Adaptación paramétrica de un sistema borroso mediante el filtro de Kalman extendido

Antonio Javier Barragán Piña
José Manuel Andújar Márquez
E.P.S. La Rábida, Ctra. Huelva-La Rábida s/n, 21071 Palos de la Ftra. (Huelva),
{antonio.barragan, andujar}@diesia.uhu.es
Agustín Jiménez Avello
E.T.S. de Ingenieros Industriales, J. Gutiérrez Abascal, 2. 28006 Madrid, agustin.jimenez@upm.es

Resumen

Cuando se pretende analizar o controlar un sistema cuyo modelo se ha obtenido únicamente en base a datos de entrada/salida, es fundamental la precisión en el modelo. Por otro lado, para que el procedimiento sea práctico, la etapa de modelado ha de ser eficiente computacionalmente hablando. En este sentido, se presenta en este trabajo la aplicación del filtro de Kalman extendido para la adaptación paramétrica de un modelo borroso.

Palabras clave: Filtro de Kalman, estimación, modelado.

1. INTRODUCCIÓN

El filtro de Kalman se ha utilizado junto con la lógica borrosa en diversas aplicaciones, como en la extracción de reglas a partir de una base de reglas dada [19], en optimización de los parámetros de mecanismos de defuzificación basados tanto en distribuciones Gaussianas como polinómicas [8], o en la optimización de los consecuentes de modelos Takagi-Sugeno [13]. En 2002, Simon introdujo el uso del filtro de Kalman para la adaptación de los parámetros de un modelo borroso [14], asumiendo que los antecedentes eran funciones de pertenencia triangulares, y utilizando el centro de gravedad de dichas funciones de pertenencia para realizar el proceso de adaptación. Sin embargo, la complejidad del calculo para otro tipo de funciones de pertenencia ha provocado que esta propuesta no haya sido generalizada hasta el momento [14].

En este trabajo se presentan los primeros resultados obtenidos por los autores para el uso del filtro de Kalman extendido (*EKF*, *Extender Kalman Filter*) en la estimación de los parámetros adaptables de un modelo borroso general, esto es, sin restricciones ni en el tamaño de los vectores de entrada o salida, ni en el tipo o distribución de las funciones de pertenencia utilizadas en la definición de los conjuntos borrosos del modelo. De esta forma, los autores pretenden emplear las excelentes características del filtro de Kalman para la obtención de modelo borrosos de sistemas en principio desconocidos a partir de datos de entrada/salida de los mismos.

El presente artículo se organiza como sigue: en la sección 2 se presenta el problema del modelado borroso de forma completamente general, y se establece la notación a utilizar a lo largo del artículo. La sección 3 está dedicada a la presentación formal del filtro de Kalman extendido y su utilización para el modelado de sistemas. Posteriormente, en la sección 4, se resuelve el cálculo de las derivadas para la aplicación del filtro de Kalman extendido al problema del modelado borroso, manteniendo la generalidad del problema y teniendo en cuenta que se incluirán en el proceso de modelado tanto los parámetros adaptables de los antecedentes como de los consecuentes de las reglas. Finalmente, en la sección 5 se presentan algunas conclusiones y líneas futuras de trabajo.

2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Dado que la consecución de un modelo adecuado es un paso fundamental para la posterior aplicación de distintas técnicas tanto de análisis [3, 4] como de diseño [2], se ha optado por realizar un modelo borroso de tipo Takagi-Sugeno, completamente general. Como es sabido, los modelos TS son aproximadores universales, y permiten obtener una gran precisión con un número reducido de reglas [10, 17, 21, 22].

Sea n el número de variables de entrada y m el salidas del sistema a modelar, un modelo borroso discreto múltiple entrada y múltiple salida –MIMO (*Multiple Input Multiple Output*)– puede representarse mediante el siguiente conjunto de reglas [5, 6, 12, 15]:

$$\begin{aligned} &R^{(l,i)}: \text{Si } x_1(k) \text{ es } A^l_{1i} \text{ y} \dots \text{y } x_n(k) \text{ es } A^l_{ni} \\ &\text{Entonces } y^l_i(k) = a^l_{0i} + \sum_{j=1}^{n} a^l_{ji} x_j(k), \end{aligned} \tag{1}$$

donde $l = 1..M_i$ es el índice de la regla y M_i el número de reglas que modelan la evolución de la i-ésima salida del sistema, y_i.

Los elementos a^l_{ji}, con $j = 0..n$, representan el conjunto de parámetros adaptables de los consecuentes de las reglas, con lo que deberán determinarse mediante el proceso de modelado del sistema.

Nótese que empleando la representación anterior, la dinámica de cada una de las salidas se puede modelar mediante un número distinto de reglas, lo que facilita la reducción del número total de reglas necesarias para modelar correctamente un sistema complejo, y, por lo tanto, facilita el proceso de modelado al reducir el número de parámetros del modelo.

Si el vector de entradas se extiende en una coordenada [1, 2] mediante $\tilde{x}_0 = 1$, el vector extendido, $\tilde{\mathbf{x}}$ adopta la forma:

$$\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)^{\mathrm{T}} = (1, x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \qquad (2)$$

Utilizando el promedio ponderado como método de agregación y la extensión del vector de estado dada en (2), la salida y_i generada por el conjunto de reglas $R^{(l,i)}$, puede calcularse mediante [16, 18]:

$$y_i(k) = h_i(\mathbf{x}(k)) = \sum_{j=0}^{n} a_{ji}(\mathbf{x})\tilde{x}_j(k), \qquad (3)$$

siendo $a_{ji}(\mathbf{x})$ coeficientes variables [20] definidos por (4), donde $w_i^l(\mathbf{x})$ se calcula mediante (5) y representa el grado de activación de las reglas del modelo borroso.

$$a_{ji}(\mathbf{x}) = \frac{\sum\limits_{l=1}^{M_i} w_i^l(\mathbf{x}) a_{ji}^l}{\sum\limits_{l=1}^{M_i} w_i^l(\mathbf{x})} \qquad (4)$$

$$w_i^l(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{n} \mu_{ji}^l(x_j(k), \boldsymbol{\sigma}_{ji}^l) \qquad (5)$$

$\mu_{ji}^l(x_j(k), \boldsymbol{\sigma}_{ji}^l)$ representa la j-ésima función de pertenencia de la regla l para la i-ésima salida del modelo, la cual determina el conjunto borroso A_{ji}^l. Los elementos $\boldsymbol{\sigma}_{ji}^l$ representan el conjunto de parámetros adaptables de dicha función de pertenencia, por lo que dichos valores, junto con los parámetros adaptables de los consecuentes de las reglas a_{ji}^l, deberán ser determinados según el algoritmo de estimación para la consecución de un modelo adecuado del sistema.

3. FILTRO DE KALMAN EXTENDIDO

El filtro de Kalman fue desarrollado por Rudolph E. Kalman en 1960 [9], y permite construir un observador óptimo para sistemas lineales en presencia de ruido blanco tanto en el modelo como en las medidas. Posteriormente, el filtro de Kalman ha sido adaptado para su utilización en sistemas no lineales a través del filtro de Kalman extendido [11], siempre que el sistema admita modelos linealizados en torno a cualquier punto de trabajo. Aunque el filtro de Kalman extendido no resulta óptimo, ya que se basa en una aproximación lineal del modelo y su precisión depende estrechamente de la bondad de dichas aproximaciones, es una poderosa herramienta para la estimación en entornos con presencia de ruidos.

Si se considera un sistema discreto no lineal de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}\left(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)\right), \mathbf{v}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{g}\left(\mathbf{x}(k)\right) + \mathbf{e}(k), \end{aligned} \qquad (6)$$

donde $\mathbf{v}(k)$ y $\mathbf{e}(k)$ son ruidos blancos que representan la incertidumbre en el modelo de la ecuación de estado y salida, respectivamente.

Siendo las matrices jacobianas del sistema:

$$\boldsymbol{\Phi}\left(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)\right) = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(k), \mathbf{u}=\mathbf{u}(k)} \qquad (7)$$

$$\boldsymbol{\Gamma}\left(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)\right) = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(k), \mathbf{u}=\mathbf{u}(k)} \qquad (8)$$

y

$$\mathbf{C}\left(\mathbf{x}(k)\right) = \left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(k)}, \qquad (9)$$

el filtro de Kalman extendido puede resolverse mediante la aplicación iterativa del siguiente conjunto de ecuaciones [7]:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(k) = &\left(\boldsymbol{\Phi}(k)\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(k) + \mathbf{R}_{ve}\right) \\ &\left(\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(k) + \mathbf{R}_{e}\right)^{-1} \end{aligned} \qquad (10)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = &\boldsymbol{\Phi}(k)\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \boldsymbol{\Gamma}(k)\mathbf{u}(k) \\ &+\mathbf{K}(k)\left(\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}(k)\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)\right) \end{aligned} \qquad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k+1|k) = &\boldsymbol{\Phi}(k)\mathbf{P}(k|k-1)\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(k) + \mathbf{R}_v \\ &-\mathbf{K}(k)\left(\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k|k-1)\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(k) + \mathbf{R}_{ve}^{\mathrm{T}}\right), \end{aligned} \qquad (12)$$

donde $\hat{\mathbf{x}}(\cdot)$ es la estimación del vector de estado, y $\mathbf{R}_v$, $\mathbf{R}_{ve}$ y $\mathbf{R}_e$ las matrices de covarianza del ruido, calculadas a partir del operador esperanza, $E(\cdot)$:

$$\mathbf{R}_v = E\left(\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^{\mathrm{T}}(k)\right) \qquad (13)$$

$$\mathbf{R}_{ve} = E\left(\mathbf{v}(k)\mathbf{e}^{\mathrm{T}}(k)\right) \qquad (14)$$

$$\mathbf{R}_e = E\left(\mathbf{e}(k)\mathbf{e}^{\mathrm{T}}(k)\right) \qquad (15)$$

El proceso iterativo se inicia con $\hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{m}_0 = E\left(\mathbf{x}(0)\right)$ y $\mathbf{P}(0) = E\left((\mathbf{x}(0) - \mathbf{m}_0)(\mathbf{x}(0) - \mathbf{m}_0)^{\mathrm{T}}\right)$, siendo conocidas $\mathbf{x}(0|-1)$, $\mathbf{u}(0)$ e $\mathbf{y}(0)$, y evoluciona en línea con el sistema obteniendo una solución que minimiza tanto el error de estimación como la matriz de covarianza del mismo para la linealización obtenida en cada instante.

4. APLICACIÓN DEL FILTRO DE KALMAN EXTENDIDO AL MODELADO BORROSO

Una aplicación muy interesante del filtro de Kalman extendido consiste en la identificación adaptativa de parámetros en sistemas no lineales, lo cual permite la obtención en línea del conjunto de parámetros adaptables de un modelo no lineal discreto en presencia de ruido y de forma pseudo-óptima (es óptima para sistemas lineales). La identificación de un modelo borroso TS puede verse como la obtención de los parámetros de un modelo no lineal, por lo que puede ser aplicado el filtro de Kalman a través del algoritmo extendido para la estimación de dichos parámetros.

En primer lugar se debe plantear el problema de estimación mediante el filtro de Kalman extendido. Para ello se ha de construir un sistema cuyos estados dependen directamente de los parámetros que se desean estimar, para posteriormente aplicar recursivamente las ecuaciones (10), (11) y (12). Sea $\mathbf{p}(k)$ el conjunto de parámetros a estimar del sistema borroso, e $\mathbf{y}(k)$ el conjunto de salidas del mismo, el sistema representado en (16) permite la obtención de dichos parámetros a partir de la aplicación del filtro de Kalman extendido.

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{p}(k+1) & = & \mathbf{p}(k) \\ \mathbf{y}(k) & = & \mathbf{h}(\mathbf{x}(k), \mathbf{p}(k)) + \mathbf{e}(k) \end{array} \quad (16)$$

La señal $\mathbf{e}(k)$ representa la incertidumbre del modelo del sistema mediante un ruido blanco cuya covarianza está representado por (15).

En la figura 1 se muestra el esquema que permite la utilización del filtro de Kalman extendido para la determinación en línea de un modelo borroso.

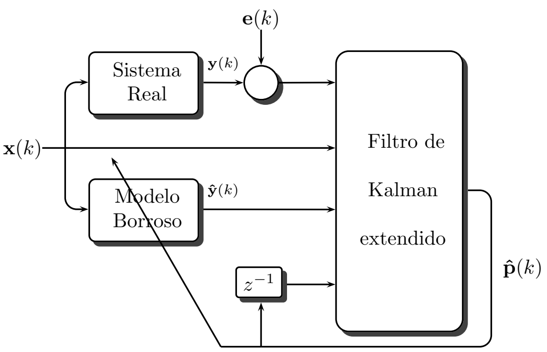

Figura 1: Esquema de modelado borroso mediante el filtro de Kalman extendido.

Por lo tanto, el primer paso a realizar es el cálculo de las matrices jacobianas del sistema haciendo uso de las expresiones (7), (8) y (9). Al aplicar dichas expresiones sobre (16) se obtiene:

$$\mathbf{\Phi}\left(\mathbf{p}(k)\right) = \mathbf{I} \quad (17)$$

$$\mathbf{\Gamma}\left(\mathbf{p}(k)\right) = \mathbf{0} \quad (18)$$

$$\mathbf{C}\left(\mathbf{p}(k)\right) = \left.\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{p}}\right|_{\mathbf{p}=\hat{\mathbf{p}}(k)}, \quad (19)$$

siendo $\hat{\mathbf{p}}(k)$ la estimación actual del vector de parámetros del modelo borroso.

Nótese que, dada la formulación planteada en la sección 2, el problema de estimación consiste en determinar los valores adecuados de los parámetros adaptables tanto de los antecedentes, $\boldsymbol{\sigma}_{ji}^{l}$, véase la ecuación (5), como de los consecuentes de las reglas, a_{ji}^{l}, véase (1). Por lo tanto, para un modelo borroso TS, la expresión $\mathbf{h}(\mathbf{x}(k), \mathbf{p}(k))$ se corresponde con la ecuación (3), y la expresión (19) debe obtenerse a partir de la derivada de dicha expresión con respecto a cada uno de los parámetros adaptables del modelo borroso.

Como puede comprobarse en (3) y (4), la función $\mathbf{h}$ es lineal respecto del conjunto de parámetros adaptables de los consecuentes, a_{ji}^{l}, de forma que:

$$\frac{\partial h_i}{\partial a_{JI}^{L}} = \begin{cases} \dfrac{w_I^L x_J}{\sum\limits_{l=1}^{M_i} w_i^l} & \text{si } i = I \\ 0 & \text{si } i \neq I, \end{cases} \quad (20)$$

donde L, J e I determinan el parámetro concreto a_{JI}^{L} del conjunto a_{ji}^{l} posible de parámetros del consecuente. Por otro lado, para cada conjunto de parámetros de las funciones de pertenencia del antecedente, se obtiene:

$$\frac{\partial h_i}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{JI}^{L}} = \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial \left(\dfrac{\sum\limits_{l=1}^{M_i} w_i^l a_{ji}^l}{\sum\limits_{l=1}^{M_i} w_i^l} \right)}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{JI}^{L}} \tilde{x}_j \quad (21)$$

Sólo la salida I-ésima dependerá del parámetro $\boldsymbol{\sigma}_{JI}^{L}$, por lo tanto,

$$\frac{\partial h_i}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{JI}^{L}} = 0 \text{ si } i \neq I. \quad (22)$$

Desarrollando la derivada parcial de (21), y teniendo presente (22):

$$\frac{\partial\left(\frac{\sum_{l=1}^{M_I} w_I^l a_{jI}^l}{\sum_{l=1}^{M_I} w_I^l}\right)}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{JI}^L} = \tag{23}$$

$$= \frac{\frac{\partial\left(\sum_{l=1}^{M_I} w_I^l a_{jI}^l\right)}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{JI}^L}\sum_{l=1}^{M_I} w_I^l - \frac{\partial\left(\sum_{l=1}^{M_I} w_I^l\right)}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{JI}^L}\sum_{l=1}^{M_I} w_I^l a_{jI}^l}{\left(\sum_{l=1}^{M_I} w_I^l\right)^2},$$

Teniendo en cuenta que el parámetro $\boldsymbol{\sigma}_{JI}^L$ sólo está presente en la regla L de la I-ésima salida, es fácil deducir que

$$\frac{\partial\left(\sum_{l=1}^{M_I} w_I^l a_{jI}^l\right)}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{JI}^L} = \frac{\partial w_I^L}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{JI}^L} a_{jI}^L, \tag{24}$$

y operando de forma similar,

$$\frac{\partial\left(\sum_{l=1}^{M_I} w_I^l\right)}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{JI}^L} = \frac{\partial w_I^L}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{JI}^L}. \tag{25}$$

Sustituyendo (24) y (25) en (23):

$$\frac{\partial\left(\frac{\sum_{l=1}^{M_I} w_I^l a_{jI}^l}{\sum_{l=1}^{M_I} w_I^l}\right)}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{JI}^L} =$$

$$= \frac{\partial w_I^L}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{JI}^L}\left(\frac{a_{jI}^L \sum_{l=1}^{M_I} w_I^l - \sum_{l=1}^{M_I} w_I^l a_{jI}^l}{\left(\sum_{l=1}^{M_I} w_I^l\right)^2}\right) = \tag{26}$$

$$= \frac{\partial w_I^L}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{JI}^L}\left(\frac{\sum_{l=1}^{M_I} w_I^l (a_{jI}^L - a_{jI}^l)}{\left(\sum_{l=1}^{M_I} w_I^l\right)^2}\right)$$

Sustituyendo (26) en (21), se obtiene la expresión final para el cálculo de $\frac{\partial h_i}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{JI}^L}$ cuando $i = I$:

$$\frac{\partial h_I}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{JI}^L} = \frac{\partial w_I^L}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{JI}^L}\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{\sum_{l=1}^{M_I} w_I^l (a_{jI}^L - a_{jI}^l)}{\left(\sum_{l=1}^{M_I} w_I^l\right)^2}\right)\tilde{x}_j \tag{27}$$

Finalmente, para concluir el cálculo de la ecuación (27) es necesario determinar la derivada del grado de activación de las reglas del modelo borroso, w_i^l, con respecto a cada conjunto de parámetros de los antecedentes. Evidentemente este cálculo es dependiente del tipo de función de pertenencia que se utilice para cada antecedente. No obstante, es posible expresar de forma general:

$$\frac{\partial w_I^L}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{JI}^L} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{JI}^L}\left(\prod_{q=1}^{n} \mu_{qI}^L(x_q(k), \boldsymbol{\sigma}_{qI}^L)\right), \tag{28}$$

o de forma más desarrollada,

$$\frac{\partial w_I^L}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{JI}^L} = \frac{\mu_{JI}^L(x_J(k), \boldsymbol{\sigma}_{JI}^L)}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{JI}^L}\prod_{q=1, q\neq J}^{n} \mu_{qI}^L(x_q(k), \boldsymbol{\sigma}_{qI}^L) \tag{29}$$

Nótese que $\frac{\mu_{JI}^L(x_J(k), \boldsymbol{\sigma}_{JI}^L)}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{JI}^L}$ representa la derivada de la función de pertenencia definida mediante el conjunto de parámetros $\boldsymbol{\sigma}_{JI}^L$; por lo tanto, el cálculo de dicha derivada depende del tipo de función de pertenencia utilizada, y podrá realizarse a partir de la expresión que define dicha función de pertenencia.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se han presentado los primeros resultados obtenidos por los autores para el uso del filtro de Kalman extendido en la estimación de los parámetros adaptables de un modelo borroso general, esto es, sin restricciones ni en el tamaño de los vectores de entrada o salida, ni en el tipo o distribución de las funciones de pertenencia utilizadas en la definición de los conjuntos borrosos del modelo.

El artículo presenta la solución del problema a nivel teórico a partir de los modelos de estado ya obtenidos por los autores en trabajos previos.

En futuros trabajos se pretende realizar aplicaciones prácticas, las cuales serán comparadas a efectos de precisión y eficiencia computacional para valorar de forma fehaciente el uso del filtro de Kalman extendido en la adaptación paramétrica de sistemas borrosos, obtenidos a partir de datos de entrada/salida de un sistema en principio desconocido.

Agradecimientos

Este trabajo es una contribución del proyecto DPI2007–62336/ financiado por el Ministerio de Educación.

Referencias

[1] José Manuel Andújar and Antonio Javier Barragán. A methodology to design stable nonlinear fuzzy control systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 154(2):157–181, September 2005.

[2] José Manuel Andújar, Antonio Javier Barragán, and Manuel Emilio Gegúndez. A general and formal methodology for designing stable nonlinear fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 17(5):1081–1091, October 2009.

[3] José Manuel Andújar, Antonio Javier Barragán, Manuel Emilio Gegúndez, and Francisco Jesús de Toro. Aplicación de la matriz jacobiana de un sistema de control borroso a la obtención de sus estados de equilibrio. In CEA-IFAC, editor, *XXV Jornadas de Automática*, page 10, Ciudad Real, España, September 2004.

[4] J. M. Andújar Márquez, A. J. Barragán Piña, and J. Graiño. Una metodologí de análisis de sistemas dinámicos mediante lógica borrosa. In CEA-IFAC, editor, *XXX Jornadas de Automática*, Valladolid, España, September 2009.

[5] Robert Babuška. Fuzzy modeling – a control engineering perspective. In *Proceedings of FUZZ-IEEE/IFES'95*, volume 4, pages 1897–1902, Yokohama, Japan, March 1995.

[6] Robert Babuška and H. B. Verbruggen. A new identification method for linguistic fuzzy models. In *Proceedings of FUZZ-IEEE/IFES'95*, volume 4, pages 905–912, Yokohama, Japan, March 1995.

[7] Mohinder S. Grewal and Angus P. Andrews. *Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB*. John Wiley & Sons, Inc., 2nd edition, 2001.

[8] TTao Jiang and Yao Tang Li. Generalized defuzzification strategies and their parameter learning procedures. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 4(1):64–71, August 1996.

[9] Rudolph E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions on ASME-Journal of Basic Engineering*, 82(series D):35–45, 1960.

[10] Bart Kosko. Fuzzy systems as universal approximators. *IEEE Transactions on Computers*, 43(11):1329–1333, November 1994.

[11] Peter S. Maybeck. *Stochastic models, estimation, and control*, volume 141 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academyc Press, 1979.

[12] Hung T. Nguyen, Michio Sugeno, Richard M. Tong, and Ronald R. Yager. *Theoretical aspects of fuzzy control*. John Wiley Sons, 1995.

[13] Pramath Ramaswamy, Martin Riese, Robert M. Edwards, and Kwang Youl Lee. Two approaches for automating the tuning process of fuzzy logic controllers. In *32nd IEEE Conference on Decision and Control. Part 2 (of 4)*, San Antonio, TX, USA, December 1993.

[14] Dan J. Simon. Training fuzzy systems with the extended Kalman filter. *Fuzzy Sets and Systems*, 132(2):189–199, 2002.

[15] T. Takagi and M. Sugeno. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 15(1):116–132, 1985.

[16] L. X. Wang. *Adaptive fuzzy systems and control*. Prentice Hall, New Jersey, 1994.

[17] Li-Xin Wang. Fuzzy systems are universal approximators. In *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pages 1163–1170, San Diego, CA, USA, 1992.

[18] Li-Xin Wang. *A course in fuzzy systems and control*. Prentice Hall, New Yersey, USA, 1997.

[19] Liang Wang and John Yen. Extracting fuzzy rules for system modeling using a hybrid of genetic algorithms and kalman filter. *Fuzzy Sets and Systems*, 101(3):353–362, February 1999.

[20] L.K. Wong, F.H.F. Leung, and P.K.S. Tam. Stability design of TS model based fuzzy systems. In *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, volume 1, pages 83–86, Barcelona, Spain, July 1997.

[21] Hao Ying. Sufficient conditions on uniform approximation of multivariate functions by general Takagi–Sugeno fuzzy systems with linear rule consequent. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics—Part A: Systems and Humans*, 28(4):515–520, July 1998.

[22] Ke Zeng, Nai-Yao Zhang, and Wen-Li Xu. A comparative study on sufficient conditions for Takagi–Sugeno fuzzy systems as universal approximators. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(6):773–780, December 2000.