Ordenación de las Alternativas Basándose en la Intesidad de Dominancia y la Lógica Difusa

Alfonso Mateos y Antonio Jiménez
Departamento de Inteligencia Artificial
Facultad de Informática, Universidad Politécnica de Madrid
28660, Boadilla del Monte, SPAIN
{amateos, ajimenez}@fi.upm.es

Pilar Sabio
Departamento de Economía Aplicada I
Facultad de Ciencias Jurídicas y Sociales, URJC
28933 Móstoles, Madrid, SPAIN
pilar.sabio@urjc.es

Resumen—**Se introduce un nuevo método de ordenación de las alternativas en un problema de decisión multicriterio con imprecisión en la información proporcionada por el decisor, representada por una función de utilidad multiatributo aditiva. Donde las consecuencias de las alternativas se representan mediante distribuciones uniformes, las funciones de utilidad de cada atributo son clases de funciones de utilidad y los pesos asociados a los atributos son números difusos triangulares (trapezoidales).**

Keywords-component: utilidad multiatributo, imprecisión, dominancia.

I. INTRODUCCIÓN

El modelo aditivo es considerado válido en la mayoría de los problemas de toma de decisión, según las razones descritas por Raiffa (1982) y Stewart (1996). La forma funcional del modelo aditivo es:

$$u(A_i) = \sum_j w_j u_j(x_{ij})$$

donde x_{ij} es el valor en el atributo X_j de la alternativa A_i; $u_j(x_{ij})$ es la utilidad asociada al valor x_{ij}, siendo la correspondiente función de utilidad las preferencias del decisor sobre los posibles valores de los atributos; y w_j son los pesos de cada uno de los atributos, representando su importancia relativa en el contexto particular del problema de decisión.

La mayoría de problemas de toma de decisiones complejos tienen información imprecisa, siendo por ejemplo imposible predecir con certeza el impacto o consecuencia de cada alternativa bajo consideración, siendo obtenidos mediante métodos estadísticos. Al mismo tiempo, es frecuente que no sea fácil escoger con precisión los valores para los pesos de los criterios y queden inscritos dentro de límites imprecisos. Los decisores pueden encontrar difícil comparar criterios o no querer relevar sus preferencias en público. Además, la decisión puede ser tomada dentro de un grupo donde la imprecisión sobre las preferencias alcanzadas, es el resultado de un proceso de negociación.

Se han realizado diferentes trabajos en los que se considera información imprecisa. Sage y White (1984) propusieron el modelo de teoría de utilidad multiatributo con imprecisión (ISMAUT). Malakooti (2000) diseñó un nuevo algoritmo eficiente para ordenación de alternativas cuando hay información incompleta sobre las preferencias y el impacto o consecuencia de las alternativas, posteriormente extendido por Ahn (2003). Eum et al. (2001) proporcionaron un programa lineal para identificar alternativas no dominadas y potencialmente óptimas cuando la información sobre los impactos o consecuencias en cada atributo y/o pesos es incompleta, siendo posteriormente extendido a estructuras jerárquicas (Lee et al., 2002), además desarrolló el concepto de *potencial óptimo débil y fuerte* (Park, 2004). Recientemente, (Mateos y Jiménez, 2009; Mateos et al., 2009) consideraron el caso más general, donde la imprecisión aparece tanto en los impactos de las alternativas como en los pesos y las utilidades, siendo descrita por medio de límites fijos. Finalmente, Sarabando y Dias (2009) hacen una breve revisión de las diferentes aproximaciones propuestas por diferentes autores para trabajar con información incompleta.

Paralelamente, se han realizado estudios para tratar la imprecisión mediante la *teoría de conjuntos difusos*, contando con el avance de la investigación en la aritmética y los operadores lógicos de los números difusos, como el estudio de Tran et al. (2001), donde se propone comparar números difusos mediante la definición de una medida de distancia difusa.

Siguiendo esta línea de investigación de la toma de decisiones mediante la utilización de números difusos, en este trabajo se considera un problema de decisión con m alternativas A_j y n atributos X_j, donde la información incompleta sobre los parámetros de entrada que ha sido incorporada dentro del proceso de toma de decisión se define de la siguiente manera:

- Las consecuencias o impactos de las alternativas se describen bajo incertidumbre, teniendo para cada atributo una distribución uniforme en el intervalo de valores $[x^I_{ij}, x^S_{ij}]$, $i = 1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$, siendo x^I_{ij} y x^S_{ij} el menor y el mayor valor del atributo X_j para la alternativa A_i, respectivamente.
- La imprecisión correspondiente a las utilidades individuales se define mediante funciones $u(\bullet)$ pertenecientes a clases o familias de funciones de utilidad $[u^I_j(\bullet), u^S_j(\bullet)]$, $j=1,\ldots,n$, donde $u^I_j(\bullet)$ y $u^S_j(\bullet)$ son el menor y mayor valor del rango de imprecisión de la función de utilidad del atributo X_j.

- La imprecisión de los pesos se concreta en números difusos triangulares (trapezoidales) $\tilde{w}_j$, $j = 1,\dots,m$.

Una de las posibles formas para tratar el problema definido anteriormente, descrita en estudios realizados por distintos autores, se basa en el concepto de *dominancia*, partiendo de la propiedad de que si una alternativa domina otra, esta alternativa puede ser destacada como una buena solución para el decisor. Dadas dos alternativas A_k y A_l, la alternativa A_k domina A_l si $D_{kl} \geq 0$, siendo D_{kl} el valor óptimo del problema de optimización:

$$D_{kl} = \min\left\{u(A_k) - u(A_l) = \sum_j \tilde{w}_j u_j(x_{kj}) - \sum_j \tilde{w}_j u_j(x_{lj})\right\}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & x_{kj}^I \leq x_{kj} \leq x_{kj}^S,\ j = 1,\dots,n \qquad (1)\\ & x_{lj}^I \leq x_{lj} \leq x_{lj}^S,\ j = 1,\dots,n \\ & u_j^I(x_{kj}) \leq u_j(x_{kj}) \leq u_j^S(x_{kj}),\ j = 1,\dots,n \\ & u_j^I(x_{lj}) \leq u_j(x_{lj}) \leq u_j^S(x_{lj}),\ j = 1,\dots,n \end{aligned}$$

La función objetivo de (1) puede ser representada como $D_{kl} = \min \sum_j \tilde{w}_j \left[u_j(x_{kj}) - u_j(x_{lj})\right]$. Por lo tanto, la resolución del problema (1) es equivalente a calcular (Mateos et al., 2007):

$$D_{kl} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{w}_j\, z_{klj}^*, \qquad (2)$$

donde z^*_{klj} es el valor óptimo del siguiente problema de optimización:

$$\min z_{klj} = u_j(x_{kj}) - u_j(x_{lj})$$

$$\begin{aligned} \text{s. a} \quad & x_{kj}^I \leq x_{kj} \leq x_{kj}^S,\ j = 1,\dots,n \qquad (3)\\ & x_{lj}^I \leq x_{lj} \leq x_{lj}^S,\ j = 1,\dots,n \\ & u_j^I(x_{kj}) \leq u_j(x_{kj}) \leq u_j^S(x_{kj}),\ j = 1,\dots,n \\ & u_j^I(x_{lj}) \leq u_j(x_{lj}) \leq u_j^S(x_{lj}),\ j = 1,\dots,n \end{aligned}$$

La solución de (3) puede ser determinada de forma muy sencilla para cierto tipo de funciones de utilidad (Mateos et al., 2007):

- Si la función de utilidad es monótona creciente, entonces:

$$z_{klj}^* = u_j^I(x_{kj}^I) - u_j^S(x_{kj}^S)$$

- Si la función de utilidad es monótona decreciente, entonces:

$$z_{klj}^* = u_j^S(x_{kj}^S) - u_j^I(x_{kj}^I)$$

Una aproximación reciente para la ordenación de las alternativas en un problema de decisión es usar información sobre la intensidad de dominancia, conocido como *dominance measuring methods*. Ahn y Park (2008) implementan medidas de dominancia de las cuales derivan el concepto de *dominancia neta*. Éste es usado como una medida de la fuerza de la preferencia, en el sentido de que cuanto mayor es el valor de la dominancia neta mayor.

En este trabajo proponemos un método basado en la intensidad de la dominancia para el problema de decisión con información imprecisa, en el que como se ha especificado anteriormente, la incertidumbre de las consecuencias o impactos de las alternativas se representan mediante distribuciones uniformes, la imprecisión de las utilidades son clases de funciones de utilidad individuales y la imprecisión de los pesos se represente mediante números difusos; extendiendo así el modelo definido y citado anteriormente de Mateos et al. (2007). El desarrollo de este estudio se inicia con una introducción de la aritmética de los números difusos, se especifica la medida de intensidad de dominancia para la ordenación de las alternativas y se concluye con las conclusiones.

II. Aritmética de los Números Difusos

Un número difuso es un conjunto difuso definido en el conjunto de los números reales, siendo los más usado el triangular $\tilde{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y el trapezoidal $\tilde{o} = (o_1, o_2, o_3, o_4)$, donde $\mu_{\tilde{a}}(x)$: $A \to [0,1]$ y $\mu_{\tilde{o}}(x)$: $O \to [0,1]$ se definen como las *funciones de pertenencia* a los respectivos conjuntos.

En este artículo sólo consideraremos números difusos triangulares, para simplificar la notación, aunque todo se puede trasladar de forma directa y sencilla al caso de números difusos trapezoidales.

Las operaciones matemáticas básicas para trabajar con números difusos triangulares, que en nuestro caso representan los pesos de los criterios de nuestro problema de decisión, son:

- Suma: $\tilde{a} + \tilde{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) = \tilde{c}_1$
- Resta: $\tilde{a} - \tilde{b} = (a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1) = \tilde{c}_2$
- Multiplicación por un escalar:

  $k > 0$: $k \times \tilde{a} = k(a_1, a_2, a_3) = (ka_1, ka_2, ka_3) = \tilde{a}_1$

  $k < 0$: $k \times \tilde{a} = k(a_1, a_2, a_3) = (ka_3, -k\,a_3, -ka_1) = \tilde{a}_2$

Como suponemos que los pesos son números difusos triangulares la solución del problema (2) es:

$$D_{kl} = \tilde{d}_{kl} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{w}_j z_{klj}^* = \sum_{j=1}^{n} z_{klj}^*(w_{j1}, w_{j2}, w_{j3}) = \qquad (4)$$
$$= \left(d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}\right)$$

III. MÉTODO DE MEDIDA DE DOMINANCIA DIFUSA

El método de dominancia difusa que se propone parte de una propuesta de (Mateos y Jiménez, 2009; Mateos et al., 2009), concretándose para el contexto de imprecisión planteado, haciendo uso del trabajo de Tran et al. (2001) sobre medida de distancia entre números difusos, en la que se utiliza la generalización de los números difusos derecha e izquierda, GLRFN, de (Dubois y Prade, 1980; Bárdossy y Duckstein, 1995). Un conjunto difuso $\tilde{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ es denominado GLRFN cuando su función de pertenencia se define como:

$$\mu_{\tilde{a}} = \begin{cases} I\left(\dfrac{a_2 - x}{a_2 - a_1}\right) & si\ a_1 \le x \le a_2 \\ 1 & si\ a_2 \le x \le a_3 \\ D\left(\dfrac{x - a_3}{a_4 - a_3}\right) & si\ a_3 \le x \le a_4 \\ 0 & resto \end{cases}$$

donde I y D son funciones estrictamente decrecientes definidas en [0,1] que satisfacen las condiciones:

$$I(x) = R(x) = 1 \ \ si \ \ x \le 0$$
$$I(x) = R(x) = 0 \ \ si \ \ x \ge 0$$

Para $a_2 = a_3$, se tiene la definición clásica de números difusos derecha e izquierda de Dubois y Prade (1980). Los números difusos trapezoidales son un caso especial de los GLRFN con $I(x) = R(x) = 1-x$. Los números difusos triangulares son también casos especiales de GLRFN con $I(x) = R(x) = 1-x$ y $a_2 = a_3$.

Un GLRFN se denota como $\tilde{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)_{I\ \tilde{a}\text{-}D\ \tilde{a}}$ y un α-corte de $\tilde{a}$ se define como:

$\tilde{a}(\alpha) = (\tilde{a}_I(\alpha), \tilde{a}_D(\alpha)) = (a_2 - (a_2 - a_1)a_3 I_{\tilde{a}}^{-1}(\alpha), a_3 - (a_4 - a_3)a_3 D_{\tilde{a}}^{-1}(\alpha),)$.

A partir de estas definiciones de los GLRFN, Tran et al. (2001) definen la distancia entre dos números difusos GLFRN $\tilde{a}$ y $\tilde{b}$ como:

$$D^2(\tilde{a}, \tilde{b}, f) = \left\langle \int_0^1 \left\{ \left[\left(\frac{\tilde{a}_I(\alpha) + \tilde{a}_D(\alpha)}{2} \right) - \left(\frac{\tilde{b}_I(\alpha) + \tilde{b}_D(\alpha)}{2} \right) \right]^2 + \frac{1}{3}\left[\left(\frac{\tilde{a}_I(\alpha) + \tilde{a}_D(\alpha)}{2} \right)^2 + \left(\frac{\tilde{b}_I(\alpha) + \tilde{b}_D(\alpha)}{2} \right)^2 \right] \right\} \times f(\alpha) d\alpha \right\rangle \Big/ \int f(\alpha) d\alpha$$

La función $f(\alpha)$, la cual sirve como un función de pesos, es continua positiva en [0, 1], siendo la distancia calculada una suma ponderada de distancias entre dos intervalos a lo largo de todos los α- cortes desde 0 a 1. La presencia de la función f permite la participación del decisor en una forma flexible. Por ejemplo, cuando el decisor es neutral al riesgo, $f(\alpha)=\alpha$ parece razonable. Un decisor adverso al riesgo puede querer poner más peso sobre la información a un mayor nivel que α usando otras funciones, tales como $f(\alpha)=\alpha^2$ o con un mayor exponente de α. Para un decisor propenso al riesgo, una constante ($f(\alpha)=1$), o incluso una función f decreciente puede ser usada.

Si concretamos al caso particular de la distancia de un número difuso triangular, $\tilde{a} = (a_1, a_2, a_3)$, a una constante (concretamente 0) tenemos:

1. Si $f(\alpha)=\alpha$ entonces
$$d(\tilde{a},0)^2 = a_2^2 + (1/3)a_2(a_3 + a_1) + (1/18)\left[(a_3 - a_2)^2 + (a_2 - a_1)^2\right] - (1/18)\left[(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2)\right].$$
2. Si $f(\alpha)=1$ entonces
$$d(\tilde{a},0)^2 = a_2^2 + (1/2)a_2(a_3 + a_1) + (1/9)\left[(a_3 - a_2)^2 + (a_2 - a_1)^2\right] - (1/9)\left[(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2)\right].$$

Una vez que se ha calculado la fuerza con la que cada alternativa A_k domina a cualquier otra alternativa A_l, D_{kl}, tal y como se indica en (4), se puede definir la fuerza de dominancia de la alternativa A_k como:

$$\tilde{d}_k = (d_{k1}, d_{k2}, d_{k3}) = \sum_{\substack{l=1 \\ l \ne k}} D_{kl} = \left(\sum_{\substack{l=1 \\ l \ne k}}^{n} d_{kl1}, \sum_{\substack{l=1 \\ l \ne k}}^{n} d_{kl2}, \sum_{\substack{l=1 \\ l \ne k}}^{n} d_{kl3} \right) \qquad (5)$$

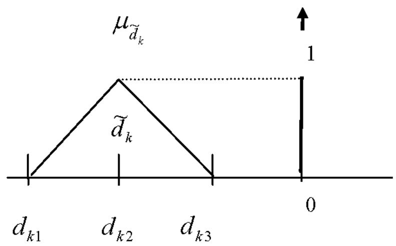
Es decir, a cada alternativa A_k se le ha asociado una fuerza de dominancia representada por el número difuso $\tilde{d}_k$ según la ecuación (5). Para ver lo intensa que es esta fuerza de dominancia definimos un nuevo concepto al que denominaremos *intensidad de dominancia*, DI_k, la cual la definiremos como la proporción de la parte positiva del número difuso por la distancia del número difuso al cero menos la proporción de la parte negativa del número difuso por la distancia del número difuso al cero. Concretamente, la intensidad de dominancia a la alternativa A_k se calcula dependiendo de donde se encuentra al número difuso que la representa, $\tilde{d}_k$. Existen tres posibilidades:

1. El número difuso $\tilde{d}_k$ se encuentra completamente a la izquierda del cero. En este caso, el DI_k es menos la distancia del $\tilde{d}_k$ al cero, al no existir ninguna parte positiva en el número difuso.

2. El número difuso $\tilde{d}_k$ se encuentra completamente a la derecha del cero. En este caso, el DI_k es la distancia del $\tilde{d}_k$ al cero, al no existir ninguna parte negativa del número difuso a la derecha del cero.
3. El número difuso $\tilde{d}_k$ posee al cero en su base. En este caso, el número difuso $\tilde{d}_k$ tendrá una parte a la derecha del cero a la que denominaremos $\tilde{d}_k^D$ y otra parte a la izquierda del cero a la que denominaremos $\tilde{d}_k^I$, el DI_k es la proporción que representa $\tilde{d}_k^D$ con respecto a $\tilde{d}_k$ por la distancia del $\tilde{d}_k$ al cero menos la proporción que representa $\tilde{d}_k^I$ con respecto a $\tilde{d}_k$ por la distancia del $\tilde{d}_k$ al cero.

A continuación, analizamos cada uno de estos casos de una forma más detallada.

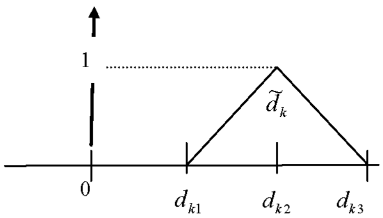
- Si $d_{k3} < 0$, lo cual gráficamente se puede representar como:



la intensidad de dominancia de la alternativa A_k se define como:

$$DI_k = -\, d(\tilde{d}_k, 0)$$

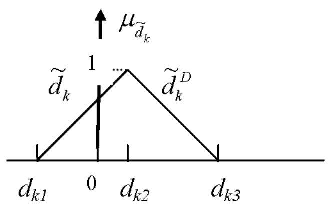
- Si $d_{k1} > 0$, lo cual gráficamente se puede representar como:



la intensidad de dominancia de la alternativa A_k se define como:

$$DI_k = d(\tilde{d}_k, 0)$$

- Si $d_{k1} < 0$ y $d_{k2} > 0$, lo cual gráficamente se puede representar como:



El número difuso triangular anterior queda dividido por el eje vertical que pasa por cero en dos partes: su parte izquierda $\tilde{d}_k^I$ y su parte derecha $\tilde{d}_k^D$. La parte izquierda representa la proporción:

$$\frac{\dfrac{(-d_{k1})\dfrac{(-d_{k1})}{d_{k2}-d_{k1}}}{2}}{\dfrac{d_{k3}-d_{k1}}{2}} = \frac{(d_{k1})^2}{(d_{k2}-d_{k1})(d_{k3}-d_{k1})}.$$

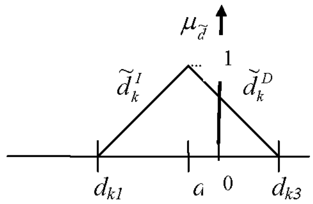
Mientras que la parte derecha representa la proporción:

$$\frac{\dfrac{d_{k3}-d_{k1}}{2} - \dfrac{(-d_{k1})\dfrac{(-d_{k1})}{d_{k2}-d_{k1}}}{2}}{\dfrac{d_{k3}-d_{k1}}{2}} = \frac{(d_{k3}-d_{k1})(d_{k2}-d_{k1})-(d_{k1})^2}{(d_{k2}-d_{k1})(d_{k3}-d_{k1})}$$

Para este caso la intensidad de dominancia de la alternativa A_k se define como:

$$DI_k = \frac{(d_{k3}-d_{k1})(d_{k2}-d_{k1})-(d_{k1})^2}{(d_{k2}-d_{k1})(d_{k3}-d_{k1})}\, d(\tilde{d}_k, 0) - \frac{(d_{k1})^2}{(d_{k2}-d_{k1})(d_{k3}-d_{k1})}\, d(\tilde{d}_k, 0)$$

Si $d_{k1} < 0$ y $d_{k2} < 0$, lo cual gráficamente se puede representar como:



El número difuso triangular anterior queda dividido por el eje vertical que pasa por cero en dos partes: su parte izquierda $\tilde{d}_k^I$ y su parte derecha $\tilde{d}_k^D$. La parte izquierda representa la proporción:

$$\frac{\dfrac{d_{k3}-d_{k1}}{2} - \dfrac{d_{k3}\dfrac{d_{k3}}{d_{k3}-d_{k2}}}{2}}{\dfrac{d_{k3}-d_{k1}}{2}} = \frac{(d_{k3}-d_{k1})(d_{k3}-d_{k2})-(d_{k3})^2}{(d_{k3}-d_{k2})(d_{k3}-d_{k1})}$$

Mientras que la parte derecha representa la proporción:

$$\frac{\left(d_{k3}\right)\frac{\left(d_{k3}\right)}{d_{k3}-d_{k2}}}{\frac{2}{\frac{d_{k3}-d_{k1}}{2}}}=\frac{\left(d_{k3}\right)^2}{\left(d_{k3}-d_{k2}\right)\left(d_{k3}-d_{k1}\right)}$$

Para este caso la intensidad de dominancia de la alternativa A_k se define como:

$$DI_k = \frac{\left(d_{k3}\right)^2}{\left(d_{k3}-d_{k2}\right)\left(d_{k3}-d_{k1}\right)} d(\tilde{d}_k^D, 0)$$

$$- \frac{\left(d_{k3}-d_{k1}\right)\left(d_{k3}-d_{k2}\right)-\left(d_{k3}\right)^2}{\left(d_{k3}-d_{k2}\right)\left(d_{k3}-d_{k1}\right)} d(\tilde{d}_k^I, 0)$$

Una vez que se ha definido para cada alternativa A_k su intensidad de dominancia, DI_k, la ordenación de éstas se basará en este valor, siendo la alternativa más preferida aquella que tiene una mayor intensidad de dominancia ya que domina al resto de alternativas con mayor intensidad, y la menos preferida la que tenga una menor intensidad de dominancia.

CONCLUSIONES

En los problemas de decisión reales existen muchas imprecisiones en las preferencias de los decisores e incertidumbres que deben ser modelizadas adecuadamente. En este artículo suponemos que la incertidumbre sobre las consecuencias de las alternativas en cada uno de los atributos se representa mediante distribuciones uniformes. La imprecisión de los decisores se representa en cada atributo mediante una clase de función de utilidad, en lugar de una única función de utilidad, y en los pesos de los atributos mediante números difusos (triangulares y trapezoidales). Basándonos en que la suma de números difusos (triangulares o trapezoidales) y la multiplicación de escalares por números difusos (triangulares o trapezoidales) sigue siendo un número difuso (triangular o trapezoidal), la solución del problema de optimización de dominancia de una alternativa con otra da un valor difuso, este valor representa la fuerza con la que una alternativa domina a cada una de las demás. Una vez que se ha calculado cuál es la fuerza con la que una alternativa domina a las demás, sumamos estos valores para obtener la fuerza neta con la que una alternativa domina al resto. De nuevo, esta suma vuelve a ser un número difuso ya que se ha obtenido como la suma de números difusos. Finalmente, para poder ordenar las alternativas calculamos la intensidad de dominancia de cada alternativa a partir de la distancia del número difuso, que representa la fuerza de dominancia de la alternativa con respecto a las demás, al cero. Las alternativas serán ordenadas según su intensidad de dominancia, siendo las mejores las que mayor intensidad de dominancia posean.

La filosofía de esta metodología se basa en la utilizada por los autores en otras publicaciones para el caso de que los pesos de la función de utilidad multiatributo aditiva eran representados mediante distribuciones de probabilidad uniformes, en lugar de números difusos. En esta publicación se demostró que los resultados obtenidos con la citada metodología mejoraban los obtenidas por otras. Este ha sido el motivo que nos ha llevado a aplicarla adaptándolo al caso de números difusos. Para demostrar que la metodología para el caso difuso sigue dando igual de buenos resultados es necesario comprobarlo, por lo que nuestro próximo objetivo es demostrar mediante simulación que esta metodología es mejor que otras existentes en la literatura.

La metodología ha sido considerada para números difusos triangulares por simplificar la notación. Sin embargo, es igualmente válida para el caso de números difusos trapezoidales.

AGRADECIMIENTOS

El artículo fue subvencionado por el proyecto del Ministerio de Ciencia e Innovación TIN 2008-06796-C04-02 y el de la Comunidad de Madrid S2009/ESP-1594.

REFERENCIAS

[1] B.S. Ahn, "Extending Malakooti.s Model for ranking multicriteria alternatives with preference strength and partial information", IEEE Trans. Sys. Man. and Cybernet., vol. 33, pp. 281–287, 2003.

[2] B.S. Ahn and K.S. Park, "Comparing methods for multiattribute decision making with ordinal weights", Comput. Operations Res., vol. 35, pp. 1660–1670, 2008.

[3] A. Bárdossy, L. Duckstein, "Fuzzy Rule-Based Modeling with Applications to Geophysical, Biological and Engineering Systems, CRC Press, Boca Raton, 1995.

[4] D. Dubois, H. Prade, "Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications", Academic Press, New York, 1980.

[5] Y. Eum, K.S. Park and H. Kim, "Establishing dominance and potential optimality in multi-criteria analysis with imprecise weights and values", Comput. Operations Res., vol. 28, pp. 397–409, 2001.

[6] K. Lee, K.S. Park and H. Kim, "Dominance, potential optimality, imprecise information, and hierarchical structure in multi-criteria analysis", Comput. Operations Res., vol. 29, pp. 1267–1281, 2002.

[7] B. Malakooti, "Ranking and screening multiple criteria alternatives with partial information and use of ordinal and cardinal strength of preferences", IEEE Trans. Sys. Man. and Cybernet., vol. 30, pp. 787–801, 2000.

[8] A. Mateos and A. Jiménez, "A Trapezoidal Fuzzy Numbers-Based Approach for Aggregating Group Preferences and Ranking Decision Alternatives in MCDM", *Evolutionary Multi-Criterion Optimization*, LNCS,Vol. 5467, pp. 365-379, 2009.

[9] A. Mateos, A. Jiménez and J.F. Blanco, "Ranking methods based on dominance measures accounting for imprecision", *Algorithmic Decision Theory*, LNAI, vol. 5783, pp. 328–339, 2009.

[10] A. Mateos, S. Ríos-Insua and A. Jiménez, "Dominance, potential optimality and alternative ranking in imprecise decision making", J. Oper. Res. Soc., vol. 58, pp. 326–336, 2007.

[11] K. Park, "Mathematical programming models for characterizing dominance and potential optimality when multicriteria alternative values and weights are simultaneously incomplete", IEEE Trans. Sys. Man. and Cybernet., vol. 34, pp. 601–614, 2004.

[12] H. Raiffa, The Art and Science of Negotiation. CA: Harvard University Press, 1982.

[13] A. Sage and C.C. White, "Ariadne: a knowledge-based interactive system for planning and decision support", IEEE Trans. Sys. Man. and Cybernet., vol. 14, pp. 35–47, 1984.

[14] P. Sarabando and L.C. Dias, “Simple procedures of choice in multicriteria problems without precise information about the alternatives values”, Comput. Operations Res. (in review), INESC- Coimbra, technical report, pp. 1–24, 2009.

[15] T.J. Stewart, “Robustness of additive value function method in MCDM”, J. Multi-Criteria Decision Anal., vol. 5, pp. 301–309, 1996.

[16] L. Tran, L. Duckstein, “Comparison of fuzzy numbers using a fuzzy number measure”, Fuzzy Sets and Systems, vol. 130, pp. 331-341, 2002.