

Criterios para el proyecto y la gestión de una red ramificada de riego a la demanda.

Luis Juana Sirgado

Ingeniero Agrónomo; Profesor en la ETSI Agrónomos de la UP de Madrid

luis.juana@upm.es

Francisco Laguna Peñuelas

Ingeniero de Caminos; Profesor en la ETSI de Caminos de la UP de Madrid

he15@caminos.upm.es

Raúl Sánchez Calvo

Ingeniero Agrónomo; Profesor en la ETSI Agrónomos de la UP de Madrid

raul.sanchez@upm.es

María Gil Rodríguez

Ingeniero Agrónomo; Investigador del grupo Hidráulica del Riego de la UP de Madrid

maria.gil@upm.es

Guillermo Castañón Lión

Ingeniero Agrónomo; Profesor en la ETSI Agrónomos de la UP de Madrid

guillermo.castanon@upm.es

1. Introducción y objetivos.

En una actividad como la del proyecto de redes ramificadas a la demanda muchos ingenieros usan procedimientos específicos de interés con multitud de detalles para tomar decisiones. No obstante, como referencia se toma aquí seguramente el método más clásico, todavía vigente, que usa los criterios aportados por Clément (1966) y Labye (1966), recogidos con ligeras modificaciones en las monografías de FAO nº 44, Labye et al. (1988) y nº 59, Lamaddalena y Sagardoy (2000). A grandes rasgos, consiste en determinar los diámetros de las tuberías y/o las necesidades de bombeo, que hacen mínima a una función objetivo que considera los distintos costes, con la restricción de que no falte presión en las bocas cuando circularan los caudales, denominados de proyecto, correspondientes a una probabilidad p_s , frecuentemente 0.95, de no ser superados. Para el estudio de la sensibilidad del coste de la solución a posibles cambios de las energías requeridas en las bocas H_r o de la energía en cabeza del sistema H_B , se puede computar para cada tramo la modificación que tendría en el coste modificar en una unidad sus pérdidas de carga $G = dC/dhf$ y $G_B = dC/dH_B$. Estos viejos conceptos, son de gran utilidad para proponer modificaciones a las situaciones de proyecto que se están estudiando. También, sobre todo en el caso de considerar los diámetro como una variable continua, aprovechando las relaciones que deben cumplir los valores de G de los distintos tramos y, en su caso, con G_B puede resolverse la optimización de la red, método continuo de Labye-Lechapt que puede encontrarse más detallado en las referencias apuntadas.

En una red ramificada a la demanda, a partir de los caudales q de las bocas y sus probabilidades p de funcionamiento, Juana et al. (2009) determinan analíticamente el valor medio y la varianza de las pérdidas de carga en los recorridos hfa que van desde cabeza de la red a cada boca. Además proponen y validan una función de distribución de probabilidad Gamma, caracterizada por los citados momentos centrales hfa_m y σ_{hfa}^2 , $2hfa \cdot hfa_m / \sigma_{hfa}^2 \in \Gamma[hfa_m^2 / \sigma_{hfa}^2, 2]$. De esta forma, conocida la energía en cabeza H_B y la energía requerida en cada boca H_r , puede determinarse en ésta la probabilidad de falta de presión F_{HD} de una intensidad mayor a una determinada HD y, en particular, la probabilidad de falta de presión F_0 , o simplemente, F . De esta forma, la presión o la falta de presión es una variable aleatoria, a la solución que se obtiene con los caudales de proyecto se le puede incorporar esta información que puede ser considerada para realizar modificaciones en el mismo.

Pero, realmente los caudales de proyecto no son necesarios y el óptimo puede ser determinado directamente para unas condiciones prefijadas de las probabilidades de falta de presión.

Aquí se pretende continuar y profundizar con el planteamiento de dicho artículo. Así, en primer lugar, para completar y facilitar su comprensión y uso, se realizará una formulación matricial en lugar de las sumatorias allí empleada. Por otra parte, se pretende avanzar más en las distintas posibilidades que se abren para sustituir los caudales de proyecto, las nuevas soluciones se compararan con las que se obtienen con ellos. Así, en segundo lugar, se basará el proyecto en no superar un valor límite F_{OL} , para la probabilidad de falta de presión en cada boca o para una media ponderada de ellas. Asimismo, en vez de este valor límite se usará un coste o penalización C_{HD} que considera los HD con sus F_{HD} asociados en todas las bocas. Se abren así muchas posibilidades ya que la valoración del coste de una falta de presión puede hacerse en términos energéticos, se está entregando el agua con menor energía, y/o mejor en función del incremento del coste que le supondrá al regante la instalación en su finca para obtener unos resultados similares, ver Juana et al (2008). En los análisis de sensibilidad pueden ahora también incluirse las nuevas variables, es decir la probabilidad de falta de presión, determinando la variación del coste por cada variación unitaria en la probabilidad de falta de presión en cada boca, $G_F = dC/dF$.

En Juana et al. (2009), se proponen también expresiones analíticas para estimar el valor medio y la desviación típica de las pérdidas de carga en cualquier recorrido condicionadas a que el caudal demandado sea Q_B , hfa_{iQB} y $\sigma_{hfa_{iQB}}$. Como función de distribución se propuso y validó asimismo la distribución Gamma anterior. Cada punto de la curva Q_B-H_B lleva asociada una probabilidad. Dado que para distintos valores de H_B no es necesario recalcular los valores medios y desviaciones típicas, hfa_{iQB} y $\sigma_{hfa_{iQB}}$, puede determinarse el valor de H_B con criterios similares a los comentados, como no superar un valor límite en la probabilidad de falta de energía o minimizar una función de costes en función de las probabilidades de déficit de energía. Aquí, para la consideración de los costes de energía y para la gestión de la red, dado que la probabilidad de ocurrencia de cada punto de la curva Q_B-H_B varía a lo largo de la campaña con las necesidades de agua de los cultivos, se usará una curva anual de necesidades, y se determinará la probabilidad global de cada punto Q_B-H_B . Esta información, además de ser básica para la selección de las bombas, permite valorar con más precisión los costes de energía en la fase de proyecto, es decir, en la determinación de los diámetros. Por otra parte, el método abre otras posibilidades como la de determinar una curva equivalente a la Q_B-H_B para distinta ramas de la red, con objeto de valorar posibles rebombes, la viabilidad de posibles turbinados o la colocación de elementos de control.

Finalmente, para completar la sensibilidad de los costes de la red a las variables de proyecto, se estudia la incidencia de la asignación de los caudales en las bocas. El caudal podría limitarse en cada boca de regante o en una agrupación de ellos. En el último caso, si el caudal limitado fuese fácilmente superado en un riego discrecional de los mismos, podría obligarles a regar por turnos, equivalente al riego secuencial de las unidades dentro de una explotación. Se muestra así que los riegos a la demanda y por turnos están más o menos próximos simplemente con modificar los caudales asignados. Se pretende también sacar conclusiones sobre el ahorro que puede significar el riego por turnos.

2. Material y métodos.

El caudal q demandado en una boca de riego se debe aportar con una energía requerida H_r . Se supondrá que esta regulado y que, como consecuencia, es constante para unas condiciones de servicio adecuadas. Al poder estar la boca abierta, con una probabilidad p , o cerrada, el valor medio y la varianza serán: $q_m = p \cdot q$ y $\sigma_q^2 = p \cdot (1-p) \cdot q^2$, respectivamente. La red será definida con la matriz \mathbf{A} , de ceros y unos, que permite transformar el vector de caudales en las bocas \mathbf{q} en el vector de caudales de los tramos \mathbf{Q} , es decir: $\mathbf{Q} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{q}$. De esta forma, pueden obtenerse los valores medios, $\mathbf{Q}_m = \mathbf{A} \cdot \mathbf{q}_m$, y las varianzas, $\sigma_Q^2 = \mathbf{A} \cdot \sigma_q^2$, de los caudales de los tramos. El método estadístico de Clément (1966) adopta como caudal de proyecto Q_p del tramo aquél que no es superado con una probabilidad P_S seleccionada que, en ocasiones, se denomina garantía o calidad de suministro. El valor de P_S lleva asociado un valor tipificado u_S , resultando el caudal de proyecto del tramo $Q_p = Q_m + u_S \cdot \sigma_Q$. La expresión matricial para todos los tramos sería:

$$\mathbf{Q}_p = \mathbf{Q}_m + \mathbf{u}_S \circ \sigma_Q = \mathbf{A} \cdot \mathbf{q}_m + \mathbf{u}_S \circ (\mathbf{A} \cdot \sigma_q^2)^{0.5} \quad (1)$$

El símbolo \circ indicará que la operación producto es elemento a elemento, no el producto típico de matrices que se denota por \cdot . Si bien, u_S suele ser igual para todos los tramos, en cuyo caso sería una constante.

En cada tramo, con el caudal Q , el diámetro D y la longitud L , se determina la pérdida de carga hf . Con el vector de pérdidas de carga \mathbf{hf} se determinan las pérdidas de carga acumuladas hfa desde cabeza a cada boca y, en

conjunto, el vector de pérdidas de carga acumuladas **hfa**. Para expresarlo de forma matricial sirve la misma matriz **A**, resultando: $\mathbf{hfa} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{hf}$, con el superíndice ^T se indica la matriz traspuesta.

En la optimización de una red, además de los diámetros, cuando hay bombeo se determina también la altura de energía H_B en cabeza de la red, de lo contrario sería un dato. Conocida H_B y las pérdidas de carga en el recorrido hfa hasta una boca puede determinarse la energía H en ésta y, como consecuencia, la falta o exceso de energía en relación a la requerida H_r . En el método clásico, el proyecto de la red se realiza de forma que, para los caudales de proyecto Q_p , no haya en ninguna boca déficit, es decir: $H = H_B - hfa \geq H_r$. De forma matricial:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_B - \mathbf{hfa}_{Q_p} = \mathbf{H}_B - \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{hf}_{Q_p} \geq \mathbf{H}_r \quad (2)$$

La función de probabilidad de las pérdidas de carga hf puede ser determinada a partir de la función de probabilidad del caudal Q del tramo, ambas, en último término dependientes de la función de distribución de los caudales q de las bocas. Para la determinación analítica es conveniente suponer una expresión empírica monómico-potencial de pérdidas de carga: $hf = c_D \cdot Q^m$. El exponente m depende de la fórmula elegida: 1.85 en la de Hazen-Williams, 2 en la de Manning, etc. El coeficiente c_D depende, además, del diámetro de la tubería D , de la longitud L y del material. Bajo estas hipótesis, Juana *et al.* (2009), obtienen analíticamente aproximaciones para el valor medio hf_m de las pérdidas de carga en cada tramo, para el valor medio de las pérdidas de carga en un recorrido hfa_m y para la desviación típica de estas últimas σ_{hfa} . Introduciendo el coeficiente de variación del caudal de cada tramo $CV_Q = \sigma_Q/Q_m$, el resultado, para las dos primeras, es:

$$hf_m \cong c_D \cdot Q_m^m \cdot \left(1 + \frac{m \cdot (m-1)}{2} CV_Q^2 \right) \quad (3)$$

$$\mathbf{hfa}_m = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{hf}_m \quad (4)$$

Para la formulación y cálculo de la tercera se introducen las variables; $hf' = m \cdot c_D \cdot Q_m^{m-1}$, $hf'' = (m-1) \cdot hf' / Q_m$ y sus valores acumulados, $hf'a$ y $hf''a$. De forma matricial: $\mathbf{hf}'\mathbf{a} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{hf}'$ y $\mathbf{hf}''\mathbf{a} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{hf}''$. A continuación, para cada tramo, se determina otra variable auxiliar σ_{hf}^2 , y, finalmente, σ_{hfa}^2 :

$$\sigma_{hf}^2 = \sigma_Q^2 \cdot \left(hf'^2 \cdot (1 + (m-1) \cdot (2m-3) \cdot CV_Q^2) + 2 \cdot hf' \cdot (hf''a - hf'') + 2 \cdot \sigma_Q^2 \cdot hf'' \cdot (hf''a - hf'') \right) \quad (5)$$

$$\sigma_{hfa}^2 = \mathbf{A}^T \cdot \sigma_{hf}^2 \quad (6)$$

Para determinar la probabilidad F de que las pérdidas de carga en un recorrido hfa superen el valor disponible $hfa_d = H_B - H_r$, además del valor medio y la varianza, en la referencia mencionada, Juana *et al.* (2009), se valida y concluye que aunque la distribución normal es adecuada cuando el número de tramos es elevado o el valor de p es mayor que 0.65, para el caso general, es preferible una Gamma dada por $2hfa \cdot hfa_m / \sigma_{hfa}^2 \in \Gamma[(hfa_m / \sigma_{hfa})^2, 2]$. De esta forma, la probabilidad de que en la boca se produzca una altura de falta de presión HD sería:

$$F_{HD} = 1 - \Gamma \left[\frac{2 \cdot (H_B - H_r + HD) \cdot hfa_m}{\sigma_{hfa}^2}; \left(\frac{hfa_m}{\sigma_{hfa}} \right)^2; 2; 1 \right] \quad (7)$$

El 1, del final, se ha usado para indicar que es la función de distribución de probabilidad acumulada. Obsérvese, que para $HD = 0$, se obtiene la probabilidad de falta de presión F .

En el caso de tener estación de bombeo, en cuanto al valor medio y la varianza de la potencia necesaria en la estación de bombeo para cubrir las condiciones de servicio a cada boca, Juana *et al.* (2009), se tendría:

$$\mathbf{P}_{Bm} = \frac{\gamma}{\eta} \cdot (Q_{Bm} \cdot (\mathbf{H}_r + \mathbf{hfa}_m) + \mathbf{Cov}[Q_B, \mathbf{hfa}]) \quad (8)$$

$$CV_{P_B}^2 = \frac{\sigma_{P_B}^2}{P_{Bm}^2} \cong CV_{Q_B}^2 + CV_{H_B}^2 + \frac{2 \cdot \mathbf{Cov}[Q_B, hfa]}{Q_{Bm} \cdot H_B} \quad (9)$$

Con:

$$\mathbf{Cov}[Q_B, \mathbf{hfa}] \cong \mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{hf}' \circ \sigma_Q^2)$$

Para una potencia de bombeo instalada dada P_{BI} , conocido el valor medio y la varianza de la potencia necesaria en cubrir el servicio de una boca, puede determinarse la probabilidad F_p de que falte potencia para cubrir ese servicio. Para ello, en la citada referencia, se propone y valida asimismo como función de probabilidad la gamma propuesta para las pérdidas de carga acumuladas. Como consecuencia, la expresión a usar sería similar a la (7).

$$F_p = 1 - \Gamma \left[\frac{2 \cdot P_{Bf} \cdot P_{Bm}}{\sigma_{P_b}^2}; \frac{1}{CV_{P_b}^2}; 2; 1 \right]$$

La limitación de los valores de F_p , o la introducción de una función de coste que los contemple, puede ser asimismo un criterio para proyectar la red. La mayor parte de lo ya comentado es asimismo aplicable.

En el caso de una estación de bombeo, la altura de elevación H_B , además de constante, puede establecerse en función del caudal Q_B . Para concretarla puede ser conveniente determinar la curva característica del sistema ligada a una determinada probabilidad de que no falte energía en una boca dada, o en un conjunto de ellas. Para ello, hay que añadir, a la energía necesaria H_r en la boca, las pérdidas de carga en el recorrido hfa , $H_S = H_r + hfa$. Por ser una curva, para estudiar su varianza no hay que considerar la incertidumbre debidas al caudal bombeado. Como consecuencia, la varianza será menor que la dada por (6). En la citada referencia, Juana et al. (2009), para cada caudal Q_B se proponen y validan dos expresiones para el valor de la varianza de estas pérdidas de carga condicionadas a un valor Q_B . Se recoge aquí la más simplificada que aportó una aproximación suficiente:

$$\sigma_{hfa}^2 |_{Q_B} \cong \sigma_{hfa}^2 - m^2 \cdot \left(\left(\frac{hfa_m}{Q_B} \right)^2 \circ \sigma_{Q_B}^2 \right) \quad (10)$$

La función de distribución, sería la misma distribución gamma. Así, para unas condiciones de probabilidad p en las bocas se determinan los valores de hfa_m , σ_{hfa} , etc., con las expresiones anteriores, no condicionadas a ningún valor de Q_B . A continuación, como Q_B se adopta el caudal medio demandado por la red y con el valor de hfa_m y la desviación típica de las pérdidas de carga acumuladas condicionadas $\sigma_{hfa} |_{Q_B}$, determinada por (10), se determina el valor de las pérdidas de carga acumuladas asociado a una probabilidad F , $hfa_F |_Q$, que sumada a la H_r daría el valor de H_{SF} para ese Q_B , $H_{SF} |_Q = H_r + hfa_F |_Q$. Es decir:

$$H_{SF} |_{Q_B} = H_r + hfa_F |_{Q_B} = H_r + 0.5 \cdot \frac{\sigma_{hfa}^2 |_{Q_B}}{hfa_m} \cdot \Gamma_{1-F}^{-1} \left[\frac{hfa_m^2}{\sigma_{hfa}^2 |_{Q_B}}, 2 \right] \quad (11)$$

3. Aplicación y resultados.

Se aplicara a la red de la figura 1, con los datos de referencia adjuntos a la misma.

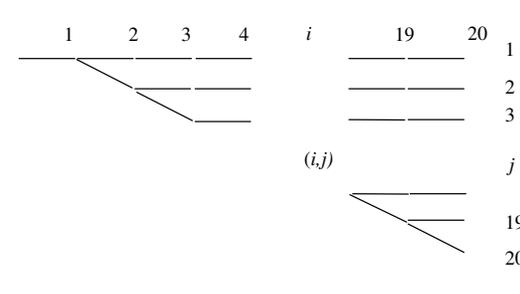
	<p>Longitud tramos: $L_{ij} = 200$ m Bocas: Caudal, $q = 0.010$ m³/s, Presión, $h = 20$ m Probabilidad funcionamiento punta, $p = 0.40$ Volumen anual consumido por boca: $V = 60000$ m³ Caudales de proyecto, fórmula de Clément, $P_S = 0.95$ Pérdidas de carga: Ec. de Manning ($m = 2$), $n = 0.010$ Desde balsa: $z_B = 60$ m Bombeo directo: Coste unitario de inversión en tubería: $C_{uD}(\text{€/m}) = 1000 \cdot D(\text{m})^2$ Coste unitario de inversión en bombeo: $C_{uP} = 1000$ €/kW Coste unitario de energía: $C_{uE} = 0.10$ €/kW·h Rendimiento bombas: $\eta = 0.75$ Tasa actualización costes anuales: $a_I = 0.10$</p>
---	--

Figura 1. Red y datos de referencia considerados para la aplicación.

Para proyectar la red con el criterio de mínimo coste, se ha usado el procedimiento tradicional recogido en Labye et al. (1988), apropiado para disponer de la información sobre análisis de sensibilidad comentada. La función de coste es relativamente simplificada con objeto de dedicar la atención especial a los objetivos del trabajo y los diámetros se considerarán como una variable continua. Así, el coste de las tuberías ya instaladas C_T se estimará a partir de las longitudes L y de un coste unitario en función del diámetro, C_{uD} , según una función potencial: $C_{uD} = a \cdot D^e$. Donde los valores a y e son datos. En la práctica, con muy pocos cambios, puede añadirse un coste fijo independiente del diámetro, pero no se entrará en ello. En el coste de inversión en la estación de bombeo C_B se supondrá, dentro del rango en que oscila la solución, proporcional a la potencia de bombeo instalada P_{Bf} , es decir: $C_B = C_{uP} \cdot P_{Bf}$. El rendimiento η de las bombas se considerará dentro del rango de la solución constante.

Finalmente, el coste de energía C_E se determinará con la energía anual consumida E_a y un coste unitario C_{uE} conocido. Para obtener un coste de energía actualizado C_{EA} , que pueda ser comparado con los costes de inversión anteriores, se dividirá por una tasa a_I de anualidad de la inversión o de actualización. El consumo de energía dependerá del funcionamiento concreto de las bombas de la estación. Se contemplarán dos casos. En el primero se considerará una altura de consigna H_B constante. En el segundo, se supondrá variable con el caudal Q_B , en este caso, se supondrá una curva de demanda de agua a lo largo de la campaña de riegos. Cada punto tendrá una potencia a suministrar P_B y una probabilidad g_{PB} , en el total de horas de funcionamiento de la estación de T_{AB} . Como consecuencia, la función Z a minimizar, en caso más general, con estación de bombeo, será:

$$Z = C_T + C_B + C_{EA} = \sum L_i \cdot C_{uD_i} + C_{uP} \cdot P_{BI} + C_{uE} \cdot \gamma \cdot T_{AB} \cdot \int_0^{P_{Bj}} P_B \cdot g_{P_B} \cdot dP_B \quad (12)$$

El óptimo tendrá como restricción una expresión (2) en el método tradicional u otra alternativa que use las probabilidades de falta de presión o de potencia comentadas.

En cada tramo j , se define la variable G_j , variable que representa la modificación del coste del tramo si, actuando en su diámetro, se modifica una unidad sus pérdidas de carga. Obsérvese que al aumentar en una unidad las pérdidas de carga de un tramo, aumentarán también en una unidad las pérdidas de carga acumuladas hfa_i en el recorrido hasta cualquier boca i que incluya dicho tramo. Como consecuencia, en el método tradicional, considerando las expresiones apuntadas, resulta:

$$G_j = \frac{\partial C_{Tj}}{\partial hfa_i} = -\frac{dC_{Tj}}{dhf_j} = -\frac{dC_{uD}}{dI_j} = -\frac{dC_{uD}}{dD_j} \cdot \frac{dD_j}{dI_j} = \frac{e}{n} \cdot \frac{C_{uD}}{I_j} = \frac{e}{n} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{D_j^{e+n}}{Q_j^m} \quad (13)$$

Las condiciones del método continuo de Labye (1966), deducibles con un análisis matemático convencional, establecen que, en el óptimo económico, en ramas como las de la red estudiada en las que las restricciones (2) únicamente es necesario considerarlas para las bocas del final, $i = 20$, se cumple que los valores de G de los tramos son iguales, es decir: $G_{i,j} = G_{i+1,j}$ con $i > j$. Por otra parte, también que cuando un tramo se deriva en dos, que originan ramas en las que hay restricciones (2), el valor de G del primer común es igual a la suma de los valores de G de los tramos derivados, es decir: $G_{i,i} = G_{i+1,i} + G_{i+1,i+1}$. En la expresión (13) puede observarse que de conocer el caudal, usar los de proyecto, conocer G es conocer D . Por ello, en el caso de alimentación desde la balsa, para su resolución se estiman primero los $D_{20,j}$, después se calcularon los $G_{20,j}$ y, con las relaciones apuntadas, el resto de G y, con estos, el resto de D . A continuación, se calculan las pérdidas de carga de los 20 recorridos y, por comparación con las disponibles, se corrigen los $D_{20,j}$. El proceso acaba cuando las pérdidas de carga de todos los recorridos coinciden con las disponibles.

Para introducir los nuevos conceptos en el planteamiento de la optimización es necesario introducir algunos cambios. Como se ha comentado, una forma es sustituir las restricciones (2) por otras que limiten la probabilidad de falta de presión en cualquier boca a un valor F . Las nuevas restricciones serían:

$$hfa_{Fi} = 0.5 \cdot \frac{\sigma_{hfa_i}^2}{hfa_{m_i}} \cdot \Gamma_{1-F}^{-1} \left[\frac{1}{CV_{hfa_i}^2}, 2 \right] \leq H_B - H_{r_i} = hfa_{di} \quad (14)$$

El cambio afecta al gradiente de cambio definido en (13), ahora G va a depender de σ_{hfa_i} . Como consecuencia, no será únicamente función del tramo j sino también del recorrido hasta la toma i que se considere. Así, salvo que haya un único recorrido a considerar o que sea un tramo distal (extremo físico o que a partir de él sobra presión independiente de los diámetros que se proyecten) G dependerá también del destino a considerar. Es decir:

$$G_{j \rightarrow i} = -\frac{\partial C_{Tj}}{\partial hfa_{Fi}} \equiv -\frac{dC_{Tj}}{dD_j} \Big/ \frac{\partial hfa_{Fi}}{\partial D_j} \quad (15)$$

En Juana *et al* (2009) se recogen las expresiones para obtener la derivada de las pérdidas de carga del recorrido con respecto al diámetro del tramo y de sus componentes, que no se recogen aquí por falta de espacio. Su determinación también puede hacerse de forma numérica pero requiere más tiempo de cálculo.

En la red a estudiar las expresiones (14) deben pueden referirse únicamente a las bocas de los extremos. Como consecuencia, en las ramas, también resulta: $G_{i,j} = G_{i+1,j}$ con $i > j$. Pero, al modificar un diámetro $D_{i,i}$, común a los varios recorridos $j \geq i$, un $\Delta D_{i,i}$, se modifica su coste un $\Delta C_{i,i}$ y se modifican todas las $hfa_{F20,j}$ con $j \geq i$, expresión (14), un $\Delta hfa_{F20,j}$, pero no en la misma cantidad. Cada incremento, puede alternativamente obtenerse modificando el diámetro extremo $\Delta D_{20,j}$, lo que generaría unos costes $\Delta C_{20,j}$. En el óptimo, estas dos vías originarían el mismo coste, es decir: $\Delta C_{i,i} = \Sigma \Delta C_{20,j} = \Sigma G_{20,j} \cdot \Delta hfa_{F20,j}$. Como consecuencia, el valor de $G_{i,i}$ a asignar a un tramo común, a partir de los valores de los $G_{20,j}$ extremos alimentados por él, debe cumplir:

$$G_{i \rightarrow 20i} = G_{i \rightarrow 20i+1} \cdot \frac{\Delta hfa_{F20i+1}}{\Delta hfa_{F20i}} = \dots = G_{i \rightarrow 2020} \cdot \frac{\Delta hfa_{F2020}}{\Delta hfa_{F20i}} = G_{20i} + G_{20i+1} \cdot \frac{\Delta hfa_{F20i+1}}{\Delta hfa_{F20i}} + \dots + G_{2020} \cdot \frac{\Delta hfa_{F2020}}{\Delta hfa_{F20i}} \quad (16)$$

Obsérvese que la expresión (16) coincide con la condición de Labye cuando los Δhfa_{F20j} son iguales.

Para la resolución se han estimado los diámetros de todos los tramos D_{ij} , y con ellos los G_{ij} . Por otra parte, a partir de los valores de los tramos de los extremos G_{20j} se han calculado, con la relaciones vistas, $G_{ij} = G_{i+1j}$ con $i > j$ y la expresión (16), los valores teóricos Gt_{ij} . Además para cada solución de diámetros resultan unos valores de hfa_{F20j} que serán mayores o menores que los disponibles hfa_{d20j} . Los diámetros de los tramos extremos se corrigen para que las últimas se aproximen y los diámetros de los tramos no extremos para que los valores de G se aproximen a los Gt .

Algunos valores del resultado de este proyecto tradicional, para un $P_s = 0.95$, se recoge en la columna 1 de la tabla 1. La probabilidad de falta de presión más alta ser produce en la boca T_{201} , extremo de la primera rama, con $F_{201} = 3.29\%$. Es asimismo, la boca que al reducir la presión produciría mayor reducción de coste $G_{201} = 1921 \text{ €/m}$ o la que ahorraría más por cada % de fallo que se incremente F en el proyecto, $GF_{201} = 4414 \text{ €/}\%$.

Tabla 1. Resumen de resultados obtenidos en la red alimentada desde balsa.

Criterio	1		2		3		4		5		6		7	
	$P_s = 0.95$	$F_{i20}=3.29\%$	$P_s = 0.99$	$F_{i20}=0.5\%$	$P_{Si} \rightarrow$ $F_{i20}=0.5\%$	$F_{i20m}=0.5\%$	$F = 0.5\%$ $a_F = 1000$ $e_F = 1.5$							
Z_B (m)	60.0	60.0	60.0	60.0	60.0	60.0	60.0	60.0	60.0	60.0	60.0	60.0	60.0	60.0
Q_B (m ³ /s)	0.957		1.005		1.005		1.005		1.005		1.005		1.005	
C_T (€)	2330675	2277086	2575854	2477908	2488562	2458342	2461908							
ΔC_T (%)	0	-2.30	3.95	0	0.40	-0.79	-0.56							
D_{11} (m)	0.673	0.653	0.692	0.656	0.688	0.658	0.654							
D_{201} (m)	0.147	0.136	0.159	0.143	0.159	0.140	0.137							
D_{2020} (m)	0.115	0.111	0.125	0.116	0.117	0.121	0.116							
ΣG_{20j} (€/m)	21850	21348	24149	23230	23330	23047	20892							
G_{201} (€/m)	1921	1911	2145	2116	2147	2020	1506							
G_{2020} (€/m)	334	354	359	388	338	478	397							
F_{201} (%)	3.29	3.29	0.50	0.50	0.50	1.28	0.61							
F_{2020} (%)	1.13	3.29	0.05	0.50	0.50	0.12	0.51							
ΣGF_{20j} (€/%)	57936	38082	638846	184260	194780	190844	165730							
GF_{201} (€/%)	4414	4353	22149	21483	22147	9542	15674							
GF_{2020} (€/%)	1050	463	16751	2343	1856	9542	2390							

Para el nuevo proyecto, se ha usado la misma probabilidad máxima de falta de presión $F = 3.29\%$ que se produce con los diámetros de la solución de la columna 1. La nueva solución, columna 2 de la tabla 1, resulta parecida a la anterior pero un 2.30% más barata. Las probabilidades de falta de presión de las bocas del final de las ramas coinciden con el valor $F = 3.29\%$ usado para el proyecto. En las columnas 3 y 4 de la tabla 1, se repiten los resultados para $P_s = 0.99$ y $F = 0.50\%$, la reducción de coste con el nuevo método es ahora del 3.80 %.

En la columna 5, se ha usado el método tradicional pero con valores de P_s o u_s variables en las distintas ramas con objeto de obtener en todas las bocas extremas un valor de $F = 0.50\%$. Se han usado, por tanto, 20 valores distintos de u_s , el valor de u_{s1} se ha aplicado a los 20 primeros tramos, primera rama y tramo común, el valor de u_{s2} a los 19 tramos siguientes, segunda rama y tramo común, y así sucesivamente. Se observa que la reducción de coste es del 3.39 % frente a $u_s = 2.33$ fijo, marcado por $P_s = 0.99$, únicamente un 0.40 % más cara que el mínimo para la condición fijada $F = 0.50\%$, de la columna 4. Los valores de u_s de redujeron desde 2.33 al aumentar j hasta 1.77. De comparar los diámetros de la primera rama de las soluciones 4 y 5 se observa que los de la 4 son más reducidos en los primeros tramos y más grandes en los últimos. Finalmente, se determinaron los valores individuales de u_s con objeto de obtener los diámetros del nuevo método, columna 4 de tabla 1. El resultado, mostró unos valores máximos de los u_s en los tramos intermedios de las ramas.

La uniformidad en la probabilidad de falta de presión tiene un coste, así si con los nuevos procedimientos pretendemos tener un valor medio para las 20 bocas de final de rama igual a 0.5 %, la instalación saldrá más barata. En este caso todos los GF de las bocas finales son iguales. La solución, que se representa en la columna 6, es un 0.79% más barata.

Como se indicó, puede definirse, en lugar de las restricciones (2) o (14), un coste para el déficit de presión en cada boca C_{DH} , con el coeficiente a_F y el exponente e_F , de la siguiente forma:

$$C_{DH} = a_F \cdot \int_0^{H_r} DH^{e_F} \cdot f(DH) \cdot dDH \quad (17)$$

Su evaluación puede realizarse de forma numérica y el óptimo económico de la función correspondiente puede asimismo obtenerse de forma numérica. Un ejemplo con esta función se recoge en la referencias citada, Juana *et al* (2009). Asimismo, para simplificar, puede referirse únicamente al valor DH correspondiente a una probabilidad F deseada. En este caso:

$$C_{DH} = a_F \cdot DH^{e_F} = a_F \cdot (H_r + hfa_F - H_B)^{e_F} \quad (17b)$$

El término C_{DH} de la expresión (17) o (17b) debe ser incluido en (12). La diferenciación para la obtención del mínimo permite determinar nuevamente relaciones que pueden ser de utilidad para obtener la solución. Así, para un tramo j que alimenta una serie de tramos que acaba en uno i , se tendría:

$$G_{j \rightarrow i} = -\frac{\partial C_{T_j}}{\partial hfa_i} = \sum_{k=j}^i \frac{\partial C_{DH_k}}{\partial hfa_{F_k}} \cdot \frac{\partial hfa_{F_k}}{\partial hfa_{F_i}} = \sum_{k=j}^i G_{DH_k} \cdot \frac{\partial hfa_{F_k}}{\partial hfa_{F_i}} \quad (18)$$

La solución, determinando el coste del déficit de presión DF , para una $F = 0.5\%$, y la función de costes (17b) con los coeficientes $a_F = 1000$ y $e_F = 1.5$, se muestra en la columna 7 de la tabla 1. La solución es más barata, $\Delta C_T = -0.65\%$, pero con mayor probabilidad de falta de presión. El resultado es lógico pues la solución de la columna (4) tendría $C_{DH} = 0$, que sería solución cuando estos costes de penalización fuesen muy grandes. En este caso, en las primeras ramas aparece falta de presión en las dos últimas bocas.

Cuando hay **estación de bombeo**, el método tradicional de Labye apunta también a que el valor de G del primer tramo, G_{11} , está condicionado por las características económicas de la elevación, cumpliéndose:

$$G_B = \frac{d(C_B + C_{EA})}{dH_B} = \frac{\gamma \cdot Q_B}{\eta_P} \cdot C_{uP} + \frac{\gamma \cdot V_B}{\eta_E \cdot a_1} \cdot C_{uE} = G_{11} = \sum G_{20j} \quad (19)$$

En este caso, la optimización aporta, además de los diámetros D_j , el valor de H_B .

Con los nuevos criterios, la optimización debe proporcionar, además de los diámetros D_j y la altura de elevación H_B , el caudal de bombeo Q_B . Ahora bien, de desear que $\mathbf{P}(Q_1 > Q_B) \leq F_Q$, el valor Q_B se obtiene de forma similar al método tradicional y la optimización aportaría los D_j y H_B . Además, el uso cada vez más frecuente de convertidores de frecuencia, permite establecer en la estación de bombeo un valor de consigna H_B , independiente del caudal demandado, por lo que el análisis de presión insuficiente en las bocas sería similar al caso de la alimentación desde la balsa.

En la solución óptima con los nuevos criterios, una modificación infinitesimal de la altura de elevación ΔH_B produciría una modificación del coste relacionado con la estación de bombeo $\Delta(C_B + C_{EA})$. A su vez produciría unas $\Delta hfa_{F_i} = \Delta H_B$, que ahora si serían iguales. Actuando en el diámetro de cada tramo de los extremos de la rama un ΔD_{20j} para obtener el valor correspondiente de $\Delta hfa_{F_{20j}}$, se modificaría el coste del tramo un ΔC_{20j} . Como consecuencia, el óptimo también debe cumplir: $G_B = \sum G_{20j}$.

Algunos datos del resultado del proyecto tradicional, para $P_S = 0.95$, se recogen en la columna 1 de la tabla 2. Los valores de F están calculados suponiendo que la altura de elevación es fija igual a la de proyecto H_B . En la práctica, puede haber falta de potencia de bombeo, en cuyo caso la altura H_B sería menor y las probabilidades de falta de presión mayores. No obstante, las probabilidades de falta de potencia F_P , son menores que las de presión, como consecuencia, los valores de F pueden considerarse válidos.

Para el proyecto con los nuevos criterios y compararlo mejor con el tradicional, se ha usado la probabilidad de falta de presión F_H más alta que resultaba en el proyecto tradicional, $F_H = 3.29\%$, y el mismo valor de F_Q , $F_Q = 0.050$. En la columna 2 de la tabla 2 se recoge el resultado. La función objetivo resulta un 1.46% más barata. La probabilidad de falta de potencia en las bocas de los extremos de las ramas, F_{P20j} , aumenta ahora con el subíndice j . En las columnas 3 y 4 de la tabla 1, se repiten los resultados para $P_S = 0.99$, $F_H = 0.50\%$ y $F_Q = 1.0\%$, la reducción de coste con el nuevo método es ahora del 2.43%.

Los costes de energía de las soluciones anteriores se han determinado suponiendo una consigna aguas abajo constante e igual a H_B . Ahora bien, con las expresiones (10) y (11) y el procedimiento comentado, se ha determinado una curva característica del sistema ligada a una probabilidad P_S de que la curva de necesidades en cabeza para abastecer una boca esté por debajo de ella. El resultado, para $P_S = 0.95$ y para los diámetros de las

solución 1, tabla 2, se muestra en la figura 2. La curva está determinada por la boca T_{20 1} que resulta la más desfavorable. En la figura también se ha marcado la localización del punto de proyecto PP, de la solución 1.

Tabla 2. Resumen de resultados obtenidos en la red con bombeo directo.

Criterio	1	2	1E	3	4
	$P_S = 0.95$	$F_{i20}=3.29\%$ $F_{QB} = 5\%$	$P_S = 0.95$	$P_S = 0.99$	$F_{i20}=0.5\%$ $F_{QB} = 1\%$
H_B (m)	56,3	55,7	60,3	57,6	56,6
Q_B (m ³ /s)	0,957	0,957	0,957	1,005	1,005
P_B (kW)	703	696	754	757	743
E (Kw·h)	703405	695843	548754	756862	743165
C_T (€)	2417966	2377318	2323250	2635635	2562286
C_P (€)	703405	695843	754383	756862	743165
AC_E (€)	703405	695843	548754	756862	743165
Z (€)	3824776	3769003	3626388	4149359	4048616
ΔZ (%)	-	-1,46	-5,19	-	-2,43
$D_{1 1}$ (m)	0,686	0,667	0,672	0,700	0,667
$D_{20 1}$ (m)	0,149	0,139	0,146	0,161	0,146
$D_{20 20}$ (m)	0,118	0,113	0,115	0,126	0,118
G_B (€/m) = $\Sigma G_{i=20}$ (€/m)	25004	25004	21596	26268	26268
$G_{T20 1}$ (€/m)	2198	2238	1898	2333	2393
$G_{T20 20}$ (€/m)	382	415	330	390	439
$F_{20 1}$ (%)	3.29	3.29	3.29	0.50	0.50
$F_{20 20}$ (%)	1.13	3.29	1.13	0.05	0.50
$F_{P20 1}$ (%)	1.11	0.00	1.16	0.03	0.00
$F_{P20 20}$ (%)	0.73	2.31	0.72	0.02	0.82

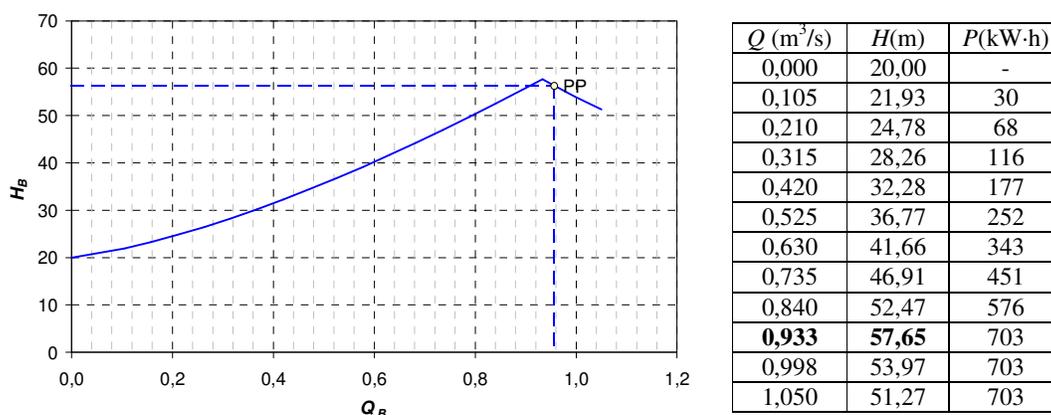


Figura 2. Curva de consigna para una probabilidad $P_S = 0.95$ de que no haya falta de presión en cualquier boca.

Tabla 3. Distribución mensual de la demanda de riego en España considerada en el LBA

	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic	Total
Dr (%)	0	0	1	4	11	18	27	25	11	3	0	0	100
$c_t = Dr_i / Dr_{max}$	0	0	0.037	0.148	0.407	0.667	1.000	0.926	0.407	0.111	0	0	

Para calcular la probabilidad de cada punto se considerará la distribución mensual de la demanda de riego D_r , usada para el Libro Blanco del Agua (LBA), ver tabla 3. Así, la probabilidad de funcionamiento de una boca en un instante t , p_t , se afecta al valor punta p en función de la relación de demanda c_t . Es decir: $p_t = p \cdot c_t$. Bajo esta consideración, considerando una interpolación lineal, entre los puntos de la tabla 3, se ha estimado cada día con

necesidades mayores de cero, la probabilidad de los distintos caudales y, considerando el conjunto de días de la campaña, la función de probabilidad acumulada F y la función de densidad g de cada caudal en toda la campaña, ver figura 4a y, como cada valor de caudal Q_B va ligado a una potencia P_B , también de ésta, figura 4b. En esta última se ha representado el caso de suponer $H_B = \text{cte}$ (línea a trazos), independiente de Q_B , y la de suponer la curva Q_B-H_B , determinada para $P_S = 0.95$ (línea continua). Se ha determinado también el ahorro de energía que se origina de pasar de una a otra. Para la solución de la columna 1, tabla 2, este ahorro es de un 27 %. De incluir esta reducción del coste de energía en la fase de proyecto se modifica la solución óptima lo que, a su vez, modifica el porcentaje. Sin realizar, esta retroalimentación, la solución óptima se presenta en la columna 1E. La diferencia de coste, -5.19 %, con respecto a la de la columna 1, aconseja considerar este aspecto a la hora de evaluar los costes energéticos en la fase de proyecto.

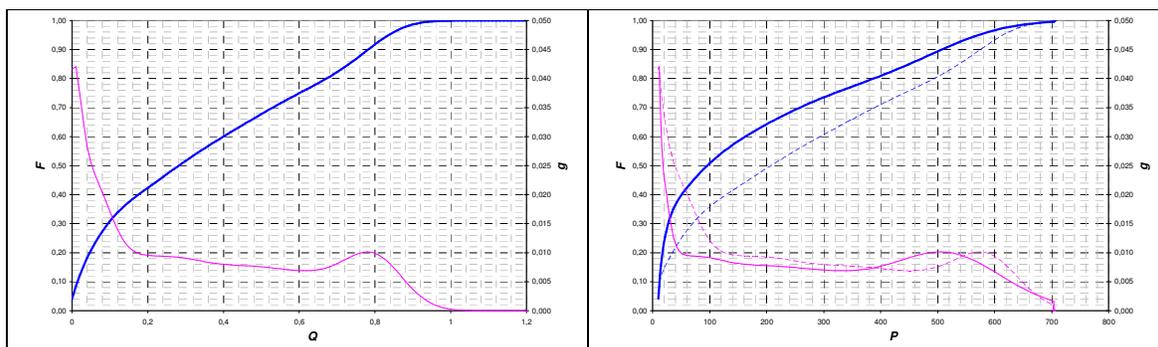


Figura 4. Funciones de distribución del caudal y la potencia demanda por la red a lo largo de la campaña.

Tabla 4. Resumen de resultados obtenidos en una red alimentada desde balsa.

	1	2	2T	3	3T	4	4T
Criterio	$P = 1$	$p = 0.750$	$3/4$ turnos	$p = 0.50$	$1/2$ turnos	$p = 0.250$	$1/4$ turnos
$P_S = 0.95$	$Q = 0.004$	$q = 0.0053$	$q = 0.0053$	$Q = 0.008$	$q = 0.008$	$q = 0.016$	$Q = 0.016$
Z_B (m)	60.0	60.0	60.00	60.0	60.00	60.0	60.00
Q_B (m ³ /s)	0.840	0.895	0.843	0.935	0.840	1.005	0.896
C_T (€)	1680022	1999937	1703124	2218454	1757193	2575793	1955403
ΔC (%)	-	19.0	1.38	32.0	4.59	53.3	16.4
		0	-14.8	0	-20.8	0	-24.1
D_{11} (m)	0.621	0.647	0.623	0.665	0.625	0.692	0.646
D_{201} (m)	0.103	0.127	0.111	0.140	0.125	0.159	0.153
D_{2020} (m)	0.083	0.101	0.090	0.111	0.102	0.125	0.129
$\Sigma G_i =_{20}$ (€/m)	15750	18749	15967	20798	16474	24148	18332
G_{201} (€/m)	1330	1619	1309	1818	1392	2145	1511
G_{2020} (€/m)	277	303	282	323	302	359	423
ΣG_Q (€/L/s))	314906	114579	239446	63075	164711	34145	91652
G_{Q2010} (€/L/s))	3251	1860	3276	1004	3101	533	2914
G_{Q2020} (€/L/s))	2168	821	2132	442	2093	234	1940

La **asignación de caudales** puede asimismo tener un efecto significativo en el coste del proyecto. De suponer que las necesidades de los cultivos son unas dadas, un mayor caudal en la boca implicaría un menor tiempo de riego, como consecuencia, se supondrá $q \cdot p = \text{cte} = 0.004$, valor de referencia. El proyecto más barato es el que se obtiene para los mínimos caudales, es decir, en el periodo punta se estaría todo el tiempo regando, $p = 1$. Para los datos de referencia, la asignación de caudal en las bocas sería $q = 0.004$. Para ahorrar tiempo de cálculo se ha resultado por el método tradicional, el resultado está en la columna 1, tabla 4. De dotar a las bocas con $q = 0.008$ la probabilidad de funcionamiento se aproximará a 0.50, si bien, en la práctica cabe pensar que sería algo mayor. El resultado mostrado en la columna 3, es un 32 % más caro. De regar por turnos, con una boca si y otra no, distribuidas uniformemente en el espacio, los diámetros necesarios y el coste se muestran en la columna 3T. El coste es 14.8 % más barato que en el riego a la demanda y un 4.59 % más caro que la solución más barata. El disponer del doble caudal en la boca seguramente le permitirá al regante de mayores posibilidades para organizar el riego en su finca. Otras situaciones son mostradas en las columnas 2, 2T, 4 y 4T. Como era de esperar, se

observa que cuando el valor de p es alto, la demanda está bastante restringida y el proyecto para un riego por turnos produce unas reducciones de coste menores que cuando el valor de p es bajo.

En un proyecto, a la hora de asignar el caudal en las bocas, puede ser de gran interés determinar la variación del coste del proyecto con la modificación del caudal de una boca un L/s, $G_{Qi} = dC/dq_i$. En los casos del riego a la demanda, se ha considerado que la variación de caudal implica una variación en la probabilidad de funcionamiento. Se observa que son también las bocas con mayores problemas de presión las que incrementarían más es coste si se aumenta el caudal y en las que reducirá más en caso de disminuirlo.

4. Conclusiones.

La estimación propuesta del valor medio y de la desviación típica de las pérdidas de carga en cada recorrido, junto con la función de distribución, permite relacionar cada magnitud de la falta de presión en una boca con su probabilidad asociada de producirse. Esta estimación de la función de distribución de presión en las bocas, además de constituir una información de utilidad para el proyecto de redes ramificadas con riego a la demanda, es útil para establecer nuevos criterios de proyecto y de operación de los sistemas. El criterio de limitar la probabilidad de falta de presión en una boca o varias bocas, define mejor las limitaciones de la red que el concepto de “garantía de suministro”, del método clásico de Clément, que no tiene un significado preciso.

Los nuevos óptimos económicos, definidos con los nuevos criterios, reducen el coste de la red para una probabilidad de falta de presión dada o para el criterio seleccionado. El método permite proyectar la red con el objetivo de tener una mayor uniformidad en las probabilidades de falta de presión en las bocas terminales.

La estimación propuesta de la curva característica de caudal-altura necesaria para la red, con objeto de limitar o considerar las probabilidades de falta de presión en las bocas, es de utilidad para seleccionar el equipo de bombeo y automatizar su funcionamiento, aspectos esenciales para aumentar los rendimientos de las bombas, y con ello ahorrar energía y reducir costes. Por otra parte, permite estimar de forma más precisa los costes de energía y, con ello, que el óptimo económico usado en el proyecto represente mejor a las condiciones de explotación futuras. Las diferencias pueden ser significativas.

Las nuevas propuestas no rompen necesariamente con los criterios anteriores sino que las enriquecen y completan. Al ampliarse los criterios y el interés de su selección a partir de una cuantificación económica, resulta conveniente incluir, en la medida de lo posible, la sensibilidad del coste de la solución a todas las decisiones a adoptar en el proyecto. Es el caso de presiones y caudales en las bocas, probabilidades de falta de presión o potencia, entre otras. Esta información, reducirá la posibilidad de llevar a cabo proyectos en los que selecciones realizadas de forma mecánica, poco pensadas, determinan unos costes finales que podrían haberse reducido sustancialmente sin alterar de forma significativa la calidad del servicio a los usuarios.

Referencias.

- Clément, R. 1966. Calcul des débits dans les réseaux d'irrigation fonctionnant à la demande. *Houille Blanche* 5:553-575.
- Juana, L.; Sánchez R.; Rodríguez L.; Castañón G. 2008. “Proyecto de unidades de riego por goteo: Presión óptima y coste de la uniformidad”. Ponencia C-20. XXVI Congreso Nacional de Riegos. AERYD. Huesca.
- Juana L.; Sánchez R.; Rodríguez-Sinobas L.; Laguna F. 2009. “Probability of Pressure Deficit in On-Demand Branched Networks and Incorporation into Design Decisions”. *J. of Irrig. Drain. Eng., ASCE*, 135(2):186-199.
- Labye, Y. 1966. Etude des procédés de calcul ayant pour but de rendre minimal le coût d'un réseau de distribution d'eau sous pression. *La Houille Blanche* 5:577-583.
- Labye, Y., Olson, M.A., Galand, A., Tsiortis, N. 1988. Design and optimization of irrigation distribution networks. *FAO Irrigation and Drainage Paper n° 44*. Rome.
- Lamaddalena, N., Sagardoy, J. A. 2000. Performance análisis o fon-demand pressurized irrigation systems. *FAO Irrigation and Drainage Paper n° 59*. Rome.

Agradecimientos.

Los autores del trabajo agradecen al Ministerio de Educación y Ciencia el apoyo prestado a través del proyecto AGL2008-00153/AGR.

Símbolos.

A	Matriz para definir la red	η	Rendimiento de la estación de bombeo
a	Coefficiente de la expresión del coste de la tubería en función del diámetro	γ	Peso específico del agua
a_l	Anualidad unitaria para comparar costes de inversión y costes anuales.	Γ	Función de probabilidad gamma
c_D	Coefficiente en expresión general monómico-potencial de pérdidas de carga	σ	Desviación típica
C	Coste	CV	Coefficiente de variación del caudal en un tramo
Cov []	Indica covarianza	hf	Pérdidas de carga en un tramo (L)
d	Operador diferencial	hfa	Pérdidas de carga en el recorrido que va de cabeza del sistema hasta una boca (L)
D	Diámetro del tramo	Σ	Indica sumatorio
e	Exponente en la expresión del coste de la tubería en función del diámetro	∂	Operador derivada parcial
F	Probabilidad de falta de presión en una boca.	Δ	Operador incremento
G	Gradiente de cambio introducido por Labye	\circ	Operador para indicar que un producto entre vectores o matrices es elemento a elemento.
i	Índice genérico, con frecuencia indica la boca	Subíndices.	
L	Longitud del tramo	B	Para referir a a la estación de bombeo
m	Exponente del caudal en la expresión de pérdida de carga	d	Para indicar disponibilidad
n	Coefficiente de la expresión de Manning	F	Para referir a una probabilidad de falta F
p	Probabilidad de funcionamiento de una boca	$i \ j \ k$	Ordinales para designar los tramos o las bocas
P	Potencia de la instalación de bombeo	l	Para indicar inversión
P_S	Probabilidad de no ser superado	m	Para indicar valor medio
q, \mathbf{q}	Caudal en una boca ($L^3 \cdot T^{-1}$), vector de los q .	p	Para indicar de proyecto
Q, \mathbf{Q}	Caudal en un tramo ($L^3 \cdot T^{-1}$), vector de los Q	P	Para indicar de potencia
u_S	Valor de la variable tipificada correspondiente a una probabilidad P_S	r	Para indicar valor requerido
Z	Función objetivo a optimizar	u	Para indicar valor unitario
		hf, hfa	Para referir un CV o una σ a las pérdidas de carga en un tramo o las de un recorrido
		Q, q	<i>Idem</i> al caudal de un tramo o de una boca
		Superíndices.	
		T	Para indica la traspuesta de una matriz