una medida objetiva, numérica y que por tanto no siempre refleja las características perceptuales del ojo humano respecto a la imagen restaurada. Por el contrario, las medidas subjetivas están dedicadas a observar las imágenes restauradas desde dos puntos de vista: el *ringing* y la amplificación de ruido. Si se extiende la Definición 2.14 del filtro de restauración usando la expresión (2.4), se llega a [8]

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_n. \quad (2.71)$$

Definición 2.23. Sea $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{L \times L}$ un filtro de restauración lineal aplicado sobre una imagen degradada por un filtro $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{L \times L}$ y ruido $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^L$, entonces se define el error dependiente de la imagen (o *ringing*) $\mathbf{e}_r \in \mathbb{R}^L$ y el error dependiente del ruido $\mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^L$ como

$$\mathbf{e}_r = (\mathbf{GH} - \mathbf{I})\mathbf{x} \quad \text{y} \quad \mathbf{e}_n = \mathbf{Gn},$$

donde \mathbf{GH} es conocido como el producto de regularización.

El error de *ringing* es, en consecuencia, una función tanto de la PSF como del filtro de restauración \mathbf{G} . Cuando el producto \mathbf{GH} se acerca a la identidad, este error tiende a cero, situación que aparece en la solución de mínimos cuadrados en (2.32). Por el contrario, las soluciones regularizadas tienden a un producto \mathbf{GH} alejado de la identidad, tanto más cuanto mayor sea la regularización ($\mathbf{GH} \rightarrow \mathbf{0}$). Así pues, los resultados de restauración sobre-regularizados provocan un alto error de *ringing*. El caso más crítico sería cuando el error \mathbf{e}_r fuera un negativo de la imagen original, es decir, $\mathbf{e}_r = -\mathbf{x}$ con $\mathbf{GH} = \mathbf{0}$. En la Figura 2.3 (a) se representa una imagen restaurada con un nivel considerable de regularización a partir de una versión emborronada y sin ruido. Se puede observar la presencia de los artefactos del *ringing* a modo de “ondas” en los contornos de la figura de *Lena* y la falta de nitidez debido a la regularización cuadrática de Tikhonov. De hecho, se puede demostrar que el efecto de *ringing* aparece sobre las zonas de alto contraste, es decir, en los bordes de los objetos que componen la imagen.

Con respecto al error dependiente del ruido, es precisamente el resultado del mal condicionamiento del problema que se vio en la Sección 2.3.1. La multiplicación \mathbf{Gn} equivale al efecto del filtro de restauración \mathbf{G} sobre el ruido \mathbf{n} , lo que significa su amplificación para el caso de que no exista regularización. A medida que la regularización es mayor, los efectos del error dependiente del ruido son reducidos por el *suavizado* del filtro. La forma en que el error \mathbf{e}_n se presenta sobre la imagen restaurada es mediante un falseado de las texturas tal y como demuestra la Figura 2.3 (b).

Obviamente, la imagen restaurada ideal sería aquella que consiguiera un equilibrio razonable entre ambos errores. Esto implica que el nivel de regularización no sea ni demasiado intenso como para que el efecto de *ringing* sea muy patente en el resultado; ni demasiado bajo como para que la magnificación del ruido se imponga sobre el nivel de señal. Esta situación sería aún mejor si se aplicara de forma adaptativa al espacio, pues en diferentes regiones de la imagen interesan comportamientos distintos del filtro de restauración.



(a)



(b)

Figura 2.3: Imágenes restauradas que ilustran respectivamente los dos errores típicos de restauración: (a) error de *ringing* (b) error dependiente del ruido.

Capítulo 3

Requisitos de la restauración: condiciones de frontera y estimaciones de parámetros

Teniendo en cuenta las definiciones del sistema LSI del Capítulo 2, el problema de adquisición de una imagen discreta $y(i, j)$ se modela a partir de la expresión (2.3). Ahora bien, como consecuencia de la propiedad no local de la convolución, la dimensión del soporte $\tilde{\mathcal{L}}$ correspondiente a la imagen degradada es mayor que el dominio de definición \mathcal{L} de la imagen original $x(i, j)$, i.e., $L < \tilde{L}$. Esta situación deriva en unas ecuaciones de restauración que necesitan de hipótesis a priori sobre las fronteras de la imagen original. Dentro de este capítulo se explica la necesidad de una selección adecuada de estas hipótesis para evitar el conocido *boundary ringing*. Las condiciones de frontera son, por tanto, uno de los primeros requisitos de la restauración para las que el estado del arte ofrece varias opciones: cero-Dirichlet, periódicas, reflexivas y antireflexivas [59], cuyas matrices se describen en detalle a lo largo del capítulo.

En la segunda parte del capítulo se analiza la dependencia del filtro de restauración $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{L \times \tilde{L}}$ frente a las estimaciones de parámetros, particularizada a los filtros Tikhonov (2.33) y Wiener (2.41). Estas estimaciones se descomponen en tres grupos de parámetros, según sean respecto a la PSF, al ruido o a la imagen original. La importante sensibilidad que tiene la restauración respecto a estos

parámetros, obliga a tener estimaciones precisas sobre los mismos y se convierte en el segundo de los requisitos de la restauración estudiados en el capítulo.

3.1 Problemas de frontera

Considerando la imagen degradada sin ruido de la ecuación (2.3), entonces $z(i, j)^6 = h(i, j) ** x(i, j)$, cuya operación de convolución conduce a que el soporte \mathcal{L} de la imagen original $x(i, j)$ de dimensión $L = L_1 \times L_2$ sea inferior al de la imagen degradada $y(i, j)$, tal que $\mathcal{L} \subset \tilde{\mathcal{L}} \subset \mathbb{Z}^2$ y $L < \tilde{L}$.

Definición 3.1. Sea $x(i, j)$ una imagen original de soporte \mathcal{L} y $h(i, j)$ la respuesta PSF centrada en el origen con soporte \mathcal{M} tal que

$$\mathcal{M} = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2: -B_1 \leq i \leq B_1, -B_2 \leq j \leq B_2\},$$

donde B_1 y B_2 son los respectivos anchos de banda horizontal y vertical de la PSF. Entonces cada punto de la convolución se define como

$$z(i, j) = h(i, j) ** x(i, j) = \sum_{k=-B_1}^{B_1} \sum_{l=-B_2}^{B_2} h(k, l)x(i - k, j - l).$$

Se deduce entonces que el número de filas y columnas que componen la PSF son $M_1 = 2B_1 + 1$ y $M_2 = 2B_2 + 1$, i.e. la dimensión es $M = M_1 \times M_2$.

En la Figura 3.1 se ilustra gráficamente las operaciones anteriores. Concretamente, la convolución en cada punto (i, j) equivale a posicionar el centro de la PSF en ese punto de la imagen original $x(i, j)$, rotar 180° la máscara de la PSF y sumar las multiplicaciones del punto $x(i, j)$ con $h(0, 0)$ y la de sus vecinos emparejados con su respectiva $h(i', j')$. Se observa en la figura los orígenes de coordenadas $\mathbf{0}$ para la imagen y la PSF, comprobando que este último se ha rotado 180° respecto al centro de la máscara.

Inmediatamente surge la duda cuando la máscara de la PSF se sitúa sobre las fronteras de la imagen, donde el ancho de banda de la PSF supera los límites del soporte \mathcal{L} . Para poder realizar la convolución en estos puntos, se necesitan hipótesis sobre los valores de $x(i, j)$ fuera de los límites de la imagen, típicamente conocidas como **condiciones de frontera** o **BCs** (*boundary conditions*). Es más, la operación de convolución continúa moviendo el centro de la PSF en el exterior de la imagen, dado que la máscara sigue intersectando con el soporte \mathcal{L} y, por tanto, existe un valor de convolución para estos puntos. Esta situación explica que el soporte de la convolución $\tilde{\mathcal{L}}$ sea más grande que el de la imagen original \mathcal{L} . En la Figura 3.1 se muestran dos posiciones de ejemplo de la PSF donde se necesita las condiciones de frontera y aumentan el tamaño de la convolución.

Después de desplazar la máscara de $h(i, j)$ por toda la imagen original y sus fronteras, se deduce que el soporte $\tilde{\mathcal{L}}$ se expresa como sigue

⁶ Cuando la imagen degradada se modela sin ruido, se simboliza como $z(i, j)$.

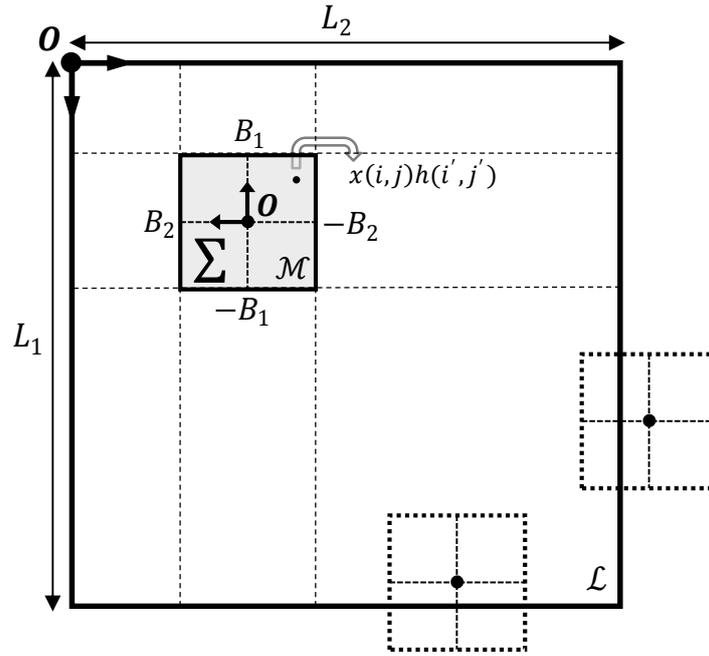


Figura 3.1: Representación gráfica de la operación de convolución entre la imagen original $x(i,j)$ de soporte \mathcal{L} y la PSF $h(i,j)$ definida en \mathcal{M} .

$$\tilde{\mathcal{L}} = \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2: -B_1 \leq i \leq L_1 + B_1 - 1, -B_2 \leq j \leq L_2 + B_2 - 1\}, \quad (3.1)$$

que respecto a la Definición 2.3 cumple con $\mathcal{L} \subset \tilde{\mathcal{L}}$ y la dimensión es $\tilde{L} = (L_1 + 2B_1) \times (L_2 + 2B_2)$.

La hipótesis más común para la convolución lineal es asumir condiciones de frontera nulas (i.e., la imagen original rodeada de ceros) y se como **modelo aperiódico**. Si se trasladan las expresiones anteriores a la terminología lexicográfica, se llega a una definición para este modelo que se adelantó en la ecuación (2.4)

$$\mathbf{z}_a = \mathbf{H}_a \mathbf{x}, \quad (3.2)$$

donde $\mathbf{H}_a \in \mathbb{R}^{\tilde{L} \times L}$ es la matriz de convolución asociada al modelo aperiódico y $\mathbf{z}_a \in \mathbb{R}^{\tilde{L}}$ es el vector lexicográfico de la imagen degradada sin ruido, i.e., $\mathbf{z} = \text{vec}\{z(i,j)\}$. Se verá en detalle la estructura de la matriz \mathbf{H}_a cuando se analicen las condiciones de frontera nulas en la próxima sección.

Ahora bien usar una imagen degradada \mathbf{z} como la de (3.2), implica que la imagen contiene información en las fronteras que no es real cuando se capta la imagen. Para ver un ejemplo, en la Figura 3.2 se muestra la imagen de *Barbara* que ha sido emborronada de acuerdo a un modelo aperiódico. Se puede comprobar que todos los píxeles exteriores al recuadro blanco son resultado de la convolución de la imagen original en las fronteras, donde se ha empleado la hipótesis de ceros en el exterior. Sin embargo, sólo la imagen que aparece dentro del recuadro es la que se observa en un sistema de adquisición real (p.ej. una imagen captada por una cámara de fotos). A este nuevo soporte de definición se le conoce como **campo de visión** o **FOV** (*field of view*).



Figura 3.2: Modelo de degradación aperiódico (b) a partir de la imagen original en (a). Se recuadra en blanco la región correspondiente al FOV.

Definición 3.2. Sea \mathcal{L} el soporte de una imagen original y \mathcal{M} el soporte de la PSF, entonces se define el campo de visión como

$$\text{FOV} = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2: B_1 \leq i \leq L_1 - B_1 - 1, B_2 \leq j \leq L_2 - B_2 - 1\},$$

cuya dimensión es $V = (L_1 - 2B_1) \times (L_2 - 2B_2)$

La Figura 3.3 resume gráficamente la relación entre los tres soportes presentados hasta ahora que cumplen con $\text{FOV} \subset \mathcal{L} \subset \tilde{\mathcal{L}}$. A raíz de esto, es necesario redefinir el concepto de imagen observada que aparecía en el Capítulo 2 para las condiciones reales de adquisición

Definición 3.3. Sea $z(i, j)$ una imagen degradada por un sistema LSI y definida sobre el soporte $\tilde{\mathcal{L}}$, entonces una imagen observada real $\mathbf{z}(i, j)$ es una sección de $z(i, j)$ en la que se han eliminado la información de las fronteras, i.e.

$$\mathbf{z}(i, j) = z(i, j) \quad \forall (i, j) \in \text{FOV}.$$

Esta definición se puede generalizar al caso con presencia de ruido donde $\psi(i, j)$ sería la imagen observada a partir de $y(i, j)$.

Ahora bien, la ausencia de las fronteras en una imagen observada real $\psi(i, j)$ tiene una implicación importante sobre la restauración de imágenes y, en especial, en aquellas imágenes donde los extremos de la imagen contienen bastante información (caso contrario a las imágenes astronómicas que tienen un fondo negro). En la Figura 3.4(a) se muestra una imagen real observada *Barbara* compuesta por el campo de visión de la Figura 3.2(b). Al intentar restaurar esta imagen por medio de un filtro de Wiener, el resultado es un error de *ringing* (**boundary ringing**) [100] muy severo basado en oscilaciones horizontales y verticales. La razón de este artefacto es la discontinuidad del nivel de gris producida en los límites de la imagen, que se traduce en unas componentes de alta frecuencia acentuadas por el filtro de restauración.

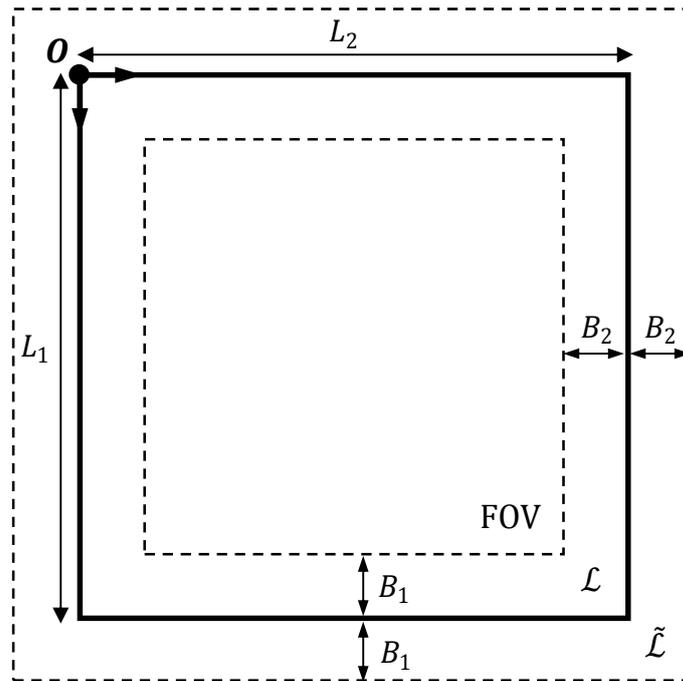
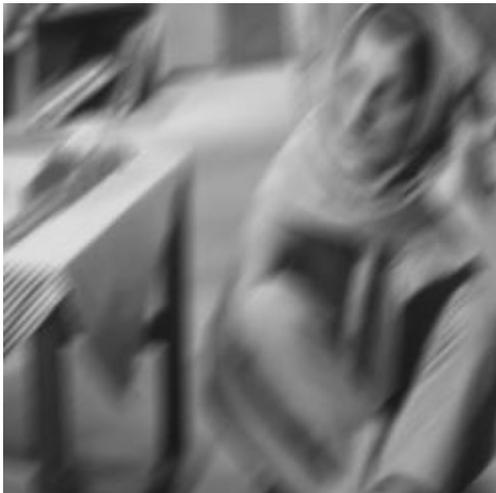
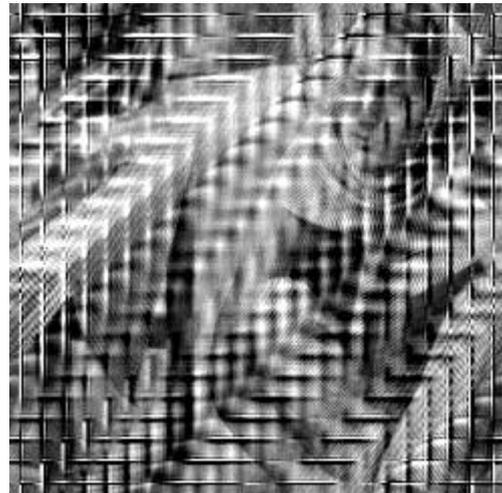


Figura 3.3: Relación de los soportes $\text{FOV} \subset \mathcal{L} \subset \tilde{\mathcal{L}}$ para una imagen degradada a partir de una convolución lineal.



(a)



(b)

Figura 3.4: Imagen real observada sin información en las fronteras (a) y los efectos de *ringing* sobre un algoritmo de restauración Wiener (b).

Conviene recordar que este fenómeno de *ringing* no debe confundirse con el procedente de la regularización (Sección 2.4.4), el cual se hace visible en las zonas de alto cambio en la imagen (bordes de los objetos de la escena).

La forma habitual de contrarrestar los efectos del *boundary ringing* es realizando hipótesis de cómo serían esas fronteras desconocidas, esto es, definiendo las BCs asociadas a la imagen observada. Como se verá a continuación, estas hipótesis se incluyen sobre la matriz de convolución \mathbf{H}_{BC} usada en el algoritmo de restauración e

$K_{-1} = K_1 = \mathbf{O}$, donde \mathbf{O} es una matriz llena de ceros. Por tanto, $\mathbf{B} = \mathbf{O}$ y, en consecuencia, $\mathbf{H}_{BC} = \mathbf{T}$.

El problema de restauración basa así su resolución en una matriz Toeplitz cuya complejidad varía entre órdenes de $\mathcal{O}(L_1 \log L_1)$ y $\mathcal{O}(L_1^2)$ usando métodos iterativos [49][3].

BC Periódica

Para este caso, se asume que la imagen fuera de sus fronteras es una representación periódica de sí misma [11]

$$\hat{\mathbf{x}}_{-1} = \begin{bmatrix} x_{L_1-B_1} \\ x_{L_1-B_1+1} \\ \vdots \\ x_{L_1-1} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{B_1-1} \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

En consecuencia, $\mathbf{K}_{-1} = [\mathbf{O} \quad \mathbf{I}]$ y $\mathbf{K}_1 = [\mathbf{I} \quad \mathbf{O}]$ donde $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{B_1 \times B_1}$ es una matriz identidad. Se deduce entonces que $\mathbf{B} = [\mathbf{O} \quad \mathbf{T}_{-1}] + [\mathbf{O} \quad \mathbf{T}_1]$ cuyo $\text{rank}(\mathbf{B}) = 2B_1$ y el operador \mathbf{H}_{BC} se convierte en una matriz circulante⁸. La propiedad fundamental de este tipo de matrices es que puede ser diagonalizable al dominio de Fourier [34]. Las operaciones del problema de restauración se resuelven entonces mediante transformadas rápidas de Fourier (FFT) con complejidad $\mathcal{O}(L_1 \log L_1)$.

BC Reflexiva (Neumann)

En estas condiciones, se cumple que las fronteras de la imagen son versiones reflejadas de la original [69] tal que

$$\hat{\mathbf{x}}_{-1} = \begin{bmatrix} x_{B_1-1} \\ \vdots \\ x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} x_{L_1-1} \\ \vdots \\ x_{L_1-B_1+1} \\ x_{L_1-B_1} \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Así pues, $\mathbf{K}_{-1} = [\mathbf{O} \quad \mathbf{I}] \mathbf{J}$ y $\mathbf{K}_1 = [\mathbf{I} \quad \mathbf{O}] \mathbf{J}$ en las que $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{B_1 \times B_1}$ es la matriz de identidad dada la vuelta, i.e.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & \ddots & \\ & & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

En este caso, $\mathbf{B} = [\mathbf{O} \quad \mathbf{T}_{-1}] \mathbf{J} + [\mathbf{O} \quad \mathbf{T}_1] \mathbf{J}$ es una matriz Hankel⁹ y, en consecuencia, \mathbf{H}_{BC} es una matriz Toeplitz+Hankel. De nuevo se comprueba que $\text{rank}(\mathbf{B}) = 2B_1$.

Aunque la matriz resultante \mathbf{H}_{BC} tiene una estructura más complicada respecto a las versiones Toeplitz y circulante de los casos anteriores, puede ser diagonalizable mediante la transformada discreta del coseno de tipo II [44] siempre y cuando la PSF sea simétrica, i.e., $h_i = h_j \forall i \neq j$. Este tipo de operaciones se llevan cabo

⁸ Matriz en la que cada fila se rota un elemento a la derecha con respecto a la anterior.

⁹ Matriz equivalente a una versión Toeplitz pero dada la vuelta.

mediante la FCT (transformada rápida del coseno) y supone una complejidad de orden $\mathcal{O}(L_1 \log L_1)$ para la resolución del problema de restauración.

BC Anti-reflexiva

Las condiciones anti-reflexivas propuestas inicialmente por Serra-Capizzano [85] suponen que las fronteras son versiones reflejadas de la imagen original pero usando una simetría central, en vez de la axial de Neumann. Así pues,

$$\hat{\mathbf{x}}_{-1} = \begin{bmatrix} 2x_0 - x_{B_1} \\ \vdots \\ 2x_0 - x_2 \\ 2x_0 - x_1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} 2x_{L_1-1} - x_{L_1-2} \\ \vdots \\ 2x_{L_1-1} - x_{L_1-B_1} \\ 2x_{L_1-1} - x_{L_1-B_1-1} \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Se cumple entonces que $\mathbf{K}_{-1} = [\mathbf{0} \quad -\mathbf{I} \quad 2\mathbf{e}] \mathbf{J}$ y $\mathbf{K}_1 = [2\mathbf{e} \quad -\mathbf{I} \quad \mathbf{0}] \mathbf{J}$, siendo $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^{B_1}$ un vector columna de unos. En este caso, $\mathbf{B} = [\mathbf{0} \quad -\mathbf{T}_{-1} \quad 2\mathbf{T}_{-1}\mathbf{e}] \mathbf{J} + [2\mathbf{T}_{-1}\mathbf{e} \quad -\mathbf{T}_1 \quad \mathbf{0}] \mathbf{J}$ es la suma de una matriz Hankel y una matriz cuyo rango es exactamente 2. El operado \mathbf{H}_{BC} se conoce entonces como matriz Toeplitz+Hankel+rango 2. En este caso, se comprueba que $\text{rank}(\mathbf{B}) = 2B_1 + 2$.

Como ocurría en la BC anterior, si la PSF es simétrica se puede utilizar una transformada trigonométrica, concretamente la transformada discreta del seno tipo I [77], para simplificar las operaciones del problema de restauración a una complejidad de orden $\mathcal{O}(L_1 \log L_1)$.

3.1.2 Condiciones de frontera para imágenes bidimensionales

Plantear las condiciones de frontera para las imágenes bidimensionales no es complicado, pero sí tedioso en cuanto a notación. Para simplificar las expresiones, se considera la propiedad de **separabilidad** de la PSF.

Propiedad 3.1. *Sea $h(i, j)$ una PSF definida en el soporte \mathcal{M} , entonces se dice que es separable si se pueda aplicar de forma independiente a las columnas $h_c(j)$ y a las filas $h_r(i)$ tal que*

$$h(i, j) = h_c(i)h_r(j),$$

donde $h_c(j)$ y $h_r(i)$ están definidas en M_1 y M_2 respectivamente.

Gracias a esta propiedad, se puede describir la operación de convolución de una dimensión en (3.5) como [50]

$$\mathbf{Z} = [\mathbf{T}_{c,-1} \quad \mathbf{T}_c \quad \mathbf{T}_{c,1}] \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{-1,-1} & \mathbf{X}_{-1,0} & \mathbf{X}_{-1,1} \\ \mathbf{X}_{0,-1} & \mathbf{X} & \mathbf{X}_{0,1} \\ \mathbf{X}_{1,-1} & \mathbf{X}_{1,0} & \mathbf{X}_{1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{r,-1}^T \\ \mathbf{T}_r^T \\ \mathbf{T}_{r,1}^T \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

donde, por un lado, $\mathbf{Z} = \text{vec}^{-1}\{\mathbf{z}\} \in \mathbb{R}^{L_1 \times L_2}$ y $\mathbf{X} = \text{vec}^{-1}\{\mathbf{x}\} \in \mathbb{R}^{L_1 \times L_2}$ son las matrices asociadas a los vectores lexicográficos $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^L$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^L$ respectivamente. Por otro, las matrices $\mathbf{X}_{i,j}$ representan cada una de las regiones de la imagen original externas al soporte \mathcal{L} y, en consecuencia, de las cuales hay que establecer las condiciones de frontera. Por último, $[\mathbf{T}_{c,-1} \quad \mathbf{T}_c \quad \mathbf{T}_{c,1}]$ y $[\mathbf{T}_{r,-1} \quad \mathbf{T}_r \quad \mathbf{T}_{r,1}]$ son las

matrices Toeplitz con idéntica estructura a la representada en (3.6) para sus versiones respectivas por columnas y filas. Con respecto a las dimensiones, se resumen en utilizar las dimensiones L_1 y B_1 para las operaciones en las columnas y L_2 y B_2 en el caso de las filas.

Al igual que ocurría en la sección anterior, se definen unas matrices que describen las condiciones de frontera. A saber, las matrices $\mathbf{K}_{c,-1}$ y $\mathbf{K}_{c,1}$ definen las hipótesis respecto a las columnas (i.e. aquellas impuestas arriba y debajo de la imagen); análogamente, las matrices $\mathbf{K}_{r,-1}$ y $\mathbf{K}_{r,1}$ contienen la información de las fronteras respecto a las filas (i.e. aquellas impuestas a la izquierda y derecha de la imagen). Estas matrices reemplazan los extremos de imagen original como

$$\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{X}}_{-1,-1} & \widehat{\mathbf{X}}_{-1,0} & \widehat{\mathbf{X}}_{-1,1} \\ \widehat{\mathbf{X}}_{0,-1} & \mathbf{X} & \widehat{\mathbf{X}}_{0,1} \\ \widehat{\mathbf{X}}_{1,-1} & \widehat{\mathbf{X}}_{1,0} & \widehat{\mathbf{X}}_{1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{c,-1} \\ \mathbf{I} \\ \mathbf{K}_{c,1} \end{bmatrix} \mathbf{X} [\mathbf{K}_{r,-1}^T \quad \mathbf{I} \quad \mathbf{K}_{r,1}^T]. \quad (3.16)$$

Llevando esta expresión sobre la ecuación (3.15) y convirtiendo las operaciones a modo lexicográfico, se llega a una expresión como (3.3) donde el operador de convolución $\mathbf{H}_{BC} \in \mathbb{R}^{L \times L}$ tiene una estructura como $\mathbf{H}_{BC} = \mathbf{T} + \mathbf{B}$. Se puede demostrar que

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_r \otimes \mathbf{T}_c, \quad (3.17)$$

siendo \mathbf{T} una matriz Toeplitz con bloques Toeplitz (BTTB), donde \otimes es el producto de Kronecker, y \mathbf{B} es la matriz que contiene las condiciones de frontera según

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{T}_r \otimes (\mathbf{T}_{c,-1} \mathbf{K}_{c,-1} + \mathbf{T}_{c,1} \mathbf{K}_{c,1}) \\ &+ (\mathbf{T}_{r,-1} \mathbf{K}_{r,-1} + \mathbf{T}_{r,1} \mathbf{K}_{r,1}) \otimes (\mathbf{T}_{c,-1} \mathbf{K}_{c,-1} + \mathbf{T}_c + \mathbf{T}_{c,1} \mathbf{K}_{c,1}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Conviene remarcar que si la PSF no tuviera la propiedad de separabilidad, no se tendrían productos Kronecker para expresar las matrices \mathbf{T} y \mathbf{B} , pero se mantendría la misma descomposición de $\mathbf{H}_{BC} = \mathbf{T} + \mathbf{B}$. En general, \mathbf{T} es una matriz BTTB y \mathbf{B} es una matriz estructurada y *sparse*¹⁰.

Todas las BCs que se discutieron en el apartado anterior para el caso unidimensional se extienden de forma natural sobre el problema de imágenes bidimensionales. Tan solo es necesario replicar las mismas estructuras que se pusieron para \mathbf{K}_{-1} y \mathbf{K}_1 , ahora para las respectivas $\mathbf{K}_{c,-1}$, $\mathbf{K}_{r,-1}$ y $\mathbf{K}_{c,1}$, $\mathbf{K}_{r,1}$. A continuación, se observan las imágenes resultantes de cada condición de frontera.

BC Cero (Dirichlet)

En la Figura 3.5(a) se observan los ceros establecidos en las fronteras de la imagen original \mathbf{x} para estas BCs. En este caso, la imagen de *Barbara* presenta bastante información en las fronteras de \mathcal{L} y se traduce en una acusada discontinuidad. Como ya se explicó anteriormente, esto supone que el *boundary ringing* tenga una presencia significativa sobre el proceso de restauración. Por otro lado, es importante señalar que el modelo de degradación \mathbf{z}_{BC} de la Figura 3.5(b) es equivalente al modelo

¹⁰ Dícese de la matriz que contienen en su mayoría ceros.

aperiódico \mathbf{z}_a de la ecuación (3.2) sin más que extender la convolución al soporte \tilde{L} . Esto implica que $\mathbf{H}_a \in \mathbb{R}^{\tilde{L} \times L}$ es una versión ampliada de $\mathbf{H}_{BC} \in \mathbb{R}^{L \times L}$ añadiendo ceros en cada columna hasta pasar de la dimensión horizontal L a \tilde{L} .

Por extensión a la sección anterior, la estructura de la matriz \mathbf{H}_{BC} es BTTB y el problema de restauración tiene una complejidad $\mathcal{O}(L^2)$, que requiere de métodos iterativos para su resolución [92][68].

BC Periódica

La condición de frontera periódica se observa perfectamente en los límites de la imagen de la Figura 3.5(c). Usar estas BCs no tiene una justificación física pero son las más habituales en restauración por su buen comportamiento computacional $\mathcal{O}(L \log L)$ [91]. No obstante, los efectos de *ringing* siguen apareciendo sobre el proceso de restauración.

La matriz \mathbf{H}_{BC} se convierte para este caso en una matriz circulante con bloques circulantes (BCCB) que es diagonalizable al dominio de Fourier.

BC Reflexiva (Neumann)

Observando la Figura 3.6(a) se comprueba el efecto “espejo” que aparece en las fronteras de la imagen original. Gracias a ello se consigue que la imagen mantenga una continuidad del nivel de gris en las fronteras y se reduzca considerablemente los efectos de *ringing* en la restauración.

Como extensión al caso de una dimensión, la matriz \mathbf{H}_{BC} adopta una estructura Toeplitz-Hankel por bloques, donde a su vez cada bloque también es una matriz Toeplitz-Hankel (BTHTHB). Cuando la PSF es simétrica, los algoritmos de restauración son de complejidad $\mathcal{O}(L \log L)$ tras utilizar la transformada discreta del coseno [42].

BC Anti-reflexiva (Neumann)

Para mejorar la continuidad del nivel de gris en la imagen original, la condición de frontera antireflexiva de la Figura 3.6(c) también conserva la derivada normal en los límites de la imagen. Esto se traduce en que el *boundary ringing* sea aún más reducido en los resultados de restauración tal y como se demuestra en [59].

En base a la sección anterior, se deduce que la estructura de \mathbf{H}_{BC} es Toeplitz+Hankel+rango 2 por bloques, siendo igualmente cada bloque una matriz Toeplitz+Hankel+rango 2 (BTHR2THR2B). Si la PSF es simétrica, la restauración conlleva operaciones de complejidad $\mathcal{O}(L \log L)$ gracias a la transformada discreta del seno [4].

3.1.3 Dominio de Fourier

Como se ha indicado anteriormente, las condiciones de frontera más utilizadas en los algoritmos de restauración son las periódicas, dada la posibilidad de diagonalización de la matriz de convolución \mathbf{H}_{BC} al dominio de Fourier [34]. Conviene no olvidar que para estas BCs se está usando $\tilde{L} = L$.



Figura 3.5: Imagen original \mathbf{x} con condiciones de frontera cero (a) y periódica (c), junto a los modelos de degradación asociados \mathbf{z}_{BC} en (b) y (d). Se recuadra en negro el soporte \mathcal{L} para (a) y (c) y en blanco el soporte FOV para (b) y (d).



Figura 3.6: Imagen original x con condiciones de frontera reflexiva (a) y antireflexiva (c), junto a los modelos de degradación asociados z_{BC} en (b) y (d). Se recuadra en blanco el soporte \mathcal{L} en (a)-(c) y el soporte FOV en (b)-(d).

Definición 3.4. Sea $\mathbf{H}_p \in \mathbb{R}^{L \times L}$ la matriz de convolución BCCB resultante de asumir condiciones de frontera periódicas en un algoritmo de restauración. Entonces se diagonaliza por medio de una base ortogonal de Fourier por bloques $\mathcal{F} \in \mathbb{C}^{L \times L}$ tal que

$$\mathbf{H}_p = \mathcal{F}\mathbf{\Lambda}\mathcal{F}^{-1} \quad \text{y} \quad \mathbf{H}_p^T = \mathcal{F}\mathbf{\Lambda}^*\mathcal{F}^{-1},$$

donde $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{C}^{L \times L}$ es una matriz diagonal formada por las componentes de la transformada discreta de Fourier de $h(i, j)$, i.e. $\mathcal{H}(\omega_i, \omega_j) = \text{DFT}\{h(i, j)\}$ y $\mathbf{\Lambda}^*$ es el complejo conjugado de $\mathbf{\Lambda}$.

Así pues, aplicando esta diagonalización sobre el algoritmo de restauración por mínimos cuadrados de (2.12) se llega a la expresión

$$(\mathbf{\Lambda}^*\mathbf{\Lambda})\mathcal{F}^{-1}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{\Lambda}^*\mathcal{F}^{-1}\mathbf{y}. \quad (3.19)$$

Se puede demostrar que las multiplicaciones matriz-vector $\mathcal{F}^{-1}\hat{\mathbf{x}}$ y $\mathcal{F}^{-1}\mathbf{y}$ equivalen a las transformadas de Fourier respectivas de $\hat{\mathbf{x}}$ e \mathbf{y} , esto es, $\hat{\mathcal{X}}(\omega_i, \omega_j) = \text{DFT}\{\hat{\mathbf{x}}\}$ e $\mathcal{Y}(\omega_i, \omega_j) = \text{DFT}\{\mathbf{y}\}$. Aprovechando las propiedades escalares del dominio de Fourier, se reescribe la solución de mínimos cuadrados al dominio de la frecuencia como

$$\hat{\mathcal{X}}(\omega_i, \omega_j) = \frac{\mathcal{Y}(\omega_i, \omega_j)}{\mathcal{H}(\omega_i, \omega_j)}. \quad (3.20)$$

A partir de la Definición 2.14, se expresa la versión en frecuencia del filtro de restauración como $\mathcal{G}(\omega_i, \omega_j)$ y se particulariza a la ecuación (3.20) como el filtro inverso

$$\mathcal{G}(\omega_i, \omega_j) = \frac{1}{\mathcal{H}(\omega_i, \omega_j)}. \quad (3.21)$$

Con un procedimiento análogo, se pueden obtener las expresiones del filtro de restauración para los algoritmos de regularización Tikhonov y Wiener. Para ello, es necesario asumir que el operador Laplaciano $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{U \times L}$ de (2.33) y las matrices de autocorrelación $\mathbf{R}_x \in \mathbb{R}^{L \times L}$ y $\mathbf{R}_n \in \mathbb{R}^{L \times L}$ de (2.41) son también matrices BCCB y, por tanto, diagonalizables según la Definición 3.4. Así pues, se demuestra que [34]

◆ Regularización Tikhonov

$$\mathcal{G}(\omega_i, \omega_j) = \frac{\mathcal{H}^*(\omega_i, \omega_j)}{|\mathcal{H}(\omega_i, \omega_j)|^2 + \lambda|\mathcal{D}(\omega_i, \omega_j)|^2}, \quad (3.22)$$

donde $\mathcal{D}(\omega_i, \omega_j) = \text{DFT}\{\mathbf{d}\}$.

◆ Filtro Wiener

$$\mathcal{G}(\omega_i, \omega_j) = \frac{\mathcal{H}^*(\omega_i, \omega_j)}{|\mathcal{H}(\omega_i, \omega_j)|^2 + \frac{\mathcal{S}_n(\omega_i, \omega_j)}{\mathcal{S}_x(\omega_i, \omega_j)}}, \quad (3.23)$$

donde $\mathcal{S}_x(\omega_i, \omega_j) = \text{DFT}\{\mathbf{R}_x\}$ y $\mathcal{S}_n(\omega_i, \omega_j) = \text{DFT}\{\mathbf{R}_n\}$ se conocen como las densidades espectrales de potencia de la imagen original y del ruido respectivamente.

3.2 Sensibilidad a estimaciones de parámetros

Haciendo balance de los métodos de restauración del Capítulo 2, se comprueba la necesidad que tiene la restauración de imágenes respecto al conocimiento *a priori* de un buen número de parámetros [8]. En particular,

Definición 3.5. *Sea un problema de restauración de imágenes, entonces se pueden distinguir tres grupos de parámetros a priori de los cuales depende:*

1. Parámetros respecto al proceso de degradación
2. Parámetros respecto al ruido
3. Parámetros respecto a la imagen original

En lo que se refiere al proceso de degradación, todos los métodos del capítulo anterior necesitaban de la matriz de convolución \mathbf{H} para poder implementar sus algoritmos, es decir, disponer de la PSF que ha degradado la imagen original \mathbf{x} . Sin embargo, esto casi nunca se cumple en una situación real de restauración de imágenes y es necesario realizar estimaciones sobre los parámetros que definen la PSF. Así pues, asumiendo alguno de los modelos que se vieron en la Sección 2.2, se requiere identificar parámetros tales como la longitud de movimiento, el radio del círculo de confusión o la desviación típica Gaussiana, entre otros. En el estado del arte, se puede encontrar un número importante de artículos dedicados a las estimaciones de la PSF tales como [54][79][61][24][63]. En general, a los algoritmos de restauración que necesitan identificar el modelo de degradación se los conoce como **desconvolución ciega** [15].

Respecto al ruido se ha asumido desde el principio que tiene una distribución Gaussiana de media nula, pero necesita estimar el parámetro de varianza σ_n^2 . Dentro del paradigma Bayesiano de la Sección 2.3.3, esto equivale a la estimación del hiperparámetro $\beta = 1/\sigma_n^2$ [62].

Por último, los parámetros relacionados con la imagen original se deben a la introducción en el problema de restauración de modelos a priori de \mathbf{x} . En el caso de la solución regularizada de la Definición 2.11, el término $\mathcal{R}(\mathbf{x})$ es el encargado de incluir información a priori de la imagen original y escalarla mediante el parámetro de regularización λ . Análogamente, los métodos Bayesianos utilizan la distribución de probabilidad $p(\mathbf{x})$ de la ecuación (2.35) para introducir un modelo a priori de la imagen original que depende del hiperparámetro α . Después del análisis realizado en la Sección 2.3.3, se pudo comprobar que los hiperparámetros (α, β) están relacionados directamente con el término de regularización λ , i.e. $\lambda = \alpha/\beta$.

La restauración de imágenes ha tenido un importante trabajo en conseguir las mejores estimaciones de todos sus parámetros para que los resultados de restauración tengan la calidad esperada. Sin embargo, incluso pequeñas desviaciones de los parámetros respecto a sus valores reales tienen una repercusión muy negativa

sobre los resultados. A este hecho se le conoce como **sensibilidad a las estimaciones**.

A continuación, se van a analizar dos casos concretos de restauración y sus dependencia de parámetros: Wiener y Tikhonov. Para ambos se asumen condiciones de frontera periódicas y, por tanto, se trabaja en el dominio de frecuencia, identificando los parámetros de los que depende el filtro de restauración $\mathcal{G}(\omega_i, \omega_j)$ en las ecuaciones (3.22) y (3.23) respectivamente. Por otro lado, se presentan dos métodos básicos de estimación de la PSF, cuyos resultados son susceptibles de error por la presencia de ruido.

3.2.1 Métodos de restauración a desensibilizar

Filtro Wiener

A partir de la ecuación (3.23), se pueden identificar los parámetros del filtro Wiener que se corresponden con los tres grupos de la Definición 3.5.

- ◆ Proceso de degradación: parámetros relacionados con la estimación de la PSF que se utilizan para construir $\mathcal{H}(\omega_i, \omega_j)$.
- ◆ Ruido: la densidad espectral de potencia $\mathcal{S}_n(\omega_i, \omega_j)$ que para el caso de un ruido blanco Gaussiano equivale a su varianza, i.e., $\mathcal{S}_n(\omega_i, \omega_j) = \sigma_n^2$. Por tanto, el parámetro significativo sigue siendo σ_n^2 .
- ◆ Imagen original: la densidad espectral de potencia $\mathcal{S}_x(\omega_i, \omega_j)$ que representa la información a priori de la imagen original. La estimación más común que se realiza sobre este parámetro es asumir que

$$\hat{\mathcal{S}}_x(\omega_i, \omega_j) = \mathcal{S}_y(\omega_i, \omega_j), \quad (3.24)$$

donde $\mathcal{S}_y(\omega_i, \omega_j)$ simboliza la densidad espectral de potencia de la imagen degradada $y(i, j)$. Para determinar su expresión se emplea la aproximación del periodograma [58] tal que

$$\mathcal{S}_y(\omega_i, \omega_j) = \frac{1}{L^2} |\mathcal{Y}(\omega_i, \omega_j)|^2. \quad (3.25)$$

Para conseguir mejores estimaciones de $\hat{\mathcal{S}}_x(\omega_i, \omega_j)$ se emplea un método iterativo para el filtro Wiener. Esto supone empezar la primera iteración calculando la expresión del filtro de restauración $\mathcal{G}(\omega_i, \omega_j)$ mediante la estimación (3.24) y obtener la imagen restaurada como $\hat{\mathcal{X}}(\omega_i, \omega_j) = \mathcal{G}(\omega_i, \omega_j)\mathcal{Y}(\omega_i, \omega_j)$. A continuación, se utiliza el periodograma de $\hat{\mathcal{X}}(\omega_i, \omega_j)$ para estimar $\hat{\mathcal{S}}_x(\omega_i, \omega_j)$ y se vuelve a repetir el proceso hasta que los resultados de restauración converjan a una solución óptima. La estimación se puede resumir entonces como [46]

$$\mathcal{S}_x^{(m)}(\omega_i, \omega_j) \cong \frac{1}{L^2} |\hat{\mathcal{X}}^{(m-1)}(\omega_i, \omega_j)|^2, \quad (3.26)$$

donde el superíndice (m) refleja la m -ésima iteración y $\mathcal{S}_x^{(0)}(\omega_i, \omega_j) = \mathcal{S}_y(\omega_i, \omega_j)$.

Regularización Tikhonov

La regularización Tikhonov en el dominio de la frecuencia desemboca en la expresión (3.22) para el filtro de restauración $\mathcal{G}(\omega_i, \omega_j)$. A partir de éste, se identifican los parámetros asociados a los tres grupos de la Definición 3.5.

- ◊ Proceso de degradación: parámetros relacionados con la estimación de la PSF que se utiliza para construir $\mathcal{H}(\omega_i, \omega_j)$.
- ◊ Ruido: la implicación del ruido aparece directamente sobre el parámetro de regularización λ . De hecho, el cálculo de λ se realiza típicamente mediante el principio de la discrepancia (2.64) que utiliza el conocimiento a priori de la varianza del ruido Gaussiano, tal que $\|\mathbf{n}\|_2^2 = L\sigma_n^2$.
- ◊ Imagen original: descrita por el operador Laplaciano $\mathcal{D}(\omega_i, \omega_j)$ en el dominio de Fourier, que modela la imagen original con un comportamiento *suavizado*. No obstante, el parámetro λ es igualmente representativo de la información a priori introducida sobre la imagen original, ya que equivale al peso del término de regularización. En el paradigma Bayesiano, es el hiperparámetro α el que representa la imagen original y se relaciona con la regularización mediante $\lambda = \alpha/\beta$.

3.2.2 Estimaciones de la PSF

Transformada de Radon

Este método de estimación está dirigido a las degradaciones por movimiento lineal uniforme (véase Sección 2.2.1), cuya PSF se modela por los siguientes parámetros:

- ◊ ϕ : inclinación de movimiento
- ◊ d : longitud de movimiento.

Analizando el espectro de la imagen degradada $\mathcal{Y}(\omega_i, \omega_j)$ y, en particular, el módulo del mismo se demuestran las bases para estimar los parámetros anteriores.

Definición 3.6. Sea $\mathcal{Y}(\omega_i, \omega_j) \in \mathbb{C}$ la transformada de Fourier de la imagen degradada $y(i, j)$, entonces se define el espectro real $\mathcal{J}_y(\omega_i, \omega_j) \in \mathbb{R}$ como

$$\mathcal{J}_y(\omega_i, \omega_j) = \log(1 + |\mathcal{Y}(\omega_i, \omega_j)|),$$

cuyo objetivo es representar el módulo de $\mathcal{Y}(\omega_i, \omega_j)$ pero modificado por el logaritmo, dado que mejora el rango dinámico y evita valores negativos.

La Figura 3.7(b) muestra el espectro de la imagen emborronada *Barbara* con condiciones periódicas, obtenido tras aplicar la definición $\mathcal{J}_y(\omega_i, \omega_j)$ sobre la Figura 3.5(c). Se observan claramente las líneas oscuras provocadas por los ceros del filtro

de degradación que permiten estimar el ángulo ϕ del movimiento. El motivo de estas líneas rectas es la forma de función *sinc*¹¹ que adopta la PSF en el dominio de Fourier, como se comprueba en la Figura 3.7(a). Para calcular numéricamente el ángulo ϕ , se hace uso de la transformada de Radon [61] aplicada sobre el espectro $\mathcal{J}_y(\omega_i, \omega_j)$, i.e.

$$\mathcal{R}(\rho, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_y(\omega_i, \omega_j) \delta(\omega_i \cos \phi + \omega_j \sin \phi - \rho) d\omega_i d\omega_j. \quad (3.27)$$

Gracias a esta transformada, se obtiene la proyección del espectro sobre líneas rectas inclinadas un ángulo ϕ . Como $\mathcal{J}_y(\omega_i, \omega_j)$ presenta líneas paralelas precisamente sobre el ángulo de emborronamiento, la estimación $\hat{\phi}$ se corresponderá con aquella línea donde $\mathcal{R}(\rho, \hat{\phi})$ se haga máximo. La Figura 3.7(c) visualiza el resultado de la transformada de Radón en un rango de 0 a 180° y demuestra que el mayor valor de intensidad se alcanza sobre la vertical de $\hat{\phi} = 45^\circ$.

Para estimar la longitud de movimiento d se recurre a las propiedades de la función *sinc* en $\mathcal{H}(\omega_i, \omega_j)$. Concretamente, se puede demostrar que [61]

$$d = \frac{L_1}{\Delta d} \quad (3.28)$$

donde Δd simboliza la distancia entre dos líneas de ceros en el espectro $\mathcal{J}_y(\omega_i, \omega_j)$ y se asume una imagen cuadrada tal que $L_1 = L_2$.

La sencillez de este método para estimar la PSF tiene sin embargo la contrapartida en la robustez frente al ruido. A medida que la imagen emborronada se hace más ruidosa, los errores en las estimaciones de $\hat{\phi}$ y \hat{d} son mayores y su influencia en los resultados de restauración es muy acusada.

Valores propios

La estimación de la PSF en este caso se basa en aplicar la descomposición en valores singulares (SVD) de la Definición 2.10 directamente sobre la matriz de la imagen degradada $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{L_1 \times L_2}$ ($\tilde{L} = L$). Así pues,

$$\mathbf{Y} = \sum_{k=1}^{R_y} s_{k,y} \mathbf{u}_{k,y} \mathbf{v}_{k,y}^T, \quad (3.29)$$

donde $\text{rank}(\mathbf{Y}) = R_y$ y el subíndice y se ha añadido tanto a los valores $s_{r,y}$ como a los vectores singulares $\mathbf{u}_{r,y} \in \mathbb{R}^{L_1 \times 1}$, $\mathbf{v}_{r,y} \in \mathbb{R}^{L_2 \times 1}$ para asociarlos a la imagen degradada. Por otro lado, se realiza la descomposición de la matriz $\bar{\mathbf{H}} \in \mathbb{R}^{M_1 \times M_2}$ asociada a la máscara $h(i, j)$ de la PSF (no confundir con la matriz de convolución \mathbf{H} , sino que $\bar{\mathbf{H}} = \text{vec}^{-1}\{\mathbf{h}\}$). Dado que la dimensión de las máscara suele ser pequeña comparada con el tamaño total de la imagen $M \ll L$ y se trata de un filtro paso bajo con valores singulares descendentes, se realiza la siguiente aproximación

¹¹ $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x) / \pi x$.

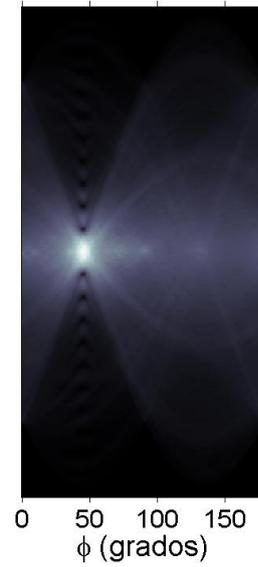
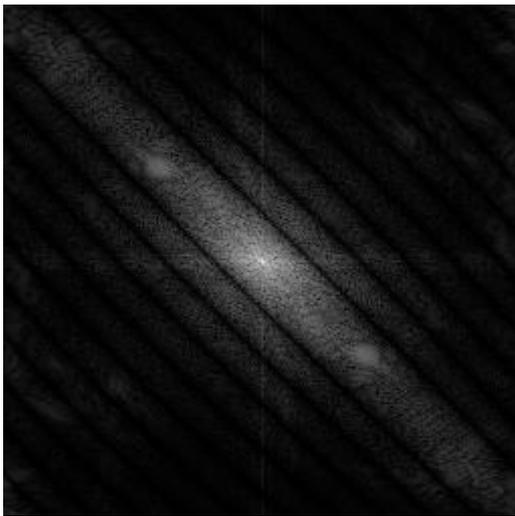
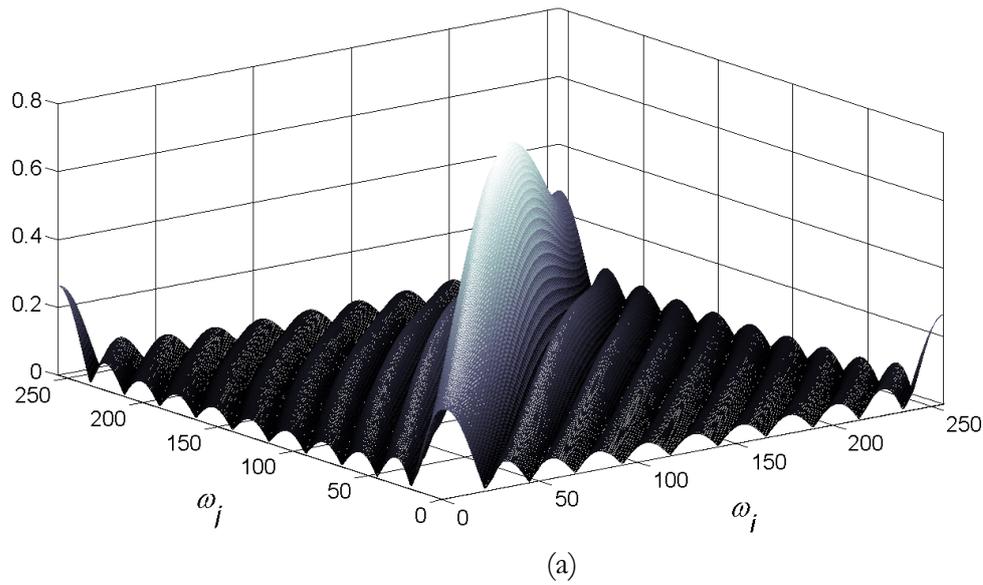


Figura 3.7: Espectro degradado de la imagen *Barbara* (b) según un filtro de degradación por movimiento uniforme de inclinación 45° (a). Las líneas paralelas producidas por los ceros de la PSF producen un máximo en la transformada de Radón (c).

$$\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{u}_{1,y} \mathbf{v}_{1,y}^T, \quad (3.30)$$

es decir, que sólo se considera el primer vector singular, tanto izquierdo como derecho. En este caso, $\mathbf{u}_{1,h} \in \mathbb{R}^{M_1 \times 1}$ y $\mathbf{v}_{1,y} \in \mathbb{R}^{M_2 \times 1}$

En la referencia [24] se puede encontrar una demostración más detallada sobre cómo se relacionan los vectores singulares de las expresiones (3.29) y (3.30). Concretamente, asumiendo condiciones frontera periódicas, se obtiene los siguientes resultados en el dominio de la frecuencia

$$\mathbf{u}_{1,h} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^R \mathbf{u}_{k,y}}{R\hat{\mathbf{u}}_x}} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_{1,h} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^R \mathbf{v}_{k,y}}{R\hat{\mathbf{v}}_x}}. \quad (3.31)$$

Por un lado, los vectores $\mathbf{u}_{1,h}, \mathbf{u}_{k,y} \in \mathbb{C}^{L_1 \times 1}$ y $\mathbf{v}_{1,h}, \mathbf{v}_{k,y} \in \mathbb{C}^{L_2 \times 1}$ son las transformadas de Fourier de los vectores singulares \mathbf{u} y \mathbf{v} para la PSF y la imagen degradada. Conviene destacar que al realizar la transformada inversa de los vectores $\mathbf{u}_{1,h}$ y $\mathbf{v}_{1,h}$ y quedarse con la parte real, las dimensiones son $L_1 \times 1$ y $L_2 \times 1$ respectivamente. En consecuencia, la PSF estimada tendría un tamaño equivalente a la imagen original $L_1 \times L_2$ y es necesario identificar dónde están los límites de la máscara. Este método de estimación suele trabajar con emborronamientos Gaussianos como los de la Sección 2.2.4, por lo que la búsqueda de las fronteras supone encontrar el valor máximo del filtro y, a partir de él, se definen los límites donde la PSF toma valores muy pequeños o negativos.

En la expresión (3.31) aparece un parámetro R que identifica el número de valores singulares de la imagen degradada que son considerados en el proceso. Tal y como se explicaba en la Sección 2.3.1, cuanto mayor es el número de valores singulares, mayor será la influencia del ruido pero menor cantidad de componentes de altas frecuencias serán usadas. Por ello, la elección del valor de R es una relación de compromiso resuelta de modo experimental en función de la cantidad de ruido.

Por último, indicar que las ecuaciones de este método requieren una estimación respecto a los valores singulares de la imagen original $\hat{\mathbf{u}}_x$ y $\hat{\mathbf{v}}_x$. En particular, se suele asumir un modelo de covarianza exponencial tal que [24]

$$\hat{\mathbf{u}}_x = \hat{\mathbf{v}}_x = \rho_R, \quad (3.32)$$

donde el parámetro ρ_R es el valor promedio de los R primeros coeficientes de correlación de la imagen original. La elección por tanto de ρ_R estará en conexión con el valor del parámetro R .

Si bien este método de estimación de la PSF, tiene un mejor comportamiento frente al ruido respecto al anterior, mantiene unas probabilidades de error que provocan desviaciones notables en los resultados de restauración.

Capítulo 4

Red neuronal MLP para imágenes observadas reales



La imagen observada \mathbf{y} en un sistema de adquisición real se corresponde con la región FOV de la imagen de convolución \mathbf{y} , en la que típicamente se asumen condiciones de frontera \mathbf{y}_{BC} para reducir los efectos del *boundary ringing*. Este capítulo presenta un nuevo algoritmo que pretende restaurar una imagen observada real sin necesidad de asumir BCs y, como novedad más importante, es capaz de reconstruir las fronteras desde el soporte FOV hasta \mathcal{L} .

Usando un nuevo modelo truncado real de imagen \mathbf{y}_{tru} , se describe en este capítulo una red neuronal MLP de la que se define su estructura, se especifica el proceso de ajuste de pesos de la red mediante el método de retropropagación y se presentan unos resultados experimentales comparando con algoritmos del Capítulo 2. El algoritmo se desarrolla para dos versiones de la función de coste $\mathcal{C}(\mathbf{x})$, ya sea con la norma ℓ_2 de Tikhonov o con el término de regularización por variación total, ambos particularizados al nuevo modelo truncado. En general, la red MLP se describe como un algoritmo iterativo en el que se repiten ciclos de restauración (proceso *forward*) y de degradación (proceso *backward*).

4.1 Formulación del problema

En la Sección 3.1 se mostró el modelo de degradación de un sistema de adquisición LSI en el que se asumen condiciones de frontera BCs para la imagen original, i.e.

$$\mathbf{y}_{BC} = \mathbf{H}_{BC}\mathbf{x} + \mathbf{n}. \quad (4.1)$$

Las dimensiones de esta ecuación se resumen sobre la Tabla 4.1 para los modelos **circulante** (BC periódica) y **aperiódico** (BC cero + extensión al tamaño de una convolución lineal $\tilde{\mathcal{L}}$). Para el caso de las condiciones de frontera reflexiva y antireflexiva, se mantiene el mismo tamaño de las variables que en el caso circulante.

El hecho de utilizar BCs implica asumir un modelo de degradación que contiene información en las fronteras, sin embargo estos píxeles no aparecen realmente en una imagen observada. Se define pues $\mathbf{y}(i, j)$ como el resultado de truncar el modelo de degradación al dominio FOV (véase la Definición 3.2 y la Definición 3.3). En particular, se utiliza una nueva imagen $\mathbf{y}_{tru} \in \mathbb{R}^{\tilde{\mathcal{L}} \times 1}$ que representa este mismo efecto de truncado sobre un modelo aperiódico y se asocia directamente con la imagen observada $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{V \times 1} = \text{vec}\{\mathbf{y}(i, j)\}$ como se verá a continuación. En esta memoria se le denomina **modelo truncado** real.

Definición 4.1. Sea $\mathbf{H}_a \in \mathbb{R}^{\tilde{\mathcal{L}} \times L}$ la matriz de convolución para el modelo de degradación aperiódico, entonces se define la imagen truncada $\mathbf{y}_{tru} \in \mathbb{R}^{\tilde{\mathcal{L}} \times 1}$ como

$$\mathbf{y}_{tru} = \text{trunc}\{\mathbf{H}_a\mathbf{x} + \mathbf{n}\},$$

donde el operador $\text{trunc}\{\cdot\}$ es responsable de eliminar (poner a cero) las fronteras que aparecen debido a las condiciones de frontera.

A partir de la Figura 3.3, se deduce que la región de truncado \mathcal{T} está definida como

$$\mathcal{T} = \tilde{\mathcal{L}} - \text{FOV}, \quad (4.2)$$

<i>Modelos</i>	size{x}	size{h}	size{H}	size{y}
		$L \times 1$	$M \times 1$	$\tilde{L} \times L$
Circulante	$L = L_1 \times L_2$	$M = M_1 \times M_2$ tal que $M_1 = (2B_1 + 1)$ $M_2 = (2B_2 + 1)$	$\tilde{L} = L$	
Aperiódico			$\tilde{L} = (L_1 + M_1 - 1) \times (L_2 + M_2 - 1)$	
Truncado			La imagen truncada \mathbf{y}_{tru} está definida en el soporte FOV cuya dimensión es $V = (L_1 - M_1 + 1) \times (L_2 - M_2 + 1)$ y el resto son ceros hasta la misma dimensión \tilde{L} del modelo aperiódico	

Tabla 4.1: Resumen de las dimensiones de las variables implicadas en el modelo de degradación circulante, aperiódico y truncado.

con un área $T = 4B_1 \times 4B_2$. Y, por tanto, la relación entre la imagen truncada $\mathbf{y}_{tru}(i, j)$ y la imagen observada real $\mathbf{y}(i, j)$ se expresa como

$$\mathbf{y}_{tru}(i, j) = \begin{cases} \mathbf{y}(i, j) & \forall (i, j) \in \text{FOV} \\ 0 & \forall (i, j) \in \mathcal{T} \end{cases}. \quad (4.3)$$

En este capítulo, se presenta un algoritmo que permite restaurar una imagen observada real \mathbf{y} (concretamente, \mathbf{y}_{tru}), pero sin necesidad de asumir ninguna hipótesis sobre la imagen original ni sobre sus condiciones de frontera. Los efectos de *ringing* que aparecerían debido a la discontinuidad en los límites de \mathcal{T} , son eliminados de la imagen restaurada sin utilizar ninguna BC. Y lo que es más importante, este algoritmo es capaz de reconstruir las fronteras para conseguir que la imagen restaurada $\hat{\mathbf{x}}$ tenga un soporte \mathcal{L} equivalente a la imagen original. Esto supone regenerar la información desde el dominio FOV de \mathbf{y} hasta \mathcal{L} . Así pues, se define el soporte de reconstrucción \mathcal{B} como

$$\mathcal{B} = \mathcal{L} - \text{FOV}, \quad (4.4)$$

cuyo área es $B = 2B_1 \times 2B_2$. La Figura 4.1 representa gráficamente los soportes de truncado \mathcal{T} coloreado en gris (a) para la imagen truncada \mathbf{y}_{tru} y el soporte de regeneración \mathcal{R} con una textura gris (b) para la imagen restaurada $\hat{\mathbf{x}}$.

Las redes neuronales están muy bien preparadas para conseguir este doble objetivo dentro de un mismo proceso: restaurar la imagen \mathbf{y} sin efectos de *ringing* y reconstruir las fronteras. Podría pensarse que las redes neuronales pueden aprender sobre el modelo de degradación real y así permiten que las fronteras de la imagen sean reconstruidas. Por esta razón, el algoritmo elegido usa un **perceptrón multicapa (MLP)** basado en la estrategia de *retro-propagación* como se verá más

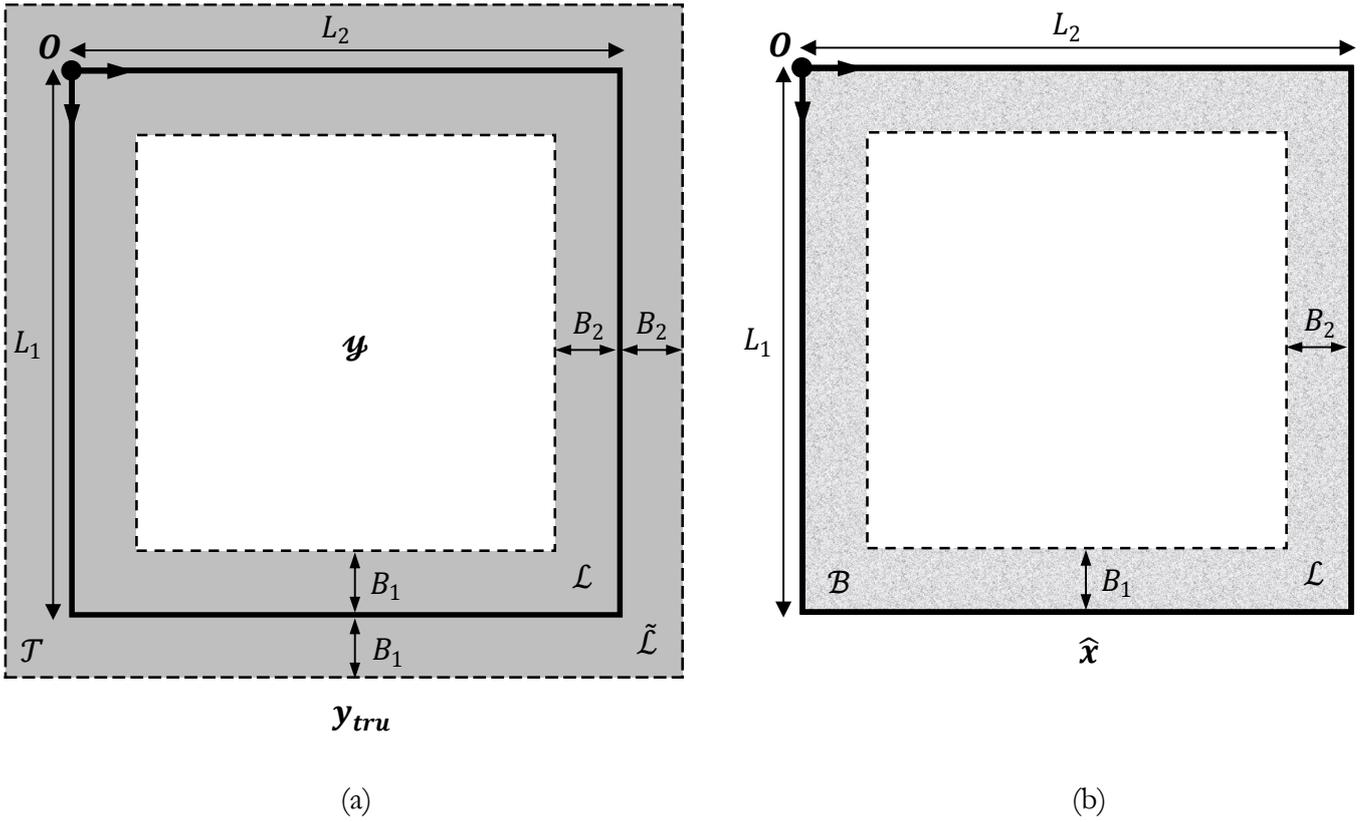


Figura 4.1: Definición del soporte truncado \mathcal{T} en (a) correspondiente a la zona de ceros coloreada en gris. En (b) se muestra una región con textura correspondiente al soporte de reconstrucción de fronteras \mathcal{B} .

adelante. En la literatura existen otras soluciones de restauración con redes neuronales Hopfield [74][88][38], pero no están aplicadas a este doble propósito y además suelen ser complejas en tiempo de procesamiento y de gran envergadura.

El objetivo que persigue la red MLP es minimizar una función de coste que vaya restaurando iterativamente la imagen de salida $\hat{\mathbf{x}}$, a partir de la imagen truncada \mathbf{y}_{tru} de la entrada. Dicha función se asocia con la función de coste $\mathcal{C}(\mathbf{x})$ de la restauración regularizada en la Definición 2.11, tanto para la norma ℓ_2 (Tikhonov) como para la norma ℓ_1 (TV), cobrando esta última un especial protagonismo en estudios recientes de redes Hopfield [95][102] por su buen comportamiento respecto a las altas frecuencias (bordes). Ahora bien, para trabajar con imágenes reales \mathbf{y} es necesario reescribir las expresiones de la función de coste $\mathcal{C}(\mathbf{x})$ de la Sección 2.3.2 para el modelo truncado \mathbf{y}_{tru} . Así pues,

◇ Regularización Tikhonov: (ℓ_2)

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y}_{tru} - \text{trunc}\{\mathbf{H}_a \mathbf{x}\}\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|\text{trunc}\{\mathbf{D}_a \mathbf{x}\}\|_2^2, \quad (4.5)$$

donde \mathbf{D}_a representa el modelo aperiódico del operador Laplaciano.

<i>Regularizador ℓ_2</i>				
<i>Modelos</i>	$\text{size}\{\hat{\mathbf{x}}\}$	$\text{size}\{\mathbf{d}\}$	$\text{size}\{\mathbf{D}\}$	$\text{size}\{\mathbf{D}\mathbf{x}\}$
		$N \times 1$	$U \times L$	$U \times 1$
Circulante	$L \times 1$	$N = N_1 \times N_2$	$U = L$	
Aperiódico			$U = \begin{pmatrix} L_1 + N_1 - 1 \\ L_2 + N_2 - 1 \end{pmatrix} \times$	
Truncado			<p>La imagen truncada $\mathbf{D}\mathbf{x}$ está definida en un soporte cuya dimensión es</p> $\begin{pmatrix} L_1 - N_1 + 1 \\ L_2 - N_2 + 1 \end{pmatrix}$ <p>y el resto son ceros hasta la misma dimensión U del modelo aperiódico</p>	
<i>Regularizador ℓ_1</i>				
<i>Modelos</i>	$\text{size}\{\hat{\mathbf{x}}\}$	$\text{size}\{\mathbf{d}^k\}$ $\text{size}\{\mathbf{d}^v\}$	$\text{size}\{\mathbf{D}^k\}$ $\text{size}\{\mathbf{D}^v\}$	$\text{size}\{\mathbf{D}^k\mathbf{x}\}$ $\text{size}\{\mathbf{D}^v\mathbf{x}\}$
		$N \times 1$	$U \times L$	$U \times 1$
Circulante	$L \times 1$	$N = N_1 \times N_2$	$\tilde{L} = L$	
Aperiódico			$U = \begin{pmatrix} L_1 + N_1 - 1 \\ L_2 + N_2 - 1 \end{pmatrix} \times$	
Truncado			<p>Las imágenes truncadas $\mathbf{D}^k\mathbf{x}$ y $\mathbf{D}^v\mathbf{x}$ están definidas en un soporte cuya dimensión es</p> $\begin{pmatrix} L_1 - N_1 + 1 \\ L_2 - N_2 + 1 \end{pmatrix}$ <p>y el resto son ceros hasta la misma dimensión U del modelo aperiódico</p>	

Tabla 4.2: Tamaño de las variables implicadas en el proceso de restauración usando los regularizadores ℓ_2 y ℓ_1 y particularizados a los modelos circulante, aperiódico y truncado.

- ◇ Regularización por variación total: (ℓ_1)

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y}_{tru} - \text{trunc}\{\mathbf{H}_a \mathbf{x}\}\|_2^2 + \lambda \text{TV}_{tru}(\mathbf{x}), \quad (4.6)$$

donde $\text{TV}_{tru}(\mathbf{x})$ se aproxima por el maximizador $Q_{TV}(\mathbf{x})$ de la ecuación (2.27), utilizando las versión aperiódicas de las variables \mathbf{D}_a , \mathbf{D}_a^h y \mathbf{D}_a^v e incluyendo el operador truncado tal que

$$\text{TV}_{tru}(\mathbf{x}) \leq Q_{TV}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{D}^T \boldsymbol{\Sigma}_\beta(\mathbf{x}) \text{trunc}\{\mathbf{D}\mathbf{x}\} + K. \quad (4.7)$$

Antes de pasar a describir en detalle la estructura de la MLP, la Tabla 4.2 muestra un resumen de las dimensiones utilizadas en las funciones de coste $\mathcal{C}(\mathbf{x})$ para cada regularizador y para los tres modelos de degradación. Se ha fijado el mismo tamaño $N = N_1 \times N_2$ para el soporte de ambos filtros de regularización y se ha utilizado la información provista en la Tabla 4.1. Todo el análisis matemático de la MLP va a estar dedicado al modelo truncado, pero podría particularizarse a cada modelo de degradación usando la respectiva imagen degradada \mathbf{y}_{BC} y la matriz de convolución \mathbf{H}_{BC} , además de eliminar la presencia del operador $\text{trunc}\{\cdot\}$ en las expresiones.

4.2 Definición de la MLP

La arquitectura de la MLP propuesta se ilustra sobre la Figura 4.2. La capa de entrada de la red está compuesta por \tilde{L} neuronas cuyas entradas y_1, y_2, \dots, y_L son respectivamente los \tilde{L} píxeles de la imagen degradada \mathbf{y} (\mathbf{y}_{tru} para el caso del modelo truncado). En la m -ésima iteración de la red, la capa de salida está compuesta por L neuronas cuyas salidas $\hat{x}_1^{(m)}, \hat{x}_2^{(m)}, \dots, \hat{x}_L^{(m)}$ son respectivamente los L píxeles de una aproximación $\hat{\mathbf{x}}^{(m)}$ a la imagen restaurada. Después de \bar{m} iteraciones, la red neuronal produce la imagen restaurada final tal que $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}^{(\bar{m})}$. Por otro lado, la capa oculta consta tan solo de dos neuronas, siendo esto suficiente para conseguir buenos resultados de restauración a la vez que se mantiene una baja complejidad computacional de la red. En cualquier caso, el próximo análisis se generalizará para cualquier número de capas ocultas y cualquier número de neuronas por capa.

El modo de funcionamiento de la red consiste en dos procesos repetidos por cada iteración m :

- ◇ *forward*: la entrada \mathbf{y} se procesa hacia la derecha de la red hasta conseguir una salida de restauración $\hat{\mathbf{x}}^{(m)}$. Este proceso simula el efecto de un filtro de restauración. En el modelo truncado \mathbf{y}_{tru} , esta operación supone además reconstruir las fronteras de $\hat{\mathbf{x}}^{(m)}$ dentro del soporte B de (4.4), sin necesidad de haber incluido información a priori sobre la imagen original ni ninguna estimación respecto a las fronteras desconocidas.

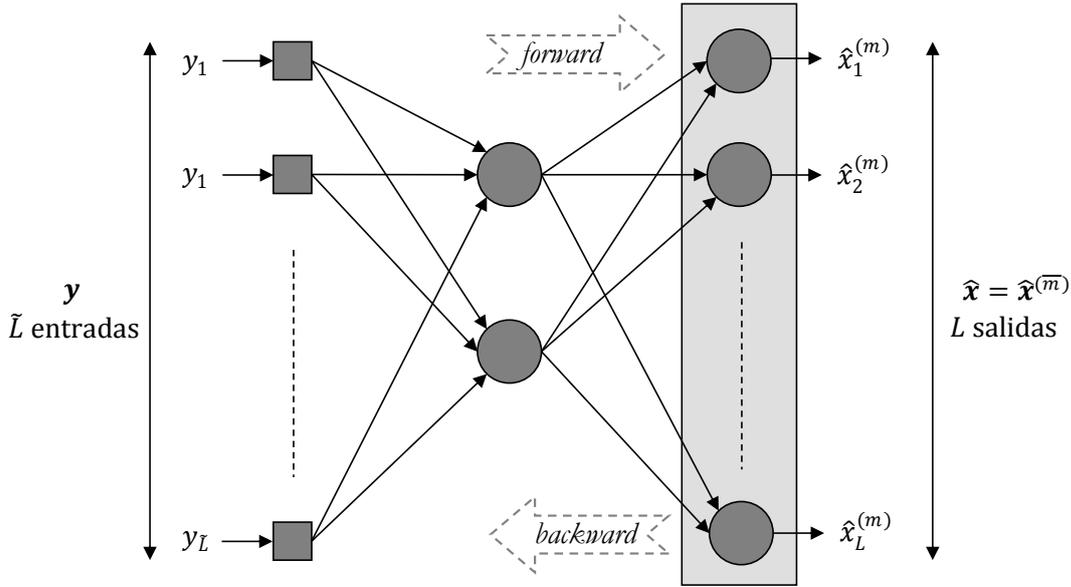


Figura 4.2: Arquitectura MLP adoptada para la restauración de imágenes en cualquiera de los modelos de degradación en \mathbf{y} . En el caso de imágenes observadas reales, se utiliza \mathbf{y}_{tru} .

- ◇ *backward*: con la salida $\hat{\mathbf{x}}^{(m)}$ anterior, se minimiza la función de coste regularizada $\mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}^{(m)})$ utilizada en la red y se actualiza de derecha a izquierda la configuración de la red como resultado de la minimización. Este proceso simula el efecto de un filtro de degradación. Para el caso del modelo truncado real, se van a usar las expresiones (4.5) y (4.6) de la función de coste.

Por tanto, la MLP se traduce en un algoritmo iterativo que simula por cada iteración tanto una aproximación al proceso de degradación (*backward*) como a la solución de restauración (*forward*), de tal forma que los resultados se van adaptando progresivamente a su valor óptimo según la función de coste $\mathcal{C}(\mathbf{x})$. A este funcionamiento le denominamos **ciclo de restauración-degradación**. Conviene destacar que la entrada a la red neuronal para cualquier iteración es siempre la imagen degradada \mathbf{y} , sin necesitar ningún tipo de entrenamiento previo de la red. Se hace notar igualmente que los conceptos *backward* y *forward* se están utilizando en sentido opuesto a lo que es común en la literatura de restauración como consecuencia de la arquitectura en cascada de la MLP.

El resultado de aplicar el modelo truncado \mathbf{y}_{tru} sobre la arquitectura de la Figura 4.2, significa obtener una imagen restaurada $\hat{\mathbf{x}}$ en condiciones reales \mathbf{y} basándose en una estrategia de minimización de energía global, tanto para reconstruir las fronteras como para adaptar el centro de la imagen a la solución óptima. En consecuencia, el artefacto de *ringing* se hace insignificante en el resultado como se verá más adelante.

Siguiendo una nomenclatura similar al modelo lexicográfico de la Definición 2.4, se define cualquier capa genérica de la red neuronal tal y como se ilustra en la Figura 4.3.

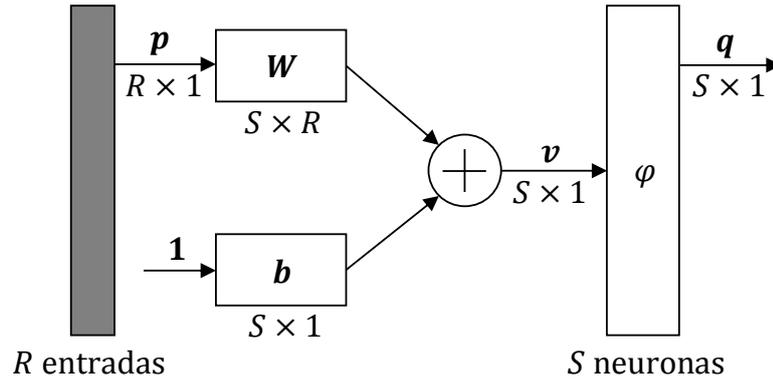


Figura 4.3: Modelo de una capa en la MLP.

Definición 4.2. Sea una capa genérica de la red neuronal MLP compuesta por R entradas y S neuronas, entonces se define un vector de entrada $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{R \times 1}$ y un vector de salida $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{S \times 1}$ relacionados por las siguientes ecuaciones de transferencia

$$\mathbf{q} = \varphi\{\mathbf{v}\} \text{ tal que } \mathbf{v} = \mathbf{W}\mathbf{p} + \mathbf{b},$$

donde $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{S \times R}$ representa la matriz de pesos sinápticos, $\varphi: \mathbb{R}^L \rightarrow \mathbb{R}$ es la función de transferencia y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{S \times 1}$ es un vector de ajuste.

En el modelo de MLP que se utiliza en la memoria se descarta el vector de ajuste y se pone a ceros, i.e. $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Con respecto a la función de transferencia φ , se elige la expresión log-sigmoidal diferenciable

$$\varphi\{\mathbf{v}\} = \frac{1}{1 + e^{-v}}, \quad (4.8)$$

que está definida en el dominio $0 \leq \varphi\{\mathbf{v}\} \leq 1$.

Todas las capas de la MLP están interconectadas de forma secuencial hasta formar una estructura en cascada. Así pues, sean dos capas i e $i + 1$ entonces se cumple que

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{p}_{i+1} \text{ y } S_i = R_{i+1}. \quad (4.9)$$

Aunque estos subíndices de las capas deberían indicarse en todas las variables, por simplicidad en la notación se van a omitir de todas las fórmulas del capítulo siempre que se deduzcan por contexto.

4.3 Ajuste de la red neuronal

El objetivo de esta sección es mostrar el procedimiento de ajustar los pesos sinápticos de la matriz \mathbf{W}_i en cada capa a medida que la red neuronal va iterando. Concretamente, este proceso se aplica en la fase de *backward* con el propósito de minimizar la función de coste $\mathcal{C}(\mathbf{x})$ para las expresiones (4.5) y (4.6) y se conoce como **retropropagación**. A diferencia de la minimización utilizada en la Definición 2.8 que obtiene directamente la imagen restaurada $\hat{\mathbf{x}}$, la minimización en este caso

busca obtener iterativamente el valor de \mathbf{W}_i que minimiza $\mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}})$ en la capa de salida. En particular, se usa el algoritmo de gradiente descendente de la ecuación (2.53) particularizada como

$$\mathbf{W}_i^{(m+1)} = \mathbf{W}_i^{(m)} - \eta \frac{\partial \mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}^{(m)})}{\partial \mathbf{W}_i^{(m)}}, \quad (4.10)$$

donde $\mathbf{W}_i^{(m)}$ se corresponde con la matriz de pesos de la capa i en la m -ésima iteración de la red y η se conoce como el parámetro de aprendizaje. Al término $\partial \mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}^{(m)}) / \partial \mathbf{W}_i^{(m)}$ se le conoce como *matriz gradiente*. Es importante señalar que cualquiera que sea la capa i , su matriz de pesos se calcula en relación al valor de la función de coste $\mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}})$ en la capa de salida. Por esta razón, se empieza aplicando el proceso de *backward* desde la capa de salida y se propaga hacia la izquierda de la MLP.

A continuación, se van a analizar las expresiones de la matriz gradiente de la ecuación (4.10) empezando con la capa de salida y luego para cualquier otra capa oculta i . Además, se subdividirá el análisis para las dos versiones de la MLP con regularización ℓ_2 y ℓ_1 .

4.3.1 Capa de salida

Regularizador ℓ_2

En primer lugar, se definen los vectores $\mathbf{e}^{(m)}$ y $\mathbf{r}^{(m)}$ para los respectivos términos de error y de regularización en la capa de salida después de m iteraciones. Así pues, a partir de la expresión (4.5) se deduce que

$$\mathbf{e}^{(m)} = \mathbf{y}_{tru} - \text{trunc}\{\mathbf{H}_a \hat{\mathbf{x}}^{(m)}\}, \quad (4.11)$$

$$\mathbf{r}^{(m)} = \text{trunc}\{\mathbf{D}_a \hat{\mathbf{x}}^{(m)}\}, \quad (4.12)$$

y se describe la función de coste para la regularización Tikhonov como

$$\mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}^{(m)}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{e}^{(m)}\|_2^2 + \frac{1}{2} \lambda \|\mathbf{r}^{(m)}\|_2^2. \quad (4.13)$$

Usando la regla de la cadena para matrices con composición de un vector [14], la matriz gradiente conduce a

$$\frac{\partial \mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}^{(m)})}{\partial \mathbf{W}^{(m)}} = \frac{\partial \mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}^{(m)})}{\partial \mathbf{v}^{(m)}} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}^{(m)}}{\partial \mathbf{W}^{(m)}} = \boldsymbol{\delta}^{(m)} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}^{(m)}}{\partial \mathbf{W}^{(m)}}, \quad (4.14)$$

donde $\boldsymbol{\delta}^{(m)} = \partial \mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}^{(m)}) / \partial \mathbf{v}^{(m)}$ se conoce como el *vector de gradiente local*, el cual se expande nuevamente para la regla de la cadena en vectores [27]

$$\boldsymbol{\delta}^{(m)} = \frac{\partial \mathbf{q}^{(m)}}{\partial \mathbf{v}^{(m)}} \cdot \frac{\partial \mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}^{(m)})}{\partial \mathbf{q}^{(m)}}. \quad (4.15)$$

Dado que los vectores \mathbf{q} y \mathbf{v} están relacionadas elemento a elemento por la función de transferencia φ y, en consecuencia, $\partial q_k^{(m)}/\partial v_l^{(m)} = 0$ para cualquier $k \neq l$, entonces

$$\frac{\partial \mathbf{q}^{(m)}}{\partial \mathbf{v}^{(m)}} = \text{diag}(\varphi'\{\mathbf{v}^{(m)}\}), \quad (4.16)$$

que representa una matriz diagonal cuyos autovalores son calculados mediante la derivada primera de la función de transferencia, i.e.

$$\varphi'\{v\} = \frac{e^{-v}}{(1 + e^{-v})^2}. \quad (4.17)$$

Se recuerda que $\mathbf{q}^{(m)}$ en la capa de salida es en realidad $\hat{\mathbf{x}}^{(m)}$ tal y como aparece en la Figura 4.2. Así pues, se puede calcular el término $\partial \mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}^{(m)})/\partial \mathbf{q}^{(m)}$ de la ecuación (4.15) aplicando operaciones matriciales usando las expresiones (4.11), (4.12) y (4.13). Un análisis más detallado se puede encontrar en la Demostración 4.5.1 y conduce a

$$\frac{\partial \mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}^{(m)})}{\partial \mathbf{q}^{(m)}} = \frac{\partial \mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}^{(m)})}{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(m)}} = -\mathbf{H}_a^T \mathbf{e}^{(m)} + \lambda \mathbf{D}_a^T \mathbf{r}^{(m)}. \quad (4.18)$$

Según la Tabla 4.1 y la Tabla 4.2, se puede demostrar que la ecuación anterior representa un vector de tamaño $L \times 1$. Al combinar con la matriz diagonal de (4.16), se puede reescribir el vector gradiente local $\boldsymbol{\delta}^{(m)}$ como

$$\boldsymbol{\delta}^{(m)} = \varphi'\{\mathbf{v}^{(m)}\} \circ (-\mathbf{H}_a^T \mathbf{e}^{(m)} + \lambda \mathbf{D}_a^T \mathbf{r}^{(m)}), \quad (4.19)$$

donde \circ denota el producto de Hadamard entre vectores, es decir, elemento a elemento.

Para completar el análisis de la matriz gradiente, se necesita desarrollar el término $\partial \mathbf{v}^{(m)}/\partial \mathbf{W}^{(m)}$ de la ecuación (4.14). Para ello, se utiliza la Definición 4.2 de la MLP para $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ y se llega a

$$\frac{\partial \mathbf{v}^{(m)}}{\partial \mathbf{W}^{(m)}} = \frac{\partial \mathbf{W}^{(m)} \mathbf{p}^{(m)}}{\partial \mathbf{W}^{(m)}} = (\mathbf{p}^{(m)})^T, \quad (4.20)$$

que a su vez se corresponde con el vector de salida $\mathbf{q}_{i-1}^{(m)}$ de la capa oculta conectada a la capa de salida de la red, esto es

$$\frac{\partial \mathbf{v}^{(m)}}{\partial \mathbf{W}^{(m)}} = (\mathbf{q}_{i-1}^{(m)})^T. \quad (4.21)$$

Juntando todos los resultados anteriores sobre la expresión del algoritmo de gradiente descendente, se obtiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_i^{(m+1)} &= \mathbf{W}^{(m)} - \eta \boldsymbol{\delta}^{(m)} (\mathbf{q}_{i-1}^{(m)})^T = \\ &= \mathbf{W}^{(m)} - \eta [\varphi'\{\mathbf{v}^{(m)}\} \circ (-\mathbf{H}_a^T \mathbf{e}^{(m)} + \lambda \mathbf{D}_a^T \mathbf{r}^{(m)})] (\mathbf{q}_{i-1}^{(m)})^T. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Regularizador ℓ_1

Por analogía al regularizador anterior, se definen los términos de error y de regularización con respecto al problema (4.6) como

$$\mathbf{e}^{(m)} = \mathbf{y}_{tru} - \text{trunc}\{\mathbf{H}_a \hat{\mathbf{x}}^{(m)}\}, \quad (4.23)$$

$$\mathbf{r}^{(m)} = \text{trunc}\{\mathbf{D}_a \hat{\mathbf{x}}^{(m)}\}, \quad (4.24)$$

donde en este caso \mathbf{D}_a se compone de los operadores de primer orden horizontal \mathbf{D}_a^h y vertical \mathbf{D}_a^v según la expresión (2.28). El operador $\text{trunc}\{\cdot\}$ funciona aplicándose individualmente sobre $\text{trunc}\{\mathbf{D}_a^h \hat{\mathbf{x}}^{(m)}\}$ y $\text{trunc}\{\mathbf{D}_a^v \hat{\mathbf{x}}^{(m)}\}$, y uniéndose posteriormente como establece (2.28). Con respecto a la función de coste, se define según el maximizador $Q_{TV}(\mathbf{x})$ utilizado por Bioucas et al. en la ecuación (2.27). Así pues,

$$\mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}^{(m)}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{e}^{(m)}\|_2^2 + \lambda Q_{TV}(\hat{\mathbf{x}}^{(m)}). \quad (4.25)$$

Los mismos pasos de la sección anterior se pueden dar ahora para determinar la expresión de la matriz gradiente $\partial \mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}^{(m)}) / \partial \mathbf{W}^{(m)}$ en la regularización por variación total. En particular, cuando se llega a la resolución de la derivada $\partial \mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}^{(m)}) / \partial \mathbf{q}^{(m)}$ se aprovechan las propiedades cuadráticas de la ecuación (2.27) y la similitud con (4.18) como para obtener

$$\frac{\partial \mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}^{(m)})}{\partial \mathbf{q}^{(m)}} = \frac{\partial \mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}^{(m)})}{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(m)}} = -\mathbf{H}_a^T \mathbf{e}^{(m)} + \lambda \mathbf{D}_a^T \boldsymbol{\Sigma}_\beta(\hat{\mathbf{x}}^{(m)}) \mathbf{r}^{(m)}, \quad (4.26)$$

donde la matriz variante espacial $\boldsymbol{\Sigma}_\beta(\hat{\mathbf{x}}^{(m)})$ en (2.29) es la diferencia respecto a la regularización ℓ_2 . Así pues, se obtiene una expresión para el vector gradiente local como

$$\boldsymbol{\delta}^{(m)} = \varphi'\{\mathbf{v}^{(m)}\} \circ (-\mathbf{H}_a^T \mathbf{e}^{(m)} + \lambda \mathbf{D}_a^T \boldsymbol{\Sigma}_\beta(\hat{\mathbf{x}}^{(m)}) \mathbf{r}^{(m)}). \quad (4.27)$$

Finalmente, se llega a la expresión de la matriz de pesos sinápticos para el caso de la regularización ℓ_1 como

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_i^{(m+1)} &= \mathbf{W}^{(m)} - \eta \boldsymbol{\delta}^{(m)} (\mathbf{q}_{i-1}^{(m)})^T = \\ &= \mathbf{W}^{(m)} - \eta [\varphi'\{\mathbf{v}^{(m)}\} \circ (-\mathbf{H}_a^T \mathbf{e}^{(m)} + \lambda \mathbf{D}_a^T \boldsymbol{\Sigma}_\beta(\hat{\mathbf{x}}^{(m)}) \mathbf{r}^{(m)})] (\mathbf{q}_{i-1}^{(m)})^T. \end{aligned} \quad (4.28)$$

4.3.2 Cualquier capa oculta i

Para poder identificar el número de capa oculta i , se incluyen los subíndices de las variables dentro de la expresión de la matriz gradiente en (4.10), tal que

$$\frac{\partial \mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}^{(m)})}{\partial \mathbf{W}_i^{(m)}} = \frac{\partial \mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}^{(m)})}{\partial \mathbf{v}_i^{(m)}} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i^{(m)}}{\partial \mathbf{W}_i^{(m)}} = \boldsymbol{\delta}_i^{(m)} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i^{(m)}}{\partial \mathbf{W}_i^{(m)}}, \quad (4.29)$$

<i>Modelos</i>		
<i>Regularizador</i>	ℓ_2	ℓ_1
$\text{size}\{\mathbf{p}^{(m)}\}$	$\mathbf{p}^{(m)} = \mathbf{z}_{i-1}^{(m)} \Rightarrow \text{size}\{\mathbf{p}^{(m)}\} = S_{i-1} \times 1$	
$\text{size}\{\mathbf{W}^{(m)}\}$	$L \times S_{i-1}$	
$\text{size}\{\mathbf{v}^{(m)}\}$	$L \times 1$	
$\text{size}\{\mathbf{z}^{(m)}\}$	$\mathbf{z}^{(m)} = \hat{\mathbf{x}}^{(n)} \Rightarrow \text{size}\{\mathbf{z}^{(m)}\} = L \times 1$	
$\text{size}\{\mathbf{e}^{(m)}\}$	$\tilde{L} \times 1$	
$\text{size}\{\mathbf{r}^{(m)}\}$	$U \times 1$	$\text{size}\{\mathbf{D}\} = 2U \times L \Rightarrow$ $\text{size}\{\mathbf{r}^{(m)}\} = 2U \times 1$ y $\text{size}\{\boldsymbol{\Sigma}_\beta\} = 2U \times 2U$
$\text{size}\{\boldsymbol{\delta}^{(m)}\}$	$L \times 1$	

Tabla 4.3: Resumen de dimensiones para la capa de salida de la MLP.

y usando la expresión que fue demostrada en (4.21), entonces

$$\frac{\partial \mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}^{(m)})}{\partial \mathbf{W}_i^{(m)}} = \boldsymbol{\delta}_i^{(m)} (\mathbf{q}_{i-1}^{(m)})^T. \quad (4.30)$$

Ahora se expande el gradiente local $\boldsymbol{\delta}_i^{(m)}$ por medio de la regla de la cadena para vectores como sigue

$$\boldsymbol{\delta}_i^{(m)} = \frac{\partial \mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}^{(m)})}{\partial \mathbf{v}_i^{(m)}} = \frac{\partial \mathbf{q}_i^{(m)}}{\partial \mathbf{v}_i^{(m)}} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_{i+1}^{(m)}}{\partial \mathbf{q}_i^{(m)}} \cdot \frac{\partial \mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}^{(m)})}{\partial \mathbf{v}_{i+1}^{(m)}}, \quad (4.31)$$

donde $\partial \mathbf{q}_i^{(m)} / \partial \mathbf{v}_i^{(m)}$ es la misma matriz diagonal de (4.16), cuyos autovalores están representados por $\varphi'\{\mathbf{v}_i^{(m)}\}$, y $\partial \mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}^{(m)}) / \partial \mathbf{v}_{i+1}^{(m)}$ denota el gradiente local $\boldsymbol{\delta}_{i+1}^{(m)}$ de capa conectada a i en la estructura *feed-forward*. Con respecto al término $\partial \mathbf{v}_{i+1}^{(m)} / \partial \mathbf{q}_i^{(m)}$, se puede obtener inmediatamente por la Definición 4.2 que

$$\frac{\partial \mathbf{v}_{i+1}^{(m)}}{\partial \mathbf{q}_i^{(m)}} = \frac{\partial \mathbf{W}_{i+1}^{(m)} \mathbf{p}_{i+1}^{(m)}}{\partial \mathbf{q}_i^{(m)}} = \frac{\partial \mathbf{W}_{i+1}^{(m)} \mathbf{q}_i^{(m)}}{\partial \mathbf{q}_i^{(m)}} = (\mathbf{W}_{i+1}^{(m)})^T. \quad (4.32)$$

En consecuencia, se llega a que el gradiente local se expresa como

$$\boldsymbol{\delta}_i^{(m)} = \varphi'\{\mathbf{v}_i^{(m)}\} \left((\mathbf{W}_{i+1}^{(m)})^T \boldsymbol{\delta}_{i+1}^{(m)} \right), \quad (4.33)$$

que se puede simplificar usando el producto de Hadamard, después de verificar que la expresión $(\mathbf{W}_{i+1}^{(m)})^T \boldsymbol{\delta}_{i+1}^{(m)}$ representa un vector de dimensión $R^{i+1} \times 1 = S^i \times 1$

$$\delta_i^{(m)} = \varphi' \{v_i^{(m)}\} \circ \left((\mathbf{W}_{i+1}^{(m)})^T \delta_{i+1}^{(m)} \right). \quad (4.34)$$

Finalmente, se proporciona la ecuación para calcular la matriz de pesos sinápticos en cualquier capa oculta i

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_i^{(m+1)} &= \mathbf{W}_i^{(m)} - \eta \delta_i^{(m)} (\mathbf{q}_{i-1}^{(m)})^T = \\ &= \mathbf{W}_i^{(m)} - \eta \left[\varphi' \{v_i^{(m)}\} \circ \left((\mathbf{W}_{i+1}^{(m)})^T \delta_{i+1}^{(m)} \right) \right] (\mathbf{q}_{i-1}^{(m)})^T, \end{aligned} \quad (4.35)$$

la cual está principalmente basada en el gradiente local $\delta_{i+1}^{(m)}$ de la capa conectada a continuación $i + 1$.

Merece atención mencionar que no se ha hecho ninguna distinción entre regularizadores dentro de esta sección. De hecho, el término $\delta_{i+1}^{(m)}$ en la ecuación (4.35) es el encargado de propagar qué regularizador se ha usado al procesar la capa de salida. Es en este punto donde se evidencia la denominación del algoritmo como retropropagación.

4.3.3 Algoritmo

Como se ha descrito en la Sección 4.2, la red MLP lleva a cabo una sucesión de procesos de *backward* y *forward* por cada iteración m . En primer lugar, el conjunto de capas conectadas en cascada propagan la imagen degradada \mathbf{y} desde la capa de entrada hasta la capa de salida por medio de la Definición 4.2. Seguidamente, las matrices de pesos sinápticos $\mathbf{W}_i^{(m+1)}$ son recalculadas de derecha a izquierda para cada capa, de tal forma que estén preparadas para el proceso de *forward* de la siguiente iteración.

El pseudocódigo de la Tabla 4.4 resume el algoritmo para los regularizadores ℓ_1 y ℓ_2 en una MLP compuesta de J capas. Se puede observar una variable denominada *ReglaParada* que denota una condición que se cumple si el número de iteraciones supera un máximo; o la función de coste $\mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}^{(m)})$ converge y, por tanto, el incremento $\Delta\mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}^{(m)})$ es menor que un umbral; o, incluso, si la función $\mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}^{(m)})$ comienza a crecer. Si cualquiera de estas condiciones se hace verdadera, el algoritmo finaliza y la imagen a la salida de la red es la imagen restaurada obtenida $\hat{\mathbf{x}} := \hat{\mathbf{x}}^{(\bar{m})}$.

4.3.4 Reconstrucción de fronteras

Particularizando el algoritmo a dos capas $J = 2$, se llega a un esquema de la MLP como el que aparece en la Figura 4.4. Se ha resaltado cómo las fronteras son reconstruidas desde un tamaño FOV de imagen observada \mathbf{y} (el resto de \mathbf{y}_{tru} son ceros) hasta el tamaño L de la imagen observada. Además, se observará en los resultados de la Sección 4.4 cómo los efectos del *boundary ringing* son eliminados de la imagen observada mediante la minimización de $\mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}^{(m)})$, en comparación con otros métodos de la literatura donde estos artefactos son críticos al trabajar directamente con \mathbf{y} .

Algoritmo: MLP con regularizador ℓ
Inicialización: $\mathbf{p}_1 = \mathbf{y} \ \forall m$ y $\mathbf{W}_i^{(0)} = \mathbf{0} \ 1 \leq i < J$
<pre> 1: $n := 0$ 2: while <i>ReglaParada</i> no se cumpla do 3: for $i := 0$ to J do /* <i>Forward</i> */ 4: $\mathbf{v}_i := \mathbf{W}_i \mathbf{p}_i$ 5: $\mathbf{q}_i := \varphi\{\mathbf{v}_i\}$ 6: end for /* $\hat{\mathbf{x}}^{(m)} := \mathbf{z}_J$ */ 7: for $i := J$ to 1 do /* <i>Backward</i> */ 8: if $i := J$ then /* <i>Capa de salida</i> */ 9: if $\ell = \ell_2$ then 10: Calcular $\delta_j^{(m)}$ de (4.19) 11: Calcular $\mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}^{(m)})$ de (4.13) 12: elseif $\ell = \ell_1$ then 13: Calcular $\delta_j^{(m)}$ de (4.27) 14: Calcular $\mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}^{(m)})$ de (4.25) 15: end if 16: else 17: $\delta_i^{(m)} := \varphi'\{\mathbf{v}_i^{(m)}\} \circ \left((\mathbf{W}_{i+1}^{(m)})^T \delta_{i+1}^{(m)} \right)$ 18: end if 19: $\mathbf{W}_i^{(m+1)} := \mathbf{W}_i^{(m)} - \eta \delta_i^{(m)} (\mathbf{q}_{i-1}^{(m)})^T$ 20: end for 21: $m := m + 1$ 23: end while /* $\hat{\mathbf{x}} := \hat{\mathbf{x}}^{(\bar{m})}$ */ </pre>

Tabla 4.4: Algoritmo de la red MLP para los regularizadores ℓ_1 y ℓ_2 .

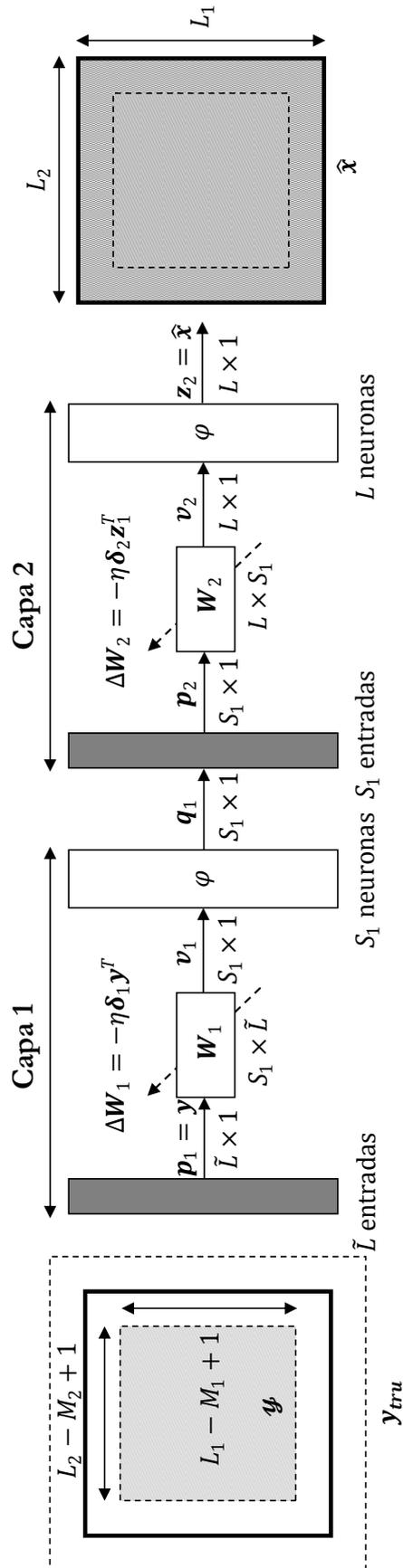


Figura 4.4: Algoritmo MLP usado en los experimentos con $J = 2$.

4.3.5 Ajuste de los parámetros λ y η

Al igual que ocurría en los algoritmos del Capítulo 2, el parámetro de regularización λ tiene un papel determinante en la calidad de restauración de la red neuronal, para no tener soluciones sobre-regularizadas ni magnificadas por ruido. Concretamente, la MLP recurre a los algoritmos que provee el paradigma Bayesiano y que se presentaron en la Sección 2.3.5, para asignar un valor de λ de forma iterativa. Así pues,

◇ ℓ_2 : ecuación (2.67)

$$\begin{aligned}\alpha^{(m)} &= \frac{1}{\bar{L}} \|\mathbf{r}^{(m)}\|_2^2 + \frac{1}{L} \text{tr}(\mathbf{Q}^{-1}(\alpha^{(m-1)}, \beta^{(m-1)}) \mathbf{D}^T \mathbf{D}) \\ \beta^{(m)} &= \frac{1}{\bar{L}} \|\mathbf{e}^{(m)}\|_2^2 + \frac{1}{L} \text{tr}(\mathbf{Q}^{-1}(\alpha^{(m-1)}, \beta^{(m-1)}) \mathbf{H}^T \mathbf{H})\end{aligned}, \quad (4.36)$$

tal que $\lambda^{(m)} = \alpha^{(m)} / \beta^{(m)}$. Dado que calcular la inversa de la matriz $\mathbf{Q}(\alpha^{(m-1)}, \beta^{(m-1)})$ es una operación muy compleja, se recurre a aproximar el segundo término de las ecuaciones (4.36) considerando que \mathbf{D} y \mathbf{H} son matrices circulantes por bloques cualquiera que sea el modelo de degradación empleado, incluido el truncado. Esto significa que se puede procesar de forma eficiente la inversión de matrices con operaciones en el dominio de la frecuencia vía FFTs. En cualquier caso, se podría haber usado un método iterativo para determinar progresivamente la matriz inversa como en [25].

◇ ℓ_1 : ecuación (2.69)

$$\lambda^{(m)} = \frac{\sigma_n^2 (\mu + \theta L)}{\text{TV}_{\text{tru}}\{\hat{\mathbf{x}}^{(m)}\} + \varphi}, \quad (4.37)$$

donde los parámetros (μ, φ) tienen poca importancia para el cálculo de $\lambda^{(m)}$ dado que $\mu \ll \theta L$ y $\varphi \ll \text{TV}_{\text{tru}}\{\hat{\mathbf{x}}^{(m)}\}$. Con respecto a la constante $0 < \theta < 1$, su valor es ajustado de forma heurística.

Como resultado del proceso iterativo, el valor de $\lambda^{(m)}$ se calcula por cada iteración m y se va adaptando paulatinamente según evoluciona la red. Así pues, cuando la solución $\hat{\mathbf{x}}^{(m)}$ converge a la imagen restaurada final $\hat{\mathbf{x}}^{(\bar{m})}$, el parámetro de regularización también converge a un valor óptimo. Para obtener mejores resultados en la MLP, una segunda etapa completa de la red neuronal se ejecuta fijando el parámetro a $\lambda^{(\bar{m})}$, resultado de la primera etapa.

El otro parámetro que interviene en el algoritmo de la red neuronal es la velocidad de aprendizaje η . Se verá en la Sección 4.4 que el valor de η tiene menor trascendencia sobre el resultado de restauración, que la que tiene el parámetro de regularización λ . De hecho, su principal misión es incrementar o reducir el número total de iteraciones \bar{m} a partir del cual la red neuronal converge en término de $\mathcal{C}(\mathbf{x})$. Entonces, por simplicidad, se asumen dos valores $\eta = 1$ y $\eta = 2$ a asignar dependiendo del tamaño de la imagen.

4.4 Resultados experimentales

Un número considerable de experimentos han sido llevados a cabo con la MLP usando varias imágenes y PSFs estándares de la literatura de restauración, tal y como se mostrará en esta sección. El objetivo es verificar la calidad de restauración y las propiedades de reconstrucción de fronteras al considerar una imagen real observada \mathbf{y} , que se representa en el algoritmo como un modelo de degradación truncado \mathbf{y}_{tru} . Además, se observará el comportamiento de la red cuando se usan las diferentes condiciones de frontera en los modelos de degradación. De ahora en adelante, se referenciará a los modelos truncado, aperiódico y circulante respectivamente como TRU, APE y CIR.

La Figura 4.5 muestra la imagen de *Lena* con tamaño 256×256 píxeles correspondiente al Experimento 1, la cual está emborronada por los tres modelos de degradación anteriores. Se puede comprobar el efecto del truncamiento con ceros de TRU (a), la expansión de la convolución lineal en APE (b) y la hipótesis periódica de las fronteras en CIR (c) (recuérdese la Figura 4.1). Se observa entonces el mayor tamaño de $\tilde{L} = 262 \times 262$ de APE y TRU frente al tamaño original $L = 256 \times 256$ para CIR. Sin embargo, es conveniente remarcar que la imagen TRU de la Figura 4.5 corresponde al modelo \mathbf{y}_{tru} de (4.3) y la imagen real observada \mathbf{y} es la región interior definida en el dominio FOV = 250×250 . Los ceros exteriores a esta región son una particularidad de la forma en que se maneja el modelo truncado en la red neuronal, pero nada tienen que ver con los datos reales de emborronamiento.

Como se vio en las secciones anteriores, el algoritmo MLP tiene dos implementaciones diferentes en función del término de regularización usado en la función de coste $\mathcal{C}(\mathbf{x})$, ya sea Tikhonov (norma ℓ_2) o TV (norma ℓ_1). Entonces, se particulariza la máscara \mathbf{d} del operador \mathbf{D} Laplaciano en (4.5) como

$$d(i, j) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & -20 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix},$$

y las máscaras Sobel [34] son utilizadas para aproximar las máscaras horizontal \mathbf{d}^h y \mathbf{d}^v de los filtros gradiente para la regularización ℓ_1 en (4.6)

$$d^h(i, j) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$d^v(i, j) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

En consecuencia, el mismo tamaño de soporte $N = 3 \times 3$ es utilizado para ambas regularizaciones.

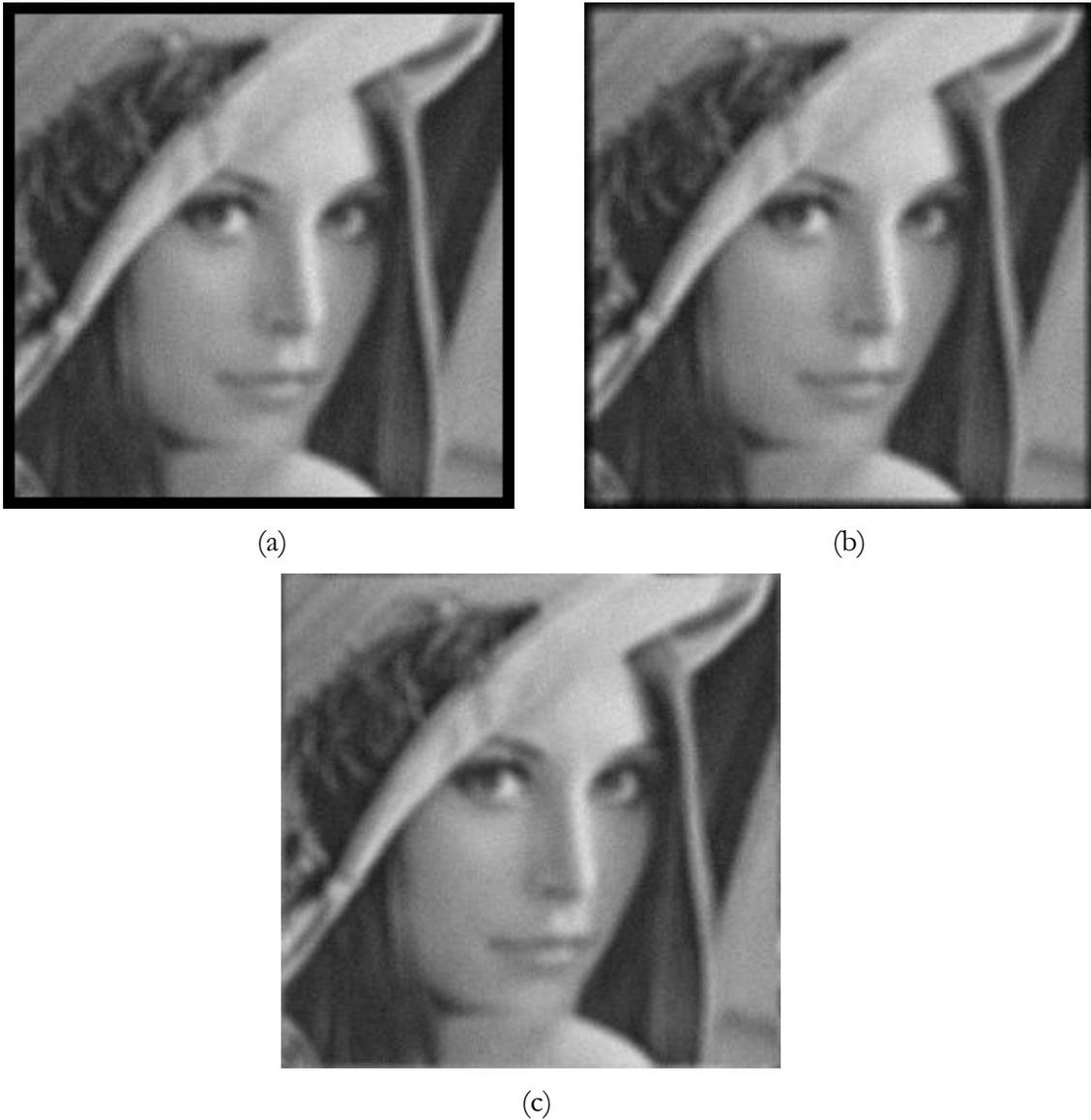


Figura 4.5: Imagen *Lena* de tamaño 256×256 degradada por una PSF uniforme 7×7 y $BSNR = 20\text{dB}$: (a) TRU, (b) APE y (c) CIR.

Como se indicó en la Figura 4.4, la red MLP a utilizar consta de dos capas de neuronas, i.e., $J = 2$, mientras que los vectores de ajuste son ignorados y la misma función de transferencia log-sigmoidal se aplica a ambas capas. Además, con el propósito de obtener un equilibrio entre calidad de los resultados y complejidad computacional, se asumen tan solo dos neuronas en la capa oculta, o lo que es lo mismo, $S_1 = 2$.

En lo que respecta a parámetros, se comentó previamente que la velocidad de aprendizaje de la red se fijaba a $\eta = 1$ o $\eta = 2$, si el tamaño de la imagen original L es respectivamente 128×128 o 256×256 . Por otro lado, la determinación del parámetro de regularización λ se basa en los métodos Bayesianos de la Sección 4.3.5. Como allí se indicaba, la red neuronal se ejecuta en dos etapas: una en la que se va adaptando el valor de $\lambda^{(m)}$ a su valor óptimo y la segunda en la que se fija este último valor para ejecutar de nuevo la MLP. En cualquier caso, también se intentará

averiguar el valor real de λ mediante rastreo en un rango lo suficientemente amplio de valores $[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$.

El ajuste de los pesos sinápticos de la red no requiere de ningún tipo de entrenamiento previo, así que las dos matrices $\mathbf{W}_1^{(0)}$ y $\mathbf{W}_2^{(0)}$ son inicializadas a cero. Igualmente, se parte de valores nulos para los hiperparámetros $\alpha^{(0)} = \mathbf{0}$ y $\beta^{(0)} = \mathbf{0}$ en el algoritmo de cálculo del parámetro de regularización $\lambda^{(n)}$ para la regularización ℓ_2 .

El criterio de parada que aparecía en el algoritmo de la Sección 4.3.3 se establece a un número máximo de iteraciones de 500 (valor puesto por exceso y que nunca es alcanzado); o cuando el cambio de la función de coste $\mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}^{(m)})$ está por debajo de 10^{-3} durante una ventana de 10 iteraciones.

Las métricas de restauración utilizadas en estos experimentos son la BSNR de la Definición 2.20 para dimensionar diferentes niveles de ruido y el error de restauración σ_e en la Definición 2.21 para independizar los resultados numéricos de restauración del modelo de degradación.

Todo el algoritmo de la MLP ha sido implementado usando MATLAB¹², software idóneo dado que todas las fórmulas del capítulo han sido planteadas en formato matricial. Para analizar la complejidad de cómputo de la red se distinguen las dos etapas características del algoritmo: el paso de *forward* (FP) y el paso de *backward* (BP). El cálculo del gradiente local $\delta^{(m)}$ en la capa de salida origina que el BP sea más costoso en tiempo, tal y como aparece en (4.19) y (4.27). En estas ecuaciones, el producto $\text{trunc}\{\mathbf{H}_a \hat{\mathbf{x}}^{(m)}\}$ es el término más crítico pues requiere operaciones de $\mathcal{O}(L^2)$, reducidas mínimamente por el operador $\text{trunc}\{\cdot\}$ descartando (fijando a cero) un total de $B = 2B_1 \times 2B_2$ operaciones. A pesar de este alto coste computacional, se reduce de forma notable gracias a la estructura *sparse* de \mathbf{H}_a , que consigue que el rendimiento del algoritmo esté sólo relacionado con el número de elementos no cero de la matriz de convolución. Con respecto al FP, las dos neuronas de la MLP de los experimentos implican operaciones mucho más rápidas de tan solo complejidad $\mathcal{O}(2L)$.

En términos de convergencia, se recuerda que la red neuronal está basada en un algoritmo de minimización de tipo gradiente descendente (4.10). Como consecuencia, el tiempo de convergencia es normalmente lento y tan solo controlado por el parámetro η . Otras variantes para el algoritmo de retropropagación podrían ser aplicadas a la MLP, tales como el algoritmo de gradiente conjugado descrito en la Sección 2.3.4 que se comporta mucho mejor en términos de convergencia.

Finalmente, se indica que los experimentos fueron ejecutados sobre un ordenador Intel Core2Duo con 2GB de memoria RAM y 2.4 GHz de velocidad. Se va a dedicar una sección posterior a estudiar los tiempos de procesamiento de la MLP en cada una de sus etapas FP y BP. En cualquier caso, se abre una puerta de seguir investigando sobre mejoras de rendimiento en este algoritmo de red neuronal.

¹² <http://www.mathworks.com>

4.4.1 Experimento 1

Este experimento se lleva a cabo usando la imagen *Lena* mostrada en la Figura 4.5, aunque sub-muestreándola hasta convertirla en un tamaño de 128×128 píxeles para simplificar el trabajo de computación. Dos filtros de emborronamiento $h(i, j)$ de tamaño 3×3 son distinguidos

$$h_1(i, j) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & -20 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad h_2(i, j) = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

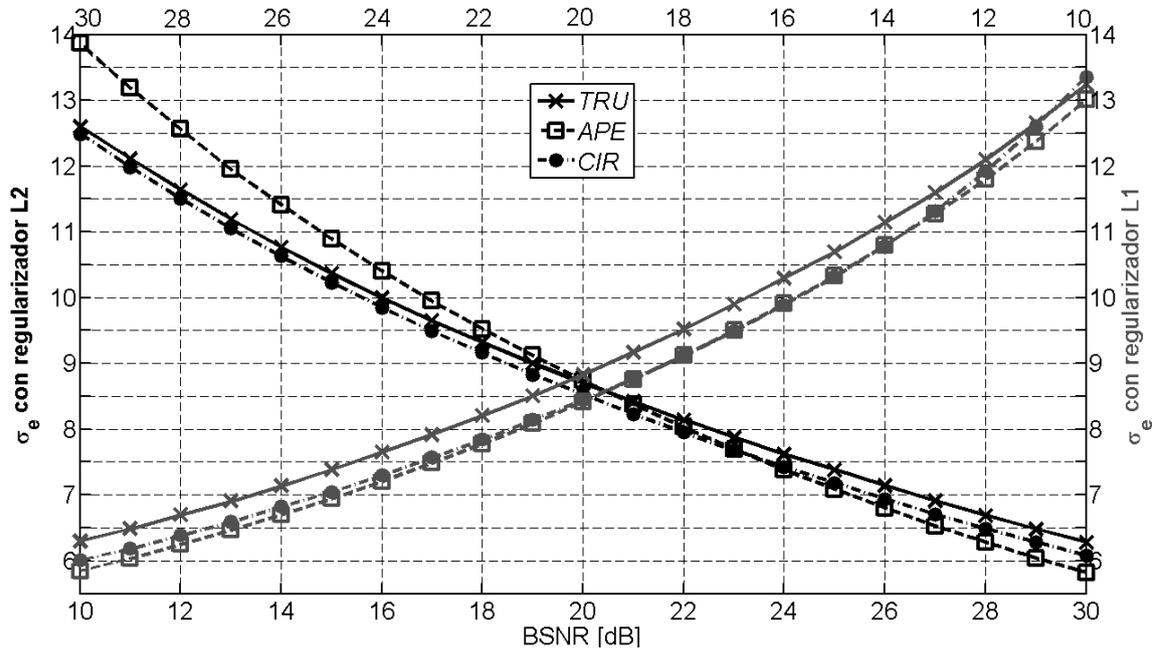
y un ruido Gaussiano se añade con niveles desde $BSNR = 10\text{dB}$ hasta $BSNR = 30\text{dB}$, para los cuales el efecto de regularización es representativo.

La Figura 4.6 muestra la evolución del error de restauración σ_e con respecto a la $BSNR$ para los filtros de degradación anteriores \mathbf{h}_1 (a) y \mathbf{h}_2 (b), y usando los tres modelos de degradación bajo análisis (truncado, aperiódico y circulante). Cada figura representa a su vez los resultados obtenidos con los regularizadores ℓ_2 y ℓ_1 usandolos ejes izquierdo y derecho de las ordenadas respectivamente. Se puede observar cómo actúa la regularización para cada uno de los modelos de degradación y se verifica el mejor comportamiento de la regularización TV especialmente en los valores bajos de $BSNR$.

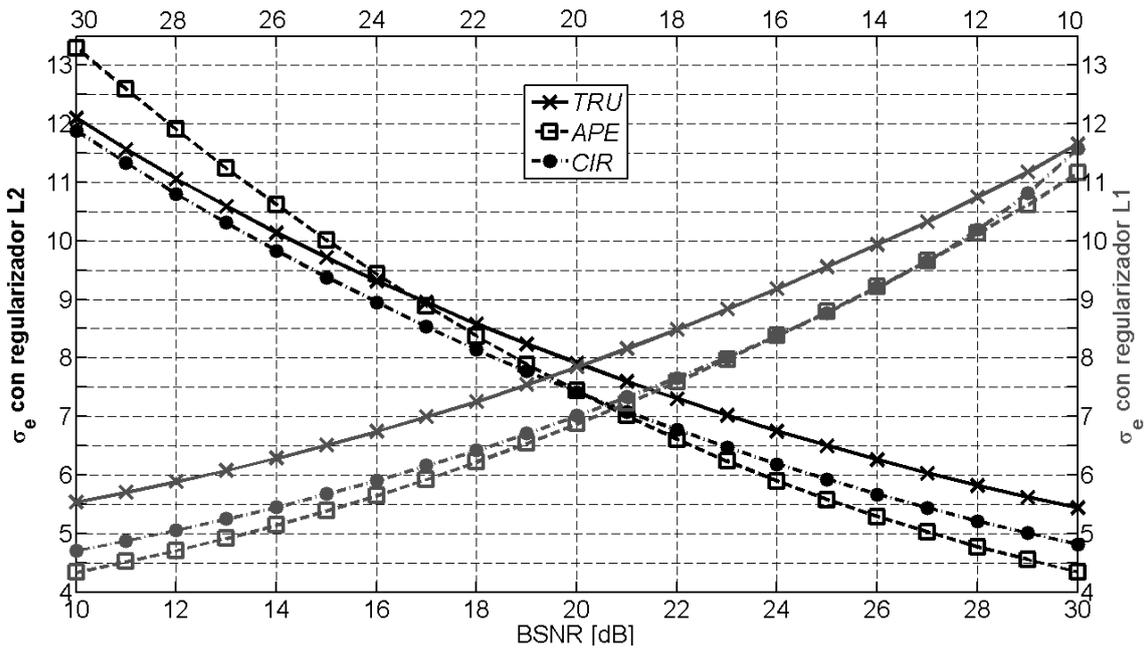
Como se demuestra en [66] y se reafirma en este experimento, el modelo aperiódico consigue mejores resultados para los valores medio-altos de $BSNR$ en el caso de la regularización Tikhonov. Sin embargo, es el modelo circulante el que funciona mejor con un valor medio-bajo de $BSNR$. Conviene recordar que estos modelos están asumiendo unas condiciones de frontera que en realidad no existen sobre una imagen observada y sería el modelo TRU el que considera una imagen real observada. El algoritmo de MLP consigue para este modelo adaptarse a la naturaleza truncada del problema y obtiene unos resultados numéricos muy similares a los obtenidos en los modelos APE y CIR. Se comprobará en la sección siguiente que esta adaptación no se cumple para otros métodos de restauración.

Para la regularización ℓ_1 , las gráficas de la Figura 4.6 indican que el modelo aperiódico alcanza el mínimo error de restauración sobre el rango completo de $BSNR$, aunque no muy lejos de su homólogo circulante. Ambos modelos evidencian la mejor calidad de restauración obtenida cuando se aplica una regularización TV en la red neuronal comparado con la función de coste tradicional Tikhonov. Este hecho reafirma los beneficios demostrados en la literatura gracias a la variación total. Sin embargo, la regularización ℓ_1 parece tener mayor sensibilidad al truncamiento de las fronteras dada la mayor desviación de σ_e respecto a los otros modelos de degradación. La mejora por tanto de la regularización TV sobre Tikhonov es más significativa en un modelo de degradación aperiódico o circulante, que en su versión real truncada.

Una versión numérica de los mismos resultados anteriores se muestra sobre la Tabla 4.5 y la Tabla 4.6 para los respectivos filtros de degradación \mathbf{h}_1 y \mathbf{h}_2 sobre un rango finito de la $BSNR$. En ambas tablas, el parámetro de regularización se calcula por medio de la expresión (4.36) en el caso de la regularización ℓ_2 , usando la DFT



(a)



(b)

Figura 4.6: Error de restauración σ_e para los regularizadores ℓ_2 y ℓ_1 usando los modelos de degradación TRU, APE y CIR: (a) filtro h_1 y (a) filtro h_2 .

para determinar el término de traza. Con respecto a la regularización ℓ_1 , se hace uso de la ecuación (4.37) de Bioucas que sugiere en su artículo [72] una elección razonable para el parámetro heurístico $\theta = 2/3$. Estos métodos de calcular el parámetro de regularización han dado un buen resultado como se demuestra al comparar con el obtenido por el óptimo valor de λ , seleccionado manualmente. Sin embargo, existe un trabajo por delante en conseguir otras formas de seleccionar el parámetro cuando se quiere extender a un mayor abanico de experimentos.

Como se comentaba al inicio de la Sección 4.4, se va a demostrar que la elección del parámetro η (en este caso, $\eta = 1$) tiene una menor influencia sobre el error de restauración σ_e . Un ejemplo de ello se demuestra sobre la Figura 4.7 que muestra la evolución de σ_e con respecto a los dos parámetros (λ, η) en el caso del modelo TRU, el emborronamiento \mathbf{h}_1 con BSNR = 20dB y la regularización ℓ_2 . En un rango reducido de λ el valor de σ_e cambia más rápidamente que cuando se evoluciona en la velocidad de aprendizaje η . Este hecho es más obvio cuando se observa que las curvas de nivel de la Figura 4.7, siendo casi líneas rectas paralelas para la variación de η . Se ha incrementado la luminosidad de las curvas de nivel a medida que el parámetro σ_e crece.

<i>Regularizador ℓ_2</i>						
σ_e	λ óptimo			λ estimado		
BSNR [dB]	TRU	APE	CIR	TRU	APE	CIR
10	12.44	13.85	12.39	12.60	13.87	12.49
15	10.30	10.88	10.22	10.37	10.89	10.23
20	8.68	8.69	8.52	8.70	8.74	8.53
25	7.35	7.07	7.14	7.38	7.09	7.18
30	6.19	5.80	5.95	6.28	5.82	6.08
<i>Regularizador ℓ_1</i>						
σ_e	λ óptimo			λ estimado		
BSNR [dB]	TRU	APE	CIR	TRU	APE	CIR
10	13.23	12.98	13.01	13.24	13.01	13.36
15	10.60	10.25	10.32	10.70	10.33	10.32
20	8.75	8.32	8.43	8.83	8.42	8.45
25	7.39	6.94	7.05	7.39	6.95	7.05
30	6.21	5.79	5.93	6.30	5.85	6.01

Tabla 4.5: Valores de σ_e para las regularizaciones ℓ_2 y ℓ_1 con el parámetro λ óptimo y estimado usando los algoritmos de la Sección 4.3.5. Los resultados se dividen entre los modelos TRU, APE y CIR para la PSF \mathbf{h}_1 .

<i>Regularizador ℓ_2</i>						
σ_e	λ <i>óptimo</i>			λ <i>estimado</i>		
<i>BSNR</i> [dB]	<i>TRU</i>	<i>APE</i>	<i>CIR</i>	<i>TRU</i>	<i>APE</i>	<i>CIR</i>
10	12.01	13.30	11.77	12.10	13.30	11.88
15	9.71	10.00	9.37	9.72	10.01	9.38
20	7.91	7.43	7.40	7.91	7.44	7.42
25	6.47	5.58	5.84	6.50	5.58	5.92
30	5.37	4.30	4.66	5.44	4.34	4.82
<i>Regularizador ℓ_1</i>						
σ_e	λ <i>óptimo</i>			λ <i>estimado</i>		
<i>BSNR</i> [dB]	<i>TRU</i>	<i>APE</i>	<i>CIR</i>	<i>TRU</i>	<i>APE</i>	<i>CIR</i>
10	11.66	11.16	11.19	11.66	11.17	11.58
15	9.39	8.65	8.76	9.56	8.79	8.77
20	7.77	6.78	6.98	7.85	6.88	7.01
25	6.50	5.39	5.68	6.51	5.39	5.68
30	5.39	4.28	4.64	5.54	4.34	4.71

Tabla 4.6: Valores de σ_e para las regularizaciones ℓ_2 y ℓ_1 con el parámetro λ óptimo y estimado usando los algoritmos de la Sección 4.3.5. Los resultados se dividen entre los modelos TRU, APE y CIR para la PSF \mathbf{h}_2 .

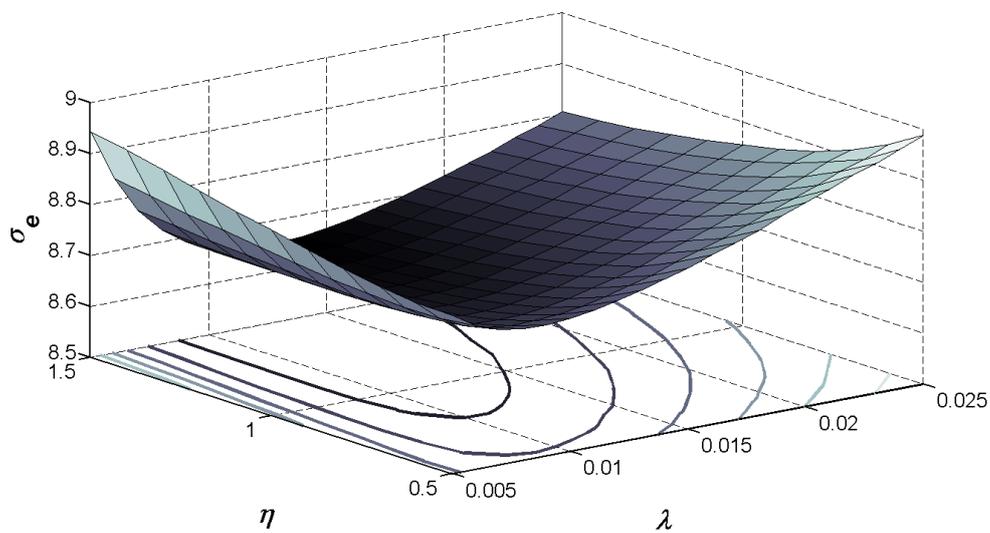


Figura 4.7: Sensibilidad de σ_e a λ y η .

Finalmente, se examina cómo la MLP lleva a cabo la reconstrucción de las fronteras para el modelo \mathbf{y}_{tru} de la ecuación (4.3). Para ello, se ejecuta la misma red neuronal anterior con el modelo TRU y $BSNR = 20\text{dB}$, pero con el tamaño de imagen original 256×256 , un emborronamiento uniforme bidimensional 7×7 (véase Sección 2.2.3) y el valor óptimo de λ seleccionado manualmente. El modelo de imagen degradada \mathbf{y}_{tru} se compone de una imagen observada real \mathbf{y} de tamaño 250×250 con ceros a sus alrededor. La Figura 4.8 muestra las imágenes restauradas para las regularizaciones ℓ_2 y ℓ_1 , superponiendo una línea blanca discontinua para indicar la región de reconstrucción de bordes. A partir de estas imágenes, se deduce la capacidad de la MLP no sólo de adaptar el centro de la imagen a la solución óptima, sino también de reconstruir las fronteras perdidas en una imagen observada. Además, se puede verificar que los efectos del *boundary ringing* son inexistentes y los bordes del rostro de *Lena* son preservados en ambos casos. Aunque es menos obvio en este ejemplo, el regularizador TV conduce a resultados visuales mejores que los obtenidos por la regularización Tikhonov. Se podrá ver más en detalle dentro del próximo experimento.

4.4.2 Experimento 2

Para poder evaluar con más rigor las propiedades del algoritmo de restauración con la MLP, se han comparado los resultados de la red con otros métodos de restauración recientes de la literatura. La imagen de test ahora es la imagen *Cameraman* de tamaño 256×256 y un emborronamiento Gaussiano (véase Sección 2.2.4) representado por una máscara 7×7 y una desviación típica $\sigma_R = 2$. La $BSNR$ es nuevamente fijada a 20dB tal que la regularización sigue jugando un papel importante sobre la restauración. Con respecto al parámetro de regularización λ , se elige de forma empírica tal que se consiga el mayor valor de calidad a salida de la MLP.

Como métodos comparativos, se han evaluado las investigaciones de Bioucas-Dias et. al sobre el algoritmo de maximización-minimización de la desconvolución basada en la variación total. Concretamente, se han usado sus algoritmos presentados en [13] y [72] (véase Sección 2.3.2) que se nombrarán en adelante como MM1 y MM2 respectivamente. En el lado del paradigma Bayesiano, se han usado los algoritmos desarrollados por Molina et. al con respecto a las distribuciones variacionales en sus dos versiones presentadas en [6] y [63] (véase Sección 2.3.3). En adelante, se simbolizarán como TV1 y TV2. Se han ensamblado y ejecutado los algoritmos provistos por ambos autores en MATLAB de acuerdo a los parámetros por defecto. En el caso de TV1 y TV2, se han particularizado al caso en el que no existe ninguna información a priori de ninguno de los hiperparámetros (α, β) . Por otro lado, todos estos métodos han mantenido sus algoritmos individuales para seleccionar el valor del parámetro de regularización λ .

Para hacer más notables las mejoras conseguidas con la MLP, se han incluido en la comparación otros algoritmos tradicionales tales como el modelo simultáneo autoregresivo (SAR) para el paradigma Bayesiano [62] (véase Sección 2.3.3); o los métodos Tikhonov y Wiener en el dominio de la frecuencia que se denotan por WIE and TIK y cuyas ecuaciones aparecen en (3.22) y (3.23).



(a)



(b)



(c)

Figura 4.8: Resultados de restauración usando la imagen *Lena* degradada por un emborronamiento uniforme 7×7 , $\text{BSNR} = 20\text{dB}$ y el modelo TRU (a). Las imágenes restauradas para las regularizaciones ℓ_2 y ℓ_1 son mostradas respectivamente en (b) y (c). Una línea blanca discontinua señala la región de reconstrucción de las fronteras.

En el Capítulo 3 se indicó que la mayor parte de los métodos de restauración asumen unas condiciones de frontera periódicas, tal es el caso de los métodos comparativos que se acaban de mencionar. Sin embargo, cuando se les aplica un modelo truncado \mathbf{y}_{tru} como el de la Figura 4.9(a), ninguno de los métodos anteriores funciona adecuadamente y los resultados están completamente llenos de artefactos de *boundary ringing* debido a la discontinuidad del truncado con ceros. Si usa directamente la imagen observada real \mathbf{y} de tamaño 250×250 correspondiente a la región FOV, la restauración presenta artefactos de *ringing* debido a la ausencia de hipótesis sobre las fronteras. En particular, se observan las líneas de *ringing* que aparecen arriba y debajo de la imagen restaurada en la Figura 4.10 obtenida por el algoritmo MM1 sobre la imagen observada real \mathbf{y} .

A diferencia de este comportamiento indeseado, la red MLP propuesta está muy bien definida para hacer frente a la no linealidad causada por el truncamiento de \mathbf{y}_{tru} . Ésta consigue restaurar la imagen observada real en el centro de la imagen según la estrategia de minimización de la función de coste y, lo que es más importante, las fronteras eliminadas en la observación son reconstruidas en el mismo proceso de restauración. La Figura 4.9(a) y (c) ilustran la salida de la MLP para los regularizadores ℓ_2 y ℓ_1 respectivamente. A la vista de las imágenes restauradas, ahora sí que se puede afirmar que el uso de la regularización TV claramente mejora los resultados de la regularización Tikhonov sobre la MLP. Se observa cómo los bordes de los objetos de la escena son preservados en la restauración y además se reducen los efectos del error dependiente del ruido (véase Sección 2.4.4). Con respecto a las fronteras, la imagen restaurada recupera su tamaño original de 256×256 respecto a los 250×250 píxeles de la imagen observada \mathbf{y} . El aspecto subjetivo de estos resultados demuestra el buen comportamiento de la MLP para hacer frente a un problema real de degradación, eliminando los efectos indeseados de *ringing*.

En cualquier caso, para comparar justamente los resultados de la MLP con los de los métodos anteriores, habría que hacerlo para el modelo degradación para el cual están diseñados, i.e. el modelo circulante de la Figura 4.11(a). Así pues, se vuelve a ejecutar el mismo experimento anterior pero usando además el modelo CIR. Los valores numéricos del error de restauración σ_e (véase la Tabla 4.7 en la columna CIR) demuestran los mejores resultados para los métodos MM y seguidos a continuación por el algoritmo MLP. Sin embargo, cuando se observa la imagen restaurada de la Figura 4.11(c) correspondiente al método MM2, se observa que los bordes están sobre-enfatizados comparados con el aspecto más natural de la ℓ_1 -MLP en la Figura 4.11(b). Dado que se está considerando una imagen degradada relativamente ruidosa con $BSNR = 20\text{dB}$, los métodos de restauración comparativos tienden a suavizar las texturas para eliminar los artefactos de ruido, a la misma vez que se tratan de resaltar los bordes para no perder nitidez como demuestran las figuras (c) y (d).

De estos resultados se puede deducir que el método propuesto en este capítulo es también una buena referencia en el modelo circulante, obteniendo un aspecto visual satisfactorio que preserva la información de bordes y un nivel aceptable de eliminación del error dependiente del ruido \mathbf{e}_n (principalmente para el regularizador ℓ_1).



(a)



(b)



(c)

Figura 4.9: Resultados de restauración usando la imagen *Cameraman* degradada por un emborronamiento Gaussiano 7×7 , $\text{BSNR} = 20\text{dB}$ y el modelo TRU (a). Las imágenes restauradas para las regularizaciones ℓ_2 y ℓ_1 son mostradas respectivamente en (b) $\sigma_e = 16.08$ y (c) $\sigma_e = 15.74$.



Figura 4.10: Artefactos aparecidos sobre el algoritmo MM1 cuando se considera la imagen observada real \mathbf{y} . Cuando se usa el modelo truncado \mathbf{y}_{tru} , los ceros en el exterior de la degradación originan una restauración dominada por los efectos del *boundary ringing*.

<i>Modelos</i>			
σ_e	<i>TRU</i>	<i>APE</i>	<i>CIR</i>
ℓ_2 -MLP	16.08	15.76	15.85
ℓ_1 -MLP	15.74	15.47	15.55
MM1	–	15.08	14.81
MM2	–	14.97	14.73
TV1	–	16.97	15.98
TV2	–	17.31	16.20
SAR	–	17.13	16.30
TIK	–	17.38	16.94
WIE	–	17.60	16.72

Tabla 4.7: Resultados numéricos obtenidos para la imagen degradada de la Figura 4.9(a), tanto para el modelo TRU como usando condiciones de frontera APE y CIR, en el algoritmo de la MLP y los métodos de restauración del Experimento 2.



Figura 4.11: Resultados de restauración usando la imagen *Cameraman* degradada por un emborronamiento Gaussiano 7×7 , $\text{BSNR} = 20\text{dB}$ y el modelo CIR (a). Las imágenes restauradas son mostradas para (b) ℓ_1 -MLP: $\sigma_e = 15.55$, (c) MM2: $\sigma_e = 14.73$ y (d) TV1: $\sigma_e = 15.98$.

4.4.3 Experimento 3

Hasta ahora el foco de los experimentos ha sido el modelo real truncado de una imagen observada \mathbf{y}_{tru} en (4.3) para el cual se diseña la MLP. Además, se ha observado las buenas propiedades ofrecidas respecto a los modelos aperiódico y circulante usados en otros métodos. Ahora el objetivo es extenderlo a las otras condiciones de frontera \mathbf{y}_{BC} analizadas en la Sección 3.1.2: reflexiva y anti-reflexiva. Se espera que, al igual que ocurría con APE y CIR, los efectos de *ringing* sean igualmente reducidos en el caso de la BCs reflexiva y anti-reflexiva.

Para implementar cada BC se incorpora al desarrollo en MATLAB el uso de la librería *RestoreTools*¹³ modificada por el parche para la condición anti-reflexiva¹⁴. Esta librería facilita la implementación de las condiciones frontera ofreciendo funciones que implementan eficientemente las multiplicaciones matriz-vector de cada una de las BCs. En consecuencia, se puede particularizar el algoritmo de la MLP construyendo las matrices respectivas \mathbf{H} de la Sección 3.1.2 (igualmente, aplicaría a la matriz \mathbf{D}), eliminando el operador $\text{trunc}\{\cdot\}$ de todas las fórmulas y aplicando el correspondiente modelo de degradación \mathbf{y}_{BC} . Como se indicaba en la ecuación (3.3), todas las matrices se fijan al tamaño de la imagen original, i.e. $\tilde{L} = L$.

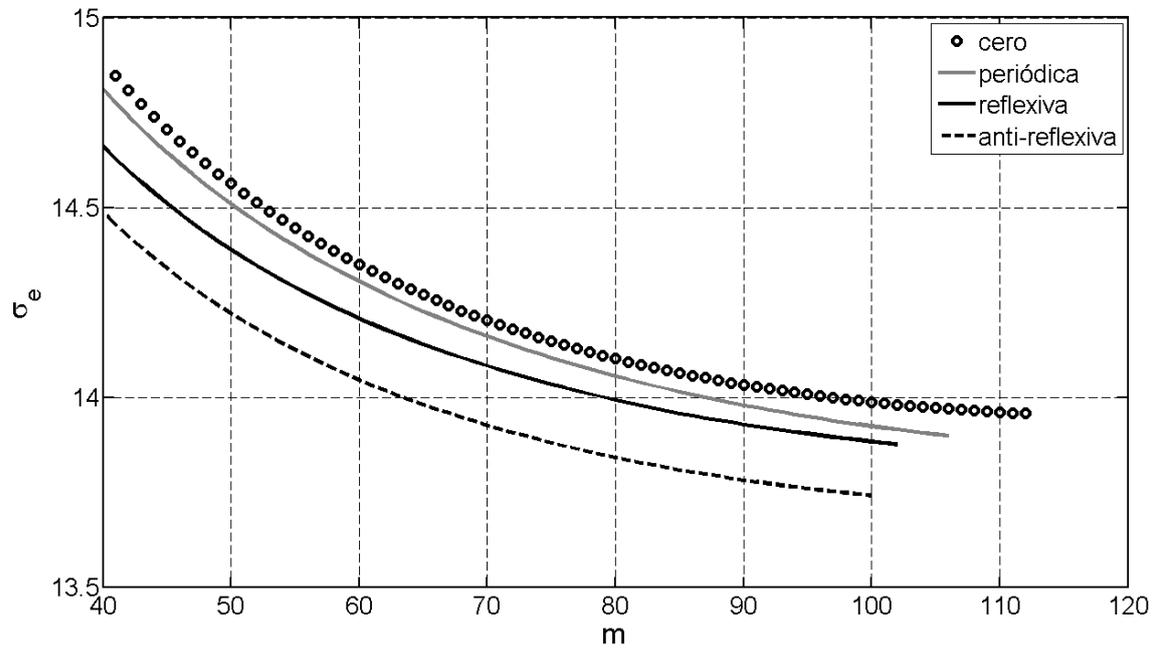
En este tercer experimento se usa la imagen *Barbara* de tamaño 256×256 , pues presenta importantes características en las fronteras que la hacen más sensible a las BCs. Los filtros de emborronamiento 7×7 uniforme y Gaussiano son recuperados de los ejemplos anteriores y además se incluye un tercer emborronamiento por movimiento uniforme (véase Sección 2.2.1) con $\phi = 45^\circ$ y $d = 7$. Con respecto al ruido Gaussiano, se mantiene $\text{BSNR} = 20\text{dB}$, buscando nuevamente la presencia significativa de regularización en el resultado mediante un parámetro λ ajustado manualmente a su valor óptimo.

Se va analizar por tanto el impacto de cada BC sobre la MLP calculando la evolución del error de restauración σ_e a medida que la red neuronal progresa. La gráfica de σ_e con respecto al número de iteraciones m aparece en la Figura 4.12, donde el emborronamiento uniforme (a) y el movimiento diagonal (b) son restaurados por medio de una ℓ_2 -MLP. Como se esperaba por la literatura [59], las condiciones de frontera reflexiva y, principalmente, anti-reflexiva consiguen también los mejores resultados en la red neuronal.

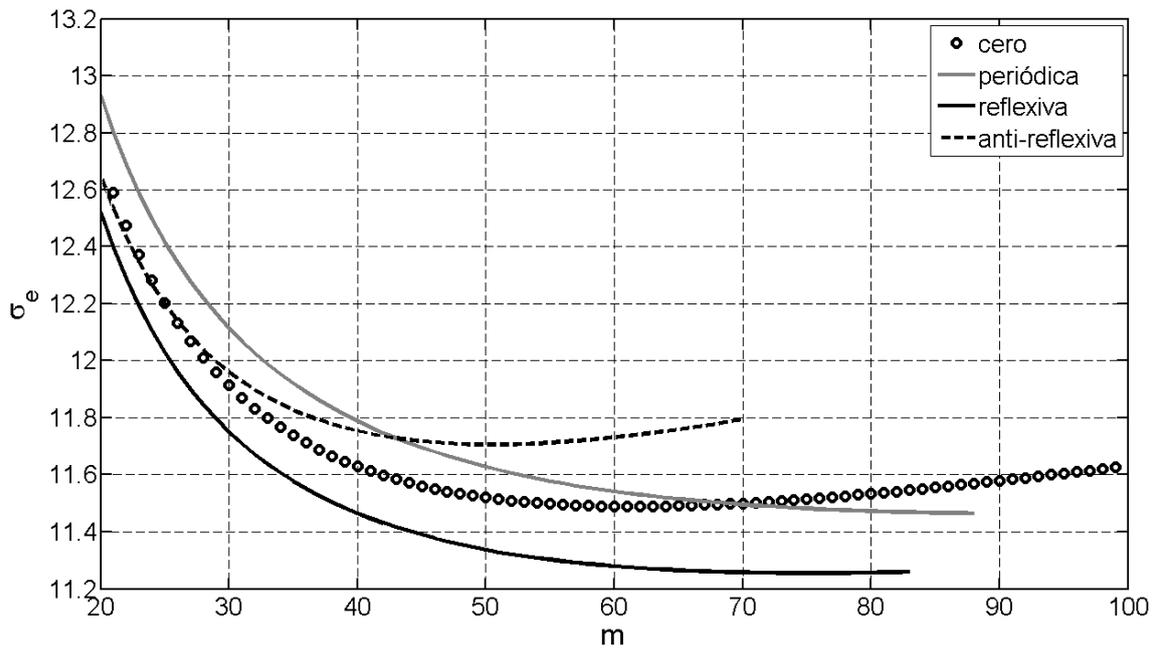
Pero para ver realmente la capacidad que tiene la MLP de adaptarse a cada BC y reducir los efectos derivados de *ringing*, se va a comparar el algoritmo con otros métodos de restauración que usen las mismas condiciones de frontera. Así pues, se toma la implementación del algoritmo iterativo de gradiente conjugado para la regularización Tikhonov como se describe en la Sección 2.3.4. En particular, este método se corresponde con el denominado CGLS en la librería *RestoreTools*. No se utiliza ningún preconditionador en este método, pero se selecciona manualmente el parámetro de regularización que hace óptimo el resultado. La Tabla 4.8 resume los valores de σ_e obtenidos para la MLP y el algoritmo CGLS en cada combinación de BC y filtro de emborronamiento. Los resultados de esta tabla revelan la adaptación

¹³ <http://www.mathcs.emory.edu/~nagy/RestoreTools>

¹⁴ <http://scienze-como.uninsubria.it/mdonatelli/>



(a)



(b)

Figura 4.12: Evolución del error de restauración σ_e en una ℓ_2 -MLP para las BCs: cero, periódica, reflexiva y anti-reflexiva. Dos gráficas diferentes son mostradas usando una imagen *Barbara* degradada por dos filtros de emborronamiento de tamaño 7×7 : (a) uniforme y (b) movimiento diagonal.

MLP						
σ_e	PSF Uniforme		PSF Gaussiana		PSF Movimiento	
BCs	ℓ_2	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_1
cero	13.96	13.84	12.60	12.56	11.63	11.28
periódica	13.90	13.87	12.90	12.88	11.47	11.47
reflexiva	13.88	13.85	12.53	12.50	11.26	11.22
anti-reflexiva	13.74	13.73	12.51	12.48	11.80	11.49
truncada	14.11	14.13	13.73	13.65	13.11	12.92
CGLS						
BCs	PSF Uniforme		PSF Gaussiana		PSF Movimiento	
cero	14.99		14.06		12.82	
periódica	13.98		13.15		11.77	
reflexiva	13.79		12.77		11.57	
anti-reflexiva	13.94		12.75		12.29	
truncada	-		-		-	

Tabla 4.8: Valores numéricos de σ_e obtenidos para las diferentes condiciones de frontera, incluyendo el modelo truncado para la MLP y el algoritmo CGLS. Los resultados se dividen en tres filtros de degradación de tamaño 7×7 : uniforme, Gaussiano y por movimiento diagonal.

de la red neuronal a la naturaleza local del problema, produciendo mejores resultados que el método CGLS. Además, la red MLP obtiene errores de restauración razonables en un problema real truncado, a diferencia de CGLS que requiere de condiciones de frontera para poder evitar el artefacto de *boundary ringing*.

Si se observan las imágenes restauradas de la Figura 4.13, se confirma cómo la MLP consigue que el efecto de *ringing* debido a la condición de frontera cero sea insignificante para un emborronamiento Gaussiano. Por el contrario, la imagen obtenida por el método CGLS está afectada tanto por la discontinuidad de la BC como por el error dependiente del ruido. Con respecto a la condición de frontera anti-reflexiva, la Figura 4.14 muestra las respectivas imágenes restauradas para el método de CGLS (a) y el algoritmo de la MLP (b). Se puede observar el mejor aspecto visual que presenta la solución de la red neuronal, adaptando el centro de la imagen a la solución óptima y preservando la información de bordes asociada a los objetos de la escena.

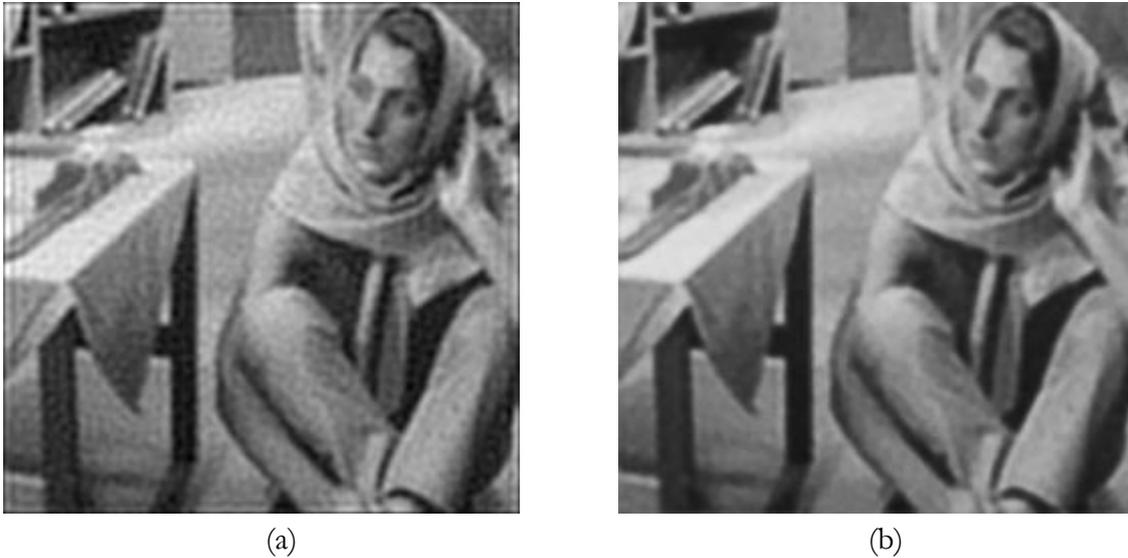


Figura 4.13: Resultados de restauración usando la imagen *Barbara* degradada por un emborronamiento Gaussiano 7×7 , BSNR = 20dB y condición de frontera cero. Las imágenes restauradas son mostradas para (a) CGLS: $\sigma_e = 14.06$ y (b) ℓ_1 -MLP: $\sigma_e = 12.56$.

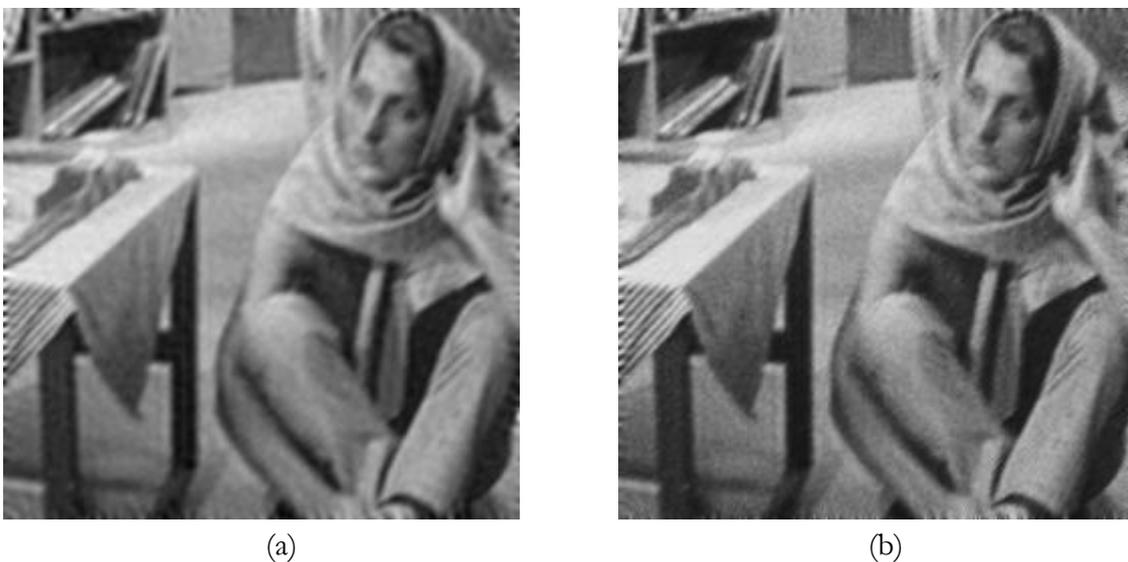


Figura 4.14: Resultados de restauración usando la imagen *Barbara* degradada por un emborronamiento por movimiento diagonal 7×7 , BSNR = 20dB y condición de frontera anti-reflexiva. Las imágenes restauradas son mostradas para (a) CGLS: $\sigma_e = 12.29$ y (b) ℓ_2 -MLP: $\sigma_e = 11.80$.

En conclusión, la MLP está igualmente bien posicionada para hacer frente a los artefactos de *ringing* que intenta resolver un método de restauración típico mediante las condiciones de frontera. Pero además la red neuronal es capaz de obtener un resultado satisfactorio en el modelo truncado real, con muy buenas propiedades en términos de *boundary ringing*.

4.4.4 Complejidad computacional

Para hacerse una idea numérica de la complejidad del algoritmo MLP, se ha medido la duración de cada una de las etapas que componen la red neuronal. Concretamente, se ha utilizado la anterior imagen *Barbara* de tamaño 256×256 , degradada por un emborronamiento Gaussiano 7×7 y 20dB de BSNR en un modelo truncado real \mathbf{y}_{tru} de (4.3).

La Tabla 4.9 muestra los resultados obtenidos en ambas capas de la red neuronal para el proceso de *forward* y *backward*. Como se esperaba, el paso de *backward* en la capa de salida es el cuello de botella de la MLP.

Duración [ms]	<i>Forward</i>		<i>Backward</i>	
	<i>Capa 1</i>	<i>Capa 2</i>	<i>Capa 1</i>	<i>Capa 2</i>
m				
1	2.1	3.0	8.3	523.0
2	0.6	5.1	7.8	496.6
3	1.2	4.5	8.0	502.2
4	1.1	4.7	8.2	500.4
5	1.2	4.8	8.2	500.5
...				
$m_{total} = 76$	total = 39.2s			

Tabla 4.9: Complejidad computacional de la red MLP para un modelo truncado usando la imagen *Barbara* degradada con un emborronamiento Gaussiano de tamaño 7×7 .

4.5 Demostración de ecuaciones

4.5.1 Demostración de (4.18)

Reemplazando la definición de la función de coste $\mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}^{(m)})$ que aparece en (4.13), se deduce inmediatamente que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}^{(m)})}{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(m)}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \|\mathbf{e}^{(m)}\|_2^2}{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(m)}} + \frac{1}{2} \lambda \frac{\partial \|\mathbf{r}^{(m)}\|_2^2}{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(m)}} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{e}^{(m)}}{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(m)}} \frac{\partial \|\mathbf{e}^{(m)}\|_2^2}{\partial \mathbf{e}^{(m)}} + \frac{1}{2} \lambda \frac{\partial \mathbf{r}^{(m)}}{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(m)}} \frac{\partial \|\mathbf{r}^{(m)}\|_2^2}{\partial \mathbf{r}^{(m)}}.\end{aligned}\quad (4.38)$$

Como la norma ℓ_2 se define como $\|\mathbf{z}\|_2^2 = \mathbf{z}^T \mathbf{z}$ e implica que $\partial \|\mathbf{z}\|_2^2 / \partial \mathbf{z} = 2\mathbf{z}$, entonces

$$\frac{\partial \mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}^{(m)})}{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(m)}} = \frac{\partial \mathbf{e}^{(m)}}{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(m)}} \mathbf{e}^{(m)} + \lambda \frac{\partial \mathbf{r}^{(m)}}{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(m)}} \mathbf{r}^{(m)}.\quad (4.39)$$

Ambos vectores $\mathbf{e}^{(m)}$ y $\mathbf{r}^{(m)}$ de (4.11) y (4.12) respectivamente, se sustituyen sobre la ecuación diferencial anterior como

$$\frac{\partial \mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}^{(m)})}{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(m)}} = \frac{\partial (-\text{trunc}\{\mathbf{H}_a \hat{\mathbf{x}}^{(m)}\})}{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(m)}} \mathbf{e}^{(m)} + \lambda \frac{\partial (\text{trunc}\{\mathbf{D}_a \hat{\mathbf{x}}^{(m)}\})}{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(m)}} \mathbf{r}^{(m)},\quad (4.40)$$

donde la imagen truncada \mathbf{y}_{tru} ha sido eliminada al no considerarse una dependencia explícita respecto a $\hat{\mathbf{x}}^{(m)}$. Con respecto al operador $\text{trunc}\{\cdot\}$, éste ya aparece incluido dentro de cada uno de los términos multiplicativos $\mathbf{e}^{(m)}$ y $\mathbf{r}^{(m)}$; por tanto, aquellos elementos de la ecuación donde el operador de truncado ha de fijarse a cero, resulta que los vectores $\mathbf{e}^{(m)}$ y $\mathbf{r}^{(m)}$ ya son nulos. Así pues, se puede eliminar el operador $\text{trunc}\{\cdot\}$ de la ecuación (4.40) sin consecuencias

$$\frac{\partial \mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}^{(m)})}{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(m)}} = \frac{\partial (-\mathbf{H}_a \hat{\mathbf{x}}^{(m)})}{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(m)}} \mathbf{e}^{(m)} + \lambda \frac{\partial (\mathbf{D}_a \hat{\mathbf{x}}^{(m)})}{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(m)}} \mathbf{r}^{(m)}.\quad (4.41)$$

Se obtiene finalmente por diferenciación de matrices que

$$\frac{\partial \mathcal{C}(\hat{\mathbf{x}}^{(m)})}{\partial \hat{\mathbf{x}}^{(m)}} = -\mathbf{H}_a \mathbf{e}^{(m)} + \lambda \mathbf{D}_a^T \mathbf{r}^{(m)}.\quad (4.42)$$

Capítulo 5

Filtro desensibilizado respecto a estimaciones erróneas



Assumiendo condiciones de frontera periódicas, la imagen degradada $y(i, j)$ se puede modelar en el dominio de la frecuencia $\mathcal{Y}(\omega_i, \omega_j)$ tal y como se demostró en el Capítulo 3. De la misma manera, se consiguen las expresiones de la transformada del filtro de restauración $\mathcal{G}(\omega_i, \omega_j)$, como es el caso de las ecuaciones (3.22) y (3.23) de los filtros Tikhonov y Wiener. Estas expresiones reflejan las dependencias de la restauración respecto a parámetros relacionados con la PSF, el ruido y la imagen original, cuyos valores han de ser estimados a priori en un caso real y dan lugar al filtro estimado $\hat{\mathcal{G}}(\omega_i, \omega_j)$. El estudio de la sensibilidad que presenta esta restauración frente a las estimaciones erróneas, junto a la propuesta de un nuevo filtro $\mathcal{G}'(\omega_i, \omega_j)$ que relaja esta dependencia son objetivo de este capítulo. El algoritmo resultante mantiene el mismo concepto de ciclo iterativo de restauración-degradación que tenía la MLP del Capítulo 4, pero aplicado de forma más simple en el dominio de la frecuencia.

Un análisis pormenorizado del criterio de desensibilización y de los errores de restauración en diferentes secciones del capítulo, revelan el número total de iteraciones recomendado para cada componente de frecuencia (ω_i, ω_j) . Los diferentes experimentos realizados sobre el filtro Wiener y Tikhonov pretenden evidenciar las propiedades de desensibilización del nuevo filtro de restauración $\mathcal{G}'(\omega_i, \omega_j)$, tanto para las estimaciones del ruido como las de la PSF, incluso procedentes de los métodos reales de estimación de la Sección 3.2.2.

5.1 Formulación del problema

Siguiendo los pasos de la Sección 3.1.3, se describen las ecuaciones de un problema de restauración en el dominio de la frecuencia. Así pues, la imagen restaurada se expresa según la Definición 2.14 como

$$\hat{\mathcal{X}}(\omega_i, \omega_j) = \mathcal{G}(\omega_i, \omega_j)\mathcal{Y}(\omega_i, \omega_j). \quad (5.1)$$

Para simplificar la notación, la referencia a los elementos de frecuencia (ω_i, ω_j) en las transformadas de Fourier se va a eliminar de todas las fórmulas del capítulo. No obstante, no debe olvidarse que todas las ecuaciones representan operaciones escalares para cada componente de frecuencia (ω_i, ω_j) . Así pues, la ecuación anterior se simplifica a

$$\hat{\mathcal{X}} = \mathcal{G}\mathcal{Y} \quad \forall (\omega_i, \omega_j) \in \mathcal{W}, \quad (5.2)$$

donde \mathcal{W} representa el espacio de frecuencias equivalente al soporte \mathcal{L} de la imagen original.

Como se vio en el Capítulo 3, la definición del filtro de restauración \mathcal{G} depende de una serie de parámetros que necesitan ser estimados con cierta información a priori. Por ello, se denota la estimación real del filtro como $\hat{\mathcal{G}}$. Se van a usar las expresiones (3.22) y (3.23) de los filtros Tikhonov y Wiener en el dominio de Fourier, cuyas dependencias de parámetros se estudiaron detalladamente en la Sección 3.2.1. Se reescriben entonces las expresiones con notación simplificada e indicando circunflejos sobre las variables estimadas

◇ Regularización Tikhonov

$$\hat{\mathcal{G}} = \frac{\hat{\mathcal{H}}^*}{|\hat{\mathcal{H}}|^2 + \hat{\lambda}|\mathcal{D}|^2}. \quad (5.3)$$

◇ Filtro Wiener

$$\hat{\mathcal{G}} = \frac{\hat{\mathcal{H}}^*}{|\hat{\mathcal{H}}|^2 + \frac{\hat{\delta}_n}{\hat{\delta}_x}}. \quad (5.4)$$

Disponer de estimaciones precisas se convierte en una necesidad si se pretende que los resultados sean los esperados por el filtro \mathcal{G} , pues de lo contrario pequeñas variaciones en los parámetros supone un importante descenso en la calidad de restauración. En vez de centrar el esfuerzo en conseguir las mejores estimaciones, este capítulo define una nueva versión del filtro de restauración \mathcal{G}' que tiene menor sensibilidad a las estimaciones. En el próximo apartado se presenta el algoritmo que calcula la expresión del nuevo filtro desensibilizado \mathcal{G}' tal que

$$\hat{\mathcal{X}} = \mathcal{G}'y. \quad (5.5)$$

5.2 Definición del filtro desensibilizado

La definición del filtro desensibilizado \mathcal{G}' se basa en un algoritmo iterativo como el que aparece en la Figura 5.1. Se puede observar que la entrada en cada iteración m ($m = 1, 2, \dots, \bar{m}$) es una imagen $\hat{\mathcal{Y}}^{(m)}$ obtenida por su predecesora $\hat{\mathcal{Y}}^{(m-1)}$ tras atravesar el filtro de restauración $\hat{\mathcal{G}}$ y la PSF estimada $\hat{\mathcal{H}}$. En el instante inicial, la imagen $\hat{\mathcal{Y}}^{(0)}$ equivale a la imagen degradada \mathcal{Y} y después del número total de iteraciones \bar{m} la imagen $\hat{\mathcal{Y}}^{(\bar{m})}$ vuelve a ser restaurada por medio del filtro $\hat{\mathcal{G}}$, hasta obtener una imagen de salida tal que $\hat{\mathcal{X}} = \hat{\mathcal{X}}^{(m)}$. Este algoritmo de desensibilización está inspirado en el mismo **ciclo de restauración-degradación** que presentaba la MLP del Capítulo 4, pero esta vez aplicado al dominio de Fourier. Conviene recordar que las expresiones del algoritmo se aplican para cada componente de frecuencia (ω_i, ω_j) y, de hecho, se mostrará más adelante que el número total de iteraciones es una función de cada componente, i.e. $\bar{m}(\omega_i, \omega_j)$.

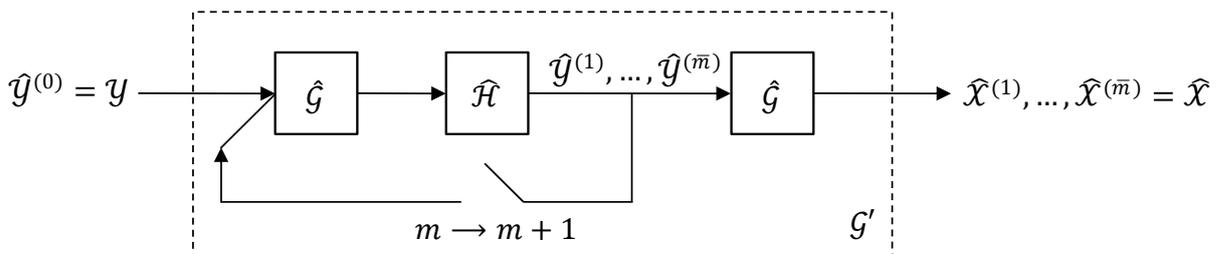


Figura 5.1: Esquema de restauración desensibilizada.

Matemáticamente, el proceso iterativo de la Figura 5.1 se expresa para cada componente de frecuencia (ω_i, ω_j) como sigue

$$\begin{aligned}
 \hat{y}^{(1)} &= (\hat{G}\hat{H})y & \hat{x}^{(1)} &= \hat{G}\hat{y}^{(1)} = \hat{G}(\hat{G}\hat{H})y \\
 \hat{y}^{(2)} &= (\hat{G}\hat{H})\hat{y}^{(1)} = (\hat{G}\hat{H})^2y & \hat{x}^{(2)} &= \hat{G}\hat{y}^{(2)} = \hat{G}(\hat{G}\hat{H})^2y \\
 &\vdots & &\vdots \\
 \hat{y}^{(m)} &= (\hat{G}\hat{H})\hat{y}^{(m-1)} = (\hat{G}\hat{H})^m y & \hat{x}^{(m)} &= \hat{G}\hat{y}^{(m)} = \hat{G}(\hat{G}\hat{H})^m y \\
 &\vdots & &\vdots \\
 \hat{y}^{(\bar{m})} &= (\hat{G}\hat{H})\hat{y}^{(\bar{m}-1)} = (\hat{G}\hat{H})^{\bar{m}} y & \hat{x} &= \hat{x}^{(\bar{m})} = \hat{G}\hat{y}^{(\bar{m})} = \hat{G}(\hat{G}\hat{H})^{\bar{m}} y
 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Comparando la ecuación (5.5) con la fila de la iteración m -ésima del algoritmo anterior, se deduce que el filtro de desensibilización se expresa para componente de frecuencia como

$$\mathcal{G}' = \hat{G}(\hat{G}\hat{H})^{\bar{m}}. \quad (5.7)$$

De la ecuación anterior se observa la dependencia del filtro de desensibilizado respecto a

- ◆ \hat{G} : filtro de restauración a desensibilizar usando las estimaciones de sus parámetros.
- ◆ $\hat{G}\hat{H}$: conocido como **producto de regularización**.
- ◆ m : número de iteraciones dependiente de cada componente de frecuencia.

El objetivo en este capítulo es demostrar el comportamiento desensibilizado que ofrece el nuevo filtro de restauración \mathcal{G}' respecto a su versión de entrada \hat{G} . Concretamente, hay que determinar el número total de iteraciones \bar{m} aplicado a cada componente de frecuencia (ω_i, ω_j) para que se cumplan las condiciones de desensibilización que se verán a continuación.

5.3 Sensibilidad del filtro de restauración

5.3.1 Definiciones de sensibilidad

Definición 5.1. Sea un filtro de restauración \mathcal{G} que depende del conjunto de parámetros P_1, \dots, P_r a ser estimados para obtener \hat{G} . Entonces, se define la sensibilidad de \mathcal{G} como

$$S_{\mathcal{G}} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_1} dP_1 + \dots + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_r} dP_r.$$

En la Definición 3.5 se identificó que el conjunto de parámetros P_1, \dots, P_r de los cuales depende \mathcal{G} están agrupados en parámetros respecto al proceso de degradación, al ruido y a la imagen original. En el caso de los filtros de restauración Wiener y Tikhonov, se analizaron en la Sección 3.2.1 cada uno de estos grupos.

Se podría definir de forma equivalente la sensibilidad del nuevo filtro \mathcal{G}' como

$$S_{G'} = \frac{\partial G'}{\partial P_1} dP_1 + \dots + \frac{\partial G'}{\partial P_r} dP_r, \quad (5.8)$$

y aplicando la regla de la cadena para la composición de G' respecto a G , entonces se deduce que

$$S_{G'} = \frac{\partial G'}{\partial G} \left(\frac{\partial G}{\partial P_1} dP_1 + \dots + \frac{\partial G}{\partial P_r} dP_r \right). \quad (5.9)$$

Relacionando ambas sensibilidades S_G y $S_{G'}$, se llega a una nueva variable de interés en nuestro algoritmo de desensibilización

Definición 5.2. Sea S_G la sensibilidad de un filtro de restauración G y $S_{G'}$ la sensibilidad del filtro G' , entonces se define la función relativa de sensibilidad Z como

$$Z = \frac{S_{G'}}{S_G} = \frac{\partial G'}{\partial G}.$$

Si se aplica la Definición 5.2 sobre el algoritmo de desensibilización planteado en la ecuación (5.7), se llega a una expresión para la función relativa de sensibilidad que depende del número de iteraciones m

$$Z^{(m)} = \frac{\partial G'}{\partial G} = \frac{\partial [\hat{G}(\hat{G}\hat{H})^m]}{\partial \hat{G}} = (m+1)(\hat{G}\hat{H})^m. \quad (5.10)$$

A partir de la función relativa de sensibilidad se puede establecer la condición de desensibilización para el filtro G' .

Propiedad 5.1. Sea S_G la sensibilidad de un filtro de restauración G y $S_{G'}$ la sensibilidad del filtro G' , entonces se cumple que G' es menos sensible a la estimación de parámetros respecto a G si y sólo si se cumple que

$$S_{G'} < S_G \Leftrightarrow Z < 1.$$

Como corolario, se puede extender esta misma propiedad al caso de la sensibilidad por cada parámetro que se define como

Definición 5.3. Sea un filtro de restauración G que depende del parámetro P , entonces se define la sensibilidad de G respecto a dicho parámetro como

$$S_G^P = \frac{\partial G}{\partial P}.$$

Si se compara la sensibilidad del parámetro para ambos filtros G' y G , se llega a la conclusión de que

$$\frac{S_{G'}^P}{S_G^P} = \frac{\frac{\partial G'}{\partial P}}{\frac{\partial G}{\partial P}} = \frac{\partial G'}{\partial G} = Z. \quad (5.11)$$

Por tanto, la condición de desensibilización $Z < 1$ implica igualmente la reducción de sensibilidad sobre cualquiera de los parámetros P de los cuales depende el filtro de restauración \mathcal{G} , esto es

$$S_{\mathcal{G}'} < S_{\mathcal{G}} \Leftrightarrow Z < 1 \Rightarrow S_{\mathcal{G}'}^P < S_{\mathcal{G}}^P. \quad (5.12)$$

5.3.2 Análisis de condiciones de desensibilización

Uno de los términos más significativos del filtro desensibilizado \mathcal{G}' es el denominado producto de regularización $\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}}$ que se analiza a continuación. Particularizando este producto a las respectivas expresiones (5.3) y (5.4) de los filtros de restauración Tikhonov y Wiener, se obtiene que

♦ Regularización Tikhonov

$$\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}} = \frac{|\hat{\mathcal{H}}|^2}{|\hat{\mathcal{H}}|^2 + \hat{\lambda}|\mathcal{D}|^2}, \quad (5.13)$$

donde $\hat{\lambda} > 0$ y, en consecuencia, $0 \leq \hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}} < 1 \quad \forall (\omega_i, \omega_j) \in \mathcal{W}$.

♦ Filtro Wiener

$$\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}} = \frac{|\hat{\mathcal{H}}|^2}{|\hat{\mathcal{H}}|^2 + \frac{\hat{\mathcal{S}}_n}{\hat{\mathcal{S}}_x}}, \quad (5.14)$$

donde por definición las densidades espectrales de potencia son valores positivos o nulos para cada componente de frecuencia, entonces $\hat{\mathcal{S}}_n > 0$ (ruido blanco Gaussiano) y $\hat{\mathcal{S}}_x \geq 0$. Por tanto, se obtiene la misma condición $0 \leq \hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}} < 1 \quad \forall (\omega_i, \omega_j) \in \mathcal{W}$.

En ambos métodos, el hecho de tener un producto de regularización $\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}}$ cercano a cero significa tener una solución **muy regularizada**, pues el segundo término del denominador es el que está directamente relacionado con la información a priori ($\hat{\lambda}|\mathcal{D}|^2$ o $\hat{\mathcal{S}}_n/\hat{\mathcal{S}}_x$) y sería mucho mayor que $|\hat{\mathcal{H}}|^2$; por el contrario, valores próximos a la unidad equivalen a soluciones **poco regularizadas**. El objetivo es analizar la repercusión de la regularización sobre la sensibilidad del filtro propuesto \mathcal{G}' .

Extendiendo la definición del producto de regularización $\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}}$ según evoluciona el número de iteraciones $m \geq 1$, se deduce que

$$0 \leq \hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}} < 1 \Rightarrow 0 \leq (\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}})^m \leq \hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}} < 1 \quad \forall (\omega_i, \omega_j) \in \mathcal{W}, \forall m \in \mathbb{N}. \quad (5.15)$$

A raíz de la condición anterior, se deduce que la función relativa de sensibilidad $Z^{(m)} = (m+1)(\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}})^m$ de (5.10) no es una función ni monótona creciente ni decreciente, sino que presenta un máximo relativo dependiendo del valor del

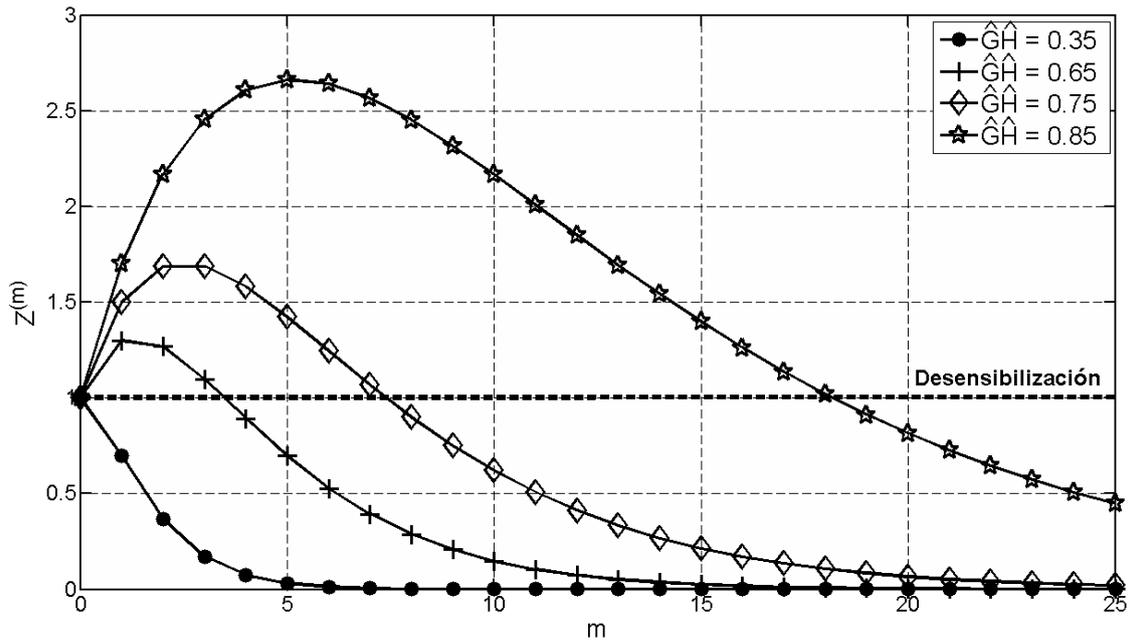


Figura 5.2: Función relativa de sensibilidad $Z^{(m)}$ para diferentes valores de $\hat{G}\hat{H}$ indicados en la leyenda.

producto de regularización $\hat{G}\hat{H}$ en cada componente (ω_i, ω_j) . Esta situación se puede observar sobre la Figura 5.2 para distintos valores del producto $\hat{G}\hat{H}$.

Se comprueba entonces la presencia de un máximo en la función $Z^{(m)}$ alcanzado para un número de iteraciones m dependiente del producto de regularización $\hat{G}\hat{H}$. Cuanto menor es el valor de este producto, menor número de iteraciones se necesitan para conseguir este máximo y a la vez la magnitud de la sensibilidad relativa se hace más pequeña. Tanto es así que para valores suficientemente pequeños de $\hat{G}\hat{H}$, es decir, soluciones muy regularizadas, la función $Z^{(m)}$ se convierte en estrictamente decreciente.

La principal conclusión que ha de sacarse a partir de la Figura 5.2 es cuándo se cumple la condición de desensibilización. Recordando el criterio de la Propiedad 5.1, se ha incluido en la figura una línea en $Z^{(m)} = 1$ que indica la iteración m a partir de la cual el nuevo filtro de restauración \mathcal{G}' es menos sensible a las estimaciones que el original \mathcal{G} . De hecho, podría decirse que para valores de m suficientemente grandes la desensibilización siempre se cumple, independientemente del producto de regularización $\hat{G}\hat{H}$. Sin embargo, el hecho de incrementar de forma no deliberada m tiene su contrapartida en los errores de restauración como se verá en la próxima sección. El objetivo es por tanto buscar una relación de compromiso entre el cumplimiento de la condición de desensibilización y los errores de restauración.

5.3.3 Análisis de errores de restauración

Hasta este momento se ha analizado el filtro de restauración \mathcal{G}' desde el punto de vista de la sensibilidad a las estimaciones de parámetros. Ahora se van a estudiar las

repercusiones de este filtro sobre los errores de restauración de la Definición 2.23. En primer lugar, se definen las transformadas de Fourier del error dependiente de la imagen $\hat{\mathcal{E}}_r = \text{DFT}\{\hat{\mathbf{e}}_r\}$ y el error dependiente del ruido $\hat{\mathcal{E}}_n = \text{DFT}\{\hat{\mathbf{e}}_n\}$ para el filtro original estimado $\hat{\mathcal{G}}$ como

$$\hat{\mathcal{E}}_r = (\hat{\mathcal{G}}\mathcal{H} - 1)\mathcal{X}, \quad (5.16)$$

$$\hat{\mathcal{E}}_n = \hat{\mathcal{G}}\mathcal{N}, \quad (5.17)$$

donde el filtro de degradación \mathcal{H} de la ecuación (5.16) es la versión real sin estimaciones. Análogamente, se representan los errores de restauración para el filtro desensibilizado \mathcal{G}' como

$$\mathcal{E}'_r = (\mathcal{G}'\mathcal{H} - 1)\mathcal{X}, \quad (5.18)$$

$$\mathcal{E}'_n = \mathcal{G}'\mathcal{N}. \quad (5.19)$$

El objetivo es contrastar los errores de restauración de ambos filtros $\hat{\mathcal{G}}$ y \mathcal{G}' para comprobar la influencia de la desensibilización sobre la imagen restaurada.

Definición 5.4. Sean $\hat{\mathcal{E}}_r$ y $\hat{\mathcal{E}}_n$ los respectivos errores dependientes de la imagen y del ruido para el filtro estimado $\hat{\mathcal{G}}$ y sean \mathcal{E}'_r y \mathcal{E}'_n los homólogos del filtro desensibilizado \mathcal{G}' , entonces se definen los errores relativos dependiente de la imagen δ_r y del ruido δ_n como

$$\delta_r = \frac{\mathcal{E}'_r}{\hat{\mathcal{E}}_r} \quad \text{y} \quad \delta_n = \frac{\mathcal{E}'_n}{\hat{\mathcal{E}}_n}.$$

Sustituyendo las expresiones (5.16), (5.17), (5.18) y (5.19) sobre la Definición 5.4 y utilizando la definición del filtro desensibilizado \mathcal{G}' de la ecuación (5.7), se llega a

$$\delta_r^{(m)} = \frac{[\hat{\mathcal{G}}(\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}})^m \mathcal{H} - 1]\mathcal{X}}{(\hat{\mathcal{G}}\mathcal{H} - 1)\mathcal{X}} = \frac{1 - (\hat{\mathcal{G}}\mathcal{H})(\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}})^m}{1 - \hat{\mathcal{G}}\mathcal{H}}, \quad (5.20)$$

$$\delta_n^{(m)} = \frac{\hat{\mathcal{G}}(\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}})^m \mathcal{N}}{\hat{\mathcal{G}}\mathcal{N}} = (\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}})^m, \quad (5.21)$$

cuyas representaciones respecto al número de iteraciones m aparecen en la Figura 5.3 y la Figura 5.4, utilizando los mismos productos de regularización $\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}}$ que en la Figura 5.2. En el caso de $\delta_r^{(m)}$ además se ha fijado el producto $\hat{\mathcal{G}}\mathcal{H} = 0.7$ para contemplar diferencias entre la estimación $\hat{\mathcal{H}}$ y su original \mathcal{H} .

Observando estas figuras, se descubre la restricción que se adelantaba al final de la sección anterior respecto al incremento indeliberado de m para conseguir mayor desensibilización. A medida que el número de iteraciones aumenta el error relativo dependiente de la imagen $\delta_r^{(m)}$ se va haciendo mayor que uno, lo que supone que $\mathcal{E}'_r > \hat{\mathcal{E}}_r$. Por el contrario, el error relativo dependiente del ruido $\delta_n^{(m)}$ va tendiendo a cero con lo que $\mathcal{E}'_n < \hat{\mathcal{E}}_n$. Por tanto, el reto del algoritmo es encontrar el número total de iteraciones \bar{m} que consigue el equilibrio entre ambas componentes del error de restauración, a la misma vez que se cumple la condición de desensibilización de la Propiedad 5.1.

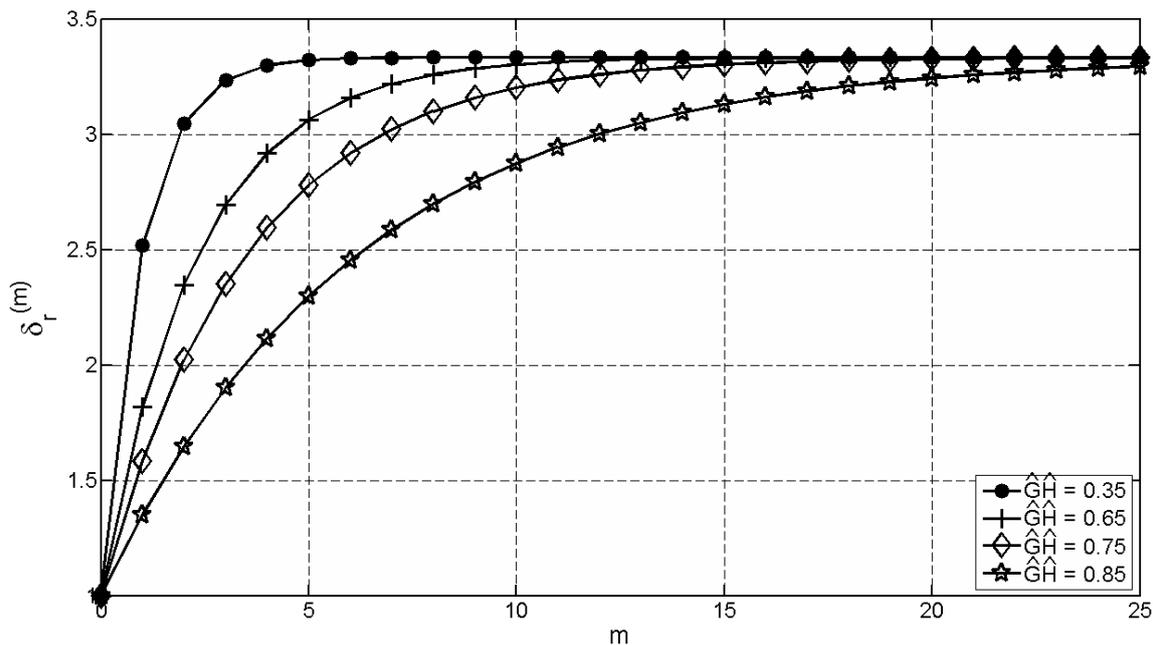


Figura 5.3: Error relativo dependiente de la imagen $\delta_r^{(m)}$ para diferentes valores de $\hat{G}\hat{H}$ indicados en la leyenda. Se ha fijado el producto $\hat{G}\hat{H} = 0.7$ para contemplar errores en las estimaciones de \hat{H} .

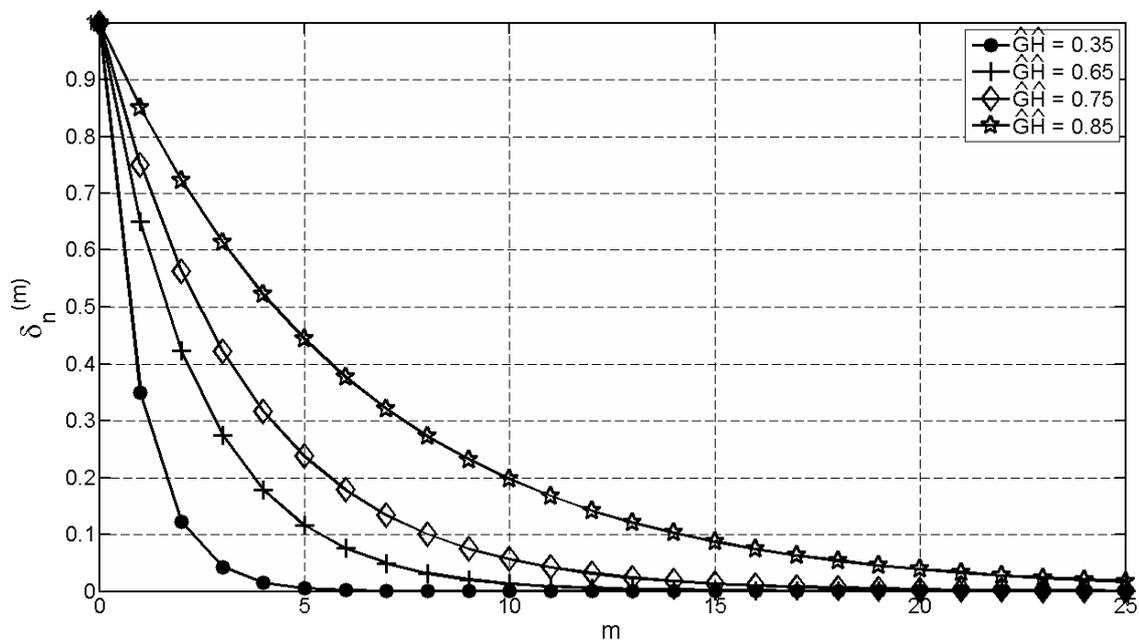


Figura 5.4: Error relativo dependiente del ruido $\delta_n^{(m)}$ para diferentes valores de $\hat{G}\hat{H}$ indicados en la leyenda.

5.3.4 Número recomendado de iteraciones \bar{m}

En esta sección se pretende obtener una expresión para el número total de iteraciones \bar{m} del algoritmo de desensibilización, atendiendo a las restricciones impuestas por los errores de restauración. Hay que tener en cuenta que se están usando expresiones escalares de las transformadas de Fourier de cada variable y, en consecuencia, el número de iteraciones a obtener será una función de las componentes de frecuencia, i.e. $\bar{m}(\omega_i, \omega_j) \forall (\omega_i, \omega_j) \in \mathcal{W}$.

Con la Propiedad 5.1 se estableció el criterio fundamental que tiene que cumplir el algoritmo de desensibilización sobre la función relativa de sensibilidad $Z^{(m)}$. Lo interesante sería saber hasta dónde minimizar $Z^{(m)}$ para que el impacto sobre el error dependiente del ruido no sea muy acusado, pero esta función no dispone de un mínimo como se vio en la Figura 5.2. Se recurre entonces a otra propiedad de la función $Z^{(m)}$ sobre la que se pueda imponer un nuevo criterio de sensibilidad. En particular, se utiliza un símil físico donde el objetivo es encontrar dónde la *aceleración* de la sensibilidad se hace máxima.

Definición 5.5. Sea $Z^{(m)}$ la función relativa de sensibilidad, entonces se define la aceleración relativa de sensibilidad $R^{(m)}$ como

$$R^{(m)} = \frac{\partial^2 Z^{(m)}}{\partial m^2}.$$

Después de varios cálculos (ver Demostración 5.5.1), se obtiene la expresión de $R^{(m)}$ para el algoritmo de desensibilización

$$R^{(m)} = (\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}})^m \ln(\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}}) [2 + (m + 1) \ln(\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}})], \quad (5.22)$$

cuya representación aparece en la Figura 5.5 y muestra la existencia de un valor máximo alcanzado para un valor de m dependiente del producto de regularización $\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}}$. A partir de esta función $R^{(m)}$ se puede definir el nuevo criterio del algoritmo de desensibilización para determinar el número total de iteraciones \bar{m} .

Propiedad 5.2. Sea $Z^{(m)}$ la función relativa de sensibilidad y $R^{(m)}$ su correspondiente aceleración relativa, entonces se define el número total de iteraciones \bar{m} del algoritmo de desensibilización como

$$\bar{m} = \arg \left\{ \begin{array}{l} \max\{R^{(m)}\} \\ Z^{(m)} < 1 \\ m \geq 1 \end{array} \right\}.$$

En la Demostración 5.5.2 se resuelven las ecuaciones para calcular el número total de iteraciones \bar{m} según el criterio de la Propiedad 5.2 y el resultado se expresa como

$$\bar{m} = \text{round} \left\{ - \left[1 + \frac{3}{\ln(\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}})} \right] \right\} \text{ siempre que } 0.14 < \hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}} < 0.84. \quad (5.23)$$

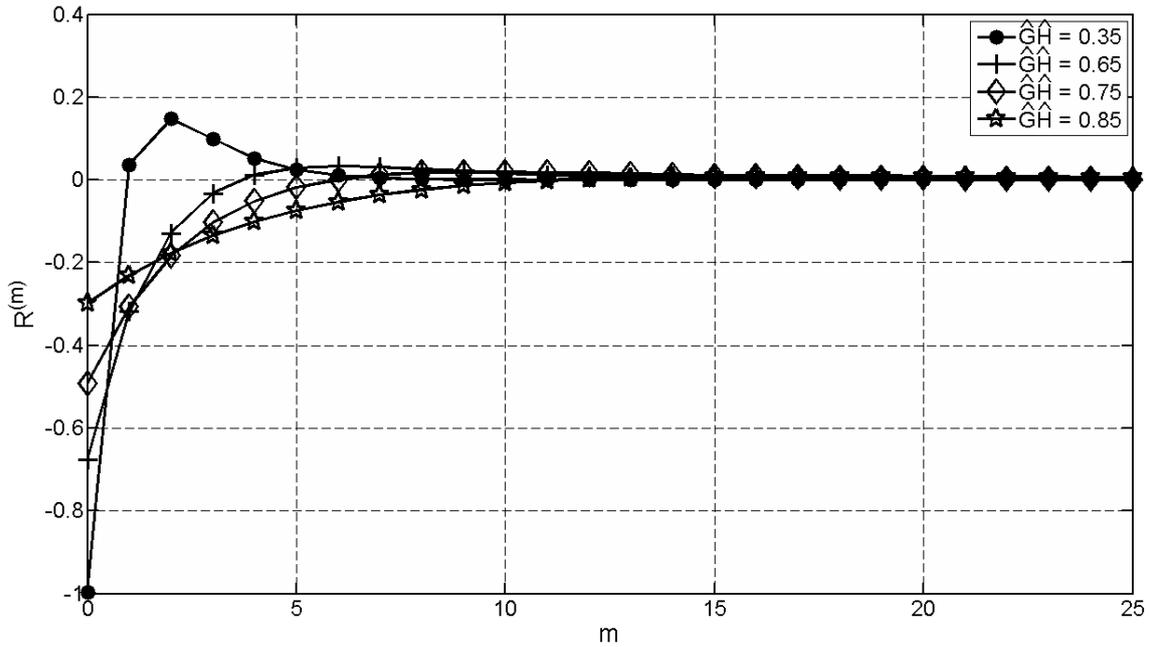


Figura 5.5: Aceleración relativa de sensibilidad $R^{(m)}$ para diferentes valores de $\hat{G}\hat{H}$ indicados en la leyenda.

Para comprobar las buenas propiedades del criterio de la Propiedad 5.2, la Tabla 5.1 pone en común los resultados de las variables estudiadas hasta el momento \bar{m} , $Z^{(\bar{m})}$, $\delta_r^{(\bar{m})}$ y $\delta_n^{(\bar{m})}$, donde los errores relativos de sensibilidad están expresados en dB, i.e.

$$\delta_r^{(m)} = 10 \log \delta_r^{(m)} [\text{dB}], \quad (5.24)$$

$$\delta_n^{(m)} = 10 \log \delta_n^{(m)} [\text{dB}], \quad (5.25)$$

y se ha mantenido el valor de $\hat{G}\hat{H} = 0.7$ para contemplar el error en la estimación de la PSF. Al observar esta tabla, se comprueba que la disminución del error relativo dependiente del ruido $\delta_n^{(\bar{m})}$ es superior al incremento en el error relativo dependiente de la imagen $\delta_r^{(\bar{m})}$, además de cumplirse siempre la condición de desensibilización $Z^{(\bar{m})} < 1$. Esta situación asegura una robustez del filtro desensibilizado a estimaciones erróneas sobre todo del ruido, dada su capacidad de reducir $\delta_n^{(\bar{m})}$. En definitiva, con este criterio se consigue que la sensibilidad del filtro \mathcal{G}' a los errores en los parámetros sea inferior a la del filtro original $\hat{\mathcal{G}}$ y asegura un equilibrio favorable del error de restauración.

5.4 Resultados experimentales

Con el objetivo de mostrar los beneficios del algoritmo de desensibilización propuesto respecto al filtro estimado $\hat{\mathcal{G}}$, este apartado presenta los resultados de un conjunto variado de experimentos que utilizan la misma imagen original *Camerman* de tamaño $L = 256 \times 256$. Los tipos de degradación a emplear se pueden encontrar

$\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}}$	\bar{m}	$Z^{(\bar{m})}$	$\delta_r^{(\bar{m})}$ [dB]	$\delta_n^{(\bar{m})}$ [dB]
0.20	1	0.40	9.15	-13.98
0.25	1	0.50	8.79	-12.04
0.30	1	0.60	8.41	-10.46
0.35	2	0.37	9.68	-18.24
0.40	2	0.48	9.43	-15.92
0.45	3	0.36	9.89	-20.81
0.50	3	0.50	9.66	-18.06
0.55	4	0.46	9.88	-20.77
0.60	5	0.47	9.97	-22.18
0.65	6	0.53	9.99	-22.45
0.70	7	0.66	9.94	-21.69
0.75	9	0.75	9.99	-22.49
0.80	12	0.89	10.03	-23.26

Tabla 5.1: Resultados numéricos para las variables \bar{m} , $Z^{(\bar{m})}$, $\delta_r^{(\bar{m})}$ y $\delta_n^{(\bar{m})}$ para diferentes valores del producto de regularización $\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}}$.

en los experimentos sobre la red MLP del Capítulo 4, con filtros de degradación por movimiento y por turbulencia atmosférica como PSF y ruido Gaussiano aditivo. Diferentes valores de degradación y ruido con sus estimaciones respectivas pretenden demostrar la capacidad del filtro \mathcal{G}' de reducir la sensibilidad del resultado de restauración frente a las estimaciones erróneas.

Como ya se introdujo al principio del capítulo, los filtros de restauración de referencia para aplicar el algoritmo de desensibilización son el filtro Tikhonov (5.3) y el filtro Wiener (5.4). En particular, el segundo de ellos ocupa gran parte de los experimentos y se concretan a continuación sus principales parámetros analizados en la Sección 3.2.1. Con respecto a la imagen original, su densidad espectral se aproxima por medio de la densidad espectral de la imagen degradada, esto es, $\hat{\mathcal{S}}_x = \mathcal{S}_y$. En lo que al ruido se refiere, se considera siempre un ruido blanco Gaussiano aditivo con una varianza estimada $\hat{\sigma}_n^2$ con lo que $\hat{\mathcal{S}}_n = \hat{\sigma}_n^2$. Para el caso de la PSF, la degradación base que se va utilizar es un movimiento lineal uniforme caracterizado por los parámetros ϕ (ángulo de inclinación) y d (longitud de movimiento). Estos parámetros serán estimados según $\hat{\phi}$ y \hat{d} alterados tanto manualmente respecto a sus valores reales, como usando un algoritmo de estimación real como el presentado en la Sección 3.2.2.

Para describir las desviaciones de los parámetros respecto a su valor real se utiliza una nueva variable.

Definición 5.6. Sea P un parámetro del que depende el filtro de restauración \mathcal{G} , entonces se define el error relativo del parámetro ξ_P como

$$\xi_P = \frac{P - \hat{P}}{P} \cdot 100 [\%],$$

donde \hat{P} es el valor estimado respecto al real P .

Así pues, para el caso del filtro Wiener anterior se identifican parámetros tales como σ_n^2 , ϕ o d . Dada la medida en porcentajes de ξ_P , el rango de valores máximo y mínimo que se contemplan es $-100 < \xi_P < 100$.

Los resultados en cada experimento se evaluarán para el filtro original \mathcal{G} con los valores reales de los parámetros (óptimo), con estimaciones erróneas sobre el filtro $\hat{\mathcal{G}}$ y usando el algoritmo desensibilizado. La métrica de restauración utilizada para comparar cada caso es el parámetro ISNR de la Definición 2.21.

Por último, es importante recordar que el algoritmo de desensibilización propuesto establece un número total de iteraciones dependiente de cada componente de frecuencia (ω_i, ω_j) , es decir, $\bar{m}(\omega_i, \omega_j)$. Usando la ecuación (5.23), se obtiene el valor para aquellas componentes donde el producto de regularización está dentro del rango $0.14 < \hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}} < 0.84$. En el caso de aquellas componentes que estén fuera del rango se requiere otro criterio que fije un valor de iteraciones concreto. Debido a la tendencia incremental de \bar{m} con respecto a $\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}}$ que se observa en la Tabla 5.1, todas aquellas componentes (ω_i, ω_j) que tengan un producto de regularización superior a 0.84 son asociadas a un número constante de iteraciones, equivalente al máximo alcanzado de \bar{m} dentro del rango en (5.23). Respectivamente, el menor valor de \bar{m} del rango, dícese cero iteraciones, se aplica a las componentes con valor de $\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}}$ por debajo de 0.14.

5.4.1 Experimento 1

En una primera simulación, se estudia el caso del filtro Wiener cuando se producen errores en la estimación del ruido. En particular, se utiliza la imagen original *Cameraman* degradada mediante un emborronamiento por movimiento lineal uniforme de longitud $d = 15$ píxeles e inclinación $\phi = 45^\circ$ en el sentido contrario a las agujas del reloj. Después, se añade un ruido Gaussiano con niveles de intensidad desde $\text{BSNR} = 0\text{dB}$ hasta $\text{BSNR} = 30\text{dB}$.

En el filtro de restauración estimado $\hat{\mathcal{G}}$ se mantiene el valor real de la PSF y, por tanto, $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$. Con respecto a la imagen original se utiliza la aproximación típica de $\hat{\mathcal{S}}_x = \mathcal{S}_y$ y es el ruido al que se le aplican errores en la estimación de su varianza $\hat{\sigma}_n^2$. Así pues, se utiliza como medida de estimación el error relativo de la desviación típica ξ_{σ_n} que se expresa según la Definición 5.6

$$\xi_{\sigma_n} = \frac{\sigma_n - \hat{\sigma}_n}{\sigma_n} \cdot 100, \quad (5.26)$$

y despejando la estimación $\hat{\sigma}_n$ se obtiene

$$\hat{\sigma}_n = \sigma_n \left(1 - \frac{\xi_{\sigma_n}}{100} \right). \quad (5.27)$$

Reemplazando la desviación típica σ_n por la versión cuadrática de la varianza σ_n^2 , se expresa la estimación de la varianza como

$$\hat{\sigma}_n^2 = \left[\sqrt{\sigma_n^2} \left(1 - \frac{\xi_{\sigma_n}}{100} \right) \right]^2. \quad (5.28)$$

Para mostrar los efectos del algoritmo de desensibilización, se considera el rango completo de variación de ξ_{σ_n} entre -100 y 100% . A partir de estas estimaciones, se calculan las distribuciones de ISNR para el filtro $\hat{\mathcal{G}}$ (estimado), \mathcal{G}' (desensibilizado) y \mathcal{G} (óptimo) tal y como aparece en la Figura 5.6. Concretamente, se parte de una imagen emborronada con BSNR de (a) 0dB, (b) 10dB, (c) 20dB y (d) 30dB.

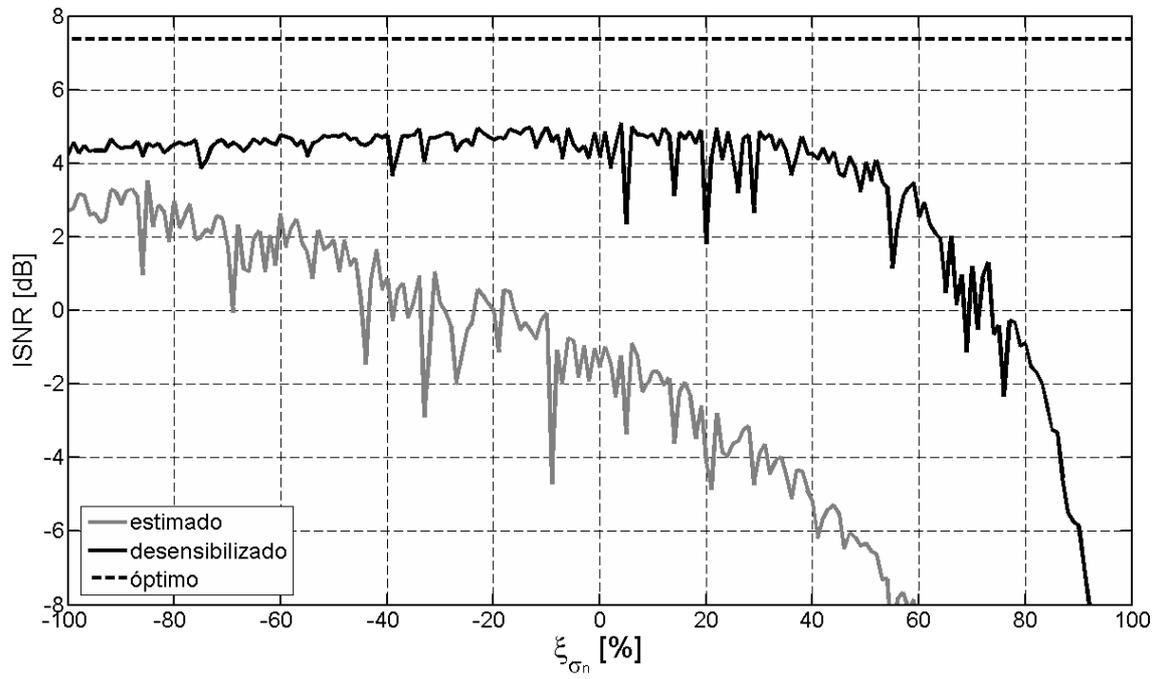
Definición 5.7. Sea $\hat{\mathcal{G}}$ el filtro de restauración estimado y \mathcal{G}' el filtro obtenido por el algoritmo de desensibilización, entonces se define la región desensibilizada para el parámetro P como D_P

$$D_P = \{ \xi_P \mid \text{ISNR}_{\mathcal{G}'} > \text{ISNR}_{\hat{\mathcal{G}}} > 0 \},$$

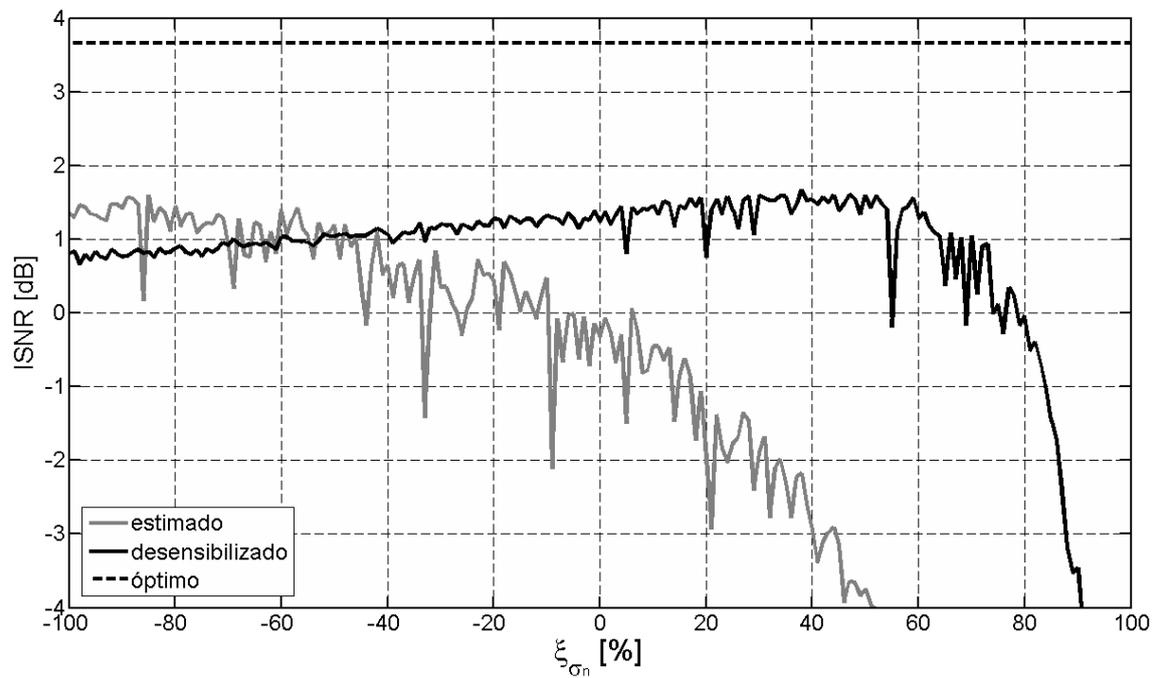
donde $\text{ISNR}_{\mathcal{G}'}$ e $\text{ISNR}_{\hat{\mathcal{G}}}$ representan el resultado de restauración para los filtros \mathcal{G}' y $\hat{\mathcal{G}}$ respectivamente.

Observando la Figura 5.6. se comprueba que la región desensibilizada D_{σ_n} se hace mayor a medida que el ruido en la imagen degradada es más grande, es decir, cuando la BSNR disminuye. Además, esta región contiene principalmente valores positivos de ξ_{σ_n} , i.e. $\hat{\sigma}_n^2 < \sigma_n^2$ donde la desensibilización se hace más notable que en el caso de ξ_{σ_n} por debajo de cero. Cuando ξ_{σ_n} tiende al 100% , la varianza estimada $\hat{\sigma}_n^2$ se convierte en cero y, en consecuencia, se genera una asíntota negativa en el resultado de ISNR. Por último, indicar las diferencias lógicas respecto al filtro óptimo \mathcal{G} que está igualmente por encima en el caso de $\xi_{\sigma_n} = 0$, pues el filtro estimado $\hat{\mathcal{G}}$ también incluye la aproximación respecto a la imagen original $\hat{\mathcal{S}}_x = \mathcal{S}_y$.

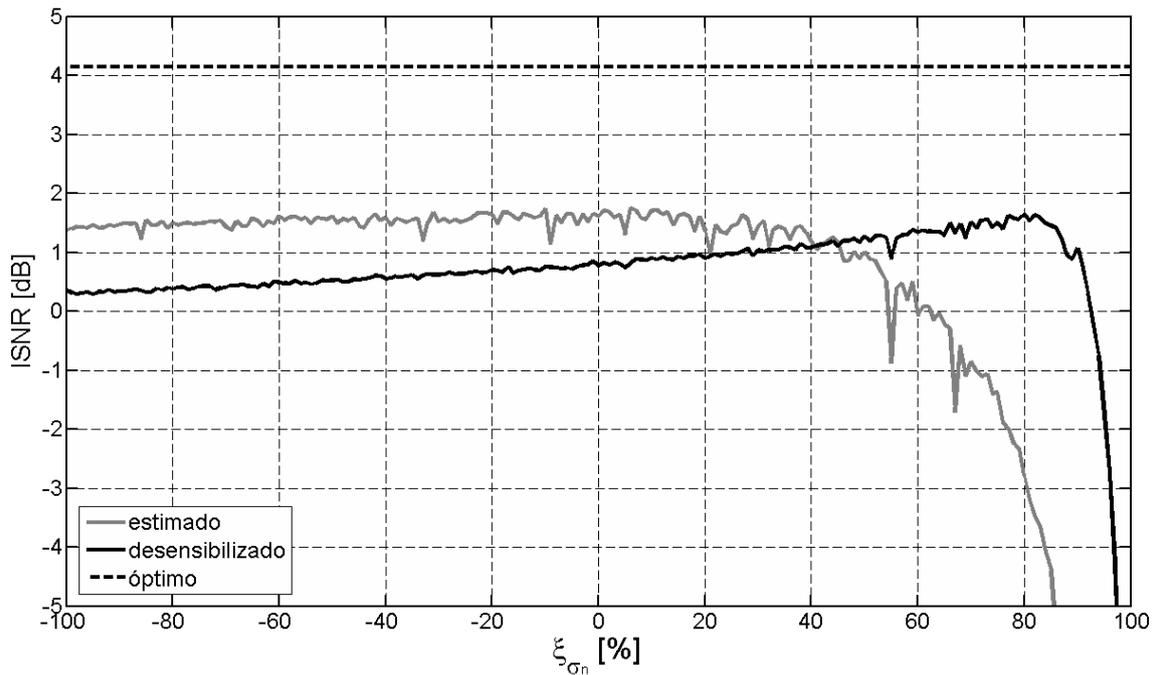
Para presentar un ejemplo de imágenes restauradas se toma un punto concreto de las gráficas de la Figura 5.6, esto es, (BSNR = 20 dB, $\xi_{\sigma_n} = 80\%$). Así pues, la Figura 5.7(a) muestra la imagen emborronada de referencia que se restaura mediante un filtro Wiener óptimo \mathcal{G} (b), utilizando su versión $\hat{\mathcal{G}}$ estimada con un error notable de $\xi_{\sigma_n} = 80\%$ respecto a la varianza del ruido $\hat{\sigma}_n^2$ (c) y, finalmente, usando el algoritmo de desensibilización (d). A la vista de las imágenes, se comprueba el efecto del algoritmo sobre el error dependiente del ruido, siendo éste mucho menor que en el caso del filtro estimado, i.e. $\mathcal{E}'_n \ll \mathcal{E}_n$. Por el contrario, este hecho repercute sobre el error de *ringing* que hace perder nitidez sobre la escena $\mathcal{E}'_r > \mathcal{E}_r$, pero con una intensidad menor que las mejoras sobre el ruido (recuérdese los resultados en la Tabla 5.1). Esta situación se refleja en los valores numéricos de la ISNR que favorecen al filtro desensibilizado con 1.44 dB frente a los -3.25 dB del filtro estimado. Se pueden comparar los resultados objetivos y subjetivos con el caso del filtro Wiener óptimo con ISNR = 4.14 dB.



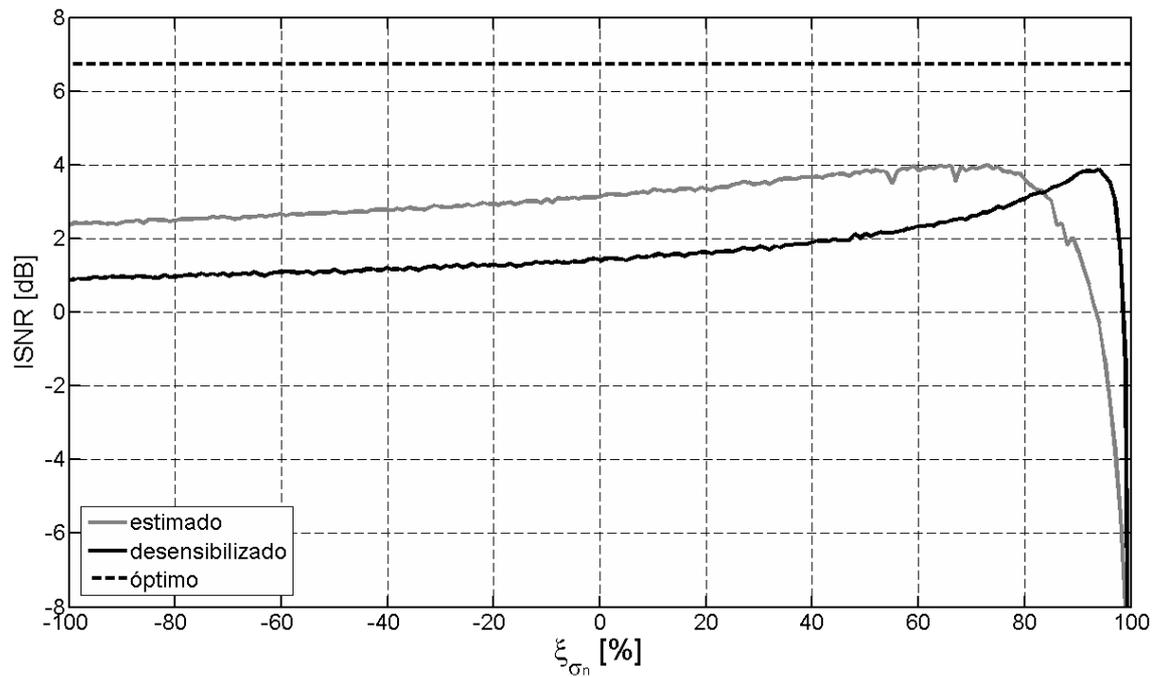
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.6: Distribuciones de ISNR obtenidas para el filtro Wiener desensibilizado \mathcal{G}' con estimaciones erróneas respecto al ruido según ξ_{σ_n} y dejando el valor real de la PSF. Diferentes niveles de ruido son considerados en relación a la BSNR de (a) 0 dB, (b) 10 dB, (c) 20 dB y (d) 30 dB. Igualmente, se incluyen los valores obtenidos para el filtro óptimo \mathcal{G} y el filtro estimado $\hat{\mathcal{G}}$.



(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.7: A partir de una degradación por movimiento lineal uniforme de 15 píxeles y 45° de inclinación y un ruido de intensidad $\text{BSNR} = 20$ dB (a), se obtienen las imágenes restauradas para el filtro Wiener óptimo (b) con $\text{ISNR} = 4.14$ dB, el filtro estimado con error sobre el ruido tal que $\xi_{\sigma_n} = 80\%$ (c) con $\text{ISNR} = -3.25$ dB y el filtro desensibilizado (d) con $\text{ISNR} = 1.44$ dB.

En términos de sensibilidad, se estudian los resultados del ejemplo anterior sobre la función relativa de sensibilidad Z en las componentes de frecuencia donde está definida $\forall(\omega_i, \omega_j) \in \mathcal{W}$ y, en particular, se pretende detectar las frecuencias en las que se cumple el criterio de desensibilización ($Z < 1$). La Figura 5.8 muestra una imagen binaria donde las frecuencias desensibilizadas están coloreadas de blanco y el resto del espectro aparece en negro. Observando esta figura, se puede concluir que las frecuencias desensibilizadas están totalmente vinculadas a aquéllas eliminadas por el emborronamiento paso bajo y, por tanto, los ceros del filtro de degradación que se convierten en polos sobre la restauración. Esto significa que el algoritmo propuesto desensibiliza precisamente las frecuencias donde es más probable tener magnificación del ruido (véase Sección 2.3.1) y así consigue que los resultados de $\hat{\mathcal{G}}'$ sean mejores a los del filtro original estimado $\hat{\mathcal{G}}$.

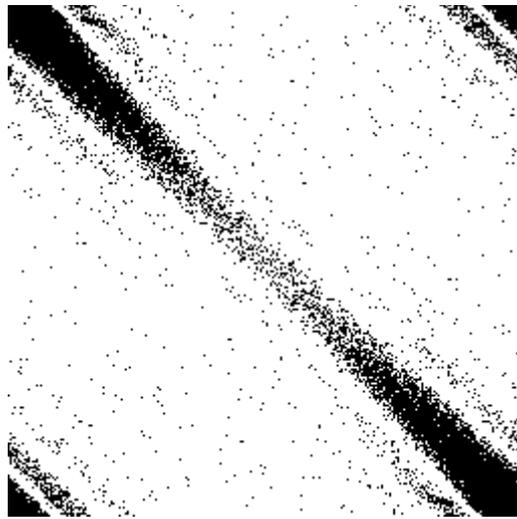


Figura 5.8: Frecuencias desensibilizadas coloreadas de blanco que cumplen con la propiedad $Z < 1$.

5.4.2 Experimento 2

Este segundo experimento se aplica igualmente sobre el filtro Wiener, pero esta vez estimado con errores sobre la PSF y usando el valor real de la varianza de ruido σ_n^2 . Con respecto a la imagen original, se mantiene la misma aproximación para la densidad espectral $\hat{\mathcal{S}}_x = \mathcal{S}_y$. Al igual que en el Experimento 1, la imagen original *Cameraman* es emborronada por un movimiento lineal uniforme de longitud $d = 15$ píxeles y $\phi = 45^\circ$ de inclinación, mientras que el ruido blanco Gaussiano se fija a una intensidad tal que $\text{BSNR} = 20\text{dB}$.

Para medir las desviaciones de la PSF respecto a su valor real, se utilizan los errores relativos de los dos parámetros estimados de $\hat{\mathcal{H}}$, esto es, ξ_d y ξ_ϕ que se expresan según la Definición 5.6 como

$$\xi_d = \frac{d - \hat{d}}{d} \cdot 100, \quad (5.29)$$

$$\xi_\phi = \frac{\phi - \hat{\phi}}{\phi} \cdot 100, \quad (5.30)$$

y despejando las estimaciones \hat{d} y $\hat{\phi}$ se obtiene que

$$\hat{d} = d \left(1 - \frac{\xi_d}{100} \right), \quad (5.31)$$

$$\hat{\phi} = \phi \left(1 - \frac{\xi_\phi}{100} \right). \quad (5.32)$$

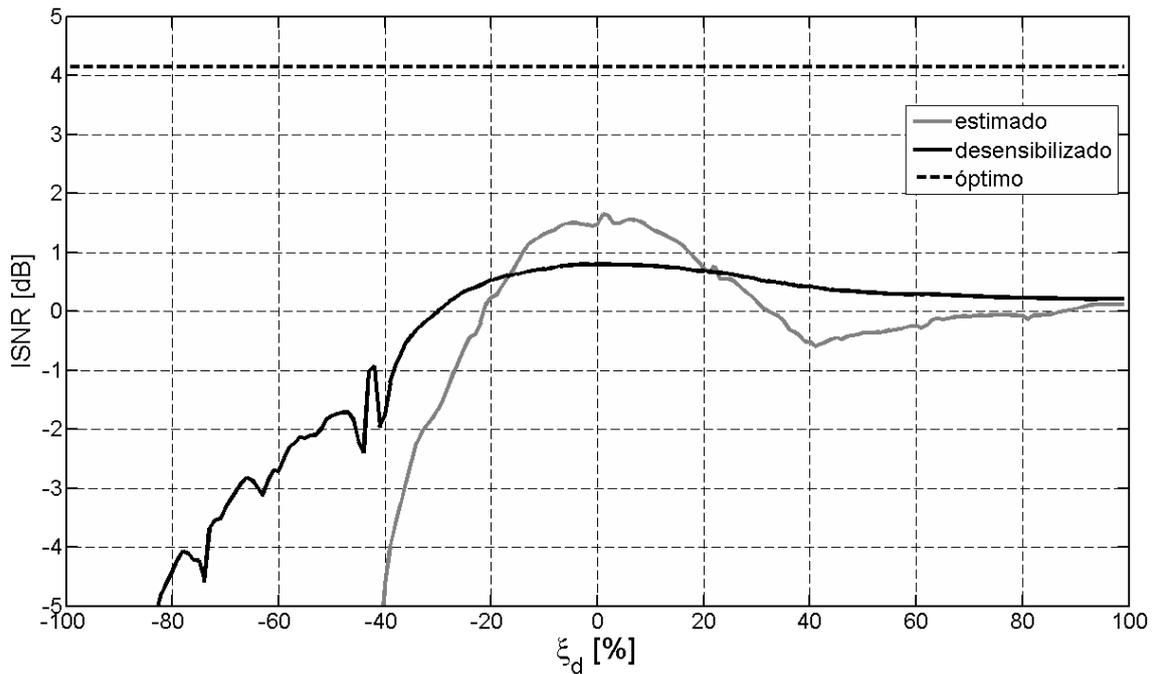
Siguiendo las mismas pautas que en el Experimento 1, se analizan las distribuciones de ISNR para el filtro estimado Wiener esta vez con errores sobre la estimación de la longitud de movimiento ξ_d y sobre la inclinación ξ_ϕ , ambos definidos en un rango entre -100 y 100% . En particular, la Figura 5.9 representa estas distribuciones para las tres versiones del filtro de restauración: óptimo \mathcal{G} , estimado $\hat{\mathcal{G}}$ y desensibilizado \mathcal{G}' , contemplando separadamente los errores en las estimaciones \hat{d} (a) y $\hat{\phi}$ (b). Observando estas gráficas se comprueba que las regiones de desensibilización D_d y D_ϕ se encuentran en el exterior de un ancho de banda definido por la ISNR de $\hat{\mathcal{G}}$. Esto implica que la desensibilización tiene un efecto positivo cuando los errores sobre las estimaciones de la PSF están por encima de un mínimo, ya sea en sentido positivo o negativo.

En conclusión, el algoritmo de desensibilización propuesto es también capaz de ofrecer un resultado de restauración mejor al filtro Wiener original cuando la PSF no se estima suficientemente bien. Esta situación demuestra el teorema corolario de la Sección 5.3.1 que indica que la propiedad de desensibilización $Z < 1$ se extiende individualmente a cada parámetro que compone el filtro \mathcal{G} . No obstante, conviene indicar que los resultados de este experimento demuestran una menor desensibilización frente a las estimaciones de la PSF que respecto a los errores en la estimación del ruido, como se esperaba por la reducción del error relativo $\delta_n^{(m)}$ en la Sección 5.3.3.

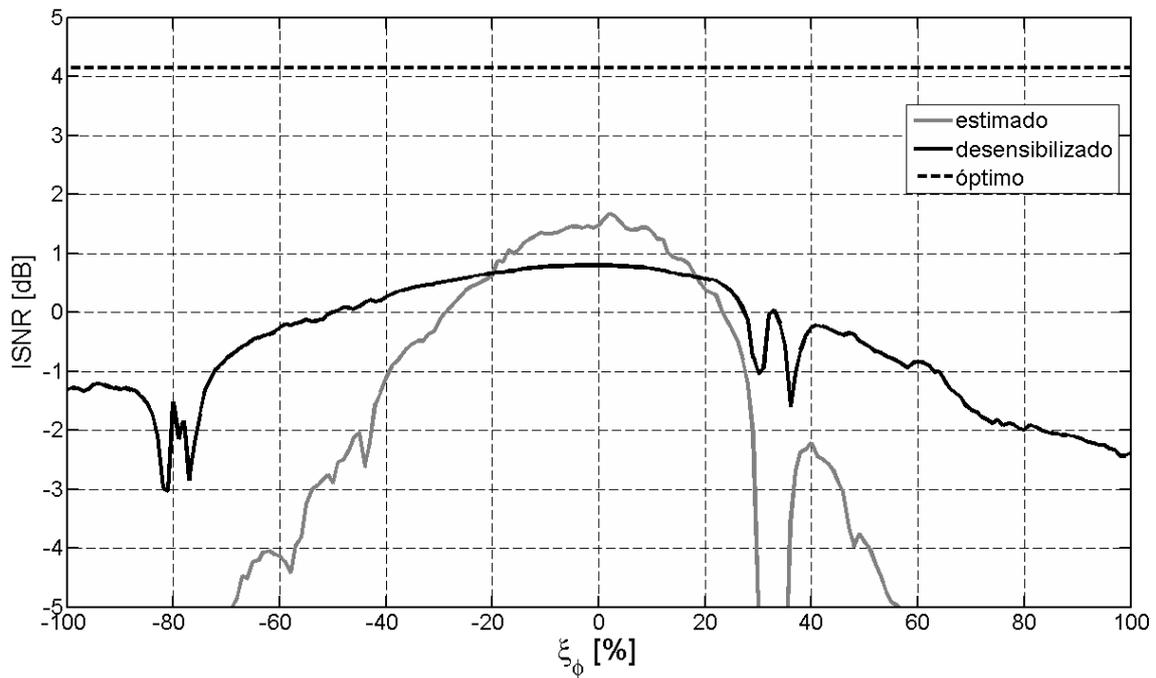
5.4.3 Experimento 3

Hasta ahora las estimaciones sobre los parámetros del filtro Wiener se han fijado de forma manual, perturbando su valor según el error relativo ξ_P de cada parámetro P . En esta ocasión se pretende utilizar algoritmos reales de estimación de parámetros para comprobar cómo la desensibilización robustece el resultado de restauración frente a los errores cometidos por los algoritmos. El experimento se centra concretamente en los métodos presentados en la Sección 3.2.2 para obtener estimaciones de una PSF de tipo movimiento lineal uniforme ($d = 15$ píxeles y $\phi = 45^\circ$). Con respecto al ruido, se utiliza el valor real de la varianza σ_n^2 y se mantiene la aproximación típica para la imagen original $\mathcal{S}_x = \mathcal{S}_y$.

En primer lugar, se utiliza el método de la Transformada de Radon para averiguar el ángulo de inclinación $\hat{\phi}$ en un rango de intensidades de ruido variables BSNR. La Tabla 5.2 revela cómo la estimación del ángulo se va haciendo más



(a)



(b)

Figura 5.9: Distribuciones de ISNR obtenidas para el filtro Wiener desensibilizado \mathcal{G}' con estimaciones erróneas respecto a la PSF y dejando el valor real de la varianza de ruido. En particular, se consideran los errores relativos respecto a la longitud de movimiento ξ_d (a) y la inclinación ξ_ϕ (b). Igualmente, se incluyen los valores obtenidos para el filtro óptimo \mathcal{G} y el filtro estimado $\hat{\mathcal{G}}$.

<i>Transformada de Radon</i>		ISNR [dB]		
<i>BSNR [dB]</i>	$\hat{\phi}$ [°]	<i>Óptimo (\mathcal{G})</i>	<i>Estimado ($\hat{\mathcal{G}}$)</i>	<i>Desensibilizado (\mathcal{G}')</i>
40	44	10.29	4.64	2.50
35	50	8.40	2.27	1.65
30	36	6.73	-1.25	0.70
25	64	5.28	-2.64	-0.21
20	62	4.14	-0.81	0.36
15	54	3.48	0.03	0.76

Tabla 5.2: Conjunto de resultados de ISNR para el filtro Wiener óptimo, estimado y desensibilizado cuando las estimaciones de una PSF por movimiento uniforme son realizadas por la transformada de Radon para diferentes BSNR. La inclinación de movimiento $\hat{\phi}$ es el parámetro estimado, mientras se mantienen los valores reales de \hat{d} y $\hat{\sigma}_n^2$.

imprecisa a medida que aumenta el ruido en la imagen emborronada, incluso adquiriendo un comportamiento aleatorio a partir de cierto nivel. Como consecuencia, los valores de ISNR para el filtro estimado Wiener $\hat{\mathcal{G}}$ van siendo peores cuando $\hat{\phi}$ se desvía suficientemente de su valor real de $\phi = 45^\circ$, tal y como se observó en el Experimento 2. El filtro desensibilizado \mathcal{G}' mejora en cierta medida los efectos derivados de los errores en la estimación $\hat{\phi}$ como se observa en la Figura 5.10 para el caso de BSNR = 30 dB. Las falsas texturas aparecidas por los errores en la estimación $\hat{\phi}$ (c) se ven reducidas en la imagen desensibilizada (d), si bien va en contra de una pérdida de nitidez por la excesiva de regularización necesaria para corregir los errores.

El segundo método de estimación de parámetros es el correspondiente al método de valores propios descrito en la Sección 3.2.2. En esta ocasión, se obtiene una expresión completa para la matriz $\bar{\mathbf{H}} \in \mathbb{R}^{M_1 \times M_2}$ de la PSF y, por ello, se define una nueva medida para medir el error en la estimación de la PSF.

Definición 5.8. Sea $\bar{\mathbf{H}} \in \mathbb{R}^{M_1 \times M_2}$ la matriz PSF, entonces se define el error en la estimación de la PSF como

$$\Delta h = \frac{\sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{M_2} |\hat{h}(i, j) - h(i, j)|}{M}.$$

Para este caso se parte de una imagen emborronada por un filtro Gaussiano como el de la Sección 2.2.4 de tamaño $M = 3 \times 3$ y descrito por una desviación típica σ_R . El ruido aditivo Gaussiano tiene una intensidad según BSNR = 40 dB, es decir, bajas condiciones de ruido para que el método de estimación de la PSF no esté influido por el ruido, sino por el número de vectores singulares R de la imagen

degradada y el parámetro σ_R de la PSF. Nuevamente se pone a prueba los efectos de la desensibilización cuando se utiliza el filtro de restauración Wiener. La Tabla 5.3 muestra los resultados de ISNR para unos valores de σ_R entre 1 y 5 y se toman dos números totales de autovectores 10 y 20. Las conclusiones obtenidas son las mismas que en el experimento anterior, consiguiendo mejores resultados para el filtro de desensibilización cuando los errores Δh respecto a la PSF se hacen significativos.



(a)



(b)



(a)



(b)

Figura 5.10: A partir de una degradación por movimiento lineal uniforme de 15 píxeles y 45° de inclinación y un ruido de intensidad $\text{BSNR} = 30 \text{ dB}$ (a), se obtienen las imágenes restauradas para el filtro Wiener óptimo (b) con $\text{ISNR} = 6.73 \text{ dB}$, el filtro estimado usando la Transformada de Radon para obtener $\hat{\phi} = 36^\circ$ (c) con $\text{ISNR} = -1.25 \text{ dB}$ y el filtro desensibilizado (d) con $\text{ISNR} = 0.70 \text{ dB}$.

R = 10				
<i>Valores propios</i>		ISNR [dB]		
σ_R	Δh	<i>Óptimo</i> (\mathcal{G})	<i>Estimado</i> ($\hat{\mathcal{G}}$)	<i>Desensibilizado</i> (\mathcal{G}')
1	0.0019	6.86	3.37	1.49
1.5	0.0207	8.06	2.25	1.52
2	0.0279	8.33	0.86	1.36
2.5	0.0312	8.45	0.06	1.21
3	0.0330	8.57	-0.44	1.12
3.5	0.0341	8.60	-0.77	1.05
4	0.0348	8.60	-1.00	1.00
4.5	0.0353	8.60	-1.16	0.97
5	0.0357	8.62	-1.28	0.94
R = 20				
<i>Valores propios</i>		ISNR [dB]		
σ_R	Δh	<i>Óptimo</i> (\mathcal{G})	<i>Estimado</i> ($\hat{\mathcal{G}}$)	<i>Desensibilizado</i> (\mathcal{G}')
1	0.0052	6.86	3.27	1.48
1.5	0.0237	8.06	1.11	1.34
2	0.0309	8.33	-0.85	1.07
2.5	0.0343	8.45	-2.45	1.07
3	0.0361	8.57	-3.74	1.17
3.5	0.0372	8.60	-4.72	1.22
4	0.0380	8.60	-5.46	1.18
4.5	0.0385	8.60	-5.99	1.14
5	0.0388	8.62	-6.37	1.10

Tabla 5.3: Conjunto de resultados de ISNR para el filtro Wiener óptimo, estimado y desensibilizado cuando las estimaciones de una PSF tipo Gaussiano descrita por σ_R se realizan usando el método de valores propios con dos números R de autovectores. La intensidad de ruido es muy baja $\text{BSNR} = 40$ dB y se utiliza el valor real de la varianza σ_n^2 para la estimación.

5.4.4 Experimento 4

Para finalizar el grupo de experimentos con el algoritmo de desensibilización, se estudian los resultados sobre el filtro de restauración Tikhonov (5.3). Tal y como se analizó en la Sección 3.2.1, los parámetros en este caso se corresponden con los correspondientes a la PSF y el parámetro de regularización $\hat{\lambda}$. Este último tiene la particularidad de depender tanto del ruido (principio de la discrepancia) como de la imagen original.

Así pues, se empieza repitiendo las mismas condiciones del Experimento 1 pero usando el filtro estimado $\hat{\mathcal{G}}$ Tikhonov. Se particulariza al caso de ruido con $\text{BSNR} = 20$ dB y se muestra la distribución de ISNR para el rango completo de errores $-100 < \xi_{\sigma_n} < 100$ en la Figura 5.11(a). Se observa que la región de desensibilización D_{σ_n} aplica para valores positivos de ξ_{σ_n} , i.e. $\hat{\sigma}_n^2 < \sigma_n^2$ y comienza para errores suficientemente pequeños en torno al 20%. Se hace notar que el filtro estimado $\hat{\mathcal{G}}$ esta vez sí coincide con el óptimo para $\xi_{\sigma_n} = 0$, pues en realidad el parámetro λ se está calculando con el principio de discrepancia también para el caso óptimo, pero usando el valor real de la varianza de ruido σ_n^2 . Por tanto, se comprueban las buenas propiedades de la desensibilización frente a los errores cometidos por el principio de la discrepancia en $\hat{\lambda}$ al variar $\hat{\sigma}_n^2$.

En segundo lugar, se repite el Experimento 2 en el caso de variar la estimación del ángulo $\hat{\phi}$ para la PSF. Usando el rango completo del error relativo ξ_{ϕ} , se llega a una representación de los valores de ISNR tal y como aparece en la Figura 5.11(b). La región de desensibilización D_{ϕ} está fuera de un ancho de banda limitado para el filtro Tikhonov, que indica los errores a partir de los cuales el algoritmo de desensibilización ofrece mejores prestaciones que el filtro original estimado $\hat{\mathcal{G}}$.

5.5 Demostración de ecuaciones

5.5.1 Demostración de (5.22)

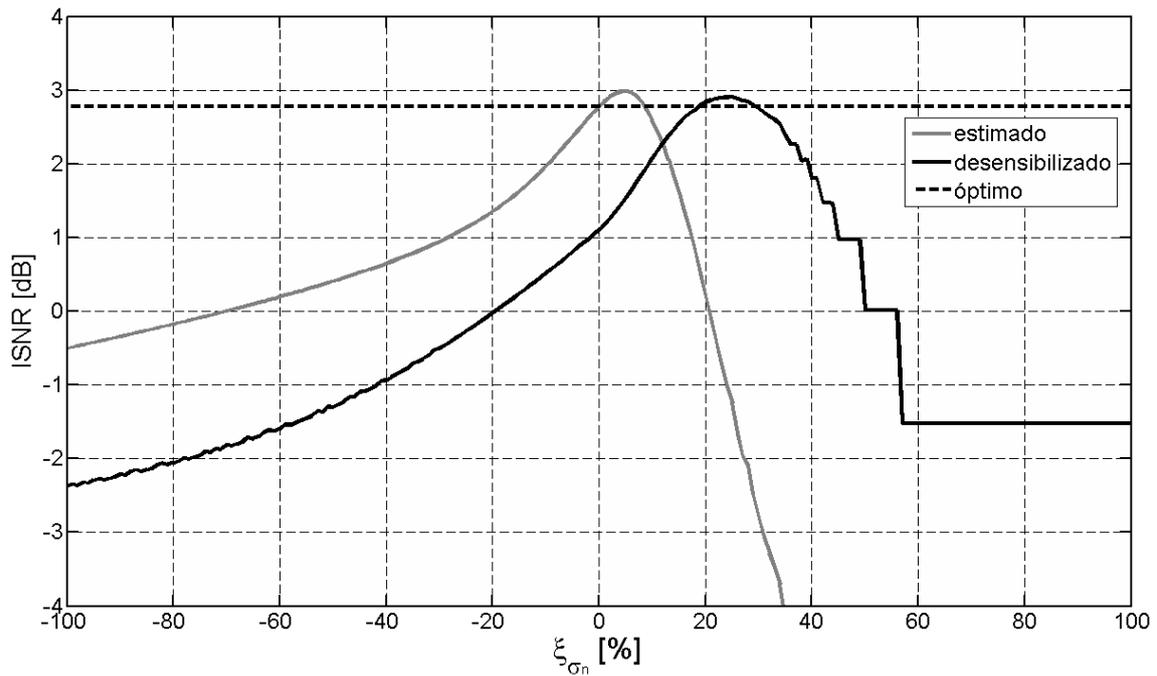
Considerando la definición de la función relativa de sensibilidad $Z^{(m)}$ en (5.10) y aplicando su primera derivada con respecto a m , se obtiene que

$$\begin{aligned} R^{(m)} &= \frac{\partial}{\partial m} \left\{ \frac{\partial}{\partial m} [(m+1)(\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}})^m] \right\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial m} \{ (\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}})^m + (m+1)(\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}})^m \ln(\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}}) \} = \\ &= \frac{\partial}{\partial m} \{ (\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}})^m [1 + (m+1) \ln(\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}})] \}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

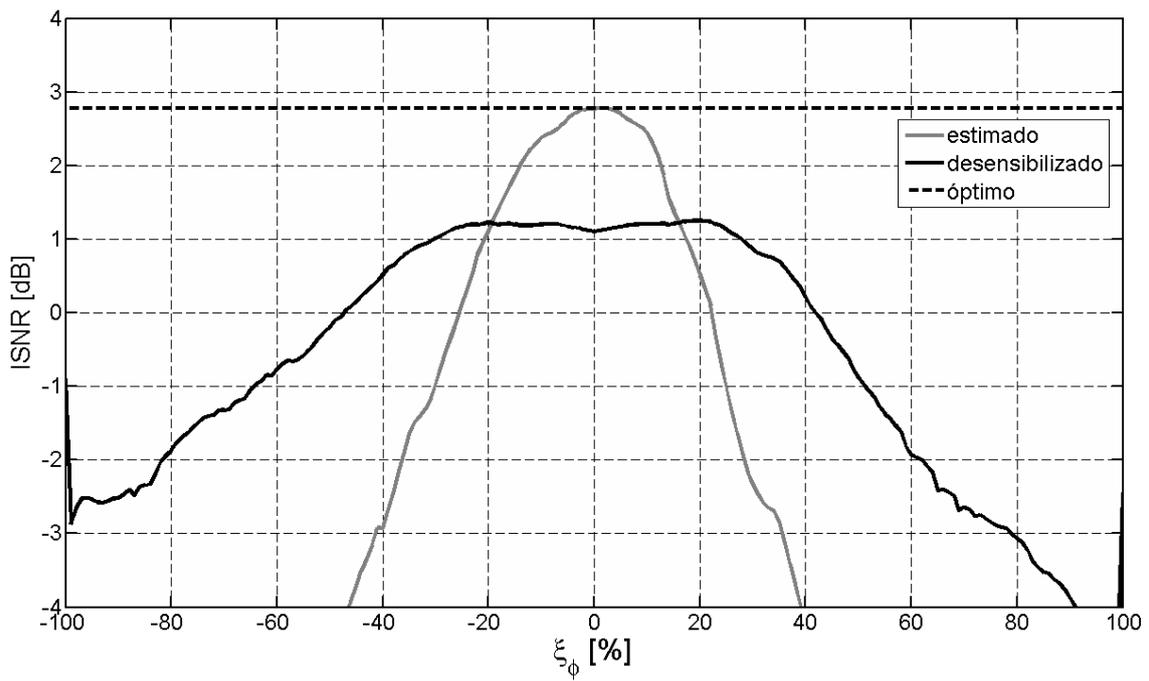
Tomando una nueva derivada, se llega a

$$R^{(m)} = (\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}})^m \ln(\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}}) [1 + (m+1) \ln(\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}})] + (\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}})^m \ln(\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}}), \quad (5.34)$$

y simplificando



(a)



(b)

Figura 5.11: Distribuciones de ISNR obtenidas para el filtro Tikhonov desensibilizado \mathcal{G}' con estimaciones erróneas respecto al ruido (a) por un lado y por otro con errores en la estimación de la PSF de movimiento (b). En particular, se consideran los errores relativos respecto a la varianza de ruido ξ_{σ_n} (a) y la inclinación de movimiento de la PSF ξ_{ϕ} (b). Igualmente, se incluyen los valores obtenidos para el filtro óptimo \mathcal{G} y el filtro estimado $\hat{\mathcal{G}}$.

$$R^{(m)} = (\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}})^m \ln(\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}}) [2 + (m + 1) \ln(\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}})]. \quad (5.35)$$

5.5.2 Demostración de (5.23)

Según la Propiedad 5.2, el primer objetivo es resolver un problema de optimización que supone obtener el valor de m que maximiza la función $Z^{(m)}$. Al tratarse de una función escalar de una dimensión, esto equivale a calcular el extremo en el que la primera derivada se hace nula. Así pues, a partir de (5.22) se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial R^{(m)}}{\partial m} &= \frac{\partial}{\partial m} \{(\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}})^m \ln(\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}}) [2 + (m + 1) \ln(\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}})]\} \\ &= (\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}})^m \ln^2(\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}}) [3 + (m + 1) \ln(\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}})] = 0. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Considerando el dominio de definición del producto de regularización en (5.15), entonces $\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}} = 0$ es una posible solución para hacer cero $(\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}})^m$, pero está indeterminado para la función Neperiano. En consecuencia, se puede simplificar la resolución de la ecuación (5.36) buscando el valor de m tal que

$$3 + (m + 1) \ln(\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}}) = 0, \quad (5.37)$$

cumpliendo la restricción de que $0 < \hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}} < 1$. Despejando m se asigna una expresión para el número total de iteraciones en cada componente de frecuencia (ω_i, ω_j)

$$\bar{m} = \text{round} \left\{ - \left[1 + \frac{3}{\ln(\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}})} \right] \right\}, \quad (5.38)$$

donde el operador $\text{round}\{\cdot\}$ devuelve el valor entero más próximo del argumento.

Ahora se comprueba que en realidad $R^{(m)}$ presenta un máximo para este valor de \bar{m} . Para ello, se aplica la segunda derivada de $R^{(m)}$ usando la expresión (5.36) e imponiendo la condición de ser menor que cero

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R^{(m)}}{\partial m^2} &= \frac{\partial}{\partial m} \{(\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}})^m \ln^2(\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}}) [3 + (m + 1) \ln(\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}})]\} \\ &= (\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}})^m \ln^3(\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}}) [4 + (m + 1) \ln(\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}})] < 0. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Teniendo en cuenta el rango para el producto de regularización $0 < \hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}} < 1$, se puede asegurar que el extremo (5.39) es un mínimo para $R^{(m)}$ si se cumple que

$$4 + (\bar{m} + 1) \ln(\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}}) > 0. \quad (5.40)$$

Sustituyendo la expresión de \bar{m} (5.38) para la ecuación anterior, se obtiene una nueva restricción para el producto $\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}}$

$$\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}} > \exp(-2) \approx 0.14. \quad (5.41)$$

Por otro lado, hay que asegurar no sólo la optimización de $R^{(m)}$, sino también que se cumple la condición de desensibilización $Z^{(m)} < 1$ de la Propiedad 5.2. Así pues, sustituyendo la expresión (5.38) en la definición de $Z^{(m)}$ e imponiendo la restricción anterior, se llega a la ecuación

$$Z^{(\bar{m})} = (\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}})^{-[1+3/\ln(\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}})]} \left[\frac{3}{\ln(\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}})} \right] < 1. \quad (5.42)$$

En base a [21], se demuestra otra restricción para el producto de regularización, esto es

$$\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}} < \frac{-3}{\exp(-3) \text{LambertW}\left(\frac{-3}{\exp(-3)}\right)} \approx 0.84, \quad (5.43)$$

donde el operador $\text{LambertW}\{\cdot\}$ se define como

$$\text{LambertW}(x) \cdot \exp[\text{LambertW}(x)] = x. \quad (5.44)$$

Por tanto, juntado todas las restricciones, se llega a que el número de iteraciones \bar{m} de la ecuación (5.38) es válido si y sólo si

$$0.14 < \hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{H}} < 0.84. \quad (5.45)$$

Capítulo 6

Conclusiones

El capítulo final de esta memoria resume los principales resultados que se han obtenido durante la investigación y concluye el trabajo de la tesis. No obstante, se reserva una última sección para discutir perspectivas y posibles puntos abiertos que pudieran dar continuidad a un trabajo futuro.

6.1 Resumen de contribuciones

Esta tesis ha dirigido su investigación hacia dos problemas conocidos en la restauración de imágenes. El primero de ellos es resultado de modelar la degradación como una operación de convolución. Dadas sus propiedades no locales, es necesario realizar hipótesis sobre las fronteras de la imagen (BCs) para evitar el artefacto de *boundary ringing*, tanto más presente cuanto mayor es la discontinuidad en los límites de la imagen. En segundo lugar, los algoritmos de restauración basan sus ecuaciones en un conocimiento a priori sobre parámetros respecto a tres grupos: proceso de degradación, ruido e imagen original. Las estimaciones de estos parámetros han de ser suficientemente precisas ya que el filtro de restauración tiene una alta sensibilidad a los cambios respecto a su valor real.

Siguiendo estas dos líneas de trabajo, la tesis presenta dos algoritmos iterativos que han sido publicados en [84] y [83] respectivamente. El primer algoritmo proporciona un método para restaurar imágenes observadas reales donde las fronteras exteriores al campo de visión (FOV) están truncadas. Este método minimiza iterativamente una función de coste particularizada a las normas ℓ_2 (regularización Tikhonov) y ℓ_1 (regularización por variación total) mediante un perceptrón multicapa (MLP). El funcionamiento de la red se basa en la técnica de

retro-propagación que repite por cada iteración dos procesos: *forward* y *backward*, que simulan respectivamente una restauración y una degradación. Como resultado, se consigue no sólo que el centro de la imagen sea restaurado según la optimización de la función de coste, sino que además las fronteras truncadas sean reconstruidas hasta el tamaño original de la imagen. Y lo que es más importante, no se requiere ningún tipo de información a priori sobre las fronteras ni entrenamiento previo de la red, y a pesar de ello los efectos del *boundary ringing* son reducidos notablemente.

Mediante una serie de experimentos se demuestran las propiedades de la red neuronal para resolver el truncamiento de las fronteras, a diferencia de otros métodos del estado del arte que están principalmente basados en las hipótesis de convolución circular. El regularizador por variación total (TV) es, como se esperaba, el que consigue una mejor calidad subjetiva en la restauración, pues preserva los bordes de los objetos en la escena a la vez que reduce los artefactos del ruido. Además, la presencia del *ringing* es inapreciable a pesar de utilizar una imagen truncada sin fronteras y con una alta discontinuidad, lo que en otros métodos se traduce en artefactos visibles.

La capacidad de la MLP de reconstruir las fronteras de la imagen observada es un hecho distintivo respecto a los algoritmos actuales que tan solo consiguen restaurar sobre el campo de visión, y además necesitan asumir BCs tales como el modelo reflexivo y anti-reflexivo para reducir los efectos del *boundary ringing*.

Para la segunda línea de tesis sobre la desensibilización de estimaciones, se presenta otro algoritmo iterativo que mantiene el mismo concepto de restauración-degradación, pero esta vez aplicado en el dominio de Fourier. Un análisis detallado de las variables de sensibilidad demuestra la necesidad de una relación de compromiso entre el grado de desensibilización y los errores de restauración a la hora de definir el número de iteraciones para cada componente de frecuencia. En particular, es el error dependiente del ruido el que ofrece mejores prestaciones a diferencia del error del *ringing*, lo que indica una mayor robustez del algoritmo a las estimaciones del ruido.

Como se observa en los experimentos realizados, los errores sobre la varianza del ruido tienen una importante implicación sobre los resultados de filtro de restauración, siendo mayor cuando más intensidad de ruido existe sobre la imagen observada. La región de desensibilización que aparece sobre las gráficas de ISNR respecto a los errores del ruido, confirman los mejores resultados cuando se aplica el algoritmo tanto para el filtro Wiener como el de Tikhonov. Incluso, se demuestra que los pares de frecuencias desensibilizados en el espectro coinciden con aquéllos que son eliminados por la degradación y que son susceptibles de amplificar el ruido en la restauración. Dicho de otra forma, la desensibilización se convierte en una forma de regularizar los errores producidos por la estimación del ruido, si bien tiene la contrapartida de una pérdida de nitidez en la imagen restaurada.

Dadas las propiedades del algoritmo de extender el criterio de desensibilización a cualquiera de los parámetros de los que depende el filtro de restauración, se llevan a cabo también pruebas cuando se alteran las estimaciones de los parámetros respecto a la PSF. En este caso, las regiones de desensibilización en las gráficas comienzan a partir de un ancho de banda mínimo, que es superado por los algoritmos reales de desconvolución ciega cuando el nivel de ruido es

suficientemente alto o la intensidad de emborronamiento es considerable. Por tanto, el algoritmo de desensibilización se convierte en un medio de robustecer los algoritmos actuales de estimación de parámetros.

6.2 Posibles líneas de trabajo futuro

Una vez concluido el trabajo sobre los dos algoritmos presentados en el marco de esta tesis, aún quedan abiertas diferentes cuestiones que permiten plantearse trabajos futuros.

Con respecto a la red neuronal MLP, los experimentos se han llevado a cabo siempre con una estructura concreta de red compuesta por dos capas y tan solo dos neuronas en la capa oculta. Dado que el análisis se ha realizado de forma genérica, sería interesante estudiar más en detalle otras combinaciones de capas y neuronas. Por otro lado, aunque se introducía en la Sección 5.1 que la elección de la MLP está basada en un criterio de simplicidad, otras alternativas de red neuronal como las estructuras Hopfield [74][88][38] podrían estudiarse con más detenimiento para aplicarse al objetivo de reconstrucción de fronteras, siempre cumpliendo un compromiso entre calidad y complejidad.

En lo que se refiere al algoritmo de minimización de la MLP, se ha utilizado el gradiente descendente como mecanismo más sencillo para aplicar la técnica de retro-propagación. Sin embargo, la velocidad de convergencia es muy lenta e implica un mayor coste computacional para conseguir la imagen restaurada. Por eso, se plantean otras alternativas más eficientes tales como el algoritmo de gradiente conjugado que se presentó en la Sección 2.3.4 [37].

El funcionamiento de la red tiene tres grados de libertad principales: el parámetro de regularización λ , la constante de aprendizaje η y el criterio de parada para el número total de iteraciones \bar{m} . En el primero de ellos, se ha recurrido al paradigma Bayesiano para establecer su valor pensando sólo en la capa de salida de la red y ha tenido un buen resultado para el primero de los experimentos. Sin embargo, se ha comprobado que es necesario investigar otras opciones para determinar λ si se quiere extender a un mayor número de experimentos. En el caso de la constante de aprendizaje, el valor se ha fijado empíricamente pero no se ha determinado una expresión que calcule su valor óptimo. Por último, el criterio de parada se ha establecido a un pequeño porcentaje de cambio de la función de coste, pero sería conveniente descubrir otras opciones de finalizar el algoritmo antes de la convergencia y conseguir el efecto de regularización descrito en la Sección 2.3.4 (semi-convergencia).

El segundo de los algoritmos de esta tesis ofrece una estructura del filtro desensibilizado basada en el mismo concepto iterativo de restauración-degradación, pero en el dominio de la frecuencia. Con el objetivo de buscar mejores prestaciones en la desensibilización, sería conveniente investigar una arquitectura de filtros algo más compleja e incluso plantearse soluciones en el dominio espacial que aproveche la correlación entre píxeles. Así por ejemplo, podría estudiarse las posibilidades de un esquema de red neuronal como el del algoritmo anterior para el objetivo de desensibilización. De hecho, la desensibilización se ha aplicado sobre algoritmos de

restauración de los que se puede definir un filtro lineal, pero debería pensarse un esquema que diera cabida a otro tipo de algoritmos como los de variación total.

El estudio de sensibilidad se ha realizado de forma general a todos los parámetros de los que depende el filtro de restauración y se deducía que el criterio de desensibilización aplica a todos ellos de la misma forma. No obstante, interesaría realizar un estudio sobre algún parámetro concreto y redefinir todas las ecuaciones para saber la implicación real del parámetro sobre la sensibilidad. Concretamente, el parámetro de regularización λ tiene mucha importancia sobre los algoritmos de regularización y supone un reto importante el hecho de desensibilizar su influencia sobre la calidad de restauración. Igualmente, la desconvolución ciega ocupa un lugar de gran interés en la comunidad científica y requeriría una investigación particularizada a los parámetros de la PSF.

Ambos algoritmos han sido desarrollados con el software MATLAB y, de hecho, todas las ecuaciones de la memoria se han planteado con formato matricial para ser óptimas en esta plataforma. No obstante, y con especial interés sobre la MLP, se sugiere su recodificación en otros lenguajes y entornos que pudieran dar más prestaciones de cómputo. En especial, son muy típicas actualmente las soluciones de desarrollo basadas en utilizar el hardware de la tarjeta gráfica con librerías específicas (p.ej. CUDA¹⁵).

¹⁵ <http://es.wikipedia.org/wiki/CUDA>

Bibliografía

- [1] S. Aja-Fernandez, M. Niethammer, M. Kubicki, M.E. Shenton and C.F. Westin, “Restoration of DWI Data Using a Rician LMMSE Estimator,” *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 27, no. 10, pp. 1389-1403, 2008.
- [2] G. Allaire, “Analyse numérique et optimisation,” *Éditions de l'École Polytechnique*, 2005.
- [3] G. Ammar and W. Gragg, “Superfast solution of real positive definite Toeplitz systems,” *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 9, pp. 61-76, 1988.
- [4] A. Aricò, M. Donatelli and S. Serra-Capizzano, “Spectral analysis of the anti-reflective algebra”, *Linear Algebra and its Applications*, vol. 428, pp. 657-675, 2008.
- [5] M. Avriel, “Nonlinear Programming: Analysis and Methods,” *Dover Publishing*, 2003.
- [6] S. D. Babacan, R. Molina and A.K. Katsaggelos, “Variational Bayesian blind deconvolution using a total variation prior,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 18, no. 1, pp. 12-26, 2009.
- [7] M. R. Banham, “Wavelet-Based Image Restoration Techniques,” *Tesis Doctoral*, Northwestern University, Evanston (Illinois), USA, 1994.
- [8] M.R. Banham and A.K. Katsaggelos, “Digital Image Restoration,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 14, no. 2, pp. 24-41, 1997.

- [9] M. Beal, “Variational algorithms for approximate Bayesian inference,” *Ph.D. dissertation*, The Gatsby Computational Neuroscience Unit, University College London, 2003.
- [10] M. Bertero, “Linear inverse and ill-posed problems,” *Advances in Electronics and Electron Physics*, vol. 75, 1989.
- [11] M. Bertero and P. Boccacci, “Introduction to Inverse Problems in Imaging,” *IOP Publishing*, 1998.
- [12] D. P. Bertsekas, A. Nedic, and A. E. Ozdaglar, “Convex Analysis and Optimization,” *Athena Scientific*, 2003.
- [13] J. Bioucas-Dias, M. Figueiredo and J.P. Oliveira, “Total variation-based image deconvolution: a majorization–minimization approach,” *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 2, pp. 861–864, 2006.
- [14] K. Brandt and M. Sysking, “The Matrix Cookbook,” at <http://matrixcookbook.com/>, last update 2008.
- [15] P. Campisi and K. Egiazarian, “Blind image deconvolution: theory and applications,” *CRC Press*, 2007.
- [16] A. Chambolle, “An algorithm for total variation minimization and applications,” *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 20, pp. 89–97, 2004.
- [17] A. Chambolle, “Total variation minimization and a class of binary MRF models,” *5th International Workshop on Energy Minimization Methods in Computer Vision and Pattern Recognition*, Springer Lecture Notes in Computer Science, vol. 3757, pp. 136–152, 2005.
- [18] T. Chan, S. Esedoglu, F. Park and A. Yip, “Recent developments in total variation image restoration,” *Handbook of Mathematical Models in Computer Vision*, N. Paragios, Y. Chen, O. Faugeras (Eds.), Springer, 2005.
- [19] T.F. Chan and J. Shen, “Image Processing and Analysis Variational, PDE, Wavelet and Stochastic Methods,” *Frontiers in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM)*, 2005.
- [20] G. Cisneros, E. Bernués, I. Rodríguez, M. A. Santiago and F. Álvarez, “Desensitisation of medical images restoration under crude estimates of mobile radio channels,” *International Conference on Image Processing*, vol. 1, pp. 315–319u, 2004.
- [21] R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey, and D. E. Knuth, *On the Lambert W Function*, *Adv. Comp. Math.*, no. 5, pp. 329–359, 1996.

- [22] P. Coupe, P. Yger, S. Prima, P. Hellier, C. Kervrann and C. Barillot, “An Optimized Blockwise Nonlocal Means Denoising Filter for 3-D Magnetic Resonance Images,” *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 27, no. 24, pp. 425-441, 2008.
- [23] J. Darbon and M. Sigelle, “Image restoration with discrete constrained total variation (part I): fast and exact optimization,” *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 26, pp. 261–276, 2006.
- [24] Z. Devcic and S. Loncaric, “Blur identification using averaged spectra of degraded image singular vectors,” *Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 4, pp. 2195–2198, 2000.
- [25] I. T. Dimov, T. T. Dimov and T. V. Gurov, “A New Iterative Monte Carlo Approach for Inverse Matrix Problem,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 92, pp. 15-35, 1998.
- [26] H. W. Engl, M. Hanke, and A. Neubauer, “Regularization of Inverse Problems,” *Kluwer Academic Publishers*, 1996.
- [27] C.A. Felippa, “Introduction to finite element methods,” at <http://www.colorado.edu/engineering/cas/courses.d/IFEM.d/>, last update 2009.
- [28] W.B. Ferguson, “*The Photographic Researches of Ferdinand Hurter & Vero C. Driffield*,” Royal Photographic Society of Great Britain, 1920.
- [29] M. Figueiredo, J. Bioucas-Dias, J.P. Oliveira and R. Nowak, “On total-variation denoising: a new majorization–minimization algorithm and an experimental comparison with wavelet denoising,” *IEEE International Conference on Image Processing*, 2006.
- [30] A. Foi, V. Katkovnik and K. Egiazarian, “Pointwise Shape-Adaptive DCT for High-Quality Denoising and Deblocking of Grayscale and Color Images,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 16, no. 5, pp. 1395-1411, 2007.
- [31] D. B. Gennery, “Determination of optical transfer function by inspection of frequency-domain plot,” *Journal of the Optical Society of America*, vol. 63, pp. 1571-1577, 1973.
- [32] T.M. Girard, Y. Li, W.F. van Altena, J. Núñez and A. Prades, “Astrometry with reconstructed HST planetary camera (WF/PC 1) images,” *International Journal of Imaging Systems and Technology (Special Issue on Image Reconstruction and Restoration in Astronomy)*, vol. 6, no. 4, pp. 395-400, 1995.
- [33] G. H. Golub and C. F. van Loan, “Matrix Computations,” *The John Hopkins University Press*, third edition, 1996.
- [34] R.C. González and R. E. Woods, “Digital Image Processing,” *Prentice Hall*, Third Edition, 2008.

- [35] R. M. Gray, "Toeplitz and circulant matrixes: a review," *Communications and Information Theory*, vol. 2, no. 3, pp. 155-239, 2005.
- [36] C. W. Groetsch, "The theory of Tikhonov regularization for Fredholm equations of the first kind," *SIAM*, vol. 28, no. 1, pp. 116-118, 1986.
- [37] M. T. Hagan, H.B. Demuth and M.H. Beale, "Neural Network Design," *PWS Publishing*, 1996.
- [38] Y.B. Han and L.N. Wu, "Image restoration using a modified hopfield neural network of continuous state change," *Signal Processing*, vol. 12, no. 3, pp.431–435, 2004.
- [39] R.J. Hanisch and R.L. White, "The restoration of HST images and spectra-II", *Proc. Workshop held at the Space Telescope Science Institute*, Baltimore, 1993.
- [40] N. Hansen, "The CMA evolution strategy: a comparing review," *Towards a new evolutionary computation. Advances on estimation of distribution algorithms*, pp. 75-102, Springer, 2006.
- [41] P. C. Hansen, "Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems: Numerical Aspects of Linear Inversion," *SIAM*, 1998.
- [42] P. C. Hansen, J. G. Nagy and D. P. O'Leary, "Deblurring Images: Matrices, Spectra and Filtering," *SIAM*, 2006.
- [43] J. L. Harris, "Image evaluation and restoration," *Journal of the Optical Society of America*, vol. 56, pp. 569-570, 1966.
- [44] G. Heinig and K. Rost, "Representations of Toeplitz-plus-Hankel matrices using trigonometric transformations with application to fast matrix-vector multiplication," *Linear Algebra and its Applications*, 275/276, pp. 225–248, 1998.
- [45] C. W. Helstrom, "Image restoration by the method of least squares," *Journal of the Optical Society of America*, vol. 57, pp. 297-303, 1967.
- [46] A. D. Hiller and R. T. Chin, "Iterative Wiener filters for image restoration," *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 4, pp. 1901-1904, 1990.
- [47] D. Hunter and K. Lange, "A tutorial on MM algorithms," *The American Statistician*, vol. 58, pp. 30–37, 2004.
- [48] N. Joonki, J.A. Fessler and P.E. Kinahan, "Statistical Sinogram Restoration in Dual-Energy CT for PET Attenuation Correction," *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 28, no. 11, pp. 1688-1702, 2009.
- [49] N. Kalouptsidis, G. Carayannis and D. Manolakis, "Fast algorithm for Block Toeplitz Matrices with Toeplitz entries", *Signal Processing*, vol. 6, pp. 77-81, 1984.

- [50] J. Kamm and J. G. Nagy, "Optimal kronecker product approximations of block Toeplitz matrices," *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 22, pp. 155–172, 2000.
- [51] R. Kress, "Linear Integral Equations", *Springer-Verlag*, 1989.
- [52] S. Kullback, "Information Theory and Statistics", *Dover Publications*, 1959.
- [53] S. Kullback and R. A. Leibler, "On information and sufficiency," *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 22, pp. 79–86, 1951.
- [54] R. L. Lagendijk, A.M. Tekalp, and J.M. Biemond, "Maximum likelihood image and blur identification: a unifying approach," *Optical Engineering*, vol. 29, no. 5, pp. 422–435, 1990.
- [55] L. Lagendijk and J. Biemond, "Iterative Identification and Restoration of Images," *Kluwer Academic Publishers*, 1991.
- [56] L. Landweber, "An iterative formula for Fredholm integral equations of the first kind," *American Journal of Mathematics*, vol. 73, pp. 615–624, 1951.
- [57] H. C. Lee, "Review of image-blur models in a photographic system using the principle of optics," *Optical Engineering*, vol. 29, pp. 405–421, 1990.
- [58] L. Marple, "Digital Spectral Analysis: With Applications," *Prentice-Hall*, 1987.
- [59] A. Martinelli, M. Donatelli, C. Estatico and S. Serra-Capizzano, "Improved image deblurring with antireflective boundary conditions and re-blurring," *Inverse Problems*, vol. 22, no. 6, pp. 2035–2053, 2006.
- [60] O.V. Michailovich and D. Adam, "A novel approach to the 2-D blind deconvolution problem in medical ultrasound," *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 24, no. 1, pp. 86–104, 2005.
- [61] M. E. Moghaddam and M. Jamzad, "Motion blur identification in noisy images using mathematical models and statistical measures," *Pattern Recognition*, vol. 40, no. 7, pp. 1946–1957, 2007.
- [62] R. Molina, J. Mateos and A.K. Katsaggelos, "Bayesian and regularization methods for hyperparameter estimation in image restoration," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 8, no. 2, pp. 231–246, 1999.
- [63] R. Molina, J. Mateos and A.K. Katsaggelos, "Blind deconvolution using a variational approach to parameter, image and blur estimation," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 15, no. 12, pp. 3715–3727, 2006.
- [64] R. Molina, J. Núñez, F.J. Cortijo and J. Mateos, "Image Restoration in Astronomy", *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 18, no. 2, pp. 11–29, 2001.

- [65] V. A. Morozov, "Methods for Solving Incorrectly Posed Problems," *Springer Verlag*, 1984.
- [66] Z. Mou-yan and R. Unbehauen, "Circulant and aperiodic models of deconvolution: a comparison," *Signal Processing*, vol. 64, no. 2, pp. 185–192, 1998.
- [67] M. R. Nagel, "Introduction to evaluation of motion degraded images," *Proc. of NASA Electronics Research Center Seminar*, Cambridge, 1968.
- [68] J. G. Nagy, K. Palmer and L. Perrone, "Iterative methods for image deblurring: A Matlab object-oriented approach," *Numerical Algorithms*, vol. 36, no. 1, pp. 73-93, 2004.
- [69] M. K. Ng, R. H. Chan and W. C. Tang, "A fast algorithm for deblurring models with Neumann boundary conditions", *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 21, pp. 851-866, 1999.
- [70] J. Ng, R. Prager, N. Kingsbury, G. Treece and A. Gee, "Wavelet restoration of medical pulse-echo ultrasound images in an EM framework," *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, vol. 54, no. 3, pp. 550-568, 2008.
- [71] S. M. Nikol'skii, "Sobolev space", *Encyclopedia of Mathematics*, Springer, 2001.
- [72] J. Oliveira, J. Bioucas-Dias, M. Figueiredo, "Adaptive total variation image deblurring: a majorization-minimization approach," *Signal Processing*, vol. 89, no. 9, pp. 2479–2493, 2009.
- [73] S. Osher, L. Rudin and E. Fatemi, "Nonlinear total variation based noise removal algorithms," *Physica D.*, vol. 60, pp.259-268, 1992.
- [74] J.K. Paik and A.K. Katsaggelos, "Image restoration using a modified hopfield network," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 1, no. 1, pp. 49–63, 1992.
- [75] S. C. Park, M. G. Kang, C.A. Segall and A.K. Katsaggelos, "Spatially adaptive high-resolution image reconstruction of DCT-based compressed images," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 13, no. 4, pp. 573-585, 2004.
- [76] K. M. Perry and S. J. Reeves, "A practical stopping rule for iterative signal restoration," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, pp. 1829-1833, 1994.
- [77] M. Püschel and J. M. F. Moura, "The algebraic approach to the discrete cosine and sine transforms and their fast algorithms," *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 32, pp. 1280–1316, 2003.

- [78] H. Rabbani, R. Nezafat and S. Gazor, “Wavelet-Domain Medical Image Denoising Using Bivariate Laplacian Mixture Model,” *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 56, no. 12, pp. 2826-2837, 2009.
- [79] S. J. Reeves and R. M. Mersereau, “Blur identification by the method of generalized cross-validation,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 1, no. 3, pp. 301–311, 1992.
- [80] M. A. Robertson and R.L. Stevenson, “DCT quantization noise in compressed images,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, vol. 15, no. 1, pp. 27-38, 2005.
- [81] I. Rodríguez, G. Cisneros, M. A. Santiago, F. Álvarez and E. Bernués, “Desensibilización de la restauración de imágenes transmitidas por canales móviles,” URSI, S9, A6-P3, 2004.
- [82] Y. Saad, “Iterative methods for sparse linear systems,” *SIAM*, second edition, 2003.
- [83] M. A. Santiago, G. Cisneros and Emiliano Bernués, “Iterative Desensitisation of Image Restoration Filters under Wrong PSF and Noise Estimates,” *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, vol. 2007, Article ID 72658, 2007.
- [84] M. A. Santiago, G. Cisneros and Emiliano Bernués, “An MLP Neural Net with L1 and L2 Regularizers for Real Conditions of Deblurring,” *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, vol. 2010, Article ID 394615, 2010.
- [85] S. Serra-Capizzano, “A note on antireflective boundary conditions and fast deblurring models,” *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 25, no. 4, pp 1307-1325, 2003.
- [86] J. L. Starck, E. Pantin, and F. Murtagh, “Deconvolution in astronomy: A review,” *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, vol. 114, pp. 1051-1069, 2002.
- [87] E.B. Stobie, R.J. Hanisch and R.L. White, “Implementation of the Richardson-Lucy algorithm in STSDAS,” *Astronomical Data Analysis Software and Systems III*, vol. 61, pp. 296-299, 1994.
- [88] Y. Sun, “Hopfield neural network based algorithms for image restoration and reconstruction – Part I: algorithms and simulations,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 48, no. 7, pp. 2119–2131, 2000.
- [89] A. N. Tikhonov and V. Y. Arsenin, “Solutions of Ill-Posed Problems,” *Scripta Series in Mathematics*, John Wiley & Sons, 1977.
- [90] H. A. Van der Vorst, “Iterative Krylov methods for large linear systems”, *Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics*, 2003.

- [91] C. F. Van Loan, "Computational Frameworks for the Fast Fourier Transform," *SIAM*, 1992.
- [92] R. V. Vasin and A. L. Ageev, "Ill-Posed Problems With a Priori Information," *Inverse and Ill-Posed Problems*, VSP, 1995.
- [93] C.R. Vogel, "Computational methods for inverse problems," *Frontiers in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM)*, 2002.
- [94] J. Wang, T. Li, H. Lu and Z. Liang, "Noise Reduction for Low-Dose Single-Slice Helical CT Sinograms," *IEEE Transactions on Nuclear Science*, vol. 53, no. 3, pp. 1230-1237, 2006.
- [95] J. Wang, X. Liao, and Z. Yi, "Image restoration using hopfield neural network based on total variational model," *Springer Berlin*, ISSN 2005, LNCS 3497, pp. 735–740, 2005.
- [96] J. Wang, H. Lu, J. Wen and Z. Liang, "Multiscale Penalized Weighted Least-Squares Sinogram Restoration for Low-Dose X-Ray Computed Tomography," *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 55, no. 3, pp. 1022-1031, 2008.
- [97] Y. Wang, J. Yang, W. Yin and Y. Zhang, "A new alternating minimization algorithm for total variation image reconstruction," *SIAM Journal on Imaging Sciences*, vol. 1, pp. 248–272, 2008.
- [98] Y. Wen and A. M. Yip, "Adaptive Parameter Selection for Total Variation Image Deconvolution," *Numerical Mathematics: Theory, Methods and Applications*, vol. 2, no. 4, pp. 427-438, 2009.
- [99] R.L. White and R.J. Allen, "The restoration of HST images and spectra," *Proc. Workshop held at the Space Telescope Science Institute*, Baltimore, 1990.
- [100] J. Woods, J. Biemond and A. Tekalp, "Boundary Value Problem in Image Restoration," *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 10, pp. 692–695, 1985.
- [101] N.J. Woolf, "High resolution imaging from the ground," *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, vol. 20, pp. 367-398, 1982.
- [102] Y.-D. Wu, Y. Sun, H.-Y. Zhang and S.-X. Sun, "Variational PDE based image restoration using neural network," *Image Processing, IET*, vol. 1, no. 1, pp. 85–93, 2007.
- [103] W. Yeoh and C. Zhang, "Constrained Least Squares Filtering Algorithm for Ultrasound Image Deconvolution," *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 53, no. 10, pp. 2001-2007, 2006.
- [104] A.T. Young, "Seeing: its cause and cure," *Astrophysics Journal*, vol. 189, pp. 587-604, 1974.

-
- [105] G. Zhai, W. Zhang, X. Yang, W. Lin and Y. Xu, "Efficient Deblocking With Coefficient Regularization, Shape-Adaptive Filtering, and Quantization Constraint," *IEEE Transactions on Multimedia*, vol. 10, no. 5, pp. 735-745, 2008.