Modelos geométricos de competición política

Rodrigo, Javier. jrodrigo@upcomillas.es
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Pontificia Comillas
López, Mª Dolores. Marilo.lopez@upm.es
Departamento de Matemática e Informática Aplicadas a la Ing. Civil
Universidad Politécnica de Madrid

RESUMEN

Se propone un modelo bidimensional de competición política en el que se utilizan técnicas geométricas para la búsqueda y determinación de las posiciones de equilibrio. Con la finalidad de adaptar lo más posible el problema a la realidad, se asume que la distribución de los tipos de votantes no es uniforme. Esta situación queda representada por la asignación de pesos a cada una de las posiciones de los votantes en el plano (se asume un número finito de ellos). Tanto en el caso en que todos los tipos de votantes están equidistribuidos, como el caso general, se ha probado que, excepto en la situación en que todos los votantes estén alineados, el equilibrio si existe, se alcanza sólo cuando los dos partidos ofrecen una misma política.

Para eliminar esa unicidad en la posición de equilibrio se ha debilitado la definición del equilibrio clásico, proponiendo un "equilibrio débil". Como resultado de ello aparece una región de equilibrio. En esta región, los partidos pueden moverse en una situación "casi" de equilibrio que no les obliga a tener que adoptar una política parecida.

***Palabras claves*:**
Teoría de juegos; Competición política; Equilibrio; Geometría Computacional

1. INTRODUCCIÓN

La mayoría de los trabajos que estudian competición política y elecciones se basan en la teoría espacial de voto, inicialmente desarrollada por Black (1958) y Downs (1957) con contribuciones posteriores de Hinich y Pollard (1981), Shepsle y Weingstag (1981), Enlow y Hinich (1982) o Hinich y Munger (1995) entre otros.

El equilibrio de Nash es un concepto ampliamente tratado en modelos generales de competición. Fue introducido por John Forbes Nash en su disertación “Non-cooperative games” (Nash, 1951), como una manera de obtener una estrategia óptima para juegos con dos o más jugadores.

En este trabajo se presenta un modelo de competición bipartidista planteado geométricamente que trata de adaptarse a la realidad política de gran número de países utilizando para ello ponderaciones en la representación de los votantes. Se hace en él un estudio de las posiciones de equilibrio bajo un tratamiento geométrico. Al establecerse unas preferencias de los votantes a través de la distancia euclídea a las diferentes políticas, se parte de los diagramas de Voronoi como estructura geométrica subyacente.

En la sección 2 asumimos que todos los tipos de votantes están igualmente distribuidos, es decir que todos los tipos tienen igual número de seguidores. Para adaptarnos lo más posible a una situación real, en la sección 3 se estipula que las diferentes posiciones de los tipos de votantes v_i tienen distinto peso. Es decir, ciertas posturas o preferencias políticas son secundadas por un número mayor de votantes. Como ejemplo citar que, las posiciones extremas con respecto a la mayoría de las acciones políticas tienen menos seguidores que las posturas más moderadas. Por ello, parece razonable considerar una distribución ponderada.

Se probará que en ambos casos, excepto para la situación en que las posiciones de todos los votantes estén alineadas, el equilibrio, si existe es único y se alcanza así cuando los dos partidos ofrecen una misma política. Por ello deberán converger a un programa esencialmente parecido.

Para salvar esta situación que no parece del todo adecuada en política, se presenta en la sección 4 una debilitación del concepto de equilibrio a partir del cual, una región de equilibrio aparece ofreciendo infinitas posiciones para los partidos. En ellas, ese "casi equilibrio" puede ser alcanzado por los partidos sin necesidad de ofrecer la misma postura o alternativas políticas.

Destacar que todos los desarrollos que se presentan se han realizado a partir de razonamientos geométricos utilizándose técnicas y herramientas de la Geometría Computacional.

2. ESTUDIO GEOMÉTRICO DEL EQUILIBRIO, CASO DE TIPOS IGUALMENTE DISTRIBUIDOS

El modelado del problema que se plantea es el siguiente: Se consideran dos jugadores que son dos partidos políticos *p* y *q*, cuyas posiciones vienen dadas por las políticas ofrecidas, t^1 y t^2, del espacio de políticas bidimensional $T=R^2$, y la nube de puntos $v_i=(v_{i1}, v_{i2})$ con $i=1,\dots,n$, las correspondientes posiciones de los votantes de una cierta población, con v_{i} perteneciente al conjunto de tipos $H=\{v_1 ,\dots, v_n\}\subset R^2$ que clasifican a los votantes según esas políticas (Roemer, 2001; Abellanas et al., 2006).

A lo largo del trabajo asumimos que las preferencias de los votantes sobre el espacio son euclídeas así, las funciones de ganancia en el juego que se plantea son las siguientes:

$$\Pi^1(t_1,t_2) = \text{número de puntos } v_i \text{ tales que } d(v_i,t_1) \le d(v_i,t_2)$$
$$\Pi^2(t_1,t_2) = \text{número de puntos } v_i \text{ tales que } d(v_i,t_1) > d(v_i,t_2) = n - \Pi^1(t_1,t_2)$$
$$\text{if } t_1 \ne t_2$$

donde $d(t,v_i)$ es la distancia euclídea entre *t* y la posición v_i.

En el caso en el que $t_1=t_2$, se establece que cada partido ganará la mitad de los votantes.

2.1. Estrategias de victoria

Presentamos estrategias para que el partido *p* elija una posición en la que incremente sus ganancias, sabiendo la posición del partido *q* (Wendell and McKelvery, 1981).

Proposición 2.1: Si *n* es par, hay una estrategia para *p* que le permite empatar con *q* sea cual sea la posición de *q*.

Demostración:

Trazamos rectas paralelas de manera que ninguna de ellas contenga más de un punto del conjunto.

Cuando llegamos a una recta que deja exactamente $\frac{n}{2}$ puntos del conjunto en cada semiplano abierto que determina, situamos a *p* en el simétrico de *q* respecto a esta recta. Así, *p* obtendrá exactamente $\frac{n}{2}$ puntos del conjunto. (Figura 1) #

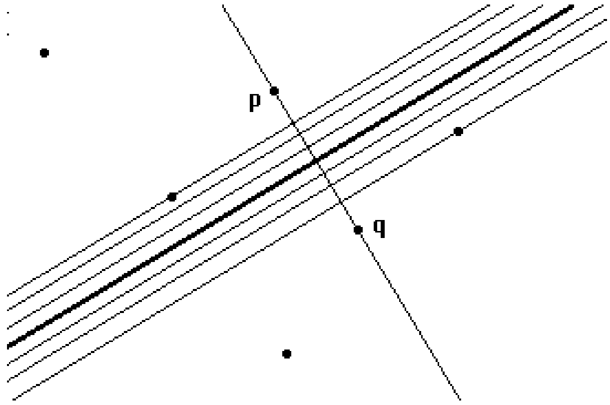

Figura 1: Para *n* par, *p* siempre puede empatar con *q*

Observación:

Para *n* par, hay situaciones en las que es imposible que *p* gane, ver figura 2. En este caso, no se puede situar a *p* para que capture tres puntos de ese conjunto, ya que el semiplano que contuviera a esos tres puntos contendría a su cierre convexo (de Berg et al., 1997), pero *q* pertenece a ese cierre convexo, luego serían puntos capturados por *q*. Por tanto, *p* sólo puede elegir una posición para empatar.

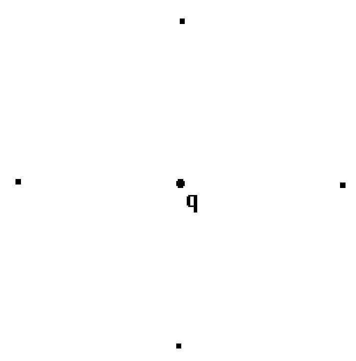

Figura 2: En esta situación, *p* no puede ganar

Proposición 2.2: Si *n* es impar, hay una estrategia para localizar *p* de forma que pueda conseguir $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ votantes y así ganar a *q*, si el partido *q* no está localizado en la posición de algún votante.

Demostración:

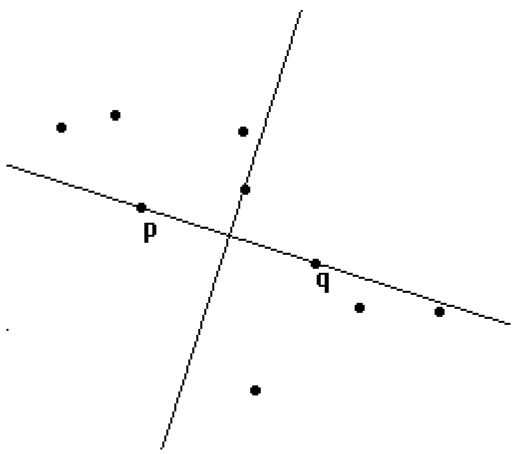

Figura 3: Cuando *n* es impar, *p* siempre puede ganar a *q*, si el partido *q* no está situado en la posición de un votante

Consideramos una familia de rectas paralelas con pendientes diferentes de las de cualquier recta que une dos puntos del conjunto, ó cualquiera que une un punto del conjunto y *q*. Cuando llegamos a una recta de esta familia que deja en uno de sus semiplanos abiertos $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ puntos del conjunto y en el otro el resto de los puntos y *q*, localizamos a *p* en el simétrico de *q* respecto a esta recta. (Figura 3) #

2.2. Existencia de equilibrio

Desarrollaremos condiciones necesarias y suficientes para asegurar la existencia de equilibrio en el juego presentado.

Proposición 2.3: Considera $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ puntos del conjunto de *n* puntos y una posición del primer partido, *t*. Entonces existe una localización del segundo partido, *t'*, en la que captura esos $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ puntos si y sólo si *t* no pertenece al cierre convexo de los $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ puntos.

Demostración:

Se puede ver que, dado un cierre convexo de $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ puntos del conjunto y un punto exterior *p*, existe una recta que separa el punto y el cierre convexo.

Entonces, si situamos *q* en el simétrico de *p* respecto a esa recta, conseguirá esos $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ puntos (Figura 4).

Si *t* está en el cierre convexo de los $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ puntos, entonces no hay ninguna posición *t'* del partido *q* que le permita ganar esos $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ puntos, porque cualquier semiplano conteniendo esos puntos contendrá a su cierre convexo, y así contendrá a *t*, y por tanto los puntos son capturados por *t*, no por *t'*. #

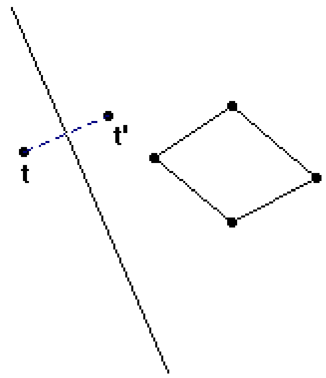

Figura 4: Localizamos a *q* en *t'*, el simétrico con respecto a la recta de la localización de *p*

Definición 1: Sean $v_1,\ldots,v_n$ *n* posiciones, y consideramos todos los posibles subconjuntos de $\left[\frac{n}{2}\right]+i$ puntos de entre estas *n* posiciones. Definimos $C_{n,i}$ como la intersección de los cierres convexos de esos subconjuntos de puntos.

Proposición 2.4: Existen localizaciones para un partido en las que el otro no le puede quitar $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ puntos si y sólo si $C_{n,1}$ es no vacío. Cualquier punto en $C_{n,1}$ será una de esas localizaciones.

Demostración:

Si $C_{n,1}$ es no vacío, entonces cualquier localización de *p* en un punto de $C_{n,1}$ le asegura que el otro partido no puede obtener ninguna selección de $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ puntos, dado que *p* está incluido en el cierre convexo de esos $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ puntos (Proposición 2.3).

Si $C_{n,1}$ es vacío, entonces para cualquier posición de *p* podemos encontrar $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ puntos del conjunto de forma que *p* no está en su cierre convexo, luego por la Proposición 2.3 hay una estrategia por parte de *q* para conseguirlos. #

Podemos ahora aplicar la Proposición 2.4 para encontrar las posiciones de equilibrio en el juego propuesto.

Proposición 2.5: En el juego presentado, existen posiciones de equilibrio si y sólo si $C_{n,1}$ es no vacío. En este caso, las únicas posiciones de equilibrio serán (t_1, t_2) con t_1 y t_2 en este conjunto. Por tanto, se incluyen situaciones de equilibrio de la forma (t, t).

Demostración:

Si $C_{n,1}$ es no vacío, cualquier posición (t_1, t_2) con t_1 y t_2 en $C_{n,1}$ es una situación de equilibrio:

Si p está localizado en t_1, entonces sabemos (Proposición 2.4) que q no puede obtener más de $\frac{n}{2}$ votantes en ninguna localización, por lo que $\Pi^2(t_1, t) \leq \frac{n}{2}$ para todo t. Se puede aplicar el mismo razonamiento para el primer partido si q está en t_2.

Por otro lado, en la posición (t_1, t_2) cada partido obtiene $\frac{n}{2}$ votantes, ya que $\Pi^1(t_1, t_2) \leq \frac{n}{2}$, $\Pi^2(t_1, t_2) \leq \frac{n}{2}$, y las ganancias son complementarias.

Así, tenemos que $\Pi^2(t_1, t) \leq \frac{n}{2} = \Pi^2(t_1, t_2)$, y tenemos el mismo comportamiento para p, luego (t_1, t_2) es una posición de equilibrio.

Estos son los únicos equilibrios posibles: si (t_1, t_2) es una posición de equilibrio, al ser las ganancias complementarias, tendremos que $\Pi^1(t_1, t_2) = \Pi^2(t_1, t_2) = \frac{n}{2}$. Si, por ejemplo, t_1 no pertenece a $C_{n,1}$, entonces existe una estrategia para t_2 que le permite obtener $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ puntos del conjunto en una posición t (Proposición 2.3), luego $\Pi^2(t_1, t) = \left[\frac{n}{2}\right] + 1 > \Pi^2(t_1, t_2)$, contradicción dado que (t_1, t_2) es una posición de equilibrio.

Si $C_{n,1}$ es vacío y hay una posición de equilibrio (t_1, t_2), entonces una de las ganancias, por ejemplo Π^2, cumple que $\Pi^2(t_1, t_2) \leq \frac{n}{2}$, ya que las ganancias son complementarias. Entonces, aplicando la Proposición 2.3, y al ser $C_{n,1}$ vacío, para la situación t_1 del partido p, existe una posición t para el partido q que obtiene $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$

puntos del conjunto, y así: $\Pi^2(t_1,t)=\left[\frac{n}{2}\right]+1>\frac{n}{2}\geq\Pi^2(t_1,t_2)$, luego el partido puede cambiar su posición provechosamente. Esto es una contradicción, ya que (t_1,t_2) es una situación de equilibrio. #

2.3. Unicidad del equilibrio

La subsección anterior presentaba un método geométrico para hallar las posiciones de equilibrio en el juego propuesto, si existen. En esta sección se demuestra que, salvo en casos degenerados, estas posiciones son únicas.

a) Caso *n* impar

Proposición 2.6: $C_{n,1}$, con n impar, es vacío ó está constituido por puntos del conjunto. Al ser $C_{n,1}$ un conjunto convexo, si no es vacío es un solo punto perteneciente al conjunto.

Demostración:

Si hay un punto en $C_{n,1}$ que no pertenezca al conjunto y p está localizado en este punto, entonces q no le puede ganar $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ puntos a p como vimos en la Proposición 2.3, pero, si n es impar, hay una estrategia para un partido que le da $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ puntos de un conjunto de n puntos si el otro no está situado en un punto del conjunto (proposición 2.2). Esto conlleva una contradicción. #

b) Caso *n* par

Podemos presentar un resultado similar para n par. Necesitamos una proposición preliminar:

Proposición 2.7: Sea v_1 un punto del conjunto que sea un vértice de la frontera del cierre convexo de los n puntos del conjunto. Entonces existe un bisector que contiene a v_1 (Erdõs et al., 1973).

Demostración:

Para cualquier punto en la frontera del cierre convexo, se puede encontrar una recta que contiene a este punto que deja el cierre convexo en un semiplano. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que el cierre convexo está en el semiplano encima de la recta (ó en el derecho si la recta es vertical).

Podemos considerar v_1 como el punto más alto del conjunto en la recta, y ordenamos angularmente los demás puntos del conjunto respecto v_1. Como todos los puntos del conjunto están en el mismo semiplano, se cumple que la recta que une el punto medio de la ordenación con v_1, deja el mismo número de puntos en cada semiplano (Figura 5). #

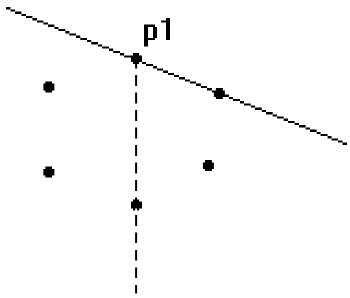

Figura 5: Ordenación angular y elección del punto que, junto a p_1, deja el mismo número de puntos en cada lado

Proposición 2.8: Si n es par y los n puntos del conjunto no están alineados, entonces $C_{n,1}$ es un conjunto de un punto ó el conjunto vacío.

Demostración:

Elegimos un punto del conjunto vértice de la frontera del cierre convexo de los n puntos. Sabemos por la Proposición 2.7 que hay otro punto del conjunto de manera que la recta que conecta los dos puntos deja $\frac{n}{2}-1$ puntos en cada semiplano. Entonces, la intersección del cierre convexo de $\frac{n}{2}-1$ puntos en uno de los semiplanos y los dos puntos en la recta, con el cierre convexo de $\frac{n}{2}-1$ puntos en el otro semiplano y los dos puntos en la recta, son un segmento contenido en la recta. Como no están todos los puntos del conjunto alineados, hay un punto vértice de la frontera del cierre convexo que no está en la recta anterior. Aplicando de nuevo la Proposición 2.7, podemos encontrar una segunda recta que contiene dos puntos del conjunto y que deja $\frac{n}{2}-1$

puntos en cada semiplano, y así dos cierres convexos de $\frac{n}{2}+1$ puntos del conjunto cuya intersección es otro segmento contenido en la segunda recta. Entonces la intersección de los dos segmentos será vacía ó un conjunto de un punto, y así será la intersección de los cuatro cierres convexos considerados, por lo que $C_{n,1}$ será vacío ó un único punto. #

Observación: Si n es par y los puntos están alineados, hay infinitas situaciones de equilibrio, ya que $C_{n,1}$ será el segmento determinado por los dos puntos intermedios

c) Resultado general

Teniendo en cuenta los casos a) y b), es posible establecer el siguiente resultado general:

Proposición 2.9: $C_{n,1}$ es un punto ó el conjunto vacío, a no ser que los puntos estén alineados y n sea par. Por tanto, si hay equilibrio en el juego presentado, entonces es único y de la forma (t, t), a no ser que los puntos estén alineados y n sea par (además, si n es impar, t pertenecerá al conjunto)

3. ESTUDIO GEOMÉTRICO DEL EQUILIBRIO, CASO PONDERADO

En este apartado consideramos una distribución de los diferentes tipos según una medida de probabilidad F dada por:

$$F(\{v_i\})=k_i \text{ con } k_1+k_2+...+k_n=1,\ k_i\geq 0$$

Con estas consideraciones el juego planteado se modela de la siguiente forma: Representamos t^1, t^2, $v_1,...,v_n$ como los puntos del plano ya introducidos anteriormente, trazamos la mediatriz entre t^1 y t^2 (suponiendo $t^1\neq t^2$) y consideramos los dos semiplanos que define dicha mediatriz. Llamamos $\Omega(t^1,t^2)$ al conjunto de tipos que prefieren a t^1 frente a t^2, es decir, aquellos que pertenecen al semiplano en el que esté t^1, supongamos que sean $v_{i_1},...,v_{i_{n_{t_1}}}$, donde n_{t_1} es el número de tipos que pertenecen al semiplano que contiene a t^1. Se tiene que la fracción de votantes que elegiría la política t^1 será:

$$\rho\left(t^1,t^2\right)=F\left(\Omega\left(t^1,t^2\right)\right)=\sum_{j=1}^{n_{t1}}k_{i_j} \quad \text{si} \quad t^1\neq t^2$$

siendo k_{i_j} j=1,...n_{t1}, la medida de $\{v_{i_j}\}$.

Con todo ello, las funciones de ganancia quedan de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{l}\Pi^1\left(t^1,t^2\right)=n\sum_{j=1}^{n_{t1}}k_{i_j}\\ \Pi^2\left(t^1,t^2\right)=n-\Pi^1(t_1,t_2)\end{array}\right\}\quad \text{si } t^1\neq t^2 \quad \text{y} \quad \Pi^1(t^1,t^2)=\Pi^2(t^1,t^2)=\frac{n}{2}\quad \text{si } t^1=t^2$$

Es decir, en el caso $t^1 \neq t^2$, si definimos el peso del tipo v_{i_j} como $n\,k_{i_j}$, la ganancia de la política t_1 será la suma de los pesos de los tipos que están en el mismo semiplano que t^1 (incluyendo los de la mediatriz). Análogo para t^2.

Se cumple que $\sum_{i=1}^{n} nk_i = n$.

3.1. Existencia de equilibrio

Se estudian condiciones que garanticen la existencia de posiciones de equilibrio de Nash en el juego planteado.

3.1.1. Condición necesaria de existencia

Proposición 3.1: Si las ganancias de un juego son complementarias y, si dada una posición t de un jugador, existe una estrategia del otro para conseguir una ganancia de $\frac{n}{2}$, necesariamente las posiciones de equilibrio han de ser posiciones (t^1,t^2) con $\Pi^1(t^1,t^2)=\Pi^2(t^1,t^2)=\frac{n}{2}$.

3.1.2. Condición necesaria y suficiente de existencia

Definición 1: El peso de un conjunto $\{v_{i_1},...,v_{i_k}\}$ es $\sum_{j=1}^{k} peso\,(v_{i_j})$.

Definición 2: Un conjunto minimal es un subconjunto de puntos de la nube de peso mayor que $\frac{n}{2}$ que no contiene a otro subconjunto de puntos de peso mayor que $\frac{n}{2}$.

Nota: Se establecerán resultados paralelos al caso de votantes equidistribuidos. Se omiten las demostraciones de estos resultados por ser análogos a los presentados en la sección 2.

Proposición 3.2: Consideremos todos los posibles conjuntos minimales. Entonces existen posiciones de equilibrio en el juego con ponderaciones si y sólo si la intersección de los cierres convexos de esos conjuntos de puntos es no vacía. En este caso, las únicas posiciones de equilibrio son cualquier posición (t^1,t^2) con t^1 y t^2 pertenecientes a esa intersección.

3.2. Unicidad

Veamos que esta intersección de cierres convexos es a lo más en un punto, a no ser que los n puntos de la nube estén alineados, lo que implica la unicidad de las posiciones de equilibrio. Existen casos particulares, como muestra la proposición 3.3, en los que dicho punto debe ser de la nube.

Proposición 3.3: Si no hay ninguna combinación de puntos de la nube con peso $\frac{n}{2}$, entonces la intersección de los cierres convexos de los posibles conjuntos minimales de peso mayor que $\frac{n}{2}$ es a lo más en un punto de la nube.

Proposición 3.4: La intersección de los posibles cierres convexos de conjuntos minimales de peso mayor que $\frac{n}{2}$ es a lo más en un punto si no están los n puntos de la nube alineados.

Nota: Si los puntos están alineados, caso degenerado, pueden existir casos en los que la intersección de los cierres convexos sea infinita.

De esta forma se puede concluir que:

Proposición 3.5: El equilibrio en el juego con ponderaciones si existe es único y de la forma (t,t), es decir con los dos partidos eligiendo la misma política, salvo en algunos casos en los que todos los puntos están alineados.

4. DEBILITACIÓN DEL EQUILIBRIO

La idea de esta sección es ofrecer una definición debilitada de equilibrio que permita salvar el resultado de no existencia o de unicidad de las posiciones de equilibrio de Nash.

El equilibrio de Nash establece que ($t^0{}_1$,$t^0{}_2$) es una posición de equilibrio si: $\Pi^1\left(t_1,t_2^0\right)\le\Pi^1\left(t^0{}_1,t^0{}_2\right)$, $\Pi^2\left(t_1^0,t_2\right)\le\Pi^2\left(t^0{}_1,t^0{}_2\right)$ $\forall t_1,t_2\in T$. Es decir, son aquellas posiciones donde se pueden situar los jugadores de forma que si se mueven no mejoran sus ganancias. (Persson and Tabellini, 1999).

Planteamos una debilitación de esta definición mediante:

Definición: Se dice que una posición (t^0_1,t^0_2) es de equilibrio débil si $\Pi^1\left(t_1, t_2^0\right) \leq \Pi^1\left(t^0{}_1, t^0{}_2\right)+1, \quad \Pi^2\left(t_1^0, t_2\right) \leq \Pi^2\left(t^0{}_1, t^0{}_2\right)+1 \quad \forall t_1, t_2 \in T$.

Se desarrolla un análisis geométrico que resulta una extensión al presentado en las secciones anteriores. (Lillo et al., 2005; Lillo et al., 2007), para el estudio de la existencia y búsqueda de las posiciones de equilibrio según la definición anterior.

4.1. Condiciones de equilibrio

Proposición 4.1: En una posición de equilibrio débil, (t^0_1,t^0_2), necesariamente:

$$\Pi^1\left(t_1^0, t_2^0\right) \geq \frac{n}{2}-1, \quad \Pi^2\left(t_1^0, t_2^0\right) \geq \frac{n}{2}-1$$

Demostración:

Es sabido que, si n es par hay una estrategia para p mediante la cual consigue empatar cualquiera que sea la posición de q. Y, si n es impar, hay una estrategia para situar a p y ganar $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ votantes y, de esta forma, ganar a q, siempre que éste no esté situado en la posición de algún votante (Proposiciones 2.1, 2.2).

Sea (t^0_1,t^0_2) una posición de equilibrio débil. Supongamos por ejemplo que $\Pi^1\left(t_1^0, t_2^0\right)<\frac{n}{2}-1$, aplicando lo anterior, para cualquier posición del segundo partido t^0_2, existe una del primero t, tal que $\Pi^1\left(t, t_2^0\right) \geq \frac{n}{2}$. Así, $\Pi^1\left(t, t_2^0\right)>\Pi^1\left(t_1^0, t_2^0\right)+1$ lo que contradice que (t^0_1,t^0_2) sea posición de equilibrio débil. #

Nota: Como las ganancias son complementarias, en una posición de equilibrio débil con n par se debe cumplir que las ganancias son: $\frac{n}{2}-1, \quad \frac{n}{2}+1$, ó las dos iguales a $\frac{n}{2}$. En una con n impar se ha de cumplir que dichas ganancias sean: $\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n-1}{2},\left[\frac{n}{2}\right]+1=\frac{n+1}{2}$, ó las dos iguales a $\frac{n}{2}$ si t_1=t_2.

Buscamos ahora condiciones necesarias y suficientes para ser posición de equilibrio débil:

Definición: Se define $C_{n,s}$ como la intersección de los cierres convexos de todos los posibles subconjuntos de $\left[\frac{n}{2}\right]+s$ puntos de una nube de *n* puntos.

Proposición 4.2: En el juego planteado existen posiciones de equilibrio débil si y sólo si $C_{n,2}$ es no vacía, ($n>2$).

Demostración

- Sea *t* un punto perteneciente a $C_{n,2}$, veamos que las posiciones (t, t), son de equilibrio débil:

$\Pi^1(t,t)=\Pi^2(t,t)=\frac{n}{2}$. Si, por ejemplo $\Pi^1(t_1,t)\geq\left[\frac{n}{2}\right]+2$ para alguna posición t_1 del primer partido, existe una recta que separa a, al menos $\left[\frac{n}{2}\right]+2$ puntos de la nube y a *t*, por lo que *t* no pertenecería al cierre convexo de esos $\left[\frac{n}{2}\right]+2$ puntos. Contradicción con la hipótesis de partida.

- Si $C_{n,2}$ es vacío, entonces existe un cierre convexo de $\left[\frac{n}{2}\right]+2$ puntos de la nube en el que no está el partido que tiene ganancia superior o igual a $\left[\frac{n}{2}\right]$, por ejemplo *q* en una posición t_2. Situemos entonces a *p* (de ganancia inferior o igual a $\frac{n}{2}$) en el simétrico de t_2 respecto a la recta que separa t_2 del cierre convexo. Entonces $\Pi^1(t,t_2)\geq\left[\frac{n}{2}\right]+2>\Pi^1(t_1,t_2)+1$ con lo que ninguna posición es de equilibrio débil. #

2.1.1. Estudio de los diferentes casos

a) Si *n* es impar:

Posiciones de equilibrio débil son (t_1,t_2) con $\Pi^1(t_1,t_2)=\left[\frac{n}{2}\right]$, $\Pi^2(t_1,t_2)=\left[\frac{n}{2}\right]+1$, con t_1 perteneciente a $C_{n,3}$ y t_2 a $C_{n,2}$. De esta manera, t_2 no puede ganar $\left[\frac{n}{2}\right]+3$ puntos y aumentar en dos su ganancia y t_1 no puede ganar $\left[\frac{n}{2}\right]+2$ puntos y aumentar en dos su ganancia. Estas resultan las únicas posiciones de equilibrio débil con estas ganancias ya que si algún partido no está en la intersección correspondiente, el otro puede separarle de $\left[\frac{n}{2}\right]+3$ o de $\left[\frac{n}{2}\right]+2$ puntos respectivamente y aumentar en dos sus ganancias.

Estas posiciones tienen sentido cuando $\left[\frac{n}{2}\right]+3 \leq n$, es decir, $n \geq 5$

Otras posiciones de equilibrio débil serán (t, t) con t perteneciente a $C_{n,2}$, $(n>1)$.

Las posiciones (t_1,t_2) tales que $\Pi^1(t_1,t_2)=\left[\frac{n}{2}\right]+1$, $\Pi^2(t_1,t_2)=\left[\frac{n}{2}\right]$ con t_1 perteneciente a $C_{n,2}$ *y* t_2 en $C_{n,3}$, también son de equilibrio débil.

No existen más posiciones de equilibrio débil con otras ganancias ya que no cumplirían la condición necesaria.

b) Si n es par:

Las posiciones de equilibrio débil serán:

Aquéllas en las que uno de los partidos tiene ganancia $\frac{n}{2}-1$ y está en $C_{n,3}$ y el otro tiene ganancia $\frac{n}{2}+1$ y está en $C_{n,1}$, si ésta es no vacía y $n>4$ ya que en estas posiciones, ninguno de los partidos puede aumentar sus ganancias en dos moviéndose. Son éstas las únicas posiciones de equilibrio con estas ganancias, pues si algún partido no está en la intersección, el otro puede separarle de un cierre convexo que aumente en dos sus ganancias.

Otras posiciones son aquéllas en las que los dos partidos tienen ganancia $\frac{n}{2}$ y están en $C_{n,2}$. En este caso ninguno de los dos puede aumentar en dos su ganancia moviéndose. Son éstas las únicas posiciones de equilibrio débil con estas ganancias ya que si algún partido no está en dicha intersección, el otro le puede separar de alguna combinación de $\frac{n}{2}+2$ puntos de la nube y aumentar en 2 sus ganancias.

5. CONCLUSIONES

En el análisis del equilibrio de los juegos multidimensionales competitivos se establece que excepto en casos singulares, no existen dichas posiciones de equilibrio. Así, no existen posiciones que garanticen a un competidor que no aumentará su ganancia moviéndose o alterando su posición.

Este trabajo aborda el estudio del equilibrio de Nash en un juego de competición política. El escenario es una versión discreta del juego de Voronoi de la Geometría Computacional así como una versión discreta del modelo de Downs de la Economía Política. Se han establecido condiciones que deben satisfacer las posiciones de equilibrio y los resultados son comparados con los establecidos en el juego de Downs continuo bidimensional.

Para asociar el modelo a una situación política real, hemos dividido los votantes en un número finito de tipos representados por puntos específicos del plano. Cada partido elige una posición en dicho plano que representa la política a ofrecer y recibe la mayor ganancia cuando minimiza la distancia euclídea a la mayor parte de votantes. Este tratamiento, junto con la utilización de herramientas geométricas para la búsqueda de puntos de equilibrio, representa la novedad del trabajo.

El estudio de las posiciones de equilibrio se ha desarrollado en dos casos, arrojando los mismos resultados de no existencia o unicidad: votantes igualmente distribuidos, tipos de votantes con distintos pesos. De esta forma, en los dos casos los dos partidos deberían converger en sus programas hacia la única posición de equilibrio que puede existir ofreciendo alternativas muy parecidas a los votantes.

Pese a que este trabajo representa una simplificación (modelo de dos partidos), en la actualidad se adecua a la mayoría de las situaciones políticas en los países. En gran parte de las democracias se tienen dos partidos mayoritarios y se observa que en general, las políticas que ofrecen son, esencialmente las mismas.

Para escapar de esta situación de no existencia de equilibrio en la mayoría de las situaciones, hemos propuesto una definición de un nuevo equilibrio que representa una debilitación de la definición clásica. En él se garantiza la imposibilidad de aumentar la ganancia en más de un elemento. Este equilibrio débil puede ser de utilidad en los estudios donde no exista equilibrio de Nash.

Como las posiciones de equilibrio débil son regiones del plano, ofrecen infinitas posiciones para los partidos que compiten, contrastando así con la unicidad de las posiciones para el equilibrio de Nash cuando existe.

Esta nueva definición de equilibrio puede aplicarse a numerosos estudios de competición donde un tratamiento discreto sea apropiado y la variación en un solo elemento no afecte de manera significativa a los resultados.

Todo el estudio llevado a cabo se ha desarrollado aplicando técnicas y herramientas de la Geometría Computacional como pueden ser los cierres convexos. De esta forma, el trabajo representa una interacción entre las dos disciplinas (Economía Política y Geometría Computacional) que puede dar grandes frutos.

6. REFERENCIA BIBLIOGRÁFICAS

[1] Abellanas, M., Lillo, I., López, M., Rodrigo, J. (2006) Electoral strategies in a dynamical democratic system: geometric models. European Journal of Operational Research, 175, 870–878.

[2] de Berg, M., van Kreveld, M., Overmars, M., Schwarzkopf, O. (1997). Computational Geometry: Algorithms and Applications (2nd ed.),Springer, New York.

[3] Black D. (1958). The Theory of Comminttees and Elections. Cambridge University Press.

[4] Downs, A. (1957). An Economic Theory of Democracy. Harper and Row.

[5] Enelow, J., Hinich, M. (1982). Nonspatial candidate characteristics and electoral competition. Journal of Politics, 44, 115–130.

[6] Erdõs, P., Lovász, L., Simmons, A. and Strauss, E. G. (1973). Dissection graphs of planar point sets, in A Survey of Combinatorial Theory, J. N. Srivastava, editor, North-Holland, 139-154.

[7] Hinich, M.H., Munger, M.G. (1995). Ideology and the Theory of Political Choice. Ann Arbor: University of Michigan Press.

[8] Hinich M, Pollard W. (1981). A new Approach to the spatial Theory of Electoral Competition.American Journal of Political Science 25: 323-341.

[9] Lillo I, López M, Rodrigo J. (2005). Estudio geométrico del equilibrio en un modelo discreto del juego de Downs. XIII Jornadas ASEPUMA 2005. Primer encuentro internacional. La Coruña.

[10] Lillo I, López M, Rodrigo J. (2007). Geometric study of the Nash equilibrium in a weighted case. Applied Mathematical Sciences 55, Vol 1, 2715-2725.

[11] Nash, J. (1951). Non-cooperative games. Annals of Mathematics, 54, 286–295.

[12] Persson, T., Tabellini, G. (1999). Political Economics and Public Finance. NBER Working Papers Series. Handbook of Public Economics, vol III.

[13] Roemer, J. (2001). Political Competition. Harvard University Press.

[14] Shepsle K, Weingast B. (1981). Structure Inducted Equilibrium and Legislative Choice. Public Choice 37: 503-19.

[15] Wendell, R.E., McKelvery, R.D. (1981). New perspectives in competitive location theory. European Journal of Operational Research, 6, 174-182.