CÓNICAS Y OTROS LUGARES GEOMÉTRICOS

Alfonsa García López

Universidad Politécnica de Madrid

1. Introducción

Las cónicas, curvas que se obtienen como intersección de un plano con una superficie cónica son importantes por su presencia en la vida cotidiana:

La primera ley de Kepler sobre el movimiento de los planetas dice que estos siguen órbitas elípticas.

La trayectoria que describe un móvil que es lanzado con una cierta velocidad inicial es una parábola.

Si se recibe luz de una fuente lejana en un espejo parabólico, la luz reflejada por el espejo se concentra en el foco de la parábola. Esta propiedad se usa para el diseño de radares y antenas parabólicas.

La proyección en perspectiva caballera de una circunferencia sobre el plano OZY es una elipse.

Parece pues lógico que el estudio de este tipo de curvas tenga sitio reservado en la enseñanza secundaria y el bachillerato. Los programas oficiales incluyen conceptos o uso de cónicas al menos en las asignaturas de Matemáticas, Dibujo y Física. Si bien el tratamiento, los métodos y la utilización de esstas curvas es bien diferente en cada una de estas asignaturas, hay un pretensión común: que los estudiantes adquieran la capacidad de resolver problemas y entiendan la idea de lugar geométrico.

Adquirir competencias y capacidad de resolución de problemas es más importante que acumular información y establecer conexiones entre conceptos que se ven en asignaturas diferentes ayuda a adquirir esta capacidad.

Para muchos matemáticos, a lo largo de la historia, el estudio de las propiedades de las cónicas es una de las partes más bellas de la matemática, con resultados de los que hacen cuestionarse si la matemática es “invención” o “descubrimiento”.

En este trabajo hablaremos un poco sobre cómo usar ordenador y un sistema informático de cálculo matemático para dibujar cónicas y otros lugares geométricos y estudiar sus porpiedades. Nos detendremos unn poco en la cicloide, una curva con múltiples propiedades.

2. Un poco de historia de las cónicas

Hablar de la historia de las cónicas es hablar sobre todo de Apolonio de Perga (262-180 A.C.), genio de la matemática griega que, aunque menos conocido que Euclides y Arquímedes, comparte con ellos el protagonismo matemático en el periodo helenístico. Apolonio representa el virtuosismo geométrico por excelencia, no en vano fue llamado “El geómetra de la antigüedad”.

La época histórica de Apolonio, corresponde al desmembramiento del imperio de Alejandro Magno. Del mismo modo, el conocimiento, unitario hasta entonces, se empieza a fragmentar y se produce un cierto triunfo de la especialización. La vida intelectual de la época gira en torno a la Biblioteca y al Museo de Alejandría. Este centro de generación y transmisión del conocimiento disponía de instrumentos astronómicos, de un laboratorio de anatomía y de un jardín botánico y zoológico. Se puede decir que la actividad del Museo significó el nacimiento de la investigación colectiva organizada.

Si bien el descubrimiento de las cónicas se atribuye al matemático griego Menecmo, que vivió hacia el año 350 A.C., y cabe citar en relación, con su estudio, algunos otros nombres notables (como los propios Euclides y Arquímedes), Apolonio organiza todo lo que se sabía hasta entonces, lo completa con sus propias aportaciones y profundiza mucho más. Su obra maestra “*Las Cónicas*” consta de ocho libros, los cuatro primeros constituyen una introducción elemental y recogen todos los resultados conocidos hasta entonces, a partir del quinto contienen aportaciones del propio Apolonio.

Miguel de Guzmán, en la sección dedicada a Apolonio de [8], sugiere, en términos actuales, el siguiente índice de la obra:

I. *Modos de obtención y propiedades fundamentales de las cónicas.*
II. *Diámetros, ejes y asíntotas.*
III. *Teoremas notables. Propiedades de los focos.*
IV. *Número de puntos de intersección de las cónicas.*
V. *Segmentos de máxima y mínima distancia. Normal, evoluta, centro de curvatura.*
VI. *Igualdad y semejanza de las secciones cónicas.*
VII. *Relaciones métricas sobre diámetros.*
VIII. *Se desconoce su contenido. (Tal vez problemas sobre diámetros conjugados.)*

En el primer libro, el propio Apolonio expone los motivos que le llevan a escribir la obra, explicando que escribió un primer borrador a petición de un geómetra llamado Naucrates. Más tarde, en Pérgamo completaría obra.

El lenguaje de Apolonio es, por supuesto un lenguaje sintético, utilizando los procedimientos pitagóricos. Sus resultados sin embargo se pueden enunciar y probar en términos de la geometría analítica. Resulta sorprendente que, sin esta herramienta, Apolonio sea capaz de introducir conceptos como normal a una curva, centro de curvatura, etc. y obtener tantos resultados.

En el contexto de los trabajos de perspectiva de Renacimiento y ante la aparición de nuevos problemas, surge la necesidad de recuperación de los concocimientos geométricos griegos.

La obra de Apolonio llega a Occidente a través de la matemática árabe. En 1629, comienzan a conocerse los primeros textos árabes de *“Las Cónicas”*. En 1675, Barrow (profesor de Newton en Cambridge) publica en Londres un manual de geometría que condensa los cuatro primeros libros de Apolonio. En 1710, Halley logra culminar el que había sido su sueño durante bastantes años y aparece la edición Príncipe, en latín y griego, de los siete libros conocidos.

Un avance importante en el desarrollo y estudio de las cónicas llegó en el siglo XVII, de la mano del filósofo y matemático R. Descartes, con la incorporación a la geometría del lenguaje algebraico, es decir con el nacimiento con de la geometría analítica. Gracias a esta potente herramienta, Descartes probó que todas las cónicas se pueden describir mediante ecuaciones de segundo grado y, unos años más tarde, J. Witt demostró que toda ecuación de segundo grado describe una cónica. Cabe citar también a Desargues, que estudió las secciones cónicas y los puntos del infinito y Pascal cuyo trabajo se concentra en el “*Essay pour las coniques”*, donde aparece el teorema que hoy lleva su nombre: Si se inscribe un hexágono en una cónica, los puntos de intersección de los pares de lados opuestos están alineados.

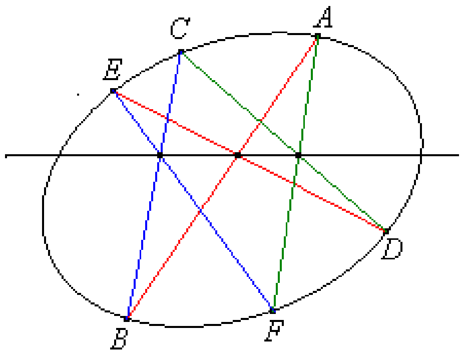

Figura 1

Posteriormente los geómetras se dividen en dos grupos, sintéticos y algebraicos, que disputan entre sí.

A mediados del siglo XIX tomaron fuerza las teorías de Klein sobre trasnformaciones, que dieron a la geometría proyectiva un papel central en el estudio de las cónicas. Para más información, ver [4] o P8.

3. Uso de CAS para determinar y dibujar lugares geométricos

Problemas de obtención de lugares geométricos aparecen en los programas de bachillerato, tanto en las asignaturas de matemáticas como en las de dibujo técnico. Si bien se suelen usar técnicas diferentes para abordarlos. En un caso, se pretende encontrar la ecuación que del conjunto de puntos que verifica una determinada propiedad y en el otro se trata de realizar la construcción geométrica, que da lugar a la representación gráfica de dicho conjunto.

Los sistemas de cálculo simbólico (Computer Algebra System o C.A.S.) como Maple, Derive o Mathematica aúnan capacidades gráficas y de cálculo algebraico, por lo que ofrecen una forma atractiva de determinar lugares geométricos gráfica y analíticamente, sin más que imponer la condición correspondiente a un punto arbitrario (x,y). Si la propiedad que define el lugar geométrico se puede expresar algebraicamente, simplificando se obtiene la ecuación y dibujando se obtiene la gráfica. Esta facilidad posibilita la experimentación y favorece la intuición al poder probar distintas situaciones. En problemas difíciciles, el ordenador nos puede ayudar en la realización de cálculos laboriosos y la experimentación nos facilita la elaboración de conjeturas (ver [9]).

En esta sección veremos algunos ejemplos que se pueden proponer en cursos de secundaria o bachillerato.

3.1 Problema: *Determinar el lugar geométrico de los puntos tales que la razón de las distancias a dos puntos fijos es constante.*

Dados dos puntos A y B, se trata de obtener los puntos P tales que $\dfrac{\text{dist}(P,A)}{\text{dist}(P,B)}=k$.

La condición anterior equivale a la ecuación implícita

$$(x-a_1)^2+(y-a_2)^2=k((x-b_1)^2+(y-b_2)^2) \qquad (1)$$

Simplificando esta expresión se obtiene la ecuación del lugar geométrico buscado, que se puede dibujar con el ordenador.

Para empezar a experimentar, vamos a trabajar con los puntos $A=(0,0)$ y $B=(1,0)$ (que se pueden cambiar) y vamos a dibujar con Maple la ecuación anterior para algunos valores de *k*.

Si $k=1$ se obtiene una recta. Como es natural, se trata de la mediatriz del segmento. Además la ecuación de la recta se obtiene automáticamente sin más que simplificar la expresión $dist(P,A)^2 - dist(P,B)^2 = 0$.

```
> simplify(x^2+y^2-((x-1)^2+(y)^2)=0);
```

$$2x-1=0$$

Veamos qué ocurre con otros valores de *k*. Por ejemplo vamos a dibujar la curva definida por la ecuación implícita (1) para $k=2$:

```
> plots[implicitplot](x^2+y^2=2*((x-1)^2+(y)^2),x=-1..5,y=-
4..2);
```

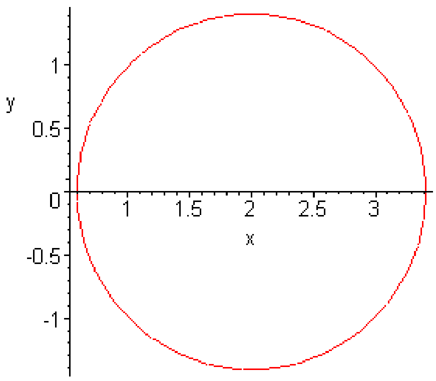

Figura 2

Hemos obtenido una circunferencia. Para determinar su centro y su radio, podemos simplificar la ecuación:

```
> simplify(x^2+y^2-2*((x-1)^2+(y)^2)=0);
```

$$-x^2-y^2+4x-2=0$$

A la vista de la ecuación se deduce que el centro es el punto (2,0) y el radio es $\sqrt{2}$. Se puede seguir experimentando con otros valores y llegar a la conclusión de que para todo $k \neq 1$ se obtiene una circunferencia denominada "*Circunferencia de Apolonio*", cuyo centro está sobre la recta AB y cuyo radio es $\sqrt{OA \cdot OB}$.

En P7, se presentan dos demostraciones de este resultado en términos de la geometría sintética. Para la demostración analítica, se puede obtener directamente la ecuación del lugar geométrico que es

$$x^2-2\,x\,a_1+a_1^{\,2}+y^2-2\,y\,a_2+a_2^{\,2}-k^2\,x^2+2\,k^2\,x\,b_1-k^2\,b_1^{\,2}-k^2\,y^2+2\,k^2\,y\,b_2-k^2\,b_2^{\,2}=0$$

Para facilitar la experimentación, el profesor puede hacer el siguiente procedimiento Maple, cuyos parámetros de entrada son los dos puntos y la razón de las distancias y cuya salida será la ecuación y la gráfica.

```
> Raz_dist:=proc(P,Q,k)
local distP, distQ, mx,my,Mx,My,lg,puntos,letras;
```

```
  distP:=sqrt((x-P[1])^2+(y-P[2])^2):
  distQ:=sqrt((x-Q[1])^2+(y-Q[2])^2):
  print(expand(distP^2-(k*distQ)^2)=0);
  mx:=min(P[1],Q[1]):
  my:=min(P[2],Q[2]):
  Mx:=max(P[1],Q[1]):
  My:=max(P[2],Q[2]):
  lg:=plots[implicitplot]
      (distP=k*distQ,x=mx-4..Mx+4,y=my-2..My+2,
numpoints=1000):
  puntos:=plot([P,Q], style=point,symbol=circle):
letras:=plots[textplot]({[P[1]+0.1,P[2], `P`],
[Q[1]+0.1,Q[2],`Q`]}):
plots[display](lg,letras,puntos, scaling= constrained)
end:
```

Vamos a pedir, por ejemplo, el lugar correspondiente a los puntos $A=(2,1)$ y $B=(-1,1)$, con $k=1/2$.

```
> Raz_dist([2,1],[-1,1],1/2);
```

$$\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{2}x+\frac{9}{2}+\frac{3}{4}y^2-\frac{3}{2}y=0$$

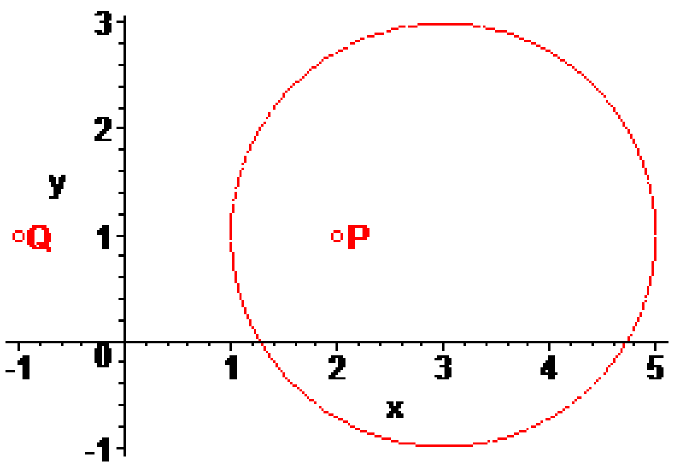

Figura 3

Comprobamos que se obtiene la circunferencia de centro (3,1) y radio 2.

3.2 Problema *Hallar el lugar geométrico de los vértices de las parábolas de la forma* $y=x^2+b\,x+1$ *para distintos valores de b.*

Este problema se puede poner en un curso de 4º de ESO, después de ver cómo obtener el vértice de una parábola.

Usando el CAS, podemos dibujar unas pocas de estas parábolas y determinar sus vértices.

Hacemos una lista con distintos valores de *b* y dibujamos las parábolas correspondientes:

```
> B:=[seq(j/2,j=-10..10)]:
> plot([seq(x^2+b*x+1,b=B)], x=-6..6,y=-4..10);
```

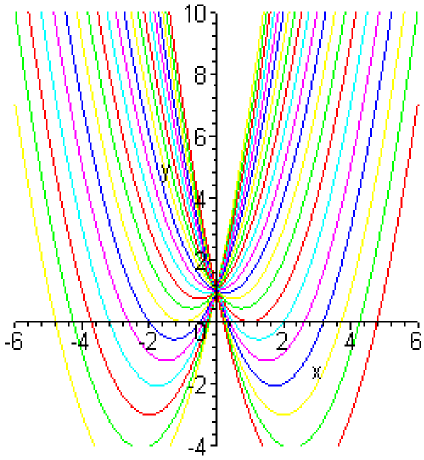

Figura 4

Ahora vamos a representar los vértices de estas parábolas:

```
> plot([seq([ -b/2, -b^2/4+1],b=B)], style=point);
```

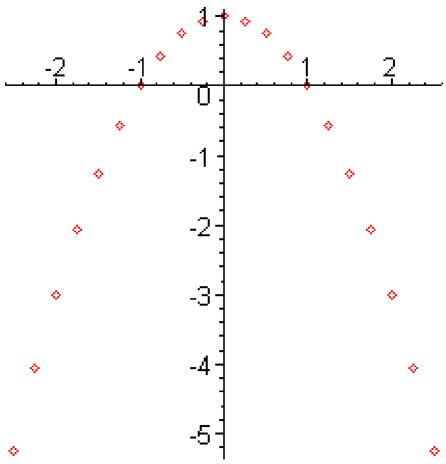

Figura 5

Vemos que se obtiene una parábola. Además, si los estudiantes han trabajado un poco con parábolas, la reconocerán rápidamente y sabrán escribir su ecuación y verificar gráficamente el resultado.

La demostración analítica es fácil: los vértices son de la forma ($-\frac{b}{2}, -\frac{b^2}{4}+1$). Si la abscisa es *x* la ordenada es $y = 1 - x^2$.

3.3 Problema: *Obtener el dibujo y la ecuación de la elipse a partir de la definición.*

La elipse se define como el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante.

Si situamos los focos en los puntos $(c,0)$, $(-c,0)$, podemos obtener el dibujo, sin más que pedir la gráfica de la expresión $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$, para valores concretos de *c* y *a*. Además podemos hacer manipulaciones simbólicas para obtener la ecuación reducida a partir de esta expresión.

3.4 Problema: *Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos que unen puntos de la circunferencia focal de una elipse con el otro foco.*

Empezamos viendo un caso concreto. Dibujamos una elipse, de focos (2,0) y (-2,0).

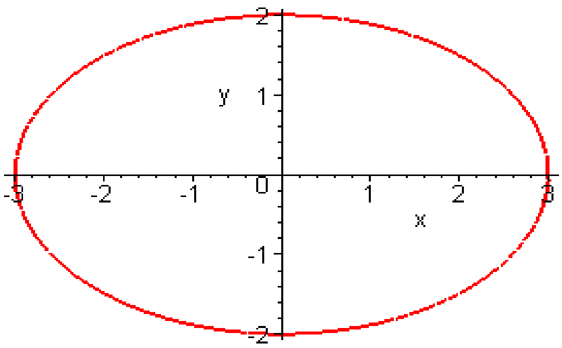

Figura 6

La circunferencia focal tiene su centro en uno de los focos y radio 2a. Por ejemplo la correspondiente al foco (2,0) es $(x-2)^2+y^2=36$ (ver figura 7).

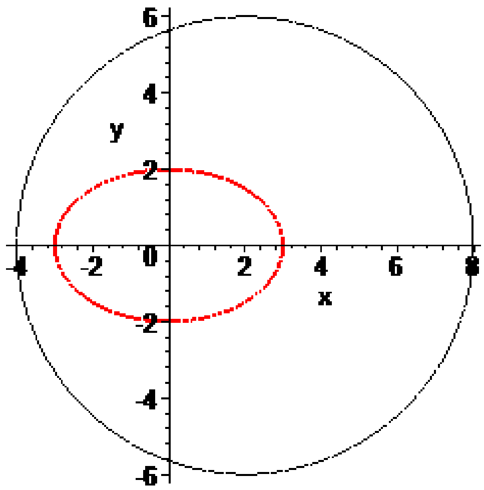

Figura 7

Para resolver el problema de modo experimental, generamos algunos puntos de la circunferencia (eligiendo *x* y despejando *y*) y dibujamos los segmentos que los unen con el otro foco y marcamos los puntos medios de estos segmentos (ver figura 8).

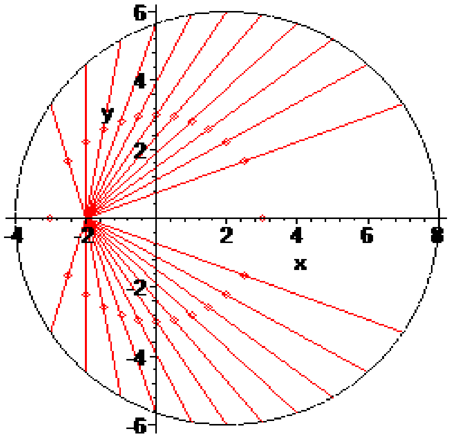

Figura 8

Parece que se obtiene la circunferencia de centro 0 y radio 3 (es decir la circunferencia principal de la elipse).

Esta propiedad se puede demostrar analíticamente: un punto de la circunferencia focal correspondiente al foco (c,0) es (x,y) tal que $(x-c)^2+y^2=4\,a^2$. El punto medio del segmento que lo une con el otro foco es $(\frac{x-c}{2}, \frac{y}{2})$. Para ver si este punto está en la circunferencia de centro 0 y radio a calculamos la suma de los cuadrados de sus coordenadas:

```
> ((x-c)/2)^2+y^2/4;
```

$$\left(\frac{x}{2}-\frac{c}{2}\right)^2+\frac{y^2}{4}$$

y al sustituir y^2 por el valor obtenido al despejarlo en la ecuación de la circunferencia focal se obtiene a^2.

```
> simplify(subs(y^2=4*a^2-(x-c)^2, %));
```

$$a^2$$

4. A veces es interesante cambiar el punto de vista

En ocasiones la solución de un problema geométrico en el plano es más facil si este problema se traslada al espacio y se resuelve allí. Veamos una forma muy elegante de resolución de un problema clásico, basada en ideas de Alberto Calderón y Miguel de Guzmán (ver [8]).

Se trata del *problema de Apolonio*, consistente en trazar una circunferencia tangente a tres circunferencias dadas mutuamente exteriores.

En el caso general, el problema tiene dos soluciones una circunferencia tangente exterior y otra tangente interior y la construcción sintética clásica, que se puede encontrar en los libros de Dibujo Técnico de bachillerato (ver por ejemplo [2]) es un tanto laboriosa.

La idea es cambiar el punto de vista y asociar a cada circunferencia del plano un punto del espacio, situado en la perpendicular al plano que pasa por el centro de la circunferencia a distancia igual al radio. Así identificamos cada circnferencia con un cono recto de apertura de 90º. Si damos una orientación a la circunfencia podemos elegir, de acuerdo con ella, el punto que queda por encima o por debajo del plano.

Si el plano es el suelo y la circunferencia está orientada positivamente tendremos un cono recto rectangular con el vértice hacia arriba situado a altura r. Si la circunferencia está orientada negativamente el cono tiene el vértice hacia abajo.

Podemos considerar que dos circunferencias tangentes tienen la misma orientación si una es interior a otra y orientación contraria en caso de tangente exterior.

Es fácil comprobar que dos circunferencias son tangentes si y sólo si los conos asociados tienen una generatiz común y el problema de hallar la tangente común a tres circunferencias se reduce a buscar un cono con generatriz común a cada uno de los otros 3.

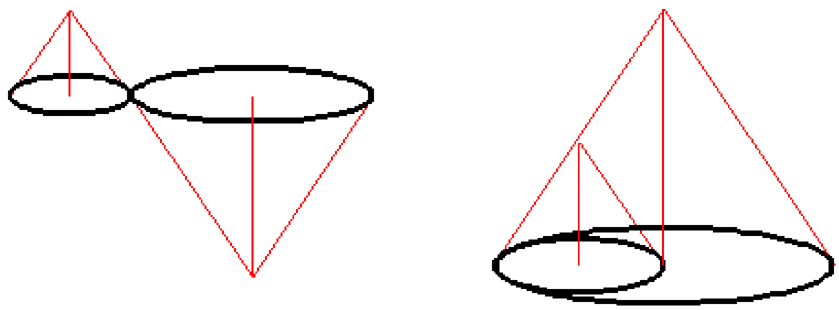

Figura 9

La resolución analítica del problema, con este punto de vista, es inmediata. Se consideran las ecuaciones de las tres circunferencias (podemos suponer una de ellas centrada en el origen)

$$\text{c1: } x^2 + y^2 = r^2$$
$$\text{c2: } (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 = s^2$$
$$\text{c3: } (x-b_1)^2 + (y-b_2)^2 = t^2$$

Los conos asociados son

$$\text{C1: } x^2 + y^2 = (z-r)^2$$
$$\text{C2: } (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 = (z-s)^2$$
$$\text{C3: } (x-b_1)^2 + (y-b_2)^2 = (z-t)^2$$

Al resolver el sistema formado por estas tres ecuaciones se obtienen dos puntos (p_1,p_2,p_3) y (q_1,q_2,q_3), la tercera coordenada en uno de ellos es negativa (el que corresponde a la tangente interior) y en el otro es positiva (el correspondiente a la tangente exterior). Las ecuaciones de las circunferencias tangentes son:

$$(x-p_1)^2 + (y-p_2)^2 = p_3^2$$
$$(x-b_1)^2 + (y-b_2)^2 = t^2$$

En la siguiente pantalla se muestra un ejemplo concreto llevado a cabo con Maple.

```
> cono1:=x^2+y^2-(z-1)^2=0:
> cono2:=(x-5)^2+(y-5)^2-(z-2)^2=0:
> cono3:=(x+3)^2+(y-4)^2-(z-1)^2=0:
> solve({cono1,cono2,cono3},{x,y,z});
```

$$\left\{z=\frac{-21}{8}, y=\frac{143}{40}, x=\frac{3}{5}\right\}, \left\{z=\frac{133}{24}, x=\frac{23}{15}, y=\frac{171}{40}\right\}$$

```
> tange1:=(x-3/5)^2+(y-143/40)^2 = (21/8)^2:
> tange2:=(x-23/15)^2+(y-171/40)^2 = (133/24)^2:
> solu:=plots[implicitplot]({tange1,tange2}, x=-6..8, y=-2..10, numpoints=
  2000, scaling=constrained, color=black, scaling=constrained):
> plots[display](enunciado,solu);
```

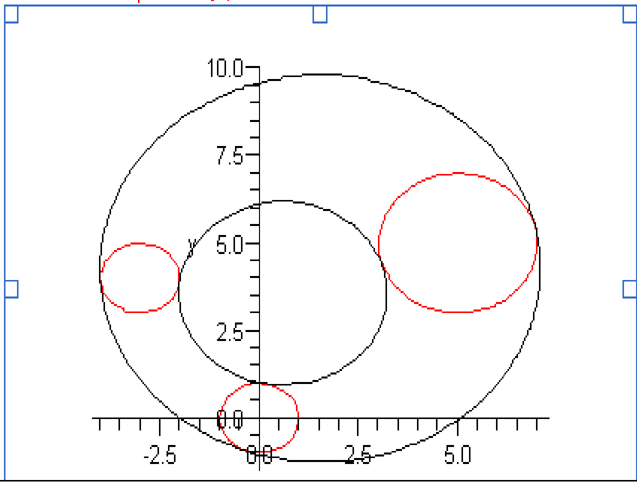

Figura 10

El problema admite diversas generalizaciones, o tal vez simplificaciones (ver P9), sustituyendo las circunferencias, todas o algunas de ellas, por otros objetos geométricos (puntos o rectas).

5. La cicloide

La cicloide se define como la trayectoria descrita por un punto de una circunferencia al moverse sobre una recta.

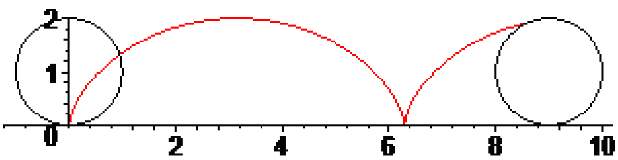

Figura 11

Esta curva, que se usa en arquitectura porque su arco tiene una gran resistencia estructural, ha sido estudiada a lo largo de la historia por numeros matemáticos y ha sido la solución de unos cuantos importantes problemas.

Galileo intentó encontrar la relación entre el área bajo un arco de cicloide y el círculo que la engendra. Se construyó las dos figuras en madera y las pesó. Encontró que el área bajo la cicloide era aproximadamente el triple del área del círculo y conjeturó que debía ser π veces. Pero algo después Roberval y Torricelli demostraron que la longitud de la cicloide, cuando la circunferencia da un giro completo, es ocho veces el radio y que el área bajo la curva es precisamente $3\pi r^2$.

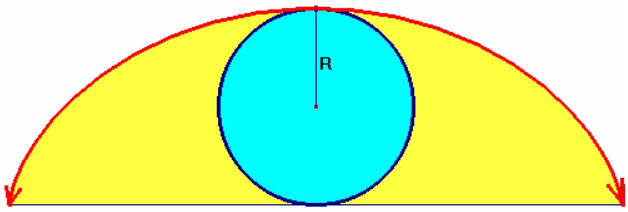

Figura 12

En el siglo XVII, muchos matemáticos se dedicaron a estudiar esta curva y hubo verdaderas disputas sobre quién había demostrado tal o cual propiedad. Tanto, que llegó a conocerse a la cicloide como la Helena de la gemetría. Por su belleza y por las disputas que generaba.

El problema de la braquistócrona fue propuesto por J. Bernouilli a Newton y consiste en determinar la curva a través de la cual el tiempo que tarda en caer un objeto de un punto a otro sea mínimo. Esta curva resultó ser un arco de cicloide.

Si partimos un arco de cicloide por la mitad, lo ponemos boca abajo y colocamos un hilo tenso fijado en el punto central, la trayectoria que describe al moverse el otro extremo del hilo es un aro de cicloide igual al de partida. Huygens descubrió que la cicloide es la curva isócrona: un péndulo que se mueva entre dos arcos de cicloide tendrá siempre el mismo periodo, independientemente de su amplitud. Y esto es debido a otra propiedad curiosa de la cicloide, descubierta por Huyggens. La cicloide es tautócrona: despreciando el rozamiento, dos bolas situadas en distintos puntos de un arco de cicloide (ver figura 13), llegarán simultáneamente al punto más bajo.

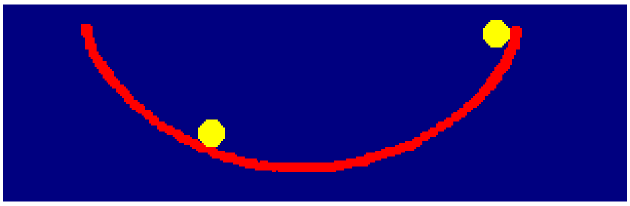

Figura 13

En [3] se presenta un bonito trabajo de un grupo de estudiantes de 4º de ESO en el que estudian la cicloide y determinan (sin usar cálculo integral) la longitud del arco y el área bajo la curva, cuando la circunferencia da un giro completo. La forma de abordar el problema es sustituir la circunferencia por un polígono regular y hacer un estudio (realizando los cálculos con ordenador) cuando el número de lados se hace muy grande.

Otras lecturas interesantes sobre la ciloide se pueden encontrar en [5], [10] o en P6.

5. Herramientas interactivas para el estudio de las cónicas

La belleza visual de las cónicas y las posibilidades de las nuevas tecnologías han hecho posible el diseño de un buen número de atractivas herramientas que se pueden encontrar en Internet para el estudio de las cónicas. Por ejemplo, en [1], en P2 o en P7 se pueden encontrar interesantes presentaciones, que hacen uso de programas de construcción geométrica.

Citaremos brevemente una herramienta de ámbito más general, que utiliza cálculo simbólico: El "*Curso Interactivo de Matemáticas con Maple*" (CIMM) [7], que es un libro electrónico, desarrollado en el I.C.E. de la Universidad Politécnica de Madrid, por un grupo de profesores de matemáticas. Este curso está concebido como una herramienta de aprendizaje individual para aquellos alumnos que acceden a nuestra Universidad con insuficientes conocimientos matemáticos. La filosofía que ha guiado su elaboración es la de proporcionar un material fácil de utilizar y de entorno amigable. Entre los temas incluidos en dicho curso se encuentra un tema de cónicas en el que se pretende que mediante experimentación y ejemplos modificables en modo interactivo se adquieran los conocimientos básicos de estas curvas. Se incluyen animaciones con construcciones de las cónicas, así como un buen número de ejercicios, con enlace a una página con las soluciones detalladas.

En la siguiente figura se muestra un ejemplo de pantalla, que contiene una animación.

Geometría de la hipérbola

A partir de dos puntos fijos F y F'del plano y un número K>0, se define la hipérbola de focos F y F' y constante K como el conjunto de puntos P del plano que verifican alguna de las igualdades siguientes:

dist(P,F)-dist(P,F')=K
dist(P,F')-dist(P,F)=K

La siguiente animación muestra la construcción de una hipérbola.

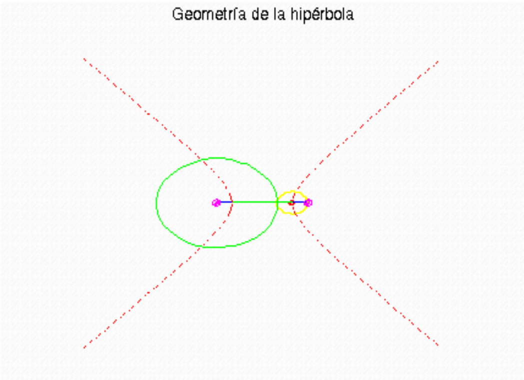

Figura 14

6. Referencias

1. ÁLVAREZ, C.A. "*Cónicas en geometría dinámica. Dinamización con el paquete RYC*". Grupo Pentagogía. Escuela Colombiana de ingenirería. 2005.

2. ÁLVAREZ, J.; CASADO, J.L.; GÓMEZ, M.D.: "*Dibujo técnico 2*" Bachillerato SM, Madrid 2003.
3. ARDAIZ, I. ; MARTÍNEZ, M.; NAVARRO, B.; ORTEGA, N. ROLDÁN, P.; SADA, M. "*Buscando a… la cicloide*". I.E.S. de Zizur Mayor (Navarra), 2004.
4. BOYER, C.B. *"Historia de la Matemática"*. Alianza Universidad,1986.
5. ESCRIBANO BENITO, J. JIMÉNEZ POMAR, M.P.; PÉREZ ÁLVAREZ, M.T. VIRTO VIRTO, J.A. *"Problemas clásicos de geometría desde un punto de vista actual"*. (Finalista del certamen Ciencia en Acción 6). Madrid, 2005.
6. GARCÍA, A.; MARTÍNEZ, A.; MIÑANO, R.: *"Nuevas tecnologías y enseñanza de las matemáticas"*. Síntesis. Madrid, 1995.
7. GARCÍA, A y otros. "*CIMM (Un curso interactivo de matemáticas con Maple)"*. Universidad Politécnica de Madrid, 2004.
8. GUZMÁN M. *"Pensamientos en torno al quehacer matemático"*. (CD distribuido por el autor.) Madrid, 2002.
9. GUZMÁN M. *"La experiencia de descubrir en Geometría"*. Nivola. Madrid, 2002.
10. GUZMÁN M. *"Aventuras matemáticas"*. Pirámide. Madrid, 2000.

Algunas páginas web interesantes

P1: http://www.eui. upm.es/~garcial (para conseguir el *CIMM)*
P2: http://descartes.cnice.mecd.es
P3: http://conicas.solomatematicas.com
P4: http://www.recursos.pnte.cfnavarra.es/~iesozizu/departamentos/matematicas/
(para conseguir la presentación Buscando .. .. a la Cicloide)

P5: http://roble.pntic.mec.es/~jarran2/cabriweb

P6: http://ciencianet.com/helena.html

P7: http://centros5.pntic.mec.es/ies.marques.de.santillana/matem/inddep.htm

P9: http://garciacapitan.auna.com/

P8: http://www.mat.ucm.es/~jesusr/expogp/