

UN MODELO TRIDIMENSIONAL DE PRODUCCIÓN DE ICEBERGS: EXPERIMENTOS NUMÉRICOS EN EL GLACIAR JOHNSONS, ISLA LIVINGSTON, ANTÁRTIDA

F.J. Navarro^{1*}, J.Otero¹, M.L. Cuadrado¹, M.I. Corcuera¹ y C. Martín²

1: Dept. Matemática Aplicada
ETSI de Telecomunicación
Universidad Politécnica de Madrid
Av. Complutense, 30, 28040 Madrid, Spain
e-mails: fnv,jotero,mce,mcl@mat.upm.es, web: <http://www.krios-hyperion.com>

2: British Antarctic Survey, Division of Physical Sciences
High Cross, Madingley Road, Cambridge CB3 0ET, United Kingdom
e-mail: cama@bas.ac.uk

Palabras clave: Glaciología, Métodos numéricos, calving

Resumen. *Las leyes de producción de icebergs más usuales son: 1) la que considera que la tasa de producción de icebergs depende linealmente de la profundidad de agua en el frente glaciar, según una ley obtenida mediante ajustes a observaciones de campo; y 2) aquella en la que el criterio de producción de icebergs viene dado por la altura del glaciar sobre el nivel de flotación. El principal problema de la primera es que las relaciones empíricas varían ampliamente de un glaciar a otro, y también varían con el tiempo, lo que no las hace adecuadas para modelos evolutivos de glaciares, mientras que la mayor desventaja de la segunda es que su aplicación queda restringida a glaciares con frente no flotante. El nuevo criterio de producción de icebergs propuesto recientemente por Benn et al. [2] considera que el mecanismo primario de la producción de icebergs es la propagación vertical de las grietas superficiales desarrolladas cerca del frente como consecuencia del régimen de tensiones extensivas. Este criterio permite el desarrollo de lenguas glaciares flotantes y puede ser utilizado en modelos evolutivos de dinámica glaciar. Sus principales limitaciones son su carácter bidimensional y la excesiva simplicidad de los modelos dinámicos empleados. Hemos desarrollado una extensión tridimensional de este criterio que resuelve el sistema de Stokes completo de la dinámica glaciar, superando así las dos limitaciones mencionadas. Hemos aplicado este modelo al glaciar Johnsons, en Isla Livingston (Antártida), mostrando los resultados que, si consideramos la presencia de un cierto volumen de agua de fusión en las grietas, las predicciones del modelo se ajustan bastante bien a las observaciones. No obstante, se requieren mejoras en la ley de deslizamiento del glaciar sobre su lecho.*

1 INTRODUCCIÓN

La mayor parte de las leyes de producción de icebergs que se utilizan en la literatura están basadas en dos aproximaciones. Una de ellas [3, 18] considera que la tasa de producción de icebergs depende linealmente de la profundidad de agua en el frente glaciar, obteniéndose la ley lineal específica de cada caso mediante ajustes a observaciones de campo. El principal problema de esta aproximación es que las relaciones empíricas entre profundidad de agua y tasa de producción de icebergs varían ampliamente de un glaciar a otro [11], y también varían con el tiempo [20], lo que las hace no adecuadas para su uso con modelos evolutivos de dinámica glaciar. En la segunda aproximación, original de Van der Veen [20] y más tarde modificada por Vieli et al. [21, 22, 23], el criterio de producción de icebergs viene dado por la altura sobre el nivel de flotación. Su mayor desventaja es que no permite la formación de lenguas glaciares flotantes, restringiendo su aplicación a glaciares con frentes con terminación en mar pero no flotantes. En nuestra opinión, el criterio de producción de icebergs propuesto por Benn et al. [2] ha supuesto un notable avance en esta materia. Este criterio considera que el mecanismo fundamental de la producción de icebergs es la propagación hacia abajo de las grietas superficiales, desarrolladas en la proximidad del frente como consecuencia del régimen de tensiones extensivas. La profundidad de las grietas se calcula, siguiendo a Nye [16], considerando que su base está a la profundidad a la que se igualan la tensión longitudinal extensiva que tiende a abrir la grieta y la tensión de cierre resultante de la presión del hielo suprayacente. El iceberg se produce cuando la grieta alcanza el nivel del mar. La posición del frente glaciar queda, pues, determinada por la posición en la cual la profundidad de la grieta se iguala con la altura de la porción del glaciar por encima del nivel del mar. El criterio de producción de icebergs de Benn está, por lo tanto, basado en sólidos principios físicos, permite el desarrollo de lenguas glaciares flotantes y puede ser utilizado en modelos evolutivos de dinámica glaciar. Las principales limitaciones de sus aplicaciones publicadas hasta ahora son su carácter bidimensional y la excesiva simplicidad de los modelos dinámicos empleados (tensión gobernante contrarrestada únicamente por arrastre basal, únicamente por arrastre lateral, o por una combinación de ambos; es decir, no se considera la existencia de gradientes de tensiones longitudinales). Se presenta en este artículo una extensión tridimensional del criterio de Benn que resuelve el sistema de Stokes completo de la dinámica glaciar y que proporciona, en consecuencia, una representación realista del gradiente de velocidades que produce las grietas transversales. Se presenta asimismo una aplicación de este modelo al glaciar Johnsons, en Isla Livingston (Antártida).

2 MODELO DE PRODUCCIÓN DE ICEBERGS CONTROLADO POR LA PROFUNDIDAD DE LAS GRIETAS

2.1 El modelo de Benn y otros

El criterio que vamos a utilizar para modelizar la producción de icebergs en un glaciar con terminación en el mar está basado en el modelo de formación de grietas [2]. Según

este criterio la posición del frente del glaciar en un instante determinado estará definida como aquella para la cual la profundidad de las grietas, $d(x)$, sea igual a la altura del glaciar sobre el nivel del mar en ese punto, $h(x)$:

$$x = L \text{ donde } d(x) = h(x), \quad (1)$$

siendo x la coordenada horizontal en la dirección de flujo del glaciar, L la longitud del glaciar, $h = H - D_w$, y d viene dado por:

$$d = \frac{2}{\rho g} \left[\left(\frac{\dot{\epsilon}_*}{A} \right)^{\frac{1}{n}} + (\rho_w g d_w) \right], \quad (2)$$

donde ρ_w y ρ son las densidades del agua y del hielo, respectivamente, d_w es la profundidad de agua en las grietas (proveniente de fusión en la superficie) y $\dot{\epsilon}_*$ se toma como $\frac{\partial U}{\partial x}$, que es la deformación longitudinal según la dirección del flujo.

Este criterio definirá, en cada momento, la posición del frente glaciar, es decir, por dónde hay que seccionar este último, generando un iceberg, definiendo así una nueva posición del frente. Nótese que ésta, por consiguiente, viene determinada por la deformación en la dirección de flujo, que resulta del campo de velocidades producido por el modelo, constituyendo así el nexo entre la dinámica glaciar y la posición del frente.

La forma más inmediata de conocer d_w sería disponer de observaciones experimentales. En el Glaciar Johnsons se carece de este tipo de datos, por lo que supondremos, en principio, $d_w = 0$. Denominaremos d_0 al valor que toma d cuando $d_w = 0$

$$d_0 = \frac{2}{\rho g} \left(\frac{\dot{\epsilon}_*}{A} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (3)$$

2.2 Extensión tridimensional del modelo

Las principales limitaciones del modelo de Benn et al. [2] son su carácter bidimensional y la excesiva simplicidad del modelo dinámico empleado para el cálculo del campo de velocidades. Esta última limitación la superaremos mediante el empleo del modelo dinámico descrito en la sección 3, que resuelve el sistema de Stokes completo de la dinámica glaciar. Procedemos a continuación a realizar la extensión tridimensional del modelo de Benn et al. [2] de calving basado en la profundidad de las grietas.

Describimos esquemáticamente el procedimiento a seguir para determinar la posición del frente glaciar.

1. Se parte de una geometría del glaciar dada, con posición del frente en $L_0(x, y)$.
2. Resolviendo el modelo dinámico para la geometría inicial, se obtiene la distribución de velocidades en la superficie del glaciar, $U(x, y)$.

3. A partir de esta distribución de velocidades en la superficie, se aproxima la derivada del vector velocidad según la dirección del flujo en cada nodo de la superficie, $\dot{\epsilon}_*(x, y)$, mediante el cociente de la diferencia entre la velocidad en un nodo, p_1 , y la velocidad en un punto situado a una cierta distancia del mismo, p_2 , en la dirección del flujo (calculada mediante interpolación) y la distancia que separa esos dos puntos, $d(p_1, p_2)$, es decir,

$$\dot{\epsilon}_* = \frac{|(u_2 - u_1, v_2 - v_1)|}{d_{p_1, p_2}}. \quad (4)$$

4. Se calcula $d_0(x, y)$ para cada nodo en función del $\dot{\epsilon}_*$ correspondiente, considerando los valores de los parámetros n y A tomados para el modelo.
5. Se representan $h(x, y)$ (geometría dada) y $d_0(x, y)$ en una misma gráfica. Su intersección determinará una nueva posición del frente, $L_1(x, y)$.
6. Con el campo de velocidades superficiales $U(x, y)$ y la función de acumulación-ablación $a(x, y)$ (supuesta conocida), se calcula la nueva geometría de la superficie tras un paso temporal Δt , seccionando el glaciar por la nueva posición del frente, $L_1(x, y)$.
7. Transcurrido ese Δt , la partícula material situada en un punto P_0 de la superficie en el frente del glaciar se habría desplazado (de acuerdo con el campo de velocidades U) a una nueva posición F_1 en la dirección de flujo.
- Si $L_1 > L_0$, el frente habrá avanzado.
 - Si $L_1 < L_0$, el frente habrá retrocedido.

La diferencia entre F_1 y L_1 nos dará la magnitud de la pérdida por calving.

El caso $L_1 > F_1$ carece de sentido físico. Si esta situación se diera en el modelo, querría decir que se ha subestimado la pérdida de masa por producción de icebergs. Esto podría deberse a que hemos considerado que no hay agua que rellene las grietas, es decir $d_w = 0$. La diferencia $L_1 - F_1$ nos daría en este caso una indicación de una cota inferior de d_w , ya que al aumentar d_w disminuye L_1 y ésta debe ser menor o igual que F_1 .

8. Una vez obtenida la nueva posición del frente, se calcula la nueva geometría del glaciar, y se repite el proceso hasta llegar (eventualmente) a una configuración estacionaria (geometría y posición del frente) consistente con la función de acumulación-ablación $a(x, y)$ disponible.

3 MODELO DE DINÁMICA GLACIAR

3.1 Ecuaciones básicas

Consideramos la masa de hielo como un fluido viscoso no lineal, incompresible e isótropo. Las velocidades, junto con las presiones, son las incógnitas del submodelo dinámico, definido por el sistema de Stokes, constituido por las ecuaciones de conservación del momento lineal y de la masa,

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (6)$$

donde se ha usado el convenio de Einstein de suma sobre los subíndices repetidos y σ_{ij} representa el tensor de tensiones, g_i la aceleración de la gravedad, ρ la densidad del hielo, u_i la velocidad y x_i el vector de posición. Como relación constitutiva utilizamos la generalización, debida a Nye [16], de la ley de flujo de Glen [8, 9]:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = A\tau^{n-1}\tau_{ij}, \quad (7)$$

donde τ_{ij} son las tensiones desviadoras, τ es la tensión desviadora efectiva y $\dot{\epsilon}_{ij}$ son las velocidades de deformación, definidas por las relaciones

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + \tau_{ij}, \\ \tau &= \left(\frac{1}{2}\tau_{ij}\tau_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

siendo p la presión debida a tensión compresiva media, es decir,

$$p = -\sigma_{ii}/3. \quad (9)$$

Emplearemos la ley de Glen (7) con $n = 3$, que es el valor habitualmente utilizado en mecánica de glaciares [24, 12].

3.2 Condiciones de contorno

Para este modelo se tienen cuatro tipos de frontera: lecho, superficie, divisorias y frente glaciar.

En la superficie se utilizan como condiciones de contorno tracciones nulas y en las divisorias velocidades horizontales nulas ($u = 0$, $v = 0$) y tensiones de cizalla τ_{xz} y τ_{yz} nulas.

En el lecho también se imponen condiciones de contorno sobre velocidades calculadas mediante la ley generalizada de Weertman,

$$u_b = -K \frac{(\rho g H)^p |\nabla h|^{p-1} \frac{\partial h}{\partial x}}{(\rho g H - \rho_w g H_w)^q}, \quad (10a)$$

$$v_b = -K \frac{(\rho g H)^p |\nabla h|^{p-1} \frac{\partial h}{\partial y}}{(\rho g H - \rho_w g H_w)^q}, \quad (10b)$$

$$w_b = u_b \frac{\partial b}{\partial x} + v_b \frac{\partial b}{\partial y}, \quad (10c)$$

donde, en la aplicación del modelo al glaciar Johnsons, el valor de p se ha fijado a dos y el de q a uno. El uso de $p = 2$ para el Glaciar Johnsons se justifica por la elevada pendiente que presentan ciertas zonas del glaciar. El uso de una potencia mayor conduciría a valores desmesurados de la velocidad basal en las zonas altas del glaciar. El valor de K se ha considerado un parámetro libre del modelo. Para estimar el valor de la presión efectiva en cada punto del lecho, calculada como la presión de la columna de hielo menos el empuje de Arquímedes correspondiente a la columna de agua basal, $p_e = \rho g H - \rho_w g H_w$, necesitamos conocer la altura de esta columna de agua, H_w . Puesto que carecemos de observaciones experimentales de la presión de agua basal, nos vemos forzados a modelizarla.

Hemos considerado que el valor de H_w es función de la distancia al frente y es distinto para las zonas de acumulación y ablación. Se considera habitualmente que, en el frente glaciar, H_w coincide con la profundidad del mar junto al frente [21], puesto que existe conectividad hidráulica. En la zona de ablación hemos supuesto una ley de aumento de la altura de la columna de agua dependiente de la distancia al frente glaciar dada por

$$H_w^{ab} = C \frac{d_{frente,punto}}{d_{frente,ela}} + \text{abs}(\min(0, b)), \quad (11)$$

donde $d_{frente,punto}$ es la distancia entre el frente y el punto considerado, medida a lo largo de la línea de flujo correspondiente y $d_{frente,ela}$ es la distancia desde el frente hasta la línea de equilibrio, medida también a lo largo de la línea de flujo.

A partir de la línea de equilibrio, hemos supuesto que, según nos adentramos en la zona de acumulación la altura de la columna de agua disminuye de acuerdo con

$$H_w^{ac} = C \left(1 - \frac{d_{ela,punto}}{d_{ela,borde}}\right), \quad (12)$$

donde $d_{ela,punto}$ es la distancia entre la línea de equilibrio y el punto considerado, a lo largo de la línea de flujo, y $d_{ela,borde}$ es la distancia entre la línea de equilibrio y el extremo del glaciar en esa dirección. C es una constante de ajuste que representa la altura de agua en la línea de equilibrio, para la que se toma el valor $C = 40$.

En el frente se han definido condiciones de contorno sobre tracciones, tomando éstas nulas por encima del nivel del mar, e iguales a la presión hidrostática en la parte sumergida.

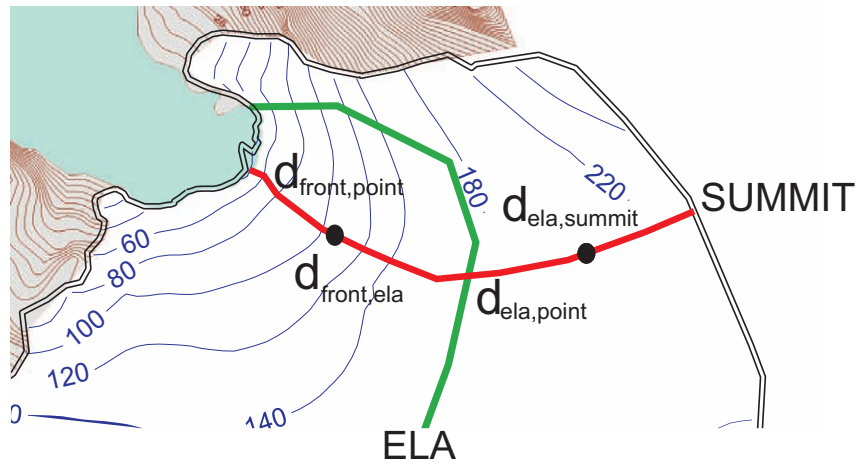


Figura 1: Esquema de las variables utilizadas para el cálculo de H_w en cada zona.

3.3 Solución numérica

El problema débil o variacional asociado al sistema de Stokes 5-6 se discretiza mediante elementos finitos, con una aproximación de tipo Galerkin (método mixto velocidad-presión; e.g. Quarteroni and Valli [19], cap. 9). El carácter no lineal de la relación constitutiva 7 implica que los elementos de la matriz en la forma algebraica del sistema de Stokes sean función de la viscosidad, que es a su vez función de las velocidades. El sistema resultante es, en consecuencia, no lineal, requiriendo una solución iterativa. Podemos destacar asimismo que la matriz del sistema es simétrica, pero indefinida.

El mallado utilizado, basado en tetraedros, se describe en el apartado 5.1. La elección de las funciones base para los espacios de aproximación de las velocidades y de las presiones ha sido de funciones cuadráticas y lineales, respectivamente, con 10 nodos de velocidad por elemento (en los vértices y en el centro de cada arista del tetraedro) y 6 nodos de presión por elemento (en el centro de cada arista del tetraedro). Esta elección ha venido dictada por consideraciones de convergencia y estabilidad asociadas a la discretización de elementos finitos del sistema de Stokes lineal, aplicables a cada paso del proceso iterativo que emplearemos para resolver el sistema no lineal. Esta elección es una condición suficiente para estabilidad y, además, proporciona una velocidad de convergencia óptima, puesto que supera la denominada condición de compatibilidad (o inf-sup).

El sistema lineal resultante en cada paso del proceso iterativo ha sido resuelto mediante un método directo de factorización LU, empleando las librerías Sparse 1.3a creadas por Kundert y Sangiovanni-Vicentelli (1988), especialmente diseñadas para matrices dispersas (sparse), como ocurre en nuestro caso, ya que solo los nodos que pertenecen a un mismo elemento tienen contribuciones no nulas a los coeficientes de la matriz. Podría pensarse que los métodos iterativos serían más adecuados para la resolución de este tipo de sistemas. Sin embargo, en nuestro caso concreto, debido a la relación constitutiva no lineal y dependiente de la deformación típica del hielo glaciar, la viscosidad puede tener valores

muy diferentes en diferentes zonas del glaciar; incluso puede ser llegar a ser singular. Esta diferencia entre viscosidades implica una gran diferencia entre los autovalores asociados a la matriz del sistema y, por lo tanto, un elevado valor del número de condicionamiento, lo que conllevaría una convergencia lenta de los procesos iterativos (e.g., Quarteroni and Valli [19], cap.2). Debido a esta dificultad, se ha empleado un procedimiento directo de resolución de tipo punto fijo.

4 DATOS DE CAMPO

El Glaciar Johnsons es un glaciar con terminación en el mar situado en la Isla Livingston, Islas Shetland del Sur, Antártida (figura 2), en la posición $62^{\circ}40' S$, $60^{\circ}30' W$. Está delimitado por una divisoria de hielo local (con altitudes entre 200 y 330 metros sobre el nivel del mar) que lo define como cuenca glaciar con dinámica propia dentro del casquete de hielo de la Península Hurd. El glaciar tiene un área aproximada de 5 km^2 y termina en un acantilado de hielo de unos 50 metros de altura y 500 metros de longitud a lo largo de la costa.

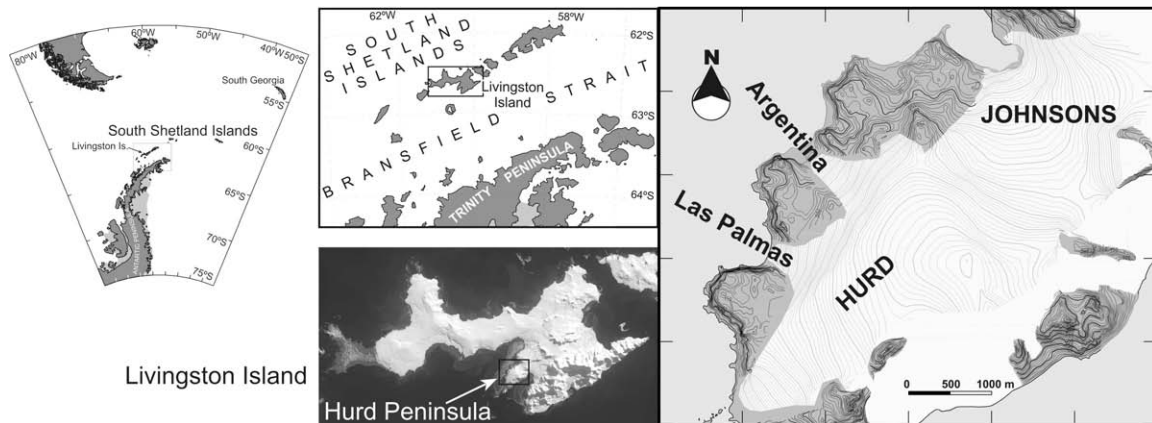


Figura 2: (a) Mapa de localización de la Isla Livingston (Shetland del Sur, Antártida). (b) Localización de la Península Hurd dentro de la Isla Livingston.

En la zona de acumulación del Glaciar Johnsons se han realizado sondeos mecánicos para la medición de la densidad y la temperatura, que permiten afirmar que, al menos el hielo por debajo de la capa de neviza de la zona de acumulación, es mayoritariamente templado, característica que es común a otras zonas de acumulación estudiadas en las Shetland del Sur [7, 25].

Las velocidades superficiales se incrementan a lo largo de las líneas de flujo, alcanzando valores en torno a los 40 m a^{-1} en la zona terminal [25]. La acumulación y ablación presentan una gran variabilidad, tanto espacial como temporal, con máximos en la acumulación cercanos a 1 m we a^{-1} y máxima ablación en torno a los -4 m we a^{-1} [25]. Estos datos de velocidad y acumulación/ablación en la superficie superior se han obtenido a partir de

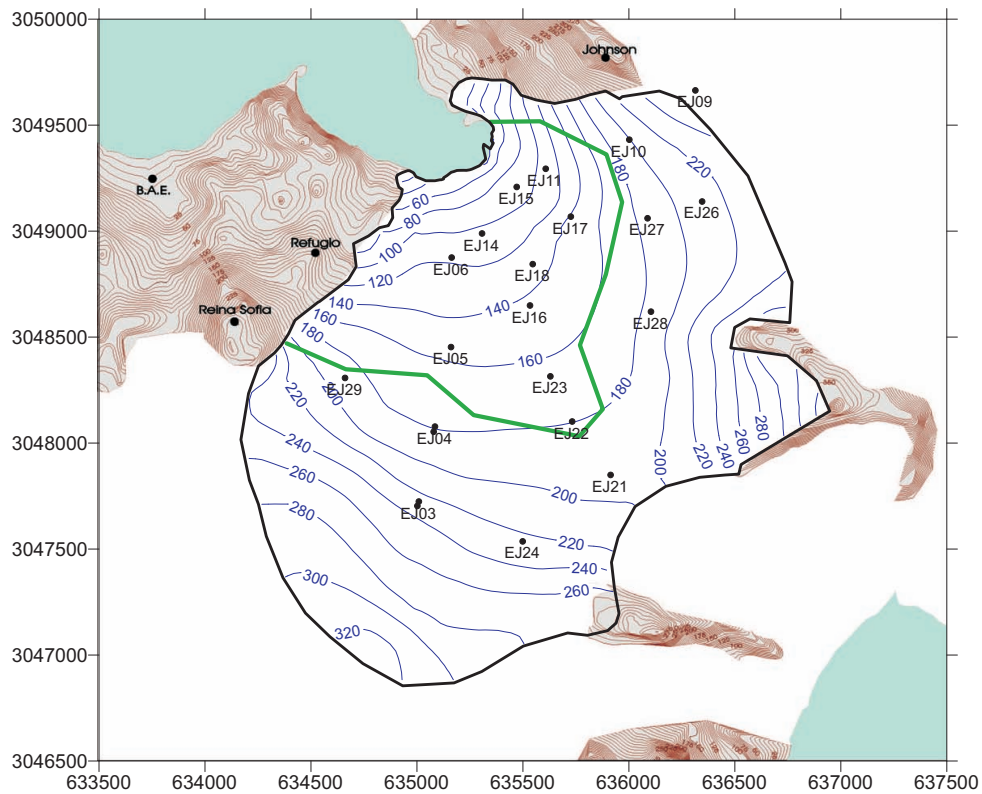


Figura 3: Topografía de la superficie superior del Glaciar Johnsons. En la figura se puede observar la línea de equilibrio (en verde), la red de estacas (puntos numerados) y la frontera del glaciar.

una red de estacas, cuyos datos se registran sistemáticamente desde 1994 [4, 5, 6]. La red de estacas puede verse en la figura 3.

La línea de equilibrio está situada cerca de los 150 metros de altitud en la zona norte y, aproximadamente, a 180-260 m de altitud en la zona sur [25].

La superficie superior del glaciar Johnsons (fig. 3) ha sido determinada a partir de mediciones topográficas [25]. La superficie basal se ha calculado a partir de mediciones de espesor (ver figura 4), realizadas mediante prospecciones radar durante el verano austral en las campañas 1999-2000 y 2000-01 [1] (véase la localización de las líneas de prospección de radar en la figura 4).

Además de los datos descritos se dispone de la profundidad del lecho marino obtenida a partir de una batimetría de la zona cercana al frente de la Bahía Johnsons, bahía donde desemboca el glaciar, obtenida por el Grupo de Glaciología del *Departament de Geodinàmica i Geofísica* de la *Universitat de Barcelona* (D. García Sellés, comunicación personal). A partir de los datos de espesor de los que se dispone y la batimetría se ha interpolado el lecho para la zona de la que no se tienen datos de espesor, siguiendo el procedimiento descrito por Otero [17, cap. 2] (figura 5).

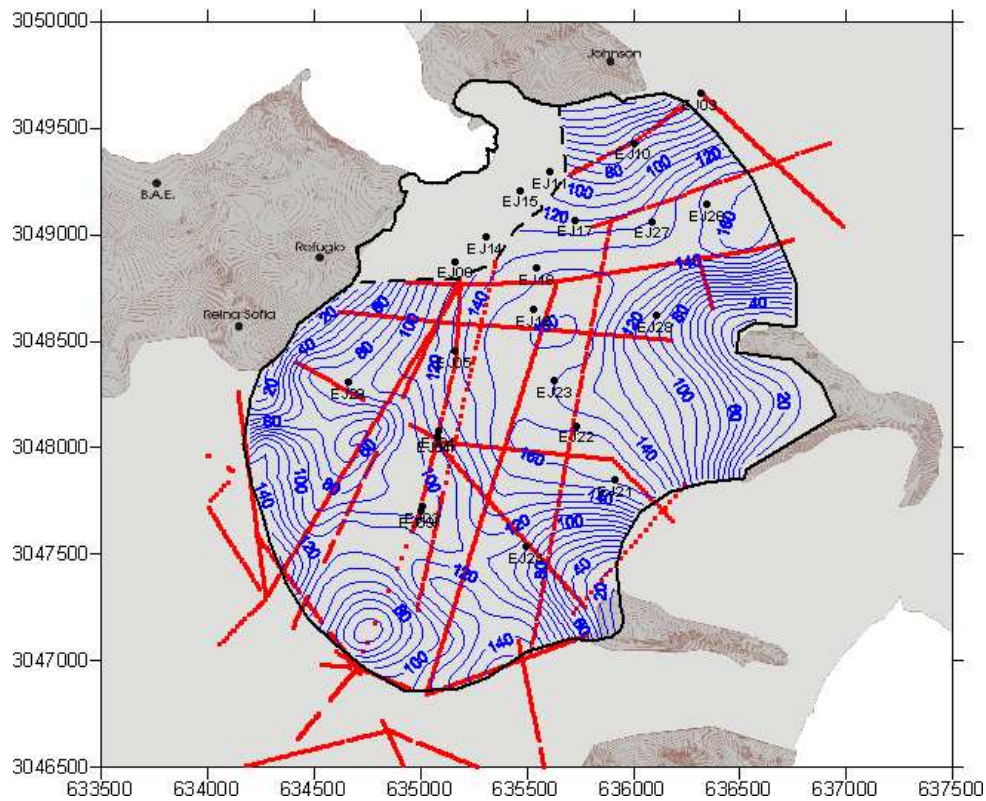


Figura 4: Espesor de hielo en el glaciar Johnsons, limitado a la zona en la que se dispone de datos de espesor. En la figura se pueden observar las líneas de prospección de radar (en rojo).

5 IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO

5.1 Mallado de elementos finitos

El mallado del dominio se ha realizado mediante tetraedros siguiendo el método de Delaunay-Voronoi [17, cap.3].

Se ha tomado como contorno del glaciar la frontera definida por: 1) el borde del glaciar en las zonas de contacto con roca que aflora en superficie; 2) el frente con terminación en mar; y 3) las divisorias que lo separan del Glaciar Hurd, al suroeste, y los glaciares situados al este y al norte (véase figura 5), y se ha hecho un mallado bidimensional con triángulos, según el método de Delaunay-Voronoi, de la proyección del contorno sobre un plano horizontal. Luego se ha interpolado la coordenada z para la superficie y el lecho del glaciar en los puntos del mallado, y, por último, se ha hecho un mallado con triángulos de las tres divisorias y el frente proyectando cada una de ellas sobre un plano vertical conservando las distancias entre los puntos. De esta forma se ha obtenido una discretización con triángulos de la frontera del glaciar.

Se ha mallado a continuación el dominio con tetraedros y se han introducido puntos interiores para conseguir el mallado definitivo (véase figura 6).

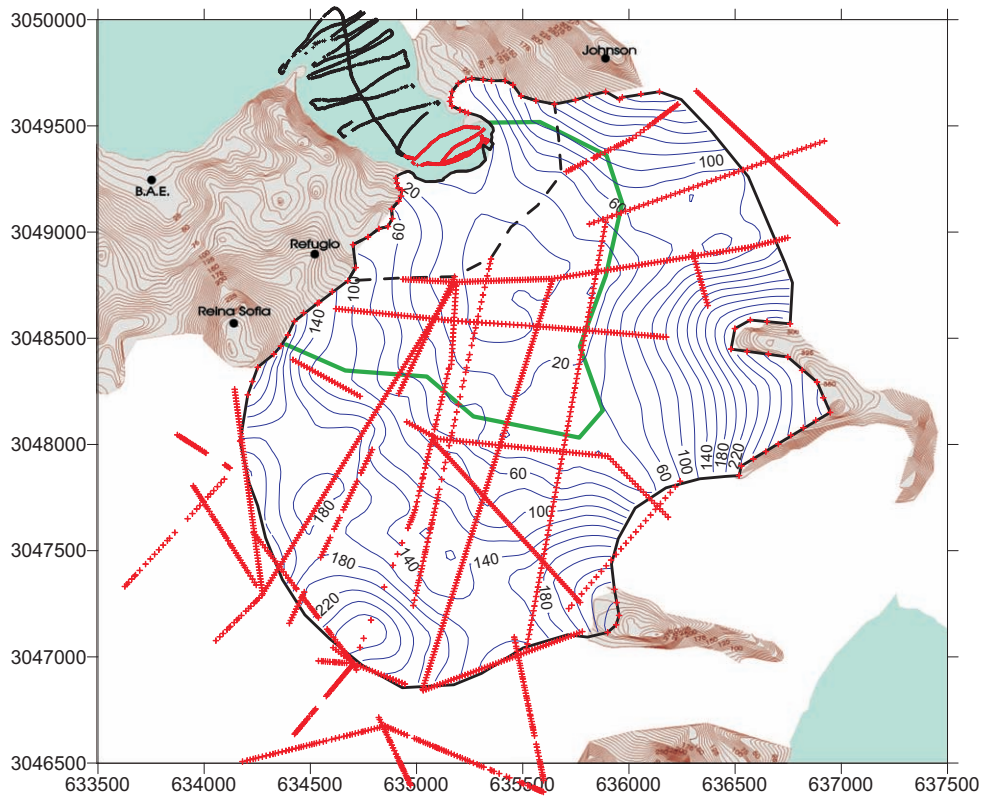


Figura 5: Topografía del lecho del Glaciar Johnsons. En la figura se puede observar las líneas de prospección de radar (en rojo), la batimetría realizada en la bahía (en negro y destacados en rojo los puntos utilizados para interpolar el lecho), la frontera del glaciar y la frontera de la zona sin datos de espesor (línea discontinua negra).

El mallado utilizado tiene 832 vértices, 5845 nodos y 3731 elementos.

5.2 Ajuste de parámetros del modelo

Los parámetros libres del modelo son el coeficiente B de la relación constitutiva y el coeficiente K de la ley de deslizamiento basal. Con su ajuste pretendemos minimizar la diferencia entre velocidades calculadas y observadas. Para estas últimas hemos utilizado un promedio de las velocidades anuales para un periodo de tres años. En el ajuste, los valores de B se han variado desde $0.18 \text{ MPa } a^{1/3}$ hasta $0.33 \text{ MPa } a^{1/3}$, en pasos de $0.01 \text{ MPa } a^{1/3}$, y los de K desde $0 \text{ ma}^{-1} \text{ MPa}^{-2}$ hasta $2 \cdot 10^3 \text{ ma}^{-1} \text{ MPa}^{-2}$, en pasos de $0.1 \cdot 10^3 \text{ ma}^{-1} \text{ MPa}^{-2}$.

Los resultados del ajuste de parámetros libres se presentan en la figura 7. Se observan varios mínimos, que son más profundos según nos desplazamos hacia valores mayores de K y corresponden a valores cada vez ligeramente mayores de B . Nótese que la física del modelo implica, en virtud de la conservación de masa, una dependencia de la deformación con el deslizamiento. A la vista de los resultados, y de los rangos admisibles de B y K ,

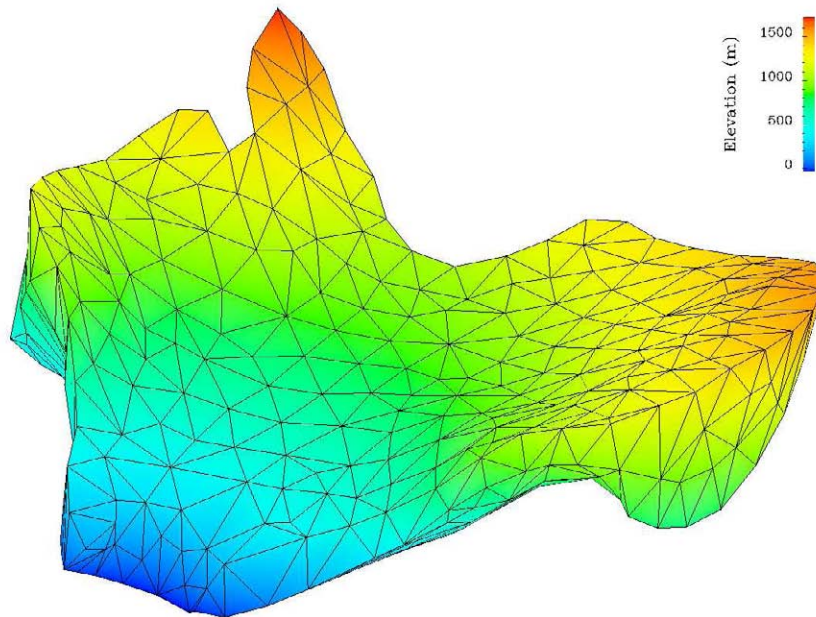


Figura 6: Mallado del Glaciar Johnsons con 3731 tetraedros.

una opción razonable es tomar $B = 0.23 \text{ MPa } a^{1/3}$ y $K = 1.2 \text{ ma}^{-1} \text{ MPa}^{-1}$.

El campo de velocidades correspondiente a esta elección de los parámetros libres, desgraciadamente, no proporciona una representación adecuada de las velocidades observadas experimentalmente en la zona cercana al frente glaciar, como se pone de manifiesto en la figura 8. La discrepancia podría deberse a una inadecuada parametrización de la presión de agua basal en la ley de deslizamiento. Sin embargo, hemos ensayado un amplio abanico de opciones para esta última, sin resultar una mejora significativa de los resultados. Creemos más bien que el problema es intrínseco a la ley de deslizamiento utilizada: la pendiente de la superficie del glaciar tiene un peso excesivo en el cálculo del deslizamiento basal, especialmente significativo en las zonas con fuerte pendiente, incluso (para estas últimas) si tomamos $p = 1$ en la ley de deslizamiento. Deberíamos recordar que la ley de Weertman fue originalmente concebida para su uso en mantos de hielo, al considerar que el arrastre basal (*basal drag*) es la única fuerza que se opone a la tensión conductora (*driving stress*).

Tratando de minimizar las diferencias observación-modelo en la zona próxima al frente glaciar, hemos utilizado valores distintos de K para esta zona y para el resto del glaciar, lo que, a nuestro juicio, compensa parcialmente las deficiencias de la aplicación de la ley de Weertman al Glaciar Johnsons, puesto que es en la zona próxima a su frente donde se dan las menores pendientes. Los resultados del ajuste de parámetros libres para este caso se presentan en la figura 9, donde se puede apreciar claramente un mínimo, que se da en los valores de $B = 0.23 \text{ MPa } a^{1/3}$ y $K = 1.0 \text{ ma}^{-1} \text{ MPa}^{-1}$. La mejora en los resultados

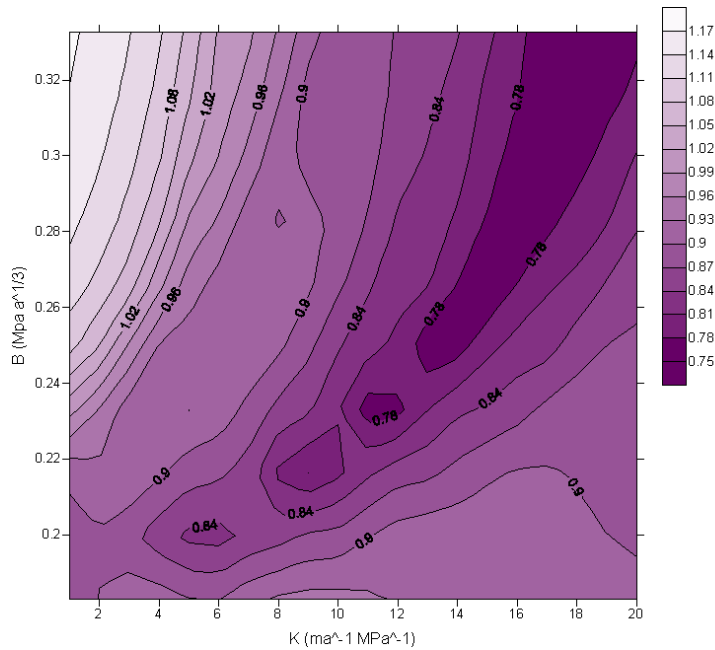


Figura 7: Ajuste de los parámetros B y K en el modelo del glaciar Johnsons para minimizar las diferencias entre las velocidades calculadas y las observadas.

se aprecia en la figura 10.

6 RESULTADOS

Con el campo de velocidades obtenido (representado en la figura 11), hemos calculado la profundidad de grietas, $d_0(x, y)$. Los valores de $d_0(x, y) - h(x, y)$ correspondientes aparecen representados en la figura 12 (a). De acuerdo con estos valores, el frente glaciar se encuentra por detrás de la posición que le correspondería en virtud del modelo de calving. Esta diferencia podría deberse a que hemos considerado que las grietas no están rellenas parcialmente con agua de fusión superficial, es decir, $d_w = 0$. Con objeto de verificar si esto es una hipótesis plausible, hemos calculado, y representado en la figura 12 (b), los valores de $d(x, y) - h(x, y)$ asumiendo que d_w es igual a un cuarto del espesor de hielo en cada punto. Como puede observarse en la figura, esta cantidad de agua en las grietas es suficiente para lograr que las grietas cercanas al frente penetren hasta el nivel del mar, dando lugar, de acuerdo con el modelo, a la fractura del frente mediante el proceso de calving.

7 DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Podríamos destacar las siguientes como conclusiones principales del trabajo desarrollado:

1. El valor del parámetro B de la relación constitutiva obtenido del ajuste entre los

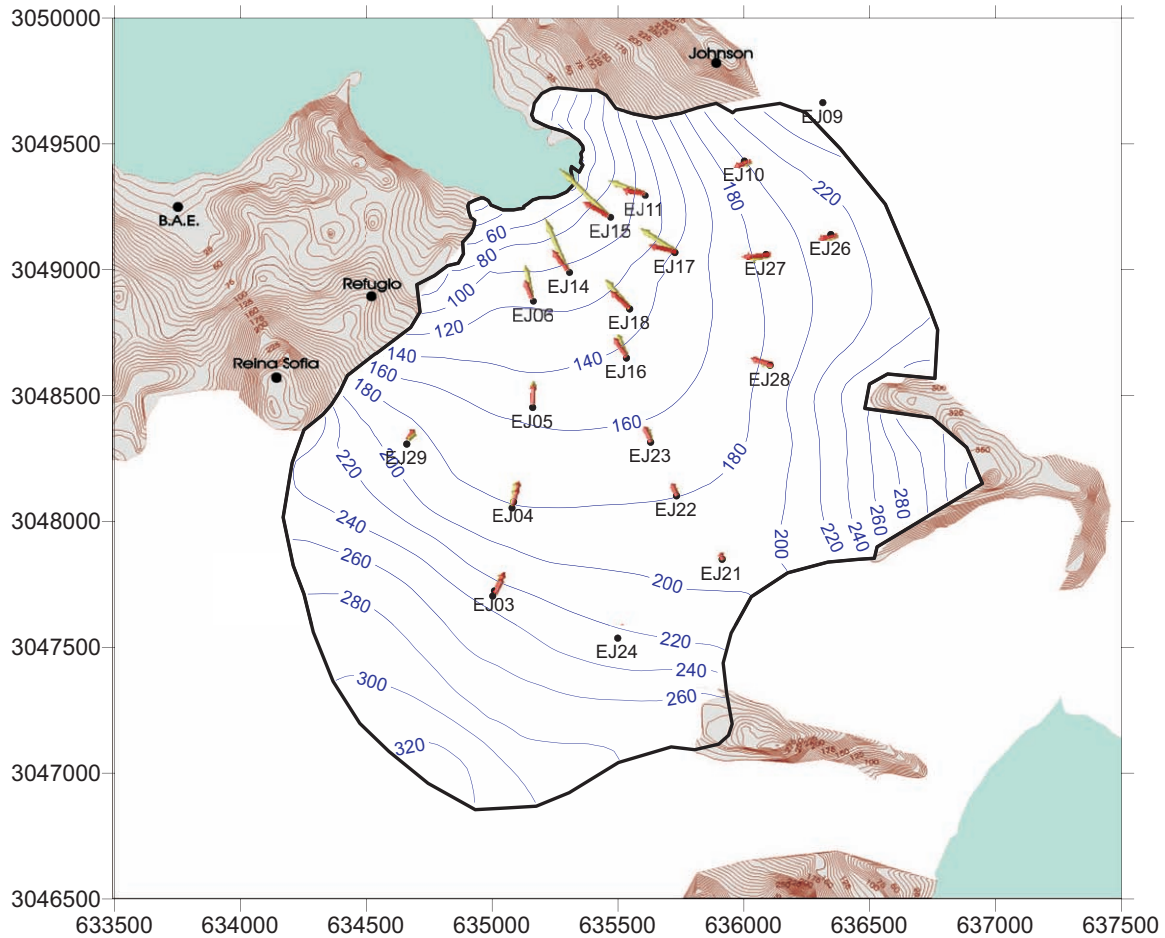


Figura 8: Comparación entre Velocidades observadas y calculadas en la superficie del glaciar para un valor de K constante a lo largo de todo el glaciar

resultados del modelo y las observaciones experimentales del campo de velocidades, de $0,23 \text{ MPa } a^{1/3}$, muestra un buen acuerdo con los obtenidos por Martín [14] para este mismo glaciar (pero usando un modelo que no incluía el frente de calving), de $0,20\text{-}0,22 \text{ MPa } a^{1/3}$, y el valor de $0,20 \text{ MPa } a^{1/3}$ obtenido por Hanson [10] para Storglaciären (Suecia). Cabría esperar valores ligeramente menores de B para un glaciar templado (e.g., de acuerdo con la relación de Lliboutry and Duval [13], $0,17 \text{ MPa } a^{1/3}$ para un contenido en agua de un $0,6\%$, que es el valor medio estimado para el Glaciar Johnsons [1]), lo que apoya la sugerencia del carácter politérmico de al menos ciertos glaciares de las Shetland del Sur [15], aunque en el caso del glaciar Johnsons la proporción de hielo templado sea mayoritaria.

2. El campo de velocidades correspondiente a la elección óptima de los parámetros libres B y K del modelo, usando una ley de deslizamiento de tipo Weertman con parámetro K constante para todo el glaciar, no proporciona una representación

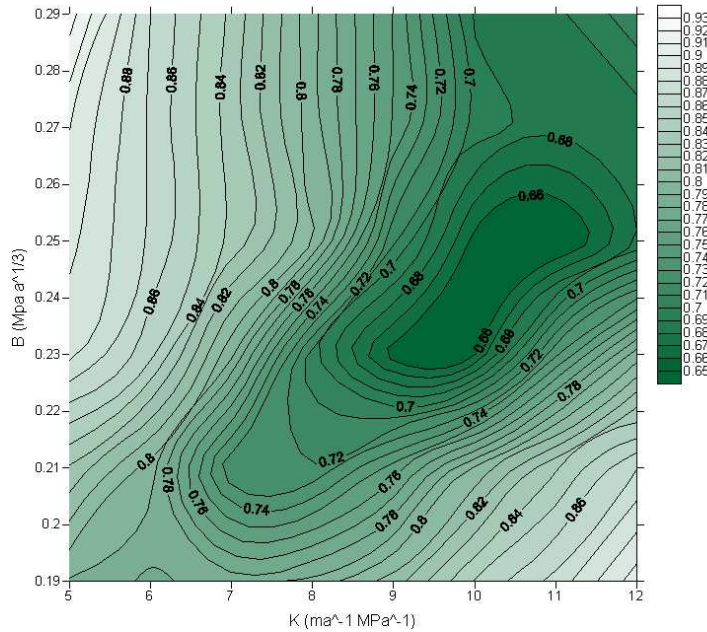


Figura 9: Ajuste de los parámetros B y K en el modelo del glaciar Johnsons con valores diferentes de K en la zona próxima al frente glaciar para minimizar las diferencias entre las velocidades calculadas y las observadas.

adecuada de las velocidades observadas experimentalmente en la zona cercana al frente glaciar, lo que nos lleva a los siguientes razonamientos y conclusiones:

- Podría pensarse que la discrepancia se debe a una inadecuada parametrización de la presión de agua basal en la ley de deslizamiento. Sin embargo, el hecho de que hayamos ensayado un amplio abanico de opciones para esta última, sin resultar una mejora significativa de los resultados, nos induce a pensar que se trata de un problema intrínseco a la ley de deslizamiento utilizada: la pendiente de la superficie del glaciar tiene un peso excesivo en el cálculo del deslizamiento basal, especialmente significativo en las zonas con fuerte pendiente, incluso (para estas últimas) si tomamos $p = 1$ en la ley de deslizamiento (lo que disminuye el efecto de la pendiente de la superficie).
- Deberíamos recordar que la ley de Weertman considera que el arrastre basal (basal drag) es la única fuerza que se opone a la tensión conductora (driving stress), por lo que su uso resulta especialmente adecuado para la modelización de mantos de hielo, cuya pendiente superficial es reducida, pero no para la de glaciares con geometría compleja y fuertes pendientes de la superficie. Pese a ello, sigue utilizándose ampliamente por constituir probablemente la mejor aproximación actualmente disponible.

3. El uso, en el glaciar Johnsons, de valores distintos del parámetro K de la ley de

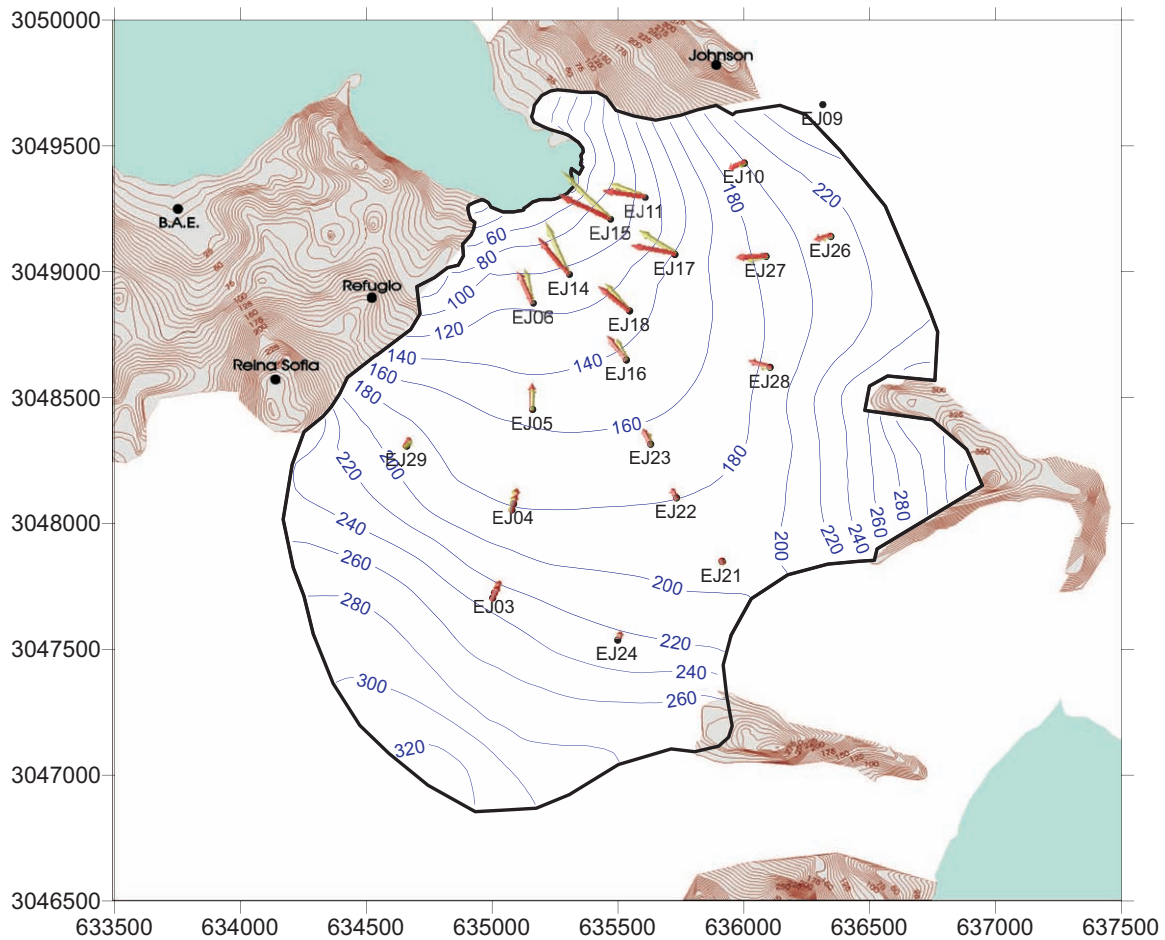


Figura 10: Comparación entre Velocidades observadas y calculadas en la superficie del glaciar para un valor de K multiplicado por un factor 3 en la zona del frente.

deslizamiento basal para la zona cercana al frente y para el resto del glaciar, ha permitido mejorar notablemente las discrepancias observación-modelo en la zona próxima al frente. Este valor distinto para zonas con geometría claramente diferenciada (pequeñas pendientes en la zona cercana al frente y fuertes pendientes en las partes altas del glaciar) compensa parcialmente, a nuestro juicio, las deficiencias implicadas por la aplicación de la ley de Weertman al Glaciar Johnsons.

4. La ley de producción de icebergs que hemos desarrollado, extensión tridimensional del criterio de penetración de grietas hasta el nivel del mar, estando definida la penetración en función del régimen extensional en la lengua glaciar más el posible relleno parcial de las grietas por agua de fusión superficial, proporciona unos resultados alentadores. Atribuimos su buen funcionamiento a:

- su carácter tridimensional, que permite una representación más adecuada del

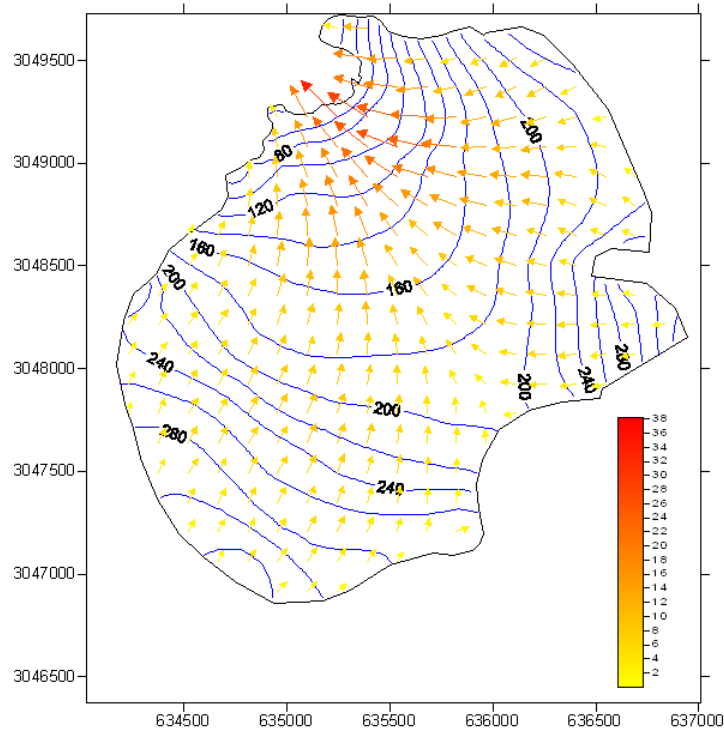


Figura 11: Velocidad horizontal para el Glaciar Johnsons resultado del modelo numérico para los valores $B = 0.23 \text{ MPa a}^{1/3}$ y $K = 1.0 \text{ ma}^{-1} \text{ MPa}^{-1}$, con K en la zona del frente multiplicado por un factor 3.

glaciar y los procesos físicos que en él se desarrollan,

- su utilización en combinación con un modelo dinámico que resuelve el sistema de Stokes completo.

Los resultados, para el glaciar Johnsons, obtenidos con este criterio de producción de icebergs considerando que una fracción de las grietas está rellena con agua de fusión superficial, concuerdan con las observaciones experimentales, pero no lo hacen si omitimos el agua de fusión. Este hecho pone de manifiesto la importancia de disponer de observaciones de este tipo de medidas. Desgraciadamente, la utilización efectiva de este tipo de leyes de producción de icebergs para la estimación de variaciones en la posición del frente glaciar está actualmente lastrada por las deficiencias mencionadas en las leyes de deslizamiento basal disponibles, lo que nos lleva a insistir en la importancia del desarrollo de representaciones más realistas y efectivas de los efectos basales.

8 AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido subvencionado por el proyecto CGL2005-05483, del Plan Nacional de I+D+i, y la Ayuda para Creación y Consolidación de Grupos de Investigación CCG07-

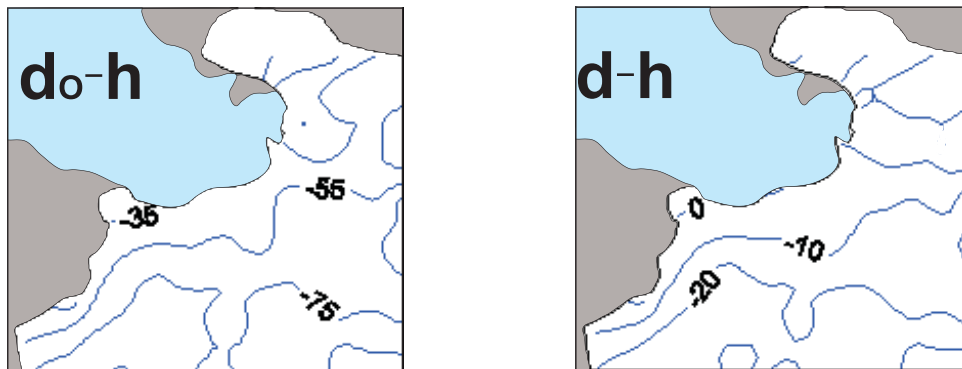


Figura 12: Representación del detalle para la zona del frente glaciar de la diferencia entre d (profundidad de las grietas) y h (altura del glaciar sobre el nivel del mar). En la figura (a) se representa $d_0 - h$ y en la (b) $d - h$.

UPM/000-3342, cofinanciada por la Comunidad de Madrid y la Universidad Politécnica de Madrid.

REFERENCIAS

- [1] B. Benjumea, Yu. Ya. Macheret, F.J. Navarro, and T. Teixidó. Estimation of water content in a temperate glacier from radar and seismic sounding data. *Ann. Glaciol.*, 37:317–324, 2003.
- [2] D.I. Benn, R.J. Hulton, and R.H. Mottram. Calving laws, sliding laws and the stability of tidewater glaciers. *Annals of Glaciology*, 46:126–130, 2007.
- [3] C.S. Brown, Meier M.F., and Post A. Calving speed of alaska tidewater glaciers, with application to columbia glacier. Technical Report 1258-C, U.S. Geol. Surv. Prof. Pap., 1982.
- [4] J. Calvet, J. Corbera, V. Casas, M. Pourchet, and R. Rodríguez. Estudio del sistema glaciar de la isla livingston. estado actual y futuro. In *Resúmenes del VI Simposio de Español de Estudios Antárticos*, 1996.
- [5] J. Calvet, J. Corbera, J. Enrique, J.M. Casas, and J.M. Vilaplana. Annual and seasonal velocities in johnsons glacier, livingston island, south shetland islands. In *Resúmenes del VI Simposio de Español de Estudios Antárticos*, 1996.
- [6] J. Calvet, V. Casas, J. Corbera, J. Enrique, C. Fernández de Gamboa, G. Furdada, V. Pala, R. Payas, J.M. Vilaplana, and L. Ximenis. Disminución del espesor del casquete glaciar de la isla livingston. *Geogaceta*, 24:63–66, 1998.

- [7] G. Furdada, M. Pourchet, and J.M. Vilaplana. Study of johnsons glacier (livingston island, antarctica) by means of shallow ice cores and their tephra and by analisis of 137cs contents. *Acta Geológica Hispánica*, 34:391–401, 1999.
- [8] J.W. Glen. The creep of polycrystalline ice. *Proceedings of the Royal Society, Ser. A*, 228(1175):519–535, 1955.
- [9] J.W. Glen. The flow law of ice. A discusion of the assumptions made in glacier theory, their experimental foundations and consequences. *International Association of Scientific Hydrology*, 47:171–183, 1958.
- [10] B. Hanson. A fully three-dimensional finite-element model applied to velocities on storglaciären, norway. *J. Glaciol.*, 41:91–102, 1995.
- [11] E.C. Haresign. *Glacio-limnological Interactions at Lake-calving Glaciers*. PhD thesis, University of St. Andrews., 2004.
- [12] R. LeB. Hooke. Flow law for polycrystalline ice in glaciers: Comparison of theoretical predictions, laboratory data and field measurements. *Rev. Geophys. Space Phys.*, 19:664–672, 1981.
- [13] L. Lliboutry and P. Duval. Various isotropic and anisotropic ices found in glaciers and polar ice caps and their corresponding rheologies. *Annales Geophysicae*, 3:207–224, 1985.
- [14] C. Martín, F. Navarro, J. Otero, M. L. Cuadrado, and M. I. Corcuera. Three-dimensional modelling of the dynamics of johnsons glacier (livingston island, antarctica). *Annals of Glaciology*, 39:1–8, 2004.
- [15] F.J. Navarro, J. Otero, Yu. Ya. Macheret, E.V. Vasilenko, J.J. Lapazaran, A.P. Ahlström, and F. Machío. Radioglaciological studies on hurd peninsula glaciers, livingston island, antarctica. *Annals of Glaciology*, 50 (51):17–24, 2009.
- [16] J.F. Nye. The distribution of stress and velocity in glaciers and ice-sheets. *Proceedings of the Royal Society, Ser. A*, 239(1216):113–133, 1957.
- [17] J. Otero. *Generación automática de malla de elementos finitos en modelos evolutivos de dinámica de glaciares*. PhD thesis, ETSI de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Madrid, 2008.
- [18] M.S. Pelto and C.R. Warren. Relationship between tidewater glacier calving velocity and water depth at the calving front. *Annals of Glaciology*, 15:115–118, 1991.
- [19] A. Quarteroni and A. Valli. *Numerical approximation of partial differential equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1 edition, 1994.

- [20] C. J. van der Veen. Tidewater calving. *Journal of Glaciology*, 42(141):375–385, 1996.
- [21] A. Vieli, M. Funk, and H. Blatter. Tidewater glaciers: frontal flow acceleration and basal sliding. *Annals of Glaciology*, 31:217–221, 2000.
- [22] A. Vieli, M. Funk, and H. Blatter. Flow dynamics of tidewater glaciers: a numerical modelling approach. *Journal of Glaciology*, 47(159):595–606, 2001.
- [23] A. Vieli, J. Jania, and L. Kolondra. The retreat of a tidewater glacier: observations and model calculations on Hansbreen, Spitsbergen. *Journal of Glaciology*, 48(163):592–600, 2002.
- [24] J. Weertman. Creep of ice. In S.J. Jones y L.W. Gold (Eds.) E. Whalley, editor, *Physics and Chemistry of ice*, pages 320–337. Royal Society of Canada, Ottawa, 1973.
- [25] L. Ximenis. *Dinámica de la Glacera Johnsons (Livingston, Shetland del Sur, Antártida)*. PhD thesis, Universidad de Barcelona, 2001.