Juegos para colorear grafos

Resumen

En este trabajo se presentan aplicaciones informáticas de carácter lúdico y didáctico, que tienen como objetivo la comprensión de las estrategias para colorear grafos. La primera de ellas es un juego de dos jugadores (uno de ellos puede ser el ordenador) en el que, alternativamente, cada jugador colorea un vértice de un grafo previamente construido. Los colores se eligen de una lista adecuada para cada grafo. Vence el primer jugador si consigue que, en algún momento, el segundo jugador no disponga de ningún color válido para seguir coloreando el grafo. Si, por el contrario, el grafo se colorea correctamente, el vencedor es el segundo jugador.
La segunda aplicación es también un juego de coloración de grafos, pero en esta ocasión se colorean las aristas.
Ambas aplicaciones disponen de un banco de grafos del que se elige uno en cada nuevo juego.

1. Introducción y definiciones

Hay muchos problemas, como la asignación de tareas y los problemas de almacenamiento, donde es necesario partir el conjunto de **vértices** (resp. aristas) de un grafo asociado de tal forma que **vértices** (resp. aristas) adyacentes pertenezcan a diferentes conjuntos de la partición. Tales particiones se interpretan habitualmente en términos de colores, asignando a los elementos de cada parte un mismo **color**. Por esto se llaman **coloraciones** (resp. coloraciones de aristas). Los problemas sobre coloración de grafos fueron, en la segunda mitad del siglo XIX, uno de los hitos iniciales de la Teoría de Grafos. En aquel tiempo se planteó uno de los problemas clásicos, "El Problema de los cuatro colores", que no se resolvió hasta 1976 con la ayuda del ordenador.

Una **coloración** de un grafo G=(V,A) es una asignación de colores a los vértices de G, a cada vértice un color, de forma que vértices adyacentes reciban colores distintos (por ejemplo ver [1] o [2]). Si en la coloración se usan k colores diremos que es una **k-coloración**. Las coloraciones siempre existen, pues podemos asignar a cada vértice del grafo un color diferente si fuera necesario. Cada coloración de G produce en el conjunto de vértices, V(G), una partición en conjuntos independientes denominados clases de color. Un conjunto de vértices I se llama **independiente** si dos vértices cualesquiera de I no son adyacentes.

Si existe una k-coloración de G se dice que el grafo G es k-coloreable. El mínimo k para el que un grafo G es k-coloreable se llama **número cromático** de G, y se designa por **χ(G).**

No es fácil determinar el número cromático de un grafo. De hecho, el correspondiente problema de decisión, conocido por **Chromatic Number Problem**, es un problema NP-completo:

Dado un grafo G y un entero k, ¿es cierto que $\chi(G) \leq k$?

Además se ha probado que si existiera un algoritmo polinómico de coloración que garantizara el uso de a lo más cχ(G) colores (con c constante) para un grafo G, entonces existiría un algoritmo polinómico para determinar χ(G). Por tanto, no existen algoritmos eficientes que aproximen con un factor constante el número cromático.

Los algoritmos conocidos para colorear los vértices de un grafo se clasifican en dos grandes grupo: secuenciales e independientes. Dada una ordenación de los vértices del grafo, los algoritmos secuenciales asignan el mínimo color posible al siguiente vértice. Es decir, si queremos colorear el vértice v, teniendo ordenados numéricamente los colores, asignamos a v el color más pequeño que no aparece entre los asignados a los vecinos de v ya coloreados. La ordenación inicial es esencial para colorear con pocos colores.

Los algoritmos “independientes” buscan en primer lugar un conjunto independiente de vértices I_1 de cardinal grande, colorea todos los vértices con el color 1, elimina los vértices de I_1 y repite el proceso en el grafo $G\text{-}I_1$, continuando así hasta colorear todos los vértices.

Una coloración de aristas de un grafo G (no necesariamente simple) es una asignación de colores a sus aristas de modo que aristas adyacentes reciban colores distintos. Si se usan k colores hablaremos de una **k-coloración** en aristas. Una coloración en las aristas origina una partición del conjunto de aristas A(G) en las llamadas clases de color de las aristas, cada una de las cuales consta de todas las aristas de un determinado color. Si G tiene una k-coloración en aristas decimos que G es k-coloreable en aristas. Llamamos **índice cromático** de G al mínimo k para el que G es k-coloreable en aristas. Designaremos a este número con la notación **$\chi'(G)$.**

También es un problema NP-completo determinar el índice cromático de un grafo. Y los algoritmos conocidos para colorear las aristas de un grafo siguen las mismas estrategias descritas para la coloración de vértices.

A continuación se describen dos juegos de coloración de grafos concebidos como herramientas para comprender las estrategias adecuadas para colorear correcta y eficientemente un grafo, tanto sus vértices como sus aristas.

2. Coloreando vértices

El primer juego que presentamos atañe a la coloración de los vértices de un grafo utilizando los colores de una lista. Hay dos jugadores (uno de ellos puede ser el ordenador) que juegan alternadamente coloreando en cada turno un vértice no coloreado, de forma que el color asignado no coincida con ninguno de los colores asignados a los vértices adyacentes (vecinos). En el ejemplo de la figura 1, con la lista de colores {rojo, verde, azul}, el jugador “pepe” puede colorear el vértice indicado con una flecha sólo con el color verde.

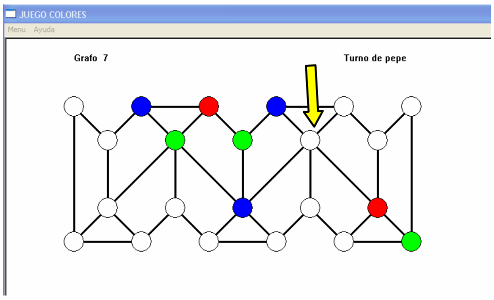

Figura 1.

El primer jugador vence si resulta imposible colorear correctamente un vértice. En la figura 2 tenemos esta situación, el vértice indicado con una flecha no se puede colorear correctamente.

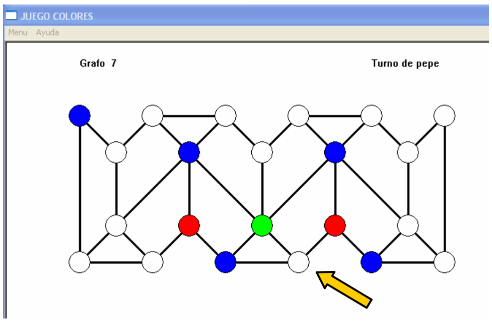

Figura 2.

Si, por el contrario se colorean correctamente los vértices del grafo, el vencedor es el segundo jugador, como aparece en la figura 3.

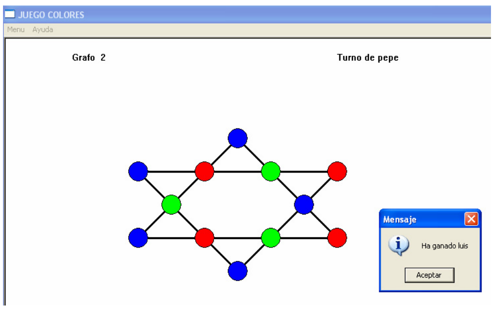

Figura 3.

3. Coloreando aristas

En el segundo juego se colorean las aristas de un grafo de forma que aristas adyacentes (con un vértice común) reciben distinto color. El juego sigue las mismas líneas que el descrito para vértices. Hay dos jugadores que alternadamente colorean las aristas utilizando los colores de una lista.

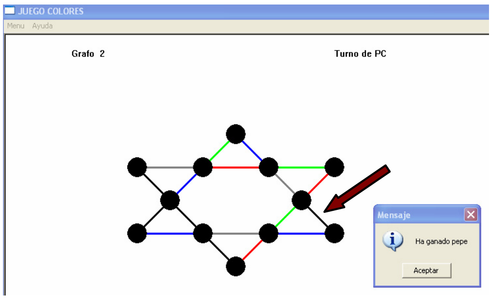

Figura 4.

El primer jugador vence si impide la correcta coloración de las aristas del grafo, por ejemplo el grafo de la figura 4, en que la arista de la flecha no se puede colorear con ninguno de los cuatro colores permitidos, verde, rojo azul y gris.

Si se termina de colorear correctamente vence el segundo jugador, (figura 5)

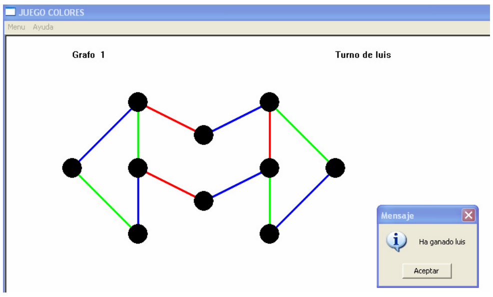

Figura 5.

4. Características comunes de las aplicaciones

Las aplicaciones informáticas descritas en los párrafos precedentes están implementadas en lenguaje Ada y se encuentran disponibles para su utilización en la página web www.dma.fi.upm.es/gregorio/grafos/juegocolores.

En ella se encuentran enlaces para descargar ambas aplicaciones y el banco de grafos predefinidos sobre los que se realiza el juego.

El número de colores disponible para cada uno de los grafos se puede elegir al comenzar el juego. Para colorear los vértices el número posible de colores permitidos está entre **$\chi(G)$ y $\chi(G)+3$.** El juego para las aristas permite elegir un número de colores entre Δ y $\Delta+3$, siendo Δ el grado máximo de los vértices del grafo. Se ha optado por permitir más colores de los realmente necesarios para poder elegir el nivel de dificultad del juego. Por el momento no hay niveles de dificultad que sí están previstos en una próxima versión.

5. Experimentación

Los juegos presentados en esta ponencia se han utilizado como herramienta adicional para la docencia en la asignatura de Matemática Discreta de primer curso en la Facultad de Informática de la Universidad Politécnica de Madrid. La experiencia de cursos anteriores muestra que los alumnos que han jugado con las aplicaciones de coloración tienen una mejor comprensión de las diferentes estrategias de coloración de grafos.

6. Conclusiones y trabajo futuro

Presentamos dos juegos como herramienta didáctica para la comprensión de los problemas de coloración de grafos. Esta herramienta viene a sumarse a otras ya desarrolladas para apoyo a la docencia en las asignaturas de Matemática Discreta y Teoría de Grafos en la Facultad de Informática de la Universidad Politécnica de Madrid. La novedad es el carácter lúdico y de participación activa del alumno que se ha querido mostrar.

Además de las mejoras puntuales en estas aplicaciones, ya mencionadas en la sección anterior, se pretende continuar con el diseño de herramientas lúdicas para otros temas de grafos.

Referencias

[1] Gross, J.; Yellen, J.: *Graph Theory and its Applications*. 2ª ed. CRC Press, 2005

[2] West, D.: *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall, 2000