PROBLEMÁS GEOMÉTRICOS:

Una visión sintética y analítica

Alfonsa García López

Universidad Politécnica de Madrid

1. Introducción

En los tiempos que corren para la enseñanza, es más necesario que nunca luchar contra la falta de motivación, tanto del alumnado como del profesorado, con creatividad y afán de hacer cosas nuevas. Todos tenemos capacidad de innovar y, de entre las posibilidades que se nos ofrecen, tal vez las que más beneficios reportan sean aquellas que implican la colaboración entre profesores de distintas materias.

Hay que intentar despertar una inquietud intelectual en los estudiantes. Por ello, tal como J. B. Romero propone en [13], es necesario "*rescatar el papel humanista del profesor*".

Como profesora de matemáticas, y desde un punto de vista tal vez egoísta, creo que la colaboración con otras materias siempre repercute en una mejor formación en la que yo imparto, ya que establecer relaciones entre distintas representaciones de un mismo concepto produce un aprendizaje significativo.

En este trabajo, se presentan algunas reflexiones sobre posibilidades de acercamiento entre las asignaturas de Matemáticas y Dibujo Técnico en la enseñanza secundaria y bachillerato. Se trata de una pretensión de lanzar puentes desde la perspectiva de una profesora de universidad, que siempre se ha interesado por conocer los contenidos y la problemática de la enseñanza de Matemáticas en bachiller, pero cuyo conocimiento sobre la asignatura de Dibujo Técnico es escaso y basado básicamente en las referencias consultadas ([1],[12], P2,..).

Obviamente, hablaremos de geometría elemental, disciplina que ha sido objeto del estudio apasionado de muchos matemáticos, desde la antigüedad, y que fomenta sobre todo la intuición. Es la herramienta básica del dibujo y el origen de gran parte del conocimiento matemático.

Tal y como comenta M. J. Luelmo en [11] "*la enseñanza de la geometría, desde el punto de vista del dibujo y de las matemáticas, adolece de una falta de relación altamente empobrecedora*". Desde el dibujo, se trabajan una serie de construcciones geométricas, con regla y compás, que no aportan demasiado a la comprensión de conceptos y propiedades. Desde las matemáticas, los objetos geométricos se convierten en meras ecuaciones u otros artefactos algebraicos, soporte de propiedades, aparentemente no relacionadas con su proceso de construcción.

Los intentos de acercamiento entre ambas disciplinas suelen tropezar con la falta de tiempo, la rigidez de los programas y el recelo de muchos profesores. Por un lado por una falta de habilidad manual para el dibujo, muy frecuente entre los matemáticos, acompañada, en ocasiones, del desconocimiento u olvido de algoritmos geométricos elementales, y por el otro por la obvia dificultad y falta de interés de los profesores de dibujo por el tratamiento analítico de los problemas geométricos.

Por otra parte, la metodología y la forma de afrontar los problemas también son bastante diferentes. El profesor de dibujo conoce un gran abanico de métodos de construcción de objetos geométricos, pero no suele plantearse cuestiones tales como la verificación de los algoritmos utilizados y el porqué los objetos construidos satisfacen las propiedades deseadas. Para el matemático estas cuestiones son irrenunciables y la geometría analítica, con la posibilidad de algebrizar los resultados, es una herramienta potente de razonamiento y demostración, si se usa en estrecho contacto con la intuición gráfica.

2. El enfoque sintético-analítico

Al estudiante de primero de bachillerato, por ejemplo, se le presenta una serie de problemas geométricos, tales como obtener la mediatriz de un segmento, la paralela o perpendicular a una recta pasando por un punto, las medianas, alturas o bisectrices de un triángulo, demostrar determinadas propiedades, etc., que se resuelven de modo totalmente diferente en la clase de Dibujo Técnico y en la de Matemáticas. En la primera el objeto buscado se construye y en la segunda se determina su ecuación. Para el alumno con un poco de curiosidad es natural plantearse si realmente obtiene lo mismo con ambas estrategias y si es posible la resolución analítica del problema siguiendo los pasos del algoritmo de la geometría sintética. Tal vez en algún caso se pueda sentir tentado de ponerle ecuaciones a los objetos geométricos y trabajar con estas ecuaciones en paralelo, de tal suerte que la geometría analítica le proporcione demostraciones sencillas de los resultados.

Por ejemplo, en la asignatura de Dibujo, el estudiante ve que el arco capaz de 90º sobre un segmento AB es justamente la circunferencia que tiene por diámetro dicho segmento. En otras palabras, para cualquier punto P de la circunferencia de la figura 1 el triángulo APB es rectángulo en P.

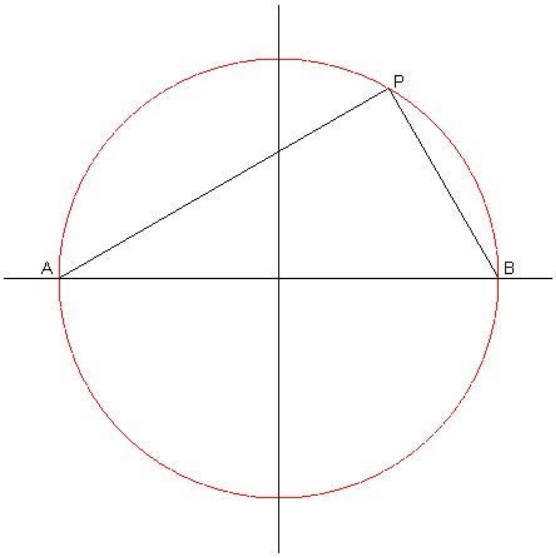

Figura 1

La demostración analítica de este resultado es bien sencilla. Si suponemos la circunferencia centrada en el origen, su ecuación será $x^2 + y^2 = a^2$ y las coordenadas de los puntos A y B serán $A = (-a,0)$, $B = (a,0)$. Por lo tanto dado el punto $P = (x, y)$ el producto escalar de los vectores $PA = (x + a, y)$ y $PB = (x - a, y)$ es $x^2 + y^2 - a^2$, que es cero, ya que P satisface la ecuación de la circunferencia.

Pero, en la mayoría de los casos, lo tedioso de los cálculos le hará desistir del intento de unificación. Es aquí donde el ordenador y un sistema de cálculo matemático pueden ser de utilidad.

Las posibilidades gráficas y de cálculo simbólico de los sistemas informáticos de cálculo matemático, como DERIVE, Maple u otros, muy posiblemente disponibles en los centros educativos de secundaria y bachillerato, permiten la experimentación, a bajo coste, con distintas estrategias para la resolución del problemas geométricos y pueden facilitar la tarea de abordar los problemas geométricos desde el punto de vista analítico, automatizando los cálculos y trasladando los resultados, de modo inmediato, a la pantalla gráfica. Y recíprocamente, los sistemas informáticos de dibujo geométrico, cada vez más presentes en ámbitos profesionales, también se sirven de los aspectos analíticos de los objetos geométricos para obtener las representaciones gráficas.

Es evidente que hay en el mercado programas de geometría interactiva como CABRI o ReglaYCompás, mucho más flexibles desde el punto de vista del manejo de elementos geométricos elementales (ver [3], [4], [5], [14], P3, P4, P5). Además, dado que los algoritmos, son programables el profesor puede realizar atractivas construcciones interactivas (ver P2).

Pero la disponibilidad del cálculo simbólico permite la demostración analítica de las conjeturas obtenidas a partir de la observación de la gráfica. Para ilustrar cómo esta forma de trabajar conduce al descubrimiento de interesantes resultados geométricos, se puede consultar [7]. El planteamiento de este trabajo es mucho mas modesto y se limitará a establecer un paralelismo entre el método sintético y analítico para la resolución con DERIVE de determinados problemas geométricos elementales.

Las herramientas básicas del dibujo geométrico son la regla y el compás y las operaciones básicas son trazar una recta conocidos dos de sus puntos y trazar una circunferencia conocido el centro y uno de sus puntos o el radio. Estas construcciones básicas se trasladan fácilmente al lenguaje algebraico que permite obtener las ecuaciones de la recta y la circunferencia en cuestión. Por ello todas las operaciones del dibujo geométrico tienen su traducción en la geometría analítica. Para la resolución de problemas en ocasiones son más eficaces los métodos de la geometría sintética, pero el soporte analítico permite, además de trasladar la construcción al ordenador, obteniendo dibujos precisos, garantizar la validez del resultado.

En lo que sigue, se propondrán ejemplos de actividades fácilmente realizables por estudiantes de bachillerato, sin conocimientos informáticos previos, sólo con un breve conocimiento del programa de cálculo simbólico elegido, que en los ejemplos presentados será DERIVE, pero que puede ser sustituido por cualquier otro.

Se trata básicamente de tener a mano el ordenador y usarlo en el momento preciso, como ayudante de dibujo y cálculo.

En DERIVE, es muy sencillo introducir puntos, sin más que dar sus coordenadas, podemos definir y dibujar un segmento o un triángulo dando las listas de puntos que los definen.

El lenguaje de DERIVE permite definir fácilmente funciones que reciban como parámetros los puntos y hagan cálculos con sus coordenadas. Así, por ejemplo, la función puntomedio(P,Q):=(P+Q)/2, calcula el punto medio del segmento PQ, la función recta(P,Q):=$(Q_1-P_1)\cdot(y-P_2)=(Q_2-P_2)\cdot(x-P_1)$ devuelve la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q, la función circunferencia(P,Q):= $(x-P_1)^2+(y-P_2)^2=|P-Q|^2$ proporciona la ecuación de la circunferencia de centro P y que pasa por Q.... También podemos definir funciones que midan distancias o ángulos, etc.

Con herramientas de este tipo, es posible hacer un seguimiento analítico y gráfico de cualquier proceso de construcción geométrica (por ejemplo, en la figura 2 se muestra la construcción de la mediatriz de un segmento). Cambiando los datos tantas veces como se quiera es posible obtener sin esfuerzo nuevos dibujos y las ecuaciones correspondientes, desarrollando el espíritu crítico y favoreciendo la intuición.

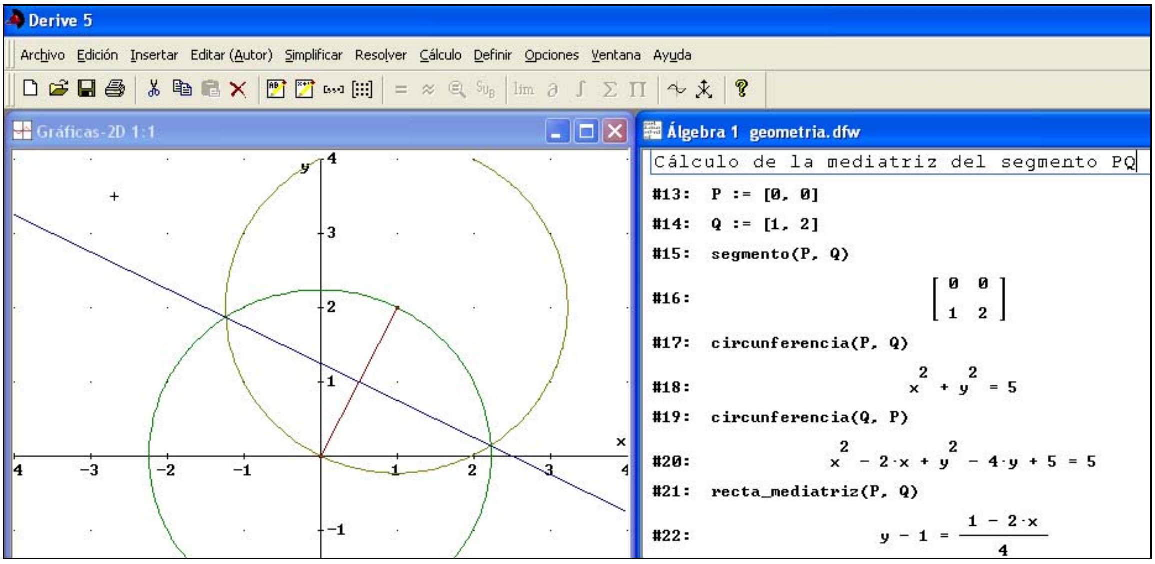

Figura 2

Con el proceso descrito en la figura 2 se comprueba que la construcción habitual da lugar efectivamente a la recta mediatriz, que se puede obtener, sin más que simplificar la expresión $(x-P_1)^2+(y-P_2)^2 = (x-Q_1)^2+(y-Q_2)^2$.

También es posible, para verificar la corrección de las construcciones, calcular ángulos, distancias o áreas, y hacer demostraciones analíticas, simplemente llevando a cabo el proceso de cálculo con datos simbólicos.

Vemos como se haría, con este procedimiento la demostración analítica del teorema de Vangnon, que establece que la figura que se obtiene al unir, en el orden dado, los puntos medios de un cuadrilátero convexo arbitrario es un paralelogramo y su área es la mitad de la del cuadrilátero original (ver figura 3)

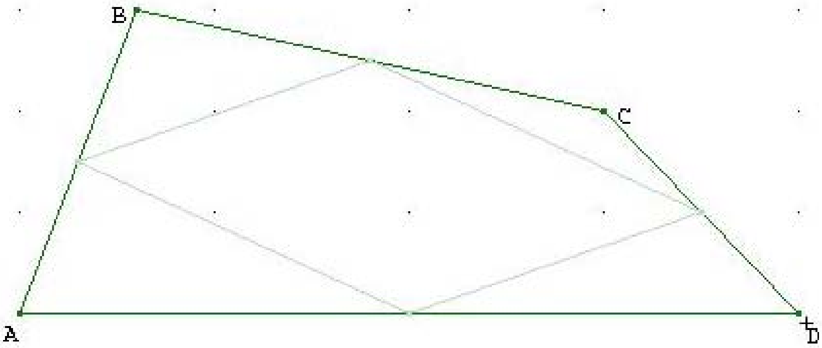

Figura 3

Podemos definir una función DERIVE que calcule el área de un triángulo en función de las coordenadas de los vértices por la fórmula

$$area\_triangulo(P,Q,R) := |det([[1,P_1,P_2],[1,Q_1,Q_2],[1,R_1,R_2]])|$$

El área de otras figuras geométricas se puede determinar dividiéndolas en triángulos.

Después, podemos definir puntos genéricos A,B,C,D, determinar simbólicamente el área del cuadrilátero, obtener los puntos medios, verificar que forman un paralelogramo, hallar el área de éste y comprobar que es la mitad de la expresión obtenida antes.

Ciertamente el teorema anterior, que hemos puesto como ejemplo para comentar las posibilidades simbólicas, no aparece en los programas de bachillerato. Pero la idea de verificar resultados se puede aplicar a cualquier construcción geométrica.

Por ejemplo, una construcción clásica en los libros de dibujo, para conseguir, a partir de un segmento AB, el segmento AF de modo que AF/AB es la razón áurea es la siguiente:

Dado AB se construye BM perpendicular y de igual longitud. La circunferencia centrada en el punto medio de AB y que pasa por M cortará a la recta que contiene al segmento AB en el punto F (ver figura 4).

Usando DERIVE, podemos partir de un segmento de longitud 1 y verificar que se obtiene uno de longitud $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. En general, se puede demostrar que la construcción es correcta usando Teorema de Pitágoras.

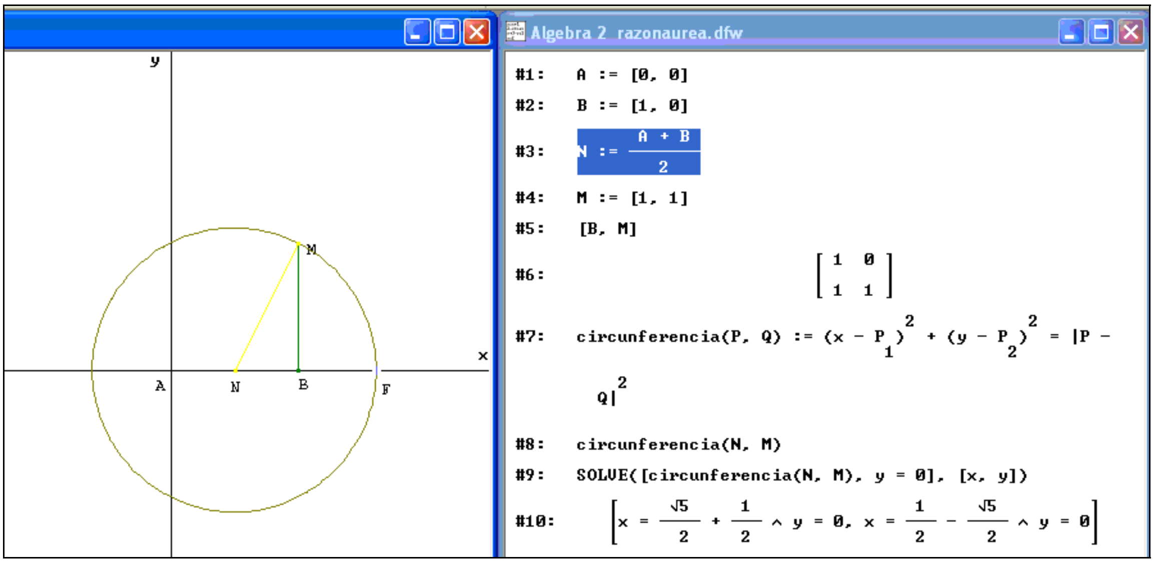

Figura 4

3. Una caja de herramientas

Siguiendo la idea propuesta por Miguel de Guzmán en [7] se puede ir construyendo una "*caja de herramientas*" que contenga las definiciones en DERIVE de las funciones que llevan a cabo las operaciones geométricas elementales.

Algunas herramientas básicas podrían ser funciones DERIVE para:

- dibujar un segmento o un triángulo,
- calcular la distancia entre dos puntos dados,
- calcular el ángulo de dos vectores,
- obtener el punto medio de P y Q dados
- obtener el punto simétrico de P respecto a Q
- calcular la ecuación de la recta que pasa por dos puntos,
- calcular una paralela o una perpendicular a una recta por un punto dado,
- calcular la distancia de un punto a una recta,
- calcular la paralela a una recta a una distancia dada,

- calcular la mediatriz de un segmento,
- calcular las medianas, las bisectrices o las alturas de un triángulo,
- calcular las ecuaciones de los lados de un triángulo,
- calcular el área de un triángulo a partir de las coordenadas de los vértices.
- obtener la ecuación de la circunferencia a partir del centro y el radio,
- obtener la ecuación de la circunferencia a partir del centro y uno de sus puntos,
- calcular la ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos

etc.

Para programar en DERIVE este tipo de funciones no hace falta ser experto, simplemente basta conocer los conceptos y escribir las ecuaciones correspondientes. Es un buen ejercicio para los estudiantes de bachillerato, ya que les ayuda a afianzar sus conocimientos y facilita la experimentación.

En P6 se pueden encontrar las definiciones de algunas de estas y otras funciones.

Cada vez que en la resolución de un problema tengamos que llevar a cabo una construcción típica, guardaremos la función correspondiente en la caja de herramientas.

4. Jugando con los triángulos

4.1 Obtención de un triángulo conocidas las medidas de sus lados.

La construcción de un triángulo a partir de las medidas de sus lados es elemental y muy fácilmente programable. Dadas las longitudes de los lados p,q,r (verificando que la suma de cualesquiera dos de ellas sea mayor que la tercera), podemos situar sobre el eje OX los puntos $A=(p,0)$, $B=(p+q,0)$. $C=(p+q+r,0)$. La base del triángulo será AB (que mide q) y el tercer vértice estará en la intersección de la circunferencia de centro A y radio p con la de centro B y radio r. Llevando a cabo este proceso con DERIVE, tendremos además las coordenadas de los vértices, que pueden ser de utilidad para construcciones posteriores.

4.2 Tercer vértice de un triángulo equilátero.

Dados dos puntos P y Q se trata de obtener R de modo que el triángulo PQR sea equilátero.

El punto R será la intersección de la circunferencia centrada en P, que pasa por Q con la circunferencia centrada en Q, que pasa por P.

La resolución del sistema $\{(x-P_1)^2+(y-P_2)^2=|P-Q|^2,\ (x-Q_1)^2+(y-Q_2)^2=|P-Q|^2\}$, que se puede hacer automáticamente con DERIVE, usando incluso datos simbólicos, permite obtener las coordenadas de las dos posibles soluciones para R.

4.3 Puntos notables de un triángulo.

Con DERIVE es fácil determinar sintética y analíticamente los puntos notables de un riángulo PQR.

La demostración geométrica de que las tres mediatrices se cortan en un punto es inmediata. El punto de corte de la mediatriz del lado p con la de lado q equidista Q y R y también Q y P, luego equidista de P y Q y pertenece también la otra mediatriz. Este punto se llama circuncentro y obviamente es el centro de la circunferencia circunscrita. Determinar analíticamente sus coordenadas requiere un sencillo cálculo algebraico, consistente en la resolución del sistema, que se puede hacer automáticamente con DERIVE.

Para demostrar que las alturas se cortan (en el ortocentro), lo más fácil es trazar por cada vértice una paralela al lado opuesto, las alturas del triángulo original son las mediatrices del nuevo.

Respecto al baricentro, en la siguiente pantalla se muestra su construcción para un triángulo concreto y a continuación la obtención simbólica, de modo automático de sus coordenadas.

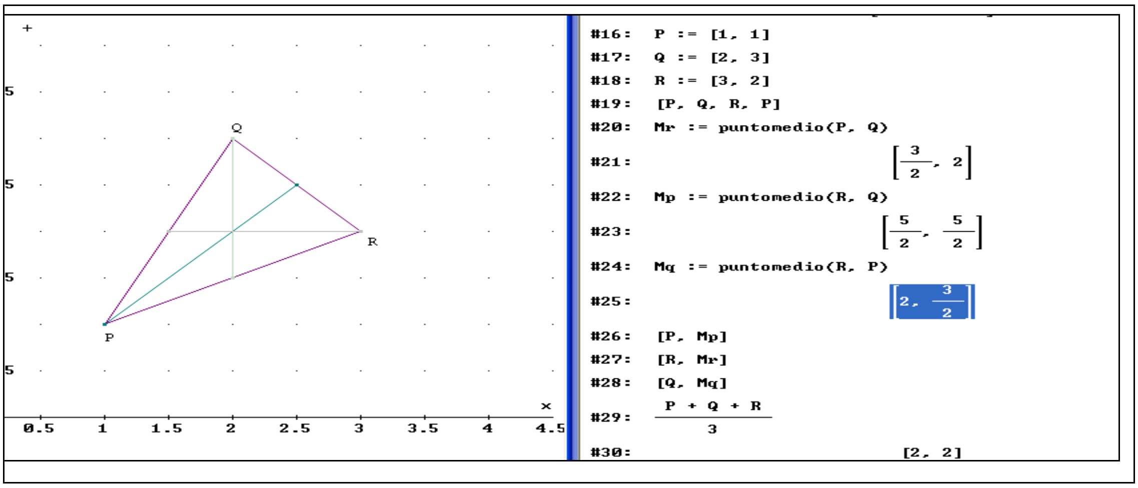

Figura 5

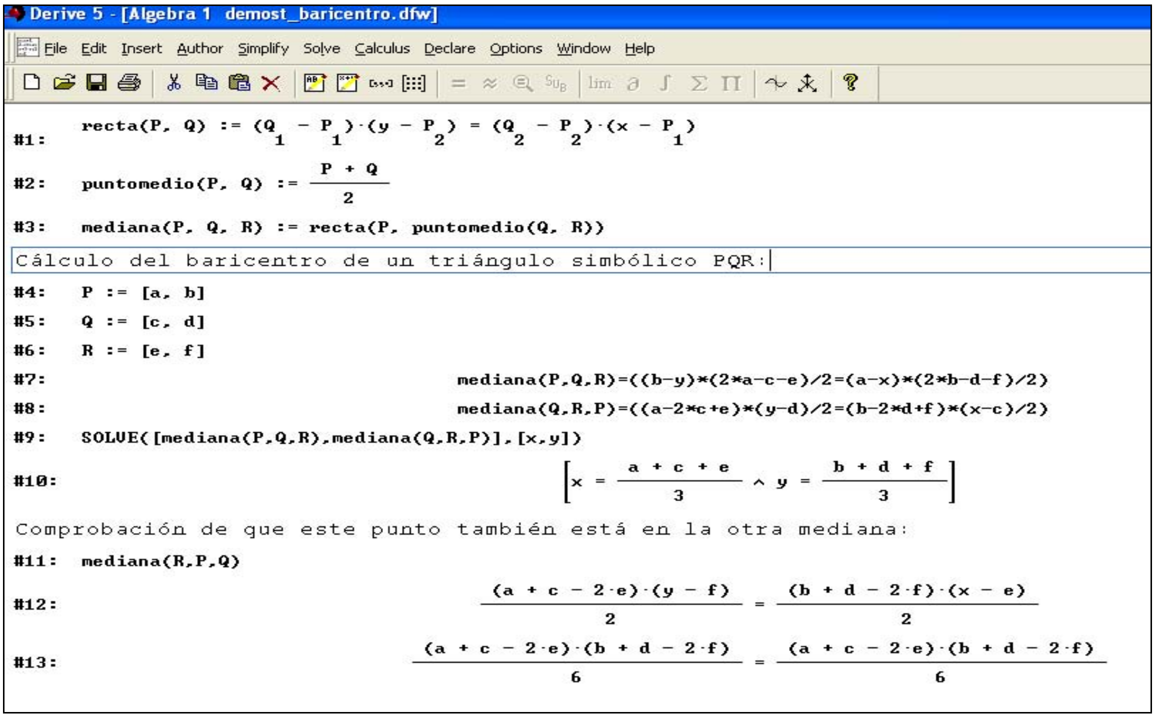

Figura 6

También se puede demostrar, de modo análogo, que el incentro (punto de corte de las bisectrices) es el centro de la circunferencia inscrita (ver por ejemplo la sección de triángulos de P1). Como curiosidad, se les puede pedir a los estudiantes que verifiquen que en cada vértice de un triángulo la bisectriz está entre la mediana y la altura.

5. Construcción de polígonos regulares

Un polígono regular es aquél cuyos lados y ángulos son todos iguales. Ya hemos visto en el epígrafe anterior cómo construir analítica y geométricamente un triángulo equilátero a partir de un lado. Ahora veremos otros polígonos.

5.1 *Construcción de un cuadrado conocido el lado*

El lado es el segmento AB.

1. Se dibuja una circunferencia cuyo diámetro sea AB
2. Se hace la mediatriz del segmento AB y se elige uno de los puntos de intersección con la circunferencia, O.
3. Se hallan los simétricos de A y B respecto de O y esos son los otros dos vértices del cuadrado.

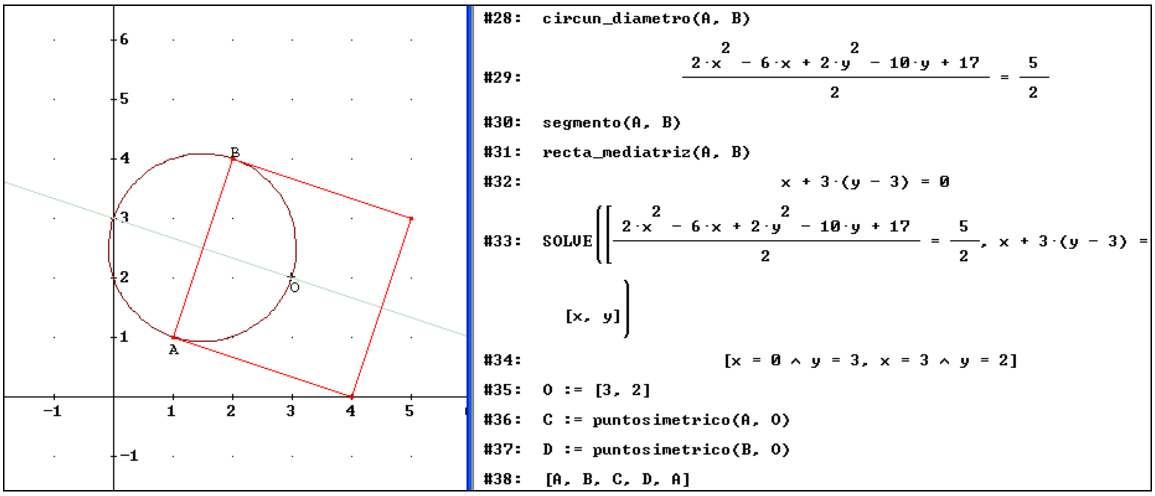

Figura 7

4.2 Construcción del pentágono regular a partir de un lado

Durero, en su recopilación de métodos de construcción de polígonos, propone el siguiente método (que aun se utiliza en ocasiones) de construcción de un pentágono supuestamente regular.

La construcción (ver figura 8) se hace sobre un segmento AB (lado del pentágono) y se basa en el trazado de varias circunferencias, todas de radio igual al lado.

1. Se trazan dos circunferencias de radio AB con centros respectivos A y B y se toma el punto radio H de la intersección de ambas.
2. Se traza la mediatriz del segmento AB y la circunferencia de centro H. Se marcan los puntos M y N, de la intersección de esta circunferencia con la mediatriz y con la circunferencia de centro B respectivamente.

3. Se traza la recta que pasa por M y N y se marca el punto E (intersección de dicha recta con la circunferencia centrada en A). Este punto es un vértice del pentágono.
4. Se traza la circunferencia de centro E para obtener el vértice D como intersección de ésta con la mediatriz.
5. Se traza y la circunferencia de centro D para construir el punto C.

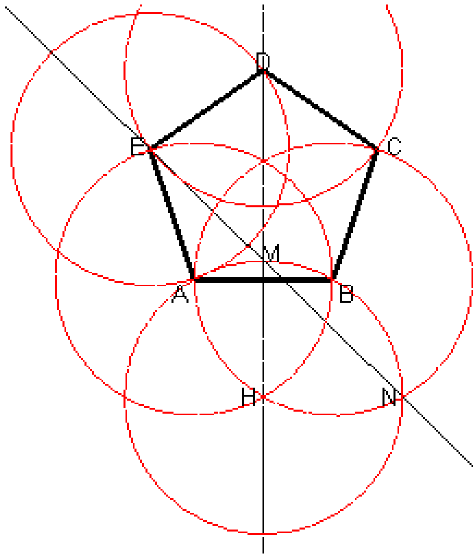

Figura 8

Si se lleva a cabo la comprobación analítica de este algoritmo, usando un sistema de cálculo matemático, que permite, en cualquier momento, llevar el control de la situación, no sólo gráficamente, sino también analítica y numéricamente, se comprueba que el pentágono construido no es regular. Aunque los cinco lados son iguales no lo son los ángulos y en consecuencia tampoco las diagonales. (Esto no podría ocurrir en un triángulo que es una figura rígida, si los lados de un triángulo son iguales, los ángulos también deben serlo.)

Una construcción, cuya corrección se puede probar analíticamente, bastante elegante del pentágono regular, partiendo de uno de sus lados AB es la que hace uso de que la razón entre la diagonal del pentágono regular y un lado es precisamente la razón áurea. Así conocido el lado se puede obtener la distancia de la diagonal y se pueden construir sendas circunferencias centradas respectivamente en A y B y cuyo radio sea la diagonal, el vértice D estará en la intersección de dichas circunferencias. Una vez conocido D y el lado se pueden obtener los otros dos vértices (ver figura 9).

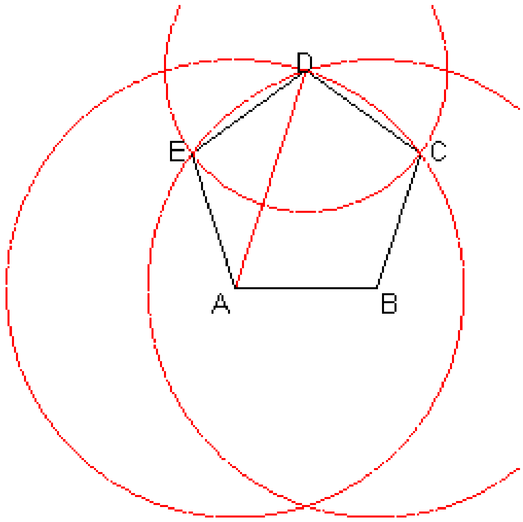

Figura 9

4.2 Polígono regular de n lados

Sabemos que no es posible construir con regla y compás un polígono regular de n lados para n arbitrario. Gauss demostró en su "*Disquisitiones arithmeticae*" que "*Para poder seccionar geométricamente el círculo en n partes iguales… se requiere que n no contenga ningún factor primo impar que no sea de la forma* 2^m+1 *ni tampoco contenga ningún factor primo de esa forma más de una vez*". Por ejemplo, con $n<20$ solo se puede conseguir para polígonos de 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16 y 17 lados. Las construcciones correspondientes se pueden ver en P4.

Los números complejos tienen una importante aplicación geométrica. Multiplicar por un número de módulo 1 y argumento α, equivale a un giro, de centro el origen y de ángulo α. Por lo tanto, se pueden construir automáticamente polígonos regulares centrados en el origen sin más que partir de un vértice cualquiera B y multiplicando el número complejo B_1+iB_2 por $z=\cos(2\pi/n)+i\sin(2\pi/n)$ se obtienen las coordenadas del siguiente vértice, repitiendo el proceso se obtienen los restantes vértices del polígono regular de n lados.

En la siguiente pantalla de DERIVE se muestra una función que, usando números complejos, devuelve las coordenadas de los vértices de un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia de radio *r*.

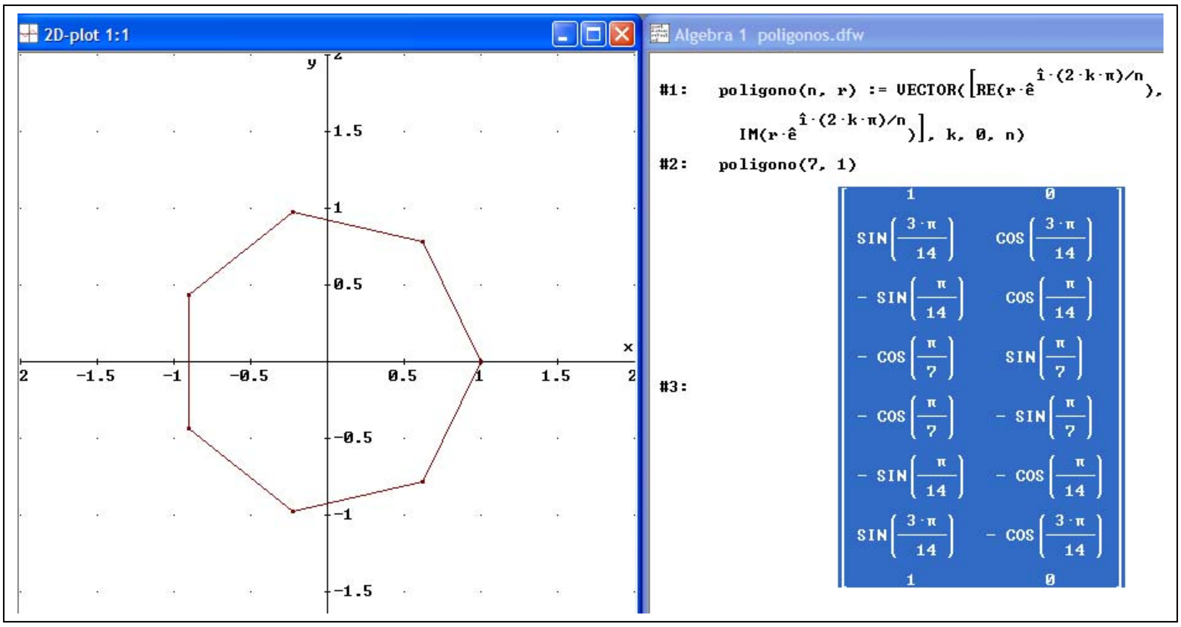

Figura 10

5. Proyectos para el aula

Las programaciones oficiales son a veces un corsé del que no es fácil salirse. Por otra parte, los medios informáticos son una realidad cada vez más presente, y con frecuencia infrautilizada, en los centros educativos. Una parte significativa de alumnos y profesores rechazan este tipo de actividades de carácter interdisciplinario y con uso de tecnología porque les supone un esfuerzo adicional. Pero suele ocurrir que el profesor entusiasta siempre encuentra un grupo de estudiantes dispuestos a llevarlas a cabo.

Antes de inventar nada nuevo podemos hacer referencia a experiencias ya realizadas y que se pueden adaptar al enfoque sintético analítico.

Por ejemplo en [2] se propone un recorrido por el módulo de geometría de la asignatura de Matemáticas de 1º de bachillerato a partir de una serie de actividades basadas en la construcción y estudio de la figura 11.

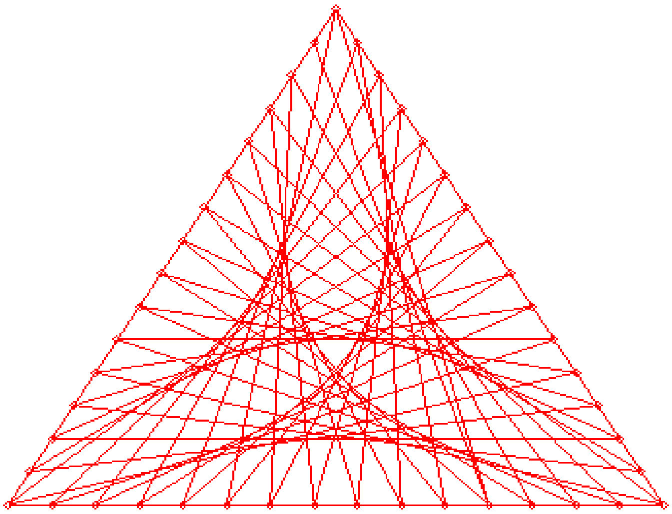

Figura 11

En [4] proponen actividades geométricas con ejemplos tomados de la vida cotidiana.

En [P5] se propone experimentar y trabajar con algunos resultados clásicos como demostrar que el baricentro, el circuncentro y el ortocentro de un triángulo están alineados (recta de Euler) o el teorema de Napoleón que dice que si en un triángulo cualquiera se construyen triángulos equiláteros sobre sus lados, los centros de dichos triángulos determinan un triángulo equilátero (ver figura 12).

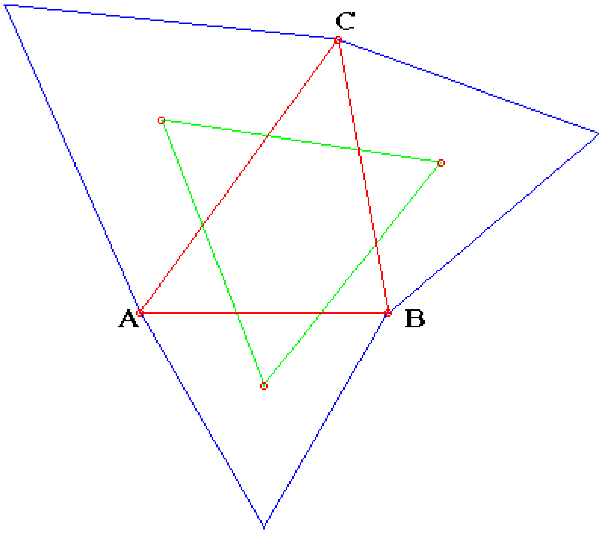

Figura 12

También proponen algunos problemas geométricos sencillos como "*la cuadratura del rectángulo*" (construcción de un cuadrado con área igual a la de un rectángulo dado).

Estos trabajos se pueden adaptar al enfoque aquí propuesto pidiendo a los estudiantes la comprobación analítica de los resultados.

En definitiva la geometría elemental es un campo de colaboración importante para los profesores de Matemáticas y Dibujo Técnico que pueden aprender juntos, como en la experiencia descrita en [11], o bien de forma individual, consultando bibliografía o con asignaturas impartidas a distancia como la presentada en [3].

6. Referencias

1. ÁLVAREZ, J.; CASADO, J.L.; GÓMEZ, M.D. "*Dibujo técnico 2*" Bachillerato SM. Madrid, 2003.
2. BRACHO LÓPEZ, R. "*Recreo matemático*". Primer premio de software educativo de la SAPM THALES, 2001.
3. CASARAVILLA, A.; GILSANZ, A. "*Geometría de ayer y de hoy. Tele-enseñanza, una alternativa docente*" SIECI . Orlando, 2006 .
4. ESCRIBANO BENITO, J. JIMÉNEZ POMAR, M.P.; PÉREZ ÁLVAREZ, M.T. VIRTO VIRTO, J.A. "*Problemas clásicos de geometría desde un punto de vista actual*". (Finalista del certamen Ciencia en Acción 6). Madrid, 2005.
5. GARCÍA, A.; MARTÍNEZ, A.; MIÑANO, R. "*Nuevas tecnologías y enseñanza de las matemáticas*". Síntesis, Madrid, 1995.
6. GUZMÁN M. "*Aventuras matemáticas*". Pirámide, Madrid, 2000.
7. GUZMÁN M. "*La experiencia de descubrir en Geometría*". Nivola, Madrid 2002.
8. GUZMÁN M. "*Pensamientos en torno al quehacer matemático*". (CD distribuido por el autor). Madrid, 2002.
9. KUTZLER, B. *"Mathematics on the PC. Introduction to DERIVE "*. SoftWaerehouse, 1994.
10. KUTZLER, B. *"Improving Mathematics Teaching with DERIVE "*. Chartwell-Bratt, 1997.
11. LUELMO, M. J. "*Construcciones geométricas: Una experiencia interdisciplinar de autoformación*". Epsilon, Rev. de la S.A.P.M. THALES, n.38 (1997) p.131-153.
12. RODRÍGUEZ DE ABAJO, F.J., ALVÁREZ BENGOA, V. *"Dibujo Técnico I" (1º de bachillerato).* Ed. Donostiarra, S. Sebastián, 2002.
13. ROMERO, J.B. "*La Experiencia y el Arte de descubrir en Geometría*" Bol. de la Scd. Puig Adam de profesores de Matemática, n. 71 (2005) p. 73-82.
14. SOTO, F. "*Geometría con Cabrí*". Universidad de Nariño (Colombia), 2000

Algunas páginas web de interés:

P1: http://descartes.cnice.mecd.es

P2: http://www.acarioja.com/dibujo/geométrico

P3: http://www.matematicas.net/paraiso/cabri.php?id=indice

P4: http://roble.pntic.mec.es/~jarran2/

P5: http://centros5.pntic.mec.es/ies.marques.de.santillana/matem

P6: http://www.rescarrus.com/eduma/cabriderive/cabriderive.htm