

---

# Escondiendo puntos en espirales e histogramas\*

A.L. Bajuelos<sup>1\*\*</sup>, S. Canales<sup>2</sup>, G. Hernández<sup>3</sup> y A.M. Martins<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Department of Mathematics & CEOC. University of Aveiro. 3810-193 Aveiro, Portugal. {leslie,mafalda.martins}@ua.pt

<sup>2</sup> Escuela Técnica Superior de Ingeniería, ICAI. Universidad Pontificia Comillas de Madrid. 28015 Madrid, Spain. scanales@dmc.ica.i.upcomillas.es

<sup>3</sup> Facultad de Informática. Universidad Politécnica de Madrid. Boadilla del Monte. 28660 Madrid, Spain. gregorio@fi.upm.es

**Resumen.** El problema de maximizar el número de vértices que no son visibles dos a dos en un polígono simple  $P$ , (MAXIMUM HIDDEN VERTEX SET) es un problema  $\mathcal{NP}$ -duro [6]. En este trabajo se resuelve el problema para dos tipos de polígonos: espirales e histogramas. Para los primeros se obtiene un algoritmo lineal que resuelve el problema **MHVS** y cotas para el máximo número  $h$  de vértices ocultos,  $\lceil \frac{r}{2} \rceil + 1 \leq h \leq r + 1$ , siendo  $r$  el número de vértices cóncavos del polígono espiral. Para polígonos histograma se demuestra que  $h = r - (p - 1)$ , siendo  $p$  el número de *lados fondo*.

**Palabras clave:** Visibilidad, puntos ocultos, espiral, histograma.

## 1 Introducción y definiciones

El problema original de *Galerías de Arte* pregunta sobre el número mínimo de guardias necesarios para vigilar el interior de un polígono simple  $P$  [7]. En este artículo analizamos el problema inverso: queremos esconder puntos en un polígono. Dado un polígono  $P$ , decimos que  $H$ ,  $H \subset P$ , es un conjunto de *puntos ocultos* en  $P$  si dos cualesquiera de ellos no se ven, es decir, si el segmento determinado por ellos tiene intersección no vacía con el exterior de  $P$ . El problema inicial en este campo es el siguiente: *Dado un polígono  $P$ , hallar un conjunto de puntos ocultos en  $P$  que sea de cardinal máximo.*

En 1989, Shermer comenzó el estudio del problema de ocultar puntos en polígonos. En [6] demostró que el problema inicial de ocultación es un problema  $\mathcal{NP}$ -duro, tanto para polígonos simples como para polígonos ortogonales. También obtuvo algunas cotas combinatorias para  $h$ , cardinal máximo de un conjunto de puntos ocultos. En particular demostró que: *Si  $P$  es un polígono*

---

\* Trabajo financiado por MEC-HP2005-0137.

\*\* Investigación financiada por CEOC con el *Programa POCTI*, FAC, cofinanciado por EC fondos FEDER.

con  $r$  vértices cóncavos entonces  $h \leq r + 1$ . (Recordemos que un vértice de un polígono simple  $P$  es cóncavo si su ángulo interior es mayor que  $\pi$  y convexo en caso contrario). Shermer demostró también que el tamaño máximo de un conjunto oculto de vértices en un polígono de  $n$  vértices es a lo más  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , siendo esta cota ajustada al igual que la anterior. Para polígonos ortogonales la cota superior es  $\frac{n-2}{2}$  tanto para conjunto de puntos ocultos como de vértices ocultos y esta cota se alcanza en los polígonos escalera.

Posteriormente Hurtado extendió la noción de ocultación de puntos a configuraciones geométricas en su tesis doctoral, [4]. Si  $F$  es una familia de conjuntos disjuntos del plano, un conjunto de puntos  $H$  se llama *conjunto oculto de  $F$*  si está contenido en el complemento de la unión de los elementos de  $F$  y el segmento que une dos puntos cualesquiera de  $H$  corta a algún conjunto de  $F$ . Si  $F$  es una familia de  $n$  segmentos disjuntos del plano, Hurtado, Serra y Urrutia prueban en [5] que  $F$  admite un conjunto de puntos ocultos de tamaño al menos  $\sqrt{n}$ . Y que existen conjuntos de segmentos que no admiten conjuntos de puntos ocultos de cardinal mayor que  $2\sqrt{n}$ . Hurtado también obtuvo resultados sobre ocultación de puntos en familias de triángulos, rectángulos y hexágonos.

Los problemas de ocultar o esconder objetos en configuraciones geométricas tienen aplicación, por ejemplo, en juegos de ordenador, donde cada jugador necesita buscar y coleccionar o destruir el mayor número de objetos posible. Otra aplicación, descrita por Eidenbenz en [2], es el reparto de parcelas en un territorio para la construcción de cabañas, en la que se utiliza la versión tridimensional del problema: ocultación de puntos en poliedros terreno.

Precisemos a continuación la notación que utilizaremos posteriormente.

**Problema 1.** Dado un polígono  $P$ , designamos por MAXIMUM HIDDEN SET (MHS), al problema que pregunta por un conjunto  $H$  de puntos de  $P$ , de cardinal máximo y tal que dos cualesquiera de ellos no se vean.

**Problema 2.** Dado un polígono  $P$ , designamos por MAXIMUM HIDDEN VERTEX SET (MHVS), al problema que pregunta por un conjunto  $H$  de vértices de  $P$ , de cardinal máximo y tal que dos cualesquiera de ellos no se vean.

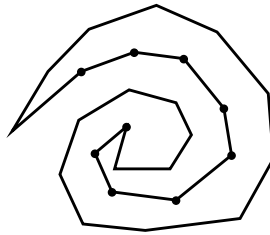
Como ya hemos indicado, Shermer demostró que ambos problemas son  $\mathcal{NP}$ -duros tanto para polígonos generales como para polígonos ortogonales (ver [6]). Esta complejidad computacional abre dos líneas de trabajo: la búsqueda de algoritmos aproximados y la resolución de los problemas para tipos especiales de polígonos. La búsqueda de algoritmos aproximados se inició con el trabajo de Eidenbenz, [3], en el que demostró que ambos problemas son  $\mathcal{APX}$ -duros para polígonos sin agujeros. Para polígonos con agujeros demostró en el mismo trabajo que son problemas no aproximables con razón de aproximación  $n^\varepsilon$  para algún  $\varepsilon > 0$ . En un trabajo reciente, Bajuelos et al.

[1], han aplicado técnicas metaheurísticas para obtener soluciones aproximadas a estos problemas de ocultación.

En este trabajo seguimos la segunda línea de investigación, presentando soluciones a los problemas **MHS** y **MHVS** para dos tipos de polígonos, los polígonos espirales y los polígonos histograma. En la sección 2 se estudian los problemas para polígonos espirales, describiendo un algoritmo lineal que resuelve **MHVS** para polígonos espirales. Además se demuestran cotas ajustadas para el número máximo  $h$  de vértices ocultos en un polígono espiral con  $r$  vértices cóncavos. En la sección 3 se analizan los polígonos histograma, para los que se obtiene que el cardinal máximo  $h$  de vértices ocultos verifica que  $h = r - (p - 1)$ , donde  $p$  es el número de un tipo especial de lados del polígono histograma.

## 2 Escondiendo puntos en espirales

**Definición 1.** Un polígono  $P$  se dice polígono espiral si todos sus vértices cóncavos forman una única cadena de vértices consecutivos. (ver Figura 1).



**Figura 1.** Un ejemplo de polígono espiral con su cadena cóncava

Estudiemos el problema de ocultación de puntos para este tipo de polígonos. En primer lugar resolvemos los aspectos combinatorios de la ocultación de vértices relacionando el número  $r$  de vértices cóncavos de un polígono y  $h$ , cardinal máximo de un conjunto de vértices ocultos en  $P$ .

**Teorema 1.** Si  $P$  es un polígono espiral con  $r$  vértices cóncavos, entonces el número máximo de vértices ocultos,  $h$ , verifica que  $\lceil \frac{r}{2} \rceil + 1 \leq h \leq r + 1$ .

*Demostración.* La cota inferior  $\lceil \frac{r}{2} \rceil + 1 \leq h$  se obtiene comprobando que, si nos limitamos a considerar los vértices de la cadena cóncava más sus extremos convexos, siempre podemos marcarlos alternadamente como ocultos, (según se muestra en la figura 2 (a)). Por tanto, en todo polígono espiral con  $r$  vértices cóncavos se pueden ocultar al menos  $\lceil \frac{r}{2} \rceil + 1$  vértices.

Por otra parte, según demostró Shermer en [6], todo polígono simple  $P$  con  $r$  vértices cóncavos se puede descomponer en  $r + 1$  piezas convexas y por consiguiente admite a lo sumo  $r + 1$  puntos ocultos. En el caso de polígonos

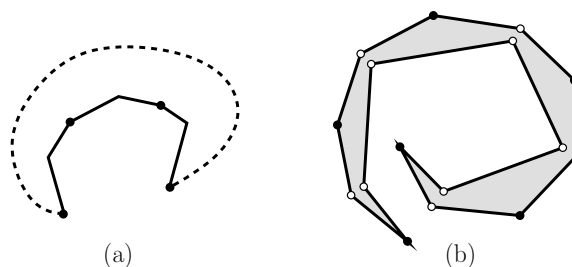


Figura 2. Cotas para  $h$

espirales esta cota se alcanza para vértices, según se muestra en el polígono de la figura 2 (b).  $\square$

A continuación presentamos un algoritmo que resuelve el problema **MHVS** para polígonos espirales.

## 2.1 Algoritmo

Aplicando la definición de polígono espiral es fácil observar que su borde se descompone en dos cadenas de vértices consecutivos  $C$  y  $R$ , la primera formada por los vértices convexos y la segunda por los cóncavos. Llamemos  $u$  y  $v$  a los extremos de  $C$ . El algoritmo propuesto recorre el borde de ambas cadenas simultáneamente desde  $u$  hasta  $v$ , añadiendo en cada paso un vértice al conjunto  $H$  de vértices ocultos. La idea fundamental es avanzar de  $u$  a  $v$  por ambas cadenas marcando como oculto en cada paso el vértice que menos ilumine la cadena convexa en el sentido de avance.

Si designamos los vértices cóncavos por  $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$  y los vértices de la cadena convexa  $C$  por  $\{u = v_1, v_2, \dots, v = v_{n-r}\}$ , la descripción del algoritmo es la siguiente:

---

### Algoritmo de colocación de vértices ocultos

ENTRADA: Un polígono espiral  $P$  de  $n$  vértices.

SALIDA:  $H \subset V$ , subconjunto de vértices ocultos de cardinal máximo.

- [01] Marcar como oculto el primer vértice de la cadena convexa,  $u \in H$ ;
- [02] Sean  $u_k, v_j$  los primeros vértices de las cadenas  $R$  y  $C$ , respectivamente, no visibles desde el último vértice oculto añadido a  $H$ ;
- [03] Si  $v_j$  ve al siguiente vértice  $u_{k+1}$  de la cadena cóncava, entonces marcamos como oculto el vértice  $u_k$ ; en caso contrario marcamos como oculto el vértice  $v_j$ .
- [04] Repetir el proceso a partir del paso 2

hasta alcanzar el vértice  $v$ .

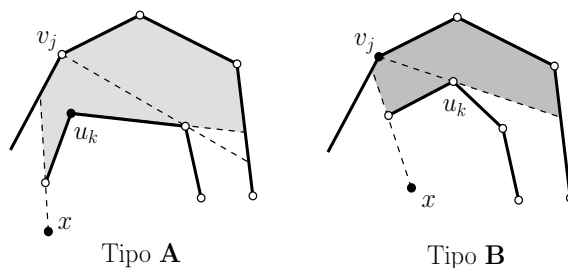


Figura 3. Colocación de vértices ocultos

La corrección de este algoritmo así como su complejidad se analizan en el siguiente teorema:

**Teorema 2.** *Dado un polígono espiral  $P$ , el algoritmo anterior obtiene un conjunto  $H$  de vértices ocultos de cardinal máximo en tiempo  $O(n)$ .*

*Demostración.* El algoritmo induce una partición del polígono espiral. Para cada vértice convexo  $v_j$  marcado como oculto en el paso 3 se considera el segmento que la semirrecta  $\overrightarrow{v_j, u_k}$  determina entre  $u_k$  y la cadena convexa  $C$  y para cada vértice cóncavo  $u_k$  marcado como oculto en el paso 3 se considera el segmento que la semirrecta  $\overrightarrow{u_k, u_{k+1}}$  determina entre  $u_{k+1}$  y  $C$ . Estos segmentos permiten descomponer el polígono en piezas de dos tipos, **A** y **B**. Las piezas tipo **A** tienen dos aristas de la cadena  $R$  y el vértice común a esas aristas aparece marcado como oculto. En las piezas tipo **B** sólo hay una arista de  $R$  y el vértice oculto es de la cadena convexa. En las piezas de ambos tipos podemos ocultar a lo sumo dos vértices, los vértices convexos son todos mutuamente visibles y el primer vértice de la cadena cóncava es común con la pieza anterior, (véase la figura 4). El algoritmo construye un conjunto  $H$  de vértices ocultos con un vértice en cada una de las piezas. Para demostrar que  $H$  es de cardinal máximo probemos que para cualquier otro conjunto  $H^*$  de vértices ocultos se verifica que  $|H| \geq |H^*|$ .

Si  $|H| < |H^*|$  entonces  $H^*$  tiene dos vértices ocultos en alguna pieza de la descomposición anterior. Sea  $Q$  la última pieza con dos vértices ocultos. Independientemente del tipo de esta pieza, uno de los vértices ocultos en  $Q$  debe ser el primer vértice cóncavo de la pieza, que pertenece también a  $Q'$ , la pieza anterior en la descomposición. Si  $Q'$  fuera de tipo **B** no podría tener ningún vértice oculto adicional, por lo que ambos conjuntos  $H$  y  $H^*$  tendrían el mismo cardinal en esas piezas. Si  $Q'$  fuera de tipo **A** sólo podría tener otro vértice oculto en su primer vértice cóncavo. Así se reproduce la situación inicial de  $Q$  en la pieza anterior  $Q'$ . Si en el retroceso hacia el vértice  $u$

encontramos una pieza de tipo **B**, los conjuntos  $H$  y  $H^*$  tendrían el mismo número de elementos a partir de esa pieza. Como la pieza inicial es de tipo **B** resulta que cualquier conjunto  $H^*$  tiene a lo más un vértice en cada pieza de la descomposición. Y se concluye que el algoritmo construye un conjunto  $H$  de vértices ocultos de cardinal máximo.

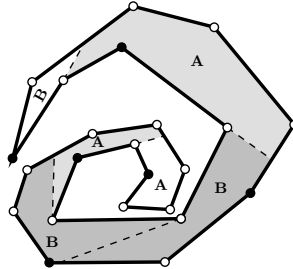


Figura 4. Descomposición en piezas **A** y **B**

La complejidad del algoritmo es lineal. La visibilidad desde los vértices ocultos en el paso 2 se efectúa en  $O(n)$  porque se detecta la visibilidad a cada vértice en tiempo constante y se avanza, sin retroceso, por las cadenas cóncava y convexa. Por la misma razón el paso 3 también se realiza en tiempo lineal.  $\square$

*Observación 1.* Si escondemos puntos no necesariamente situados en vértices, entonces siempre se alcanza el valor máximo permitido para el número de puntos ocultos. En un polígono espiral  $P$  con  $r$  vértice cóncavos siempre se pueden ocultar  $r + 1$  puntos, pues basta situar un punto oculto en cada lado de la cadena cóncava, (ver figura 5).

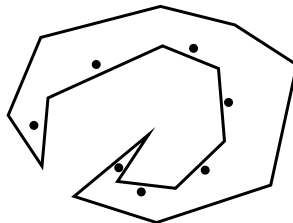


Figura 5. Puntos ocultos en un polígono espiral

### 3 Escondiendo puntos en histogramas

En primer lugar definamos esta clase polígonos, usados en ocasiones como piezas en las descomposiciones de los polígonos ortogonales.

**Definición 2.** *Un histograma vertical  $P$  es un polígono ortogonal con un lado horizontal, llamado la base de  $P$ , tal que todo punto de  $P$  es visible desde algún punto de su base.*

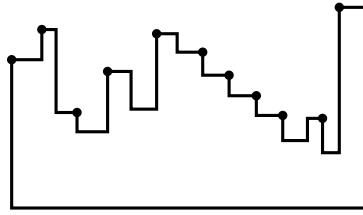


Figura 6. Histograma

En este trabajo sólo consideramos histogramas verticales. Denominamos lado *fondo* en un histograma a un lado horizontal cuyos extremos son vértices cóncavos. Como probamos en el siguiente teorema, el número de estos lados determina la solución al problema **MHVS** para histogramas.

**Teorema 3.** *Si  $P$  es un histograma con  $r$  vértices cóncavos y  $p$  lados fondo, entonces el máximo número  $h$  de vértices ocultos en  $P$  es  $h = r - (p - 1)$  y si no hay lados horizontales alineados existe un conjunto de vértices ocultos de cardinal  $h$ .*

*Demostración.* Realizaremos la demostración por inducción sobre  $p$  :

- **Caso básico**  $p = 0$ : En este caso, el histograma es una pirámide (ver figura 7), en la que se pueden ocultar  $h = r + 1$  vértices, uno en cada lado horizontal distinto de la base.

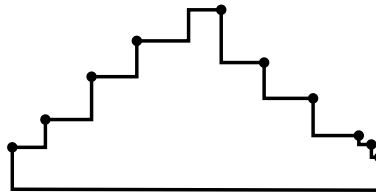
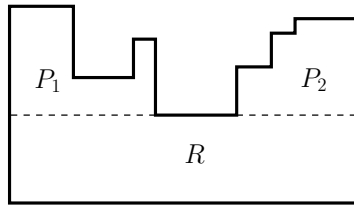


Figura 7. Pirámide

- **Paso inductivo:** Suponiendo que el resultado es cierto para histogramas con  $p$  fondos, demostremos que también lo es para polígonos con  $p + 1$  fondos. Trazamos un segmento horizontal por el *fondo* más próximo a la base y así descomponemos  $P$  en dos histogramas  $P_1$  y  $P_2$ , y un rectángulo  $R$ , (ver figura 8). Llamamos  $h_i$ ,  $r_i$  y  $p_i$  ( $i = 1, 2$ ) al número de vértices ocultos en  $P_i$ , número de vértices cóncavos de  $P_i$  y número de fondos de  $P_i$ , respectivamente, con lo que se tiene que  $r_1 + r_2 = r - 2$  y  $p_1 + p_2 = p - 1$ . Por hipótesis de inducción tendremos que

$$h_1 = r_1 - (p_1 - 1) \text{ y } h_2 = r_2 - (p_2 - 1)$$

de donde



**Figura 8.** Descomposición de un histograma

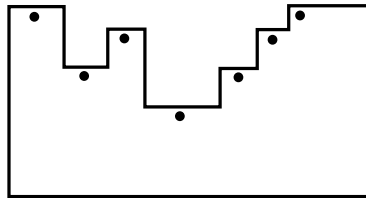
$$h_1 + h_2 = (r_1 + r_2) + (p_1 + p_2) + 2 = (r - 2) - (p - 1) + 2 = r - (p - 1)$$

y como en  $R$  no podemos situar ningún vértice oculto ya que todos son visibles desde alguno de los histogramas, tenemos

$$h = r - (p - 1)$$

Un conjunto  $H$  de vértices ocultos de cardinal  $h$  se consigue situando un punto en el vértice convexo de cada lado horizontal que no sea ni base ni fondo. (En los lados horizontales con dos vértices convexos sólo se coloca punto en uno de ellos). En el histograma de la figura 6 se han marcado en negro los vértices ocultos.  $\square$

*Observación 2.* Si escondemos puntos en histogramas también se consigue, como en espirales, alcanzar el máximo posible. Ocultando un punto en cada arista horizontal conseguimos ocultar  $h = r + 1$  puntos siendo  $r$  el número de vértices cóncavos. (Figura 9).



**Figura 9.** Puntos ocultos en polígonos histograma

## Referencias

- [1] A. L. Bajuelos, S. Canales, G. Hernández y A. M. Martins. Estimating the Maximum Vertex Set in Polygons. *Proc. CGA'08*, (aceptado).
- [2] S. Eidenbenz. How many people can hide in a terrain? *Proc. ISAAC'99*, LNCS, vol. 1741, pág. 184-194, 1999.
- [3] S. Eidenbenz. (In)-Approximability of Visibility Problems on Polygons and Terrains. *PhD. Thesis, ETH, Zurich*, 2000.



- [4] F. Hurtado. Problemas geométricos de visibilidad. *Tesis Doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya*, 1993.
- [5] F. Hurtado, O. Serra, J. Urrutia. Hiding points in arrangements of segments. *Disc. Math.*, 162,(1-3), pág. 187-197, 1996.
- [6] T. Shermer. Hiding people in polygons. *Computing*, 42(2-3), pág. 109-131, 1989.
- [7] J. Urrutia. Art gallery and illumination problem. In J. R. Sack and J. Urrutia, editors, *Handbook of computational geometry*, pág. 973-1027. Elsevier 2000.