SOBRE MEDIDAS DE $\mathcal{T}$-INCOMPATIBILIDAD PARA CONJUNTOS BORROSOS DE ATANASSOV

Elena E. Castiñeira[1] **Susana Cubillo**[1] **Wilmer Montilla**[2]

[1] Dpto. Matemática Aplicada, Facultad de Informática, Universidad Politécnica de Madrid (UPM) 28660, Boadilla del Monte, Madrid. {ecastineira, scubillo}@fi.upm.es

[2] Área de Matemática, Universidad Nacional Abierta, 5201 Venezuela, wilmer-montilla@hotmail.com

Resumen

Continuando con el estudio sobre la incompatibilidad entre conjuntos borrosos de Atanassov iniciado en [5], en este artículo se presentan distintas formas de medir la incompatibilidad, bien sea considerando la familia de t-normas intuicionistas t-representables mediante t-normas y t-conormas conjugadas, respectivamente, con la t-norma y t-conorma de Łukasiewicz, o bien tomando otra familia de t-normas intuicionistas no representables. Por último, se muestran varios resultados en los que se evidencia la relación entre las distintas medidas de incompatibilidad propuestas.

Palabras Clave: Conjuntos borrosos intuicionistas de Atanassov, t-normas intuicionistas, t-normas intuicionistas representables, medidas de incompatibilidad.

1 PRELIMINARES

Un conjunto borroso intuicionista de Atanassov (AIFS) A sobre un universo E [2, 3] es un conjunto borroso en el sentido de Goguen (véase [10]) cuya función de $\mathbb{L}$-pertenencia es $\chi^A : E \to \mathbb{L}$ dada por $\chi^A(x) = (\mu_A(x), \nu_A(x))$, con $(\mathbb{L}, \leq_{\mathbb{L}})$ tal que $\mathbb{L} = \{(a_1, a_2) \in [0,1]^2 \mid a_1 + a_2 \leq 1\}$ y el orden $\leq_{\mathbb{L}}$ definido como:

$$\overline{a} = (a_1 a_2) \leq_{\mathbb{L}} (b_1, b_2) = \overline{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \leq b_1, \\ a_2 \geq b_2, \end{cases}$$

donde $0_{\mathbb{L}} = (0,1)$ y $1_{\mathbb{L}} = (1,0)$ son, respectivamente, los elementos mínimo y máximo de $(\mathbb{L}, \leq_{\mathbb{L}})$. El conjunto de todos los AIFSs es isomorfo al de sus funciones de $\mathbb{L}$-pertenencia, que se representa por $\mathbb{L}^E$.

Para extender la noción de incompatibilidad a los AIFSs es necesario, al igual que en el caso borroso, contar con instrumentos que modelen la intersección. Así, en [6, 8] se define el concepto de t-norma intuicionista de la siguiente manera.

Definición 1.1 *Una t-norma intuicionista es una operación binaria $\mathcal{T} : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{L}$ que es conmutativa, asociativa, monótona y con $1_{\mathbb{L}}$ como elemento neutro, es decir, $\mathcal{T}(\overline{a}, 1_{\mathbb{L}}) = \overline{a}$ para todo $\overline{a} \in L$.*

En [6], Cornelis y Deschrijver observan que se pueden construir t-normas intuicionistas usando convenientemente t-normas y t-conormas (recordemos que son operaciones binarias en $[0,1]$ conmutativas, asociativas, monótonas y con elemento neutro 1 y 0, respectivamente -véase, por ejemplo, [1, 11]-). Desafortunadamente, el recíproco no siempre es cierto, por lo que para distinguir entre estos dos tipos de t-normas intuicionistas, Deschrijver *et al.* en [8] y [9] proponen la noción de t-representabilidad.

Definición 1.2 ([8, 9]) *Una t-norma intuicionista $\mathcal{T}$ se dice t-representable si existen una t-norma T y una t-conorma S tales que $\mathcal{T}(\overline{a}, \overline{b}) = (T(a_1, b_1), S(a_2, b_2))$, $\forall \overline{a} = (a_1, a_2), \overline{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{L}$.*

A las t-normas intuicionistas que no cumplen la condición anterior se les llama no representables. Ahora estamos en condiciones de introducir la definición de incompatibilidad entre AIFSs:

Definición 1.3 ([4]) *Sea $\mathcal{T} : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{L}$ una t-norma intuicionista, diremos que dos conjuntos borrosos de Atanassov A y B, o alternativamente sus funciones de $\mathbb{L}$-pertenencia $\chi^A = (\mu_A, \nu_A), \chi^B = (\mu_B, \nu_B) \in \mathbb{L}^E$, son $\mathcal{T}$-incompatibles si $\mathcal{T}(\chi^A(x), \chi^B(x)) = 0_{\mathbb{L}}$ para todo $x \in E$.*

De forma análoga al caso borroso, no es suficiente con señalar que dos conjuntos de Atanassov son $\mathcal{T}$-incompatibles, o no lo son; por ello, a continuación se introducen los axiomas mínimos que una función debería cumplir para medir el grado de $\mathcal{T}$-incompatibilidad entre dos conjuntos de Atanassov.

Definición 1.4 ([5]) *Sea $\mathcal{T} : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{L}$ una t-norma intuicionista. Se dice que $I_{\mathcal{T}} : \mathbb{L}^E \times \mathbb{L}^E \to [0,1]$ es una medida de $\mathcal{T}$-incompatibilidad si verifica las siguientes condiciones:*

(i) $I_{\mathcal{T}}(\chi^{0_{\mathbb{L}}}, \chi^{0_{\mathbb{L}}}) = 1$, *siendo* $\chi^{0_{\mathbb{L}}}(x) = 0_{\mathbb{L}}$, $\forall x \in E$.

(ii) $I_{\mathcal{T}}(\chi^A, \chi^B) = 0$, *si existe* $x \in E$ *tal que* $\mathcal{T}(\chi^A(x), \chi^B(x)) \neq 0_{\mathbb{L}}$.

(iii) Simetría: $I_{\mathcal{T}}(\chi^A, \chi^B) = I_{\mathcal{T}}(\chi^B, \chi^A), \forall \chi^A, \chi^B \in \mathbb{L}^E$.

(iv) Antimonotonía: Dados $\chi^A, \chi^B \in \mathbb{L}^E$ *con* $\chi^A \leq_{\mathbb{L}} \chi^B$ *se tiene que* $I_{\mathcal{T}}(\chi^B, \chi^C) \leq I_{\mathcal{T}}(\chi^A, \chi^C)$ *para todo* $\chi^C \in \mathbb{L}^E$.

2 MEDIDAS DE $\mathcal{T}_{W_\varphi W^*_\varphi}$-INCOMPATIBILIDAD

En esta sección estudiaremos algunas funciones que miden la incompatibilidad respecto a t-normas intuicionistas t-representables asociadas a conectivos conjugados de los de Łukasiewicz. Es decir, si para cualesquiera $a, b \in [0,1]$, $W(a,b) = \mathrm{Max}(0, a+b-1)$ y $W^*(a,b) = \mathrm{Min}(a+b, 1)$ definen la t-norma y la t-conorma de Łukasiewicz, respectivamente, y φ es un automorfismo de orden del intervalo unidad ($\varphi : [0,1] \to [0,1]$ es una función biyectiva y creciente), consideraremos la t-norma t-representable mediante los conectivos conjugados con W y W^* mediante φ, o *φ-conjugados*, $W_\varphi = \varphi^{-1} \circ W \circ (\varphi \times \varphi)$ y $W^*_\varphi = \varphi^{-1} \circ W^* \circ (\varphi \times \varphi)$, i.e. $\mathcal{T}_{W_\varphi W^*_\varphi}(\overline{a}, \overline{b}) = \big((\varphi^{-1} \circ W)(\varphi(a_1), \varphi(b_1)), (\varphi^{-1} \circ W^*)(\varphi(a_2), \varphi(b_2))\big)$ para cualesquiera $\overline{a} = (a_1, a_2), \overline{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{L}$.

Obsérvese que dos AIFSs $\chi^A = (\mu_A, \nu_A), \chi^B = (\mu_B, \nu_B) \in \mathbb{L}^X$ son $\mathcal{T}_{W_\varphi W^*_\varphi}$-incompatibles si y sólo si para todo $x \in E$ se verifica que $W_\varphi(\mu_A(x), \mu_B(x)) = 0$ y $W^*_\varphi(\nu_A(x), \nu_B(x)) = 1$, lo que equivale a que

$$\forall x \in E \begin{cases} \varphi(\mu_A(x)) + \varphi(\mu_B(x)) \leq 1 \\ \varphi(\nu_A(x)) + \varphi(\nu_B(x)) \geq 1 \end{cases} \tag{1}$$

Por lo que si consideramos las regiones en $[0,1]^2$:

$$\begin{aligned} R_\varphi &= \{(a,b) \in [0,1]^2 \mid \varphi(a) + \varphi(b) \leq 1\} \\ R^*_\varphi &= \{(a,b) \in [0,1]^2 \mid \varphi(a) + \varphi(b) \geq 1\}, \end{aligned} \tag{2}$$

se tiene que χ^A y χ^B son $\mathcal{T}_{W_\varphi W^*_\varphi}$-incompatibles si y sólo si, para todo $x \in E$, se verifica que $(\mu_A(x), \mu_B(x)) \in R_\varphi$ y $(\nu_A(x), \nu_B(x)) \in R^*_\varphi$; por ello tiene sentido denominar a R_φ y R^*_φ *regiones de $\mathcal{T}_{W_\varphi W^*_\varphi}$-incompatibilidad.* Esta observaciones sugieren que una posible forma de cuantificar la incompatibilidad sería medir, con la distancia euclídea, cuánto falta para que (μ_A, μ_B) ó (ν_A, ν_B) alcancen la frontera entre las regiones de incompatibilidad (véase Fig. 1).

Así, se tiene la familia de funciones, dependiente de la familia de automorfismos de orden en $[0,1]$, dada en la siguiente proposición e introducida en [5], que es una familia de medidas de incompatibilidad como a continuación probaremos.

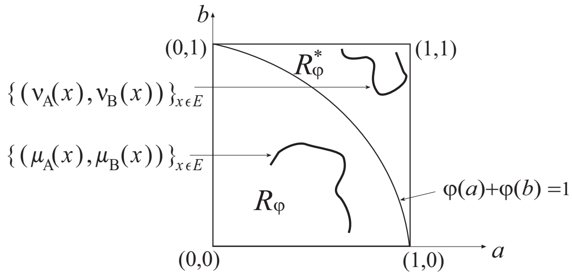

Figura 1: Regiones de $\mathcal{T}_{W_\varphi W^*_\varphi}$-incompatibilidad y AIFSs χ^A y χ^B $\mathcal{T}_{W_\varphi W^*_\varphi}$-incompatibles

Proposición 2.1 *Sean φ un automorfismo de orden de $[0,1]$ y W_φ, W^*_φ la t-norma y la t-conorma φ-conjugadas con las de Łukasiewicz. Considérense la t-norma t-representable asociada a W_φ y W^*_φ, $\mathcal{T}_{W_\varphi W^*_\varphi}$, y la función $I_{W_\varphi W^*_\varphi} : \mathbb{L}^E \times \mathbb{L}^E \to [0,1]$ definida, para cada $\chi^A = (\mu_A, \nu_A), \chi^B = (\mu_B, \nu_B) \in L^E$, por*

$$I_{W_\varphi W^*_\varphi}(\chi^A, \chi^B) =$$

$$\mathrm{Min}\left(\frac{\operatorname*{Inf}_{x\in E} d\big((\mu_A(x), \mu_B(x)), R^*_\varphi\big)}{d((0,0), R^*_\varphi)}, \frac{\operatorname*{Inf}_{x\in E} d((\nu_A(x), \nu_B(x)), R_\varphi)}{d((1,1), R_\varphi)} \right),$$

donde d es la distancia euclídea, y R_φ y R^*_φ son las regiones de $\mathcal{T}_{W_\varphi W^*_\varphi}$-incompatibilidad definidas en (2). Se verifica que $I_{W_\varphi W^*_\varphi}$ es una medida de $\mathcal{T}_{W_\varphi W^*_\varphi}$-incompatibilidad.

Demostración. (i) $I_{W_\varphi W^*_\varphi}(\chi^{0_{\mathbb{L}}}, \chi^{0_{\mathbb{L}}}) = 1$ se comprueba trivialmente.

(ii) Sean $\chi^A, \chi^B \in \mathbb{L}^E$, y supongamos que existe $x \in E$ tal que $\mathcal{T}_{W_\varphi W^*_\varphi}(\chi^A(x), \chi^B(x)) \neq 0_{\mathbb{L}}$, esto es, $W_\varphi(\mu_A(x), \mu_B(x)) > 0$ ó $W^*_\varphi(\nu_A(x), \nu_B(x)) < 1$, o lo que es lo mismo $\varphi(\mu_A(x)) + \varphi(\mu_B(x)) > 1$ ó $\varphi(\nu_A(x)) + \varphi(\nu_B(x)) < 1$, es decir $(\mu_A(x), \mu_B(x)) \in R^*_\varphi$ ó $(\nu_A(x), \nu_B(x)) \in R_\varphi$. Así, $I_{W_\varphi W^*_\varphi}(\chi^A, \chi^B) = 0$.

(iii) Sean $\chi^A, \chi^B \in \mathbb{L}$. Dado que $(a,b) \in R_\varphi$ si y sólo si $(b,a) \in R_\varphi$ (i. e. R_φ es simétrica respecto a $a+b=1$), y lo mismo sucede con R^*_φ, entonces para todo $x \in E$ se verifica que

$$\begin{aligned} d\big((\mu_A(x), \mu_B(x)), R^*_\varphi\big) &= \operatorname*{Inf}_{(a,b)\in R^*_\varphi} d\big((\mu_A(x), \mu_B(x)), (a,b)\big) \\ &= \operatorname*{Inf}_{(b,a)\in R^*_\varphi} d\big((\mu_B(x), \mu_A(x)), (b,a)\big) \\ &= d\big((\mu_B(x), \mu_A(x)), R^*_\varphi\big) \end{aligned}$$

De la misma manera, se obtiene que $d\left((\nu_A(x),\nu_B(x)),R_\varphi\right) = d\left((\nu_B(x),\nu_A(x)),R_\varphi\right)$. Por tanto, se concluye que $I_{W_\varphi W_\varphi^*}$ es simétrica.

(iv) Sean $\chi^A,\chi^B,\chi^C \in \mathbb{L}^E$ tales que $\chi^A \leq_{\mathbb{L}} \chi^B$. Para probar la antimonotonía de $I_{W_\varphi W_\varphi^*}$ es suficiente probar que para todo $x \in E$ se satisfacen las desigualdades $d\left((\mu_A(x),\mu_C(x)),R_\varphi^*\right) \geq d\left((\mu_B(x),\mu_C(x)),R_\varphi^*\right)$ y $d\left((\nu_A(x),\nu_C(x)),R_\varphi\right) \geq d\left((\nu_B(x),\nu_C(x)),R_\varphi\right)$. Veamos que así es.

Si $d\left((\mu_A(x),\mu_C(x)),R_\varphi^*\right) = 0$, se tiene que $(\mu_A(x),\mu_C(x)) \in R_\varphi^*$, por ser R_φ^* cerrado, luego $\varphi(\mu_A(x))+\varphi(\mu_C(x)) \geq 1$. Además, de $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$, para todo $x \in E$, se sigue que $\varphi(\mu_B(x))+\varphi(\mu_C(x)) \geq 1$, esto es, $(\mu_B(x),\mu_C(x)) \in R_\varphi^*$, y por lo tanto, $d\left((\mu_B(x),\mu_C(x)),R_\varphi^*\right) = 0$.

Si $d\left((\mu_A(x),\mu_C(x)),R_\varphi^*\right) > 0$, entonces, dado que R_φ^* es un conjunto compacto, la distancia se alcanza en la frontera de R_φ^*, que denotaremos por $B(R_\varphi^*)$. Sea $(a^*,b^*) \in B(R_\varphi^*)$ el punto tal que

$$d\left((\mu_A(x),\mu_C(x)),R_\varphi^*\right) = d\left((\mu_A(x),\mu_C(x)),(a^*,b^*)\right)$$

y sean los tres segmentos siguientes contenidos en el segmento $[\mu_A(x),1] \times \{\mu_C(x)\}$ (véase Fig. 2):

$$I_1 = [\mu_A(x),a^*] \times \{\mu_C(x)\},$$

$$I_2 = [a^*,\varphi^{-1}(1-\varphi(\mu_C(x))] \times \{\mu_C(x)\},$$

$$I_3 = [\mu_A(x),1] \times \{\mu_C(x)\} \cap R_\varphi^*.$$

Dado que $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ para todo $x \in E$, se tiene que $(\mu_B(x),\mu_C(x)) \in [\mu_A(x),1]\times\{\mu_C(x)\} = I_1 \cup I_2 \cup I_3$

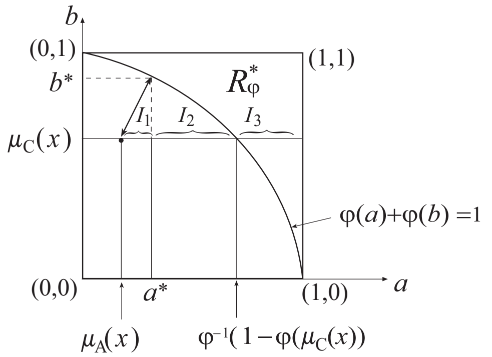

Figura 2: Segmentos I_1, I_2 e I_3 y $d((\mu_A(x),\mu_C(x)),R_\varphi^*)$

Así hay tres posibilidades:

a) Si $(\mu_B(x),\mu_C(x)) \in I_1$ entonces $\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \leq a^*$ y así $0 \leq a^*-\mu_B(x) \leq a^*-\mu_A(x)$, por lo que $(a^*-\mu_B(x))^2 \leq (a^*-\mu_A(x))^2$ y

$$\begin{aligned} d\left((\mu_B(x),\mu_C(x)),R_\varphi^*\right) &\leq \\ &\leq d\left((\mu_B(x),\mu_C(x)),(a^*,b^*)\right) \\ &= \sqrt{(a^*-\mu_B(x))^2+(b^*-\mu_C(x))^2} \\ &\leq \sqrt{(a^*-\mu_A(x))^2+(b^*-\mu_C(x))^2} \\ &= d\left((\mu_A(x),\mu_C(x)),R_\varphi^*\right). \end{aligned}$$

b) Si $(\mu_B(x),\mu_C(x)) \in I_2$ entonces

$$\begin{aligned} d\left((\mu_B(x),\mu_C(x)),R_\varphi^*\right) &\leq \\ &\leq d\left((\mu_B(x),\mu_C(x)),(\mu_B(x),\varphi^{-1}(1-\varphi(\mu_B(x))))\right) \\ &= \varphi^{-1}(1-\varphi(\mu_B(x)))-\mu_C(x). \end{aligned}$$

Además, $a^* \leq \mu_B(x)$ implica que $b^* = \varphi^{-1}(1-\varphi(a^*)) \geq \varphi^{-1}(1-\varphi(\mu_B(x)))$ y así $\varphi^{-1}(1-\varphi(\mu_B(x)))-\mu_C(x) \leq b^*-\mu_C(x) \leq \sqrt{(a^*-\mu_A(x))^2+(b^*-\mu_C(x))^2} = d\left((\mu_A(x),\mu_C(x)),R_\varphi^*\right)$.

c) Si $(\mu_B(x),\mu_C(x)) \in I_3$ entonces $d\left((\mu_B(x),\mu_C(x)),R_\varphi^*\right) = 0 \leq d\left((\mu_A(x),\mu_C(x)),R_\varphi^*\right)$.

De la misma forma, se prueba que $d\left((\nu_A(x),\nu_C(x)),R_\varphi\right) \geq d\left((\nu_B(x),\nu_C(x)),R_\varphi\right)$.

Luego, ha quedado demostrado que $I_{W_\varphi W_\varphi^*}$ es una medida de $\mathcal{T}_{W_\varphi W_\varphi^*}$-incompatibilidad. □

El resto de esta sección se dedica a construir otras funciones para medir la $\mathcal{T}_{W_\varphi W_\varphi^*}$-incompatibilidad. En primer lugar, continuaremos con medidas definidas a través de la distancia euclídea y las regiones de incompatibilidad; y, finalmente, construiremos otra función aplicando otro punto de vista.

Observación 2.2 Sea φ un *automorfismo de orden recíproco* del intervalo unidad, esto es, un automorfismo de orden que cumpla con la condición $\varphi(1-t) = 1-\varphi(t)$ para todo $t \in [0,1]$. Si $\chi^A = (\mu_A,\nu_A), \chi^B = (\mu_B,\nu_B) \in \mathbb{L}^E$ son $\mathcal{T}_{W_\varphi W_\varphi^*}$-incompatibles, entonces la segunda desigualdad de (1) es equivalente a $1 \geq \varphi(1-\nu_A(x))+\varphi(1-\nu_B(x))$ para todo $x \in E$. Por lo tanto, χ^A y χ^B son $\mathcal{T}_{W_\varphi W_\varphi^*}$-incompatibles, si y sólo si, para todo $x \in E$, se verifica que $(\mu_A(x),\mu_B(x)) \in R_\varphi$ y $(1-\nu_A(x),1-\nu_B(x)) \in R_\varphi$.

Esta observación sugiere construir otra familia de medidas de incompatibilidad asociada ahora a la familia de automorfismos recíprocos del intervalo unidad, considerando sólo la región R_φ^*, como indica la siguiente proposición, cuya demostración es similar a la anterior.

Proposición 2.3 *Sean φ un automorfismo de orden recíproco del intervalo unidad y $\mathcal{T}_{W_\varphi W_\varphi^*}$ la t-norma t-representable asociada a W_φ y W_φ^*, siendo W_φ, W_φ^* la t-norma y la t-conorma φ-conjugadas con las de Lukasiewicz. Considérese $I^2_{W_\varphi W_\varphi^*} : \mathbb{L}^E \times \mathbb{L}^E \to [0,1]$*

tal que para cada $\chi^A = (\mu_A, \nu_A), \chi^B = (\mu_B, \nu_B) \in \mathbb{L}^E$,

$$I^2_{W_\varphi W^*_\varphi}(\chi^A,\chi^B) = \mathrm{Min}\left(\frac{\operatorname*{Inf}_{x\in E} d\left((\mu_A(x), \mu_B(x)), R^*_\varphi\right)}{d((0,0), R^*_\varphi)}, \frac{\operatorname*{Inf}_{x\in E} d\left((1-\nu_A(x), 1-\nu_B(x)), R^*_\varphi\right)}{d((0,0), R^*_\varphi)} \right),$$

donde d es la distancia euclídea y R^*_φ la región definida (2). Se verifica que $I^2_{W_\varphi W^*_\varphi}$ es una medida de $\mathcal{T}_{W_\varphi W^*_\varphi}$-incompatibilidad.

En la proposición anterior se ha limitado el resultado a automorfismos recíprocos, ya que de lo contrario no se cumpliría la condición (ii) de la definición de medidas de $\mathcal{T}$-incompatibilidad. Por ejemplo, si para todo $x \in E$ es $\chi^A(x) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ y $\chi^B(x) = (\frac{1}{8}, \frac{1}{2})$, y considerando el automorfismo $\varphi(a) = a^2$, se tiene que χ^A y χ^B no son $\mathcal{T}_{W_\varphi W^*_\varphi}$-incompatibles, pero $I^2_{W_\varphi W^*_\varphi}(\chi^A, \chi^B)$ es mayor que cero. Por ello, para salvar este inconveniente se propone la siguiente familia de medidas de $\mathcal{T}_{W_\varphi W^*_\varphi}$-incompatibilidad.

Proposición 2.4 *Sean φ un automorfismo de orden de $[0,1]$ y W_φ, W^*_φ las t-norma y t-conorma φ-conjugadas con las de Łukasiewicz. Si $\mathcal{T}_{W_\varphi W^*_\varphi}$ es la t-norma t-representable asociada a W_φ y W^*_φ, considérese $I^3_{W_\varphi W^*_\varphi} : \mathbb{L}^E \times \mathbb{L}^E \to [0,1]$ tal que para cada $\chi^A = (\mu_A, \nu_A), \chi^B = (\mu_B, \nu_B) \in L^E$,*

$$I^3_{W_\varphi W^*_\varphi}(\chi^A,\chi^B) = \mathrm{Min}\left(\frac{\operatorname*{Inf}_{x\in E} d\left((\mu_A(x), \mu_B(x)), R^*_\varphi\right)}{d((0,0), R^*_\varphi)}, \frac{\operatorname*{Inf}_{x\in E} d\left((\varphi^{-1}(1-\varphi(\nu_A(x))), \varphi^{-1}(1-\varphi(\nu_B(x)))), R^*_\varphi\right)}{d((0,0), R^*_\varphi)} \right),$$

donde d es la distancia euclídea y R^*_φ la región definida en (2). Entonces, $I^3_{W_\varphi W^*_\varphi}$ es una medida de $\mathcal{T}_{W_\varphi W^*_\varphi}$-incompatibilidad.

Nótese que esta función mide la mínima distancia a la región R^*_φ de los conjuntos imagen $Im(\mu_A \times \mu_B)$ e $Im(N_\varphi \circ \nu_A \times N_\varphi \circ \nu_B)$, siendo $N_\varphi(a) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(a))$, que es una negación fuerte (isomorfismo de $[0,1]$ decreciente e involutivo).

Observación 2.5 Si φ es una automorfismo de orden recíproco de $[0,1]$, entonces las medidas $I^2_{W_\varphi W^*_\varphi}$ y $I^3_{W_\varphi W^*_\varphi}$, construidas en las proposiciones anteriores, coinciden.

Finalizamos esta sección con otra forma de medir la $\mathcal{T}_{W_\varphi W^*_\varphi}$-incompatibilidad motivada de manera diferente a las anteriores. Sabemos que $\chi^A = (\mu_A, \nu_A), \chi^B = (\nu_B, \nu_B) \in \mathbb{L}^E$ son $\mathcal{T}_{W_\varphi W^*_\varphi}$-incompatibles si y sólo si se verifican las inecuaciones de (1), pero esto es equivalente a que

$$\operatorname*{Sup}_{x\in E} (\varphi(\mu_A(x)) + \varphi(\mu_B(x))) \leq 1$$
$$\operatorname*{Inf}_{x\in E} (\varphi(\nu_A(x)) + \varphi(\nu_B(x))) \geq 1$$

Por ello, tiene sentido cuantificar la incompatibilidad calculando cuánto falta para que una de las anteriores desigualdades no se cumpla. Así, se tiene el siguiente resultado, cuya prueba sigue técnicas parecidas a las de la proposición 3.2

Proposición 2.6 *Sean φ un automorfismo del intervalo unidad y W_φ, W^*_φ las t-norma y t-conorma conjugadas a las de Łukasiewicz mediante φ. Si $\mathcal{T}_{W_\varphi W^*_\varphi}$ es la t-norma t-representable asociada con W_φ y W^*_φ, considérese $I^4_{W_\varphi W^*_\varphi} : \mathbb{L}^E \times \mathbb{L}^E \to [0,1]$ tal que para $\chi^A = (\mu_A, \nu_A), \chi^B = (\mu_B, \nu_B) \in \mathbb{L}^E$, es $I^4_{W_\varphi W^*_\varphi}(\chi^A, \chi^B) = \mathrm{Max}\left(0, \mathrm{Min}\left(1 - \operatorname*{Sup}_{x\in E}(\varphi(\mu_A(x)) + \varphi(\mu_B(x))), \operatorname*{Inf}_{x\in E}(\varphi(\nu_A(x)) + \varphi(\nu_B(x)) - 1)\right)\right)$. Se verifica que $I^4_{W_\varphi W^*_\varphi}$ es una medida de $\mathcal{T}_{W_\varphi W^*_\varphi}$-incompatibilidad.*

3 MEDIDAS DE $\mathcal{T}_{W_\varphi}$-INCOMPATIBILIDAD

Sea φ un automorfismo de orden del intervalo unidad y consideremos la t-norma intuicionista no representable [4, 8] definida para $(\bar{a}, \bar{b}) = (a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{L}^2$ por

$$\mathcal{T}_{W_\varphi}(\bar{a}, \bar{b}) = \begin{cases} \bar{a} & \text{si } \bar{b} = 1_{\mathbb{L}} \\ \bar{b} & \text{si } \bar{a} = 1_{\mathbb{L}} \\ \left(W_\varphi(a_1, b_1), W^*_\varphi(N_\varphi(a_1), N_\varphi(b_1))\right) & \text{e.o.c} \end{cases} \quad (3)$$

Al igual que en la sección anterior, para cada automorfismo de orden de $[0,1]$ construiremos dos medidas de $\mathcal{T}_{W_\varphi}$-incompatibilidad según las dos distintas vías anteriores.

Observemos que $\chi^A = (\mu_A, \nu_A), \chi^B = (\mu_B, \nu_B) \in \mathbb{L}^E$ son $\mathcal{T}_{W_\varphi}$-incompatibles si y sólo si alguno de ellos es $\chi^{0_{\mathbb{L}}}$ o si para todo $x \in E$, $(W_\varphi(\mu_A(x), \mu_B(x)), W^*_\varphi(N_\varphi(\mu_A(x)), N_\varphi(\mu_B(x)))) = 0_{\mathbb{L}}$, lo que equivale a que $\varphi(\mu_A(x)) + \varphi(\mu_B(x)) \leq 1$. Por tanto, χ^A, χ^B son $\mathcal{T}_{W_\varphi}$-incompatibles si y sólo si, para todo $x \in E$, $(\mu_A(x), \mu_B(x)) \in R_\varphi$, siendo R_φ la región definida en (1), por lo que R_φ también será la *región de $\mathcal{T}_{W_\varphi}$-incompatibilidad.* Esta observación sugiere construir una familia de medidas de incompatibilidad asociada a la familia de automorfismos del intervalo unidad, considerando cuánto falta para que (μ_A, μ_B) alcance la frontera de la región de $\mathcal{T}_{W_\varphi}$-incompatibilidad con R^*_φ. Veamos:

Proposición 3.1 *Sea $\mathcal{T}_{W_\varphi}$ la t-norma definida en (3) y consideremos la función $I_{W_\varphi} : \mathbb{L}^E \times \mathbb{L}^E \to [0,1]$ definida para $\chi^A{=}(\mu_A,\nu_A), \chi^B{=}(\mu_B,\nu_B) \in \mathbb{L}^E$ por*

$$I_{W_\varphi}(\chi^A,\chi^B) = \frac{\operatorname*{Inf}_{x\in E} d\left((\mu_A(x),\mu_B(x)),R_\varphi^*\right)}{d((0,0),R_\varphi^*)},$$

donde d es la distancia euclídea y R_φ^* es la región definida en (2). Entonces, I_{W_φ} es una medida de $\mathcal{T}_{W_\varphi}$-incompatibilidad.

Proposición 3.2 *Sea $\mathcal{T}_{W_\varphi}$ la t-norma definida en (3). La función $I^2_{W_\varphi} : \mathbb{L}^E \times \mathbb{L}^E \to [0,1]$ definida para cada $\chi^A{=}(\mu_A,\nu_A), \chi^B{=}(\mu_B,\nu_B) \in \mathbb{L}^E$ por*

$$I^2_{W_\varphi}(\chi^A,\chi^B) = \operatorname{Max}\left(0, 1 - \operatorname*{Sup}_{x\in E}(\varphi(\mu_A(x)) + \varphi(\mu_B(x)))\right),$$

es una medida de $\mathcal{T}_{W_\varphi}$-incompatibilidad.

Demostración. Es trivial comprobar que $I^2_{W_\varphi}(\chi^{0_L},\chi^{0_L}) = 1$.

(ii) Sean $\chi^A, \chi^B \in \mathbb{L}^E$, y supongamos que existe $x \in E$ tal que $\mathcal{T}_{W_\varphi}(\chi^A(x),\chi^B(x)) \neq 0_{\mathbb{L}}$, se verifica:

a) Si $\chi^A(x) = 1_{\mathbb{L}}$ ó $\chi^B(x) = 1_{\mathbb{L}}$, entonces $\mu_A(x) = 1$ ó $\mu_B(x) = 1$, y así $\operatorname*{Sup}_{x\in E}(\varphi(\mu_A(x)) + \varphi(\mu_B(x))) \geq 1$.

b) Si $\chi^A(x) \neq 1_{\mathbb{L}}$ y $\chi^B(x) \neq 1_{\mathbb{L}}$, $\mathcal{T}_{W_\varphi}(\chi^A(x),\chi^B(x)) = (W_\varphi(\mu_A(x),\mu_B(x)), W_\varphi^*(N_\varphi(\mu_A(x)), N_\varphi(\mu_B(x)))) \neq 0_{\mathbb{L}}$, lo que implica que $\varphi(\mu_A(x)) + \varphi(\mu_B(x)) > 1$ ó $\varphi(\varphi^{-1}(1-\varphi(\mu_A(x)))) + \varphi(\varphi^{-1}(1-\varphi(\mu_B(x)))) < 1$, por lo que $\operatorname*{Sup}_{x\in E}(\varphi(\mu_A(x)) + \varphi(\mu_B(x))) > 1$.

Por consiguiente, tanto si se da a) como b), se obtiene que $I^2_{W_\varphi}(\chi^A,\chi^B) = 0$.

(iii) Que $I^2_{W_\varphi}$ es simétrica es inmediato por definición.

(iv) Sean $\chi^A, \chi^B, \chi^C \in \mathbb{L}^E$ tales que $\chi^A \leq_{\mathbb{L}} \chi^B$, entonces $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ para todo $x \in E$, y por ser φ creciente $\varphi(\mu_A(x)) \leq \varphi(\mu_B(x))$ para todo $x \in E$, de donde se tiene que

$$\operatorname{Max}\left(0, 1 - \operatorname*{Sup}_{x\in E}(\varphi(\mu_A(x)) + \varphi(\mu_C(x)))\right)$$
$$\geq \operatorname{Max}\left(0, 1 - \operatorname*{Sup}_{x\in E}(\varphi(\mu_B(x)) + \varphi(\mu_C(x)))\right).$$

Esto es, $I^2_{W_\varphi}(\chi^A,\chi^C) \geq I^2_{W_\varphi}(\chi^B,\chi^C)$.

Luego, $I^2_{W_\varphi}$ es una medida de $\mathcal{T}_{W_\varphi}$-incompatibilidad. □

4 COMPARACIÓN ENTRE LAS MEDIDAS DE INCOMPATIBILIDAD

Sea $\mathcal{T}_{W_\varphi W_\varphi^*}$ la t-norma intuicionista t-representable asociada con W_φ y W_φ^* y consideremos las cuatro medidas de $\mathcal{T}_{W_\varphi W_\varphi^*}$-incompatibilidad definidas en la Sección 2, entonces se cumple la siguiente relación:

Proposición 4.1 *Sea el automorfismo de orden $\varphi = id_{[0,1]}$. Entonces para todo $\chi^A = (\mu_A,\nu_A), \chi^B = (\mu_B,\nu_B) \in \mathbb{L}^E$ es cierto que:*

$$I_{W_\varphi W_\varphi^*}(\chi^A,\chi^B) = I^i_{W_\varphi W_\varphi^*}(\chi^A,\chi^B), \text{ para } i = 2,3,4.$$

Demostración. En efecto, dado que $\varphi = id_{[0,1]}$ es obvio que $I^2_{W_\varphi W_\varphi^*}(\chi^A,\chi^B) = I^3_{W_\varphi W_\varphi^*}(\chi^A,\chi^B)$; además

$$I^4_{W_\varphi W_\varphi^*}(\chi^A,\chi^B) = \operatorname{Max}\Big(0, \operatorname{Min}(1 - \operatorname*{Sup}_{x\in E}(\mu_A(x) + \mu_B(x)),$$
$$\operatorname*{Inf}_{x\in E}(\nu_A(x) + \nu_B(x) - 1)\Big).$$

Luego, hay tres posibilidades para $I^4_{W_\varphi W_\varphi^*}(\chi^A,\chi^B)$:

a) Si $I^4_{W_\varphi W_\varphi^*}(\chi^A,\chi^B) = 0$, entonces $1 - \operatorname*{Sup}_{x\in E}(\mu_A(x) + \mu_B(x)) \leq 0$ ó $\operatorname*{Inf}_{x\in E}(\nu_A(x) + \nu_B(x) - 1) \leq 0$.

Supongamos en primer lugar, que $1 - \operatorname*{Sup}_{x\in E}(\mu_A(x) + \mu_B(x)) \leq 0$. Si además fuese $1 < \operatorname*{Sup}_{x\in E}(\mu_A(x) + \mu_B(x))$, entonces existiría $x_0 \in E$ tal que $(\mu_A(x_0),\mu_B(x_0)) \in R_\varphi^*$, y así $I_{W_\varphi W_\varphi^*}(\chi^A,\chi^B) = 0$. Si por el contrario, fuese $1 = \operatorname*{Sup}_{x\in E}(\mu_A(x) + \mu_B(x))$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se puede encontrar $x_n \in E$ tal que $d\left((\mu_A(x_n),\mu_B(x_n)),R_\varphi^*\right) < 1/n$, con lo que $\operatorname*{Inf}_{x\in E} d\left((\mu_A(x),\mu_B(x)),R_\varphi^*\right) = 0$, y así $I_{W_\varphi W_\varphi^*}(\chi^A,\chi^B) = I^2_{W_\varphi W_\varphi^*}(\chi^A,\chi^B) = I^3_{W_\varphi W_\varphi^*}(\chi^A,\chi^B) = 0$.

Supongamos ahora que $\operatorname*{Inf}_{x\in E}(\nu_A(x) + \nu_B(x) - 1) \leq 0$. Por una parte, como antes, se llega a que $\operatorname*{Inf}_{x\in E} d\left((\nu_A(x),\nu_B(x)),R_\varphi\right) = 0$, obteniéndose que $I_{W_\varphi W_\varphi^*}(\chi^A,\chi^B) = 0$. Por otra parte, como $0 \leq 1 - \operatorname*{Inf}_{x\in E}(\nu_A(x) + \nu_B(x)) = \operatorname*{Sup}_{x\in E}(1 - \nu_A(x) - \nu_B(x))$, entonces $\operatorname*{Sup}_{x\in E}(1-\nu_A(x)) + (1-\nu_B(x)) \geq 1$, y de nuevo, como antes, $\operatorname*{Inf}_{x\in E} d\left((1-\nu_A(x), 1-\nu_B(x)),R_\varphi^*\right) = 0$, con lo que $I^2_{W_\varphi W_\varphi^*}(\chi^A,\chi^B) = I^3_{W_\varphi W_\varphi^*}(\chi^A,\chi^B) = 0$.

b) Si $0 < I^4_{W_\varphi W_\varphi^*}(\chi^A,\chi^B) = 1 - \operatorname*{Sup}_{x\in E}(\mu_A(x) + \mu_B(x))$, entonces de la primer desigualdad se tiene que $\mu_B(x) \leq 1 - \mu_A(x)$ para todo $x \in E$, y de la segunda, que $1 - \operatorname*{Sup}_{x\in E}(\mu_A(x) + \mu_B(x)) \leq \operatorname*{Inf}_{x\in E}(\nu_A(x) + \nu_B(x) - 1) = 1 - \operatorname*{Sup}_{x\in E}((1-\nu_A(x)) + (1-\nu_B(x)))$, por lo que $\operatorname*{Sup}_{x\in E}((1-\nu_A(x)) + (1-\nu_B(x))) \leq \operatorname*{Sup}_{x\in E}(\mu_A(x) + \mu_B(x)) \leq 1$; y así (véase Fig. 3):

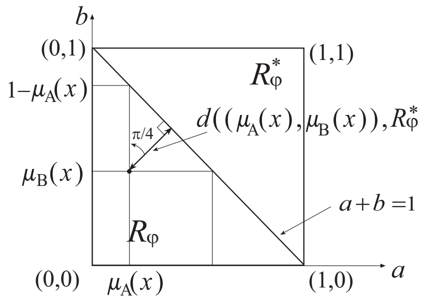

Figura 3: Distancia de $(\mu_A(x),\mu_B(x))$ a R^*_φ

$I_{W_\varphi W_\varphi^*}(\chi^A,\chi^B) = I^2_{W_\varphi W_\varphi^*}(\chi^A,\chi^B) = I^3_{W_\varphi W_\varphi^*}(\chi^A,\chi^B) = \frac{\operatorname{Inf}_{x\in E} d((\mu_A(x),\mu_B(x)),R^*_\varphi)}{d((0,0),R^*_\varphi)} = \frac{\operatorname{Inf}_{x\in E}(1-\mu_A(x)-\mu_B(x))\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = I^4_{W_\varphi W_\varphi^*}(\chi^A,\chi^B)$.

c) Si $0 < I^4_{W_\varphi W_\varphi^*}(\chi^A,\chi^B) = \operatorname{Inf}_{x\in E}(\nu_A(x)+\nu_B(x)-1)$, entonces $\nu_B(x) \geq 1-\nu_A(x)$, para todo $x\in E$, y $1-\operatorname{Sup}_{x\in E}(\mu_A(x)+\mu_B(x)) \geq \operatorname{Inf}_{x\in E}(\nu_A(x)+\nu_B(x)-1)$, por lo que (véase Fig. 4):

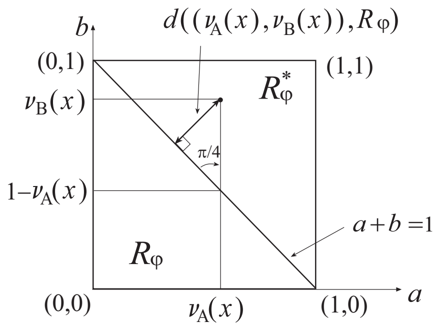

Figura 4: Distancia de $(\nu_A(x),\nu_B(x))$ a R_φ

$I_{W_\varphi W_\varphi^*}(\chi^A,\chi^B) = \frac{\operatorname{Inf}_{x\in E} d((\nu_A(x),\nu_B(x)),R_\varphi)}{d((1,1),R_\varphi)} = \frac{\operatorname{Inf}_{x\in E}(\nu_B(x)-(1-\nu_A(x)))\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = I^4_{W_\varphi W_\varphi^*}(\chi^A,\chi^B)$.

Y además, $\nu_A(x) \geq 1-\nu_B(x)$ para todo $x\in E$, por lo que para cada $x\in E$ $I^2_{W_\varphi W_\varphi^*}(\chi^A,\chi^B) = I^3_{W_\varphi W_\varphi^*}(\chi^A,\chi^B) = \frac{\operatorname{Inf}_{x\in E} d((1-\nu_A(x),1-\nu_B(x)),R^*_\varphi)}{d((0,0),R^*_\varphi)} = \frac{\operatorname{Inf}_{x\in E}(\nu_A(x)-(1-\nu_B(x)))\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = I^4_{W_\varphi W_\varphi^*}(\chi^A,\chi^B)$. $\square$

Sea $\mathcal{T}_{W_\varphi}$ la t-norma intuicionista no representable definida previamente y consideremos las dos medidas de $\mathcal{T}_{W_\varphi}$-incompatibilidad dadas en la Sección 3, entonces se cumple la siguiente relación:

Proposición 4.2 *Sea el automorfismo de orden* $\varphi = id_{[0,1]}$. *Entonces, para todos* $\chi^A = (\mu_A,\nu_A), \chi^B = (\mu_B,\nu_B) \in \mathbb{L}^E$ *es cierto* $I_{W_\varphi}(\chi^A,\chi^B) = I^2_{W_\varphi}(\chi^A,\chi^B)$.

Por último, es inmediato:

Proposición 4.3 *Dados el automorfismo de orden* $\varphi = id_{[0,1]}$ *y* $\chi^A = (\mu_A,\nu_A), \chi^B = (\mu_B,\nu_B) \in \mathbb{L}^E$. *Se tiene que si* $0 < 1-\operatorname{Sup}_{x\in E}(\mu_A(x)+\mu_B(x)) \leq \operatorname{Inf}_{x\in E}(\nu_A(x)+\nu_B(x)-1)$, *entonces es cierto que:*

$$I^i_{W_\varphi W_\varphi^*}(\chi^A,\chi^B) = I^j_{W_\varphi}(\chi^A,\chi^B), \quad i=1,..,4,\ j=1,2$$

5 CONCLUSIONES

En este trabajo se han presentado, en primer lugar, diversas funciones que miden el grado de incompatibilidad entre dos conjuntos borrosos de Atanassov, considerando para ello la familia de t-normas intuicionistas t-representables $\mathcal{T}_{W_\varphi W_\varphi^*}$ asociada con W_φ y W_φ^*. En segundo lugar, se definen diferentes medidas de incompatibilidad considerando ahora la familia de t-normas intuicionistas no representables $\mathcal{T}_{W_\varphi}$. Y finalmente, se ha estudiado la relación entre las distintas medidas de incompatibilidad propuestas.

Como inmediatas y futuras líneas de investigación que continuarían este trabajo, entre otras, señalamos las siguientes: ampliación del modelo teórico considerando axiomas que modelicen la continuidad de las medidas de compatibilidad; búsqueda de mecanismos para agregar estas medidas; relación con otras medidas borrosas, en particular, con las medidas de contradicción; investigación de su uso para evaluar los resultados en los procesos de inferencia.

Referencias

[1] C. Alsina, M. Frank, B. Schweizer. *Associative Functions: Triangular Norms and Copulas*, World Scientific (Singapore, Thailand), 2006.

[2] K. T. Atanassov. Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **20**, Pág. 87-96, 1986.

[3] K. T. Atanassov, *Intuitionistic Fuzzy Sets*, Physica-Verlag (New York, USA), 1999.

[4] E. Castiñeira, S. Cubillo. Algunas propiedades algebraicas de los conjuntos borrosos intuicionistas. *Actas del XII Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (ESTYLF)*, Pág. 297-302, Jaén, 2004.

[5] E. Castiñeira, S. Cubillo, W. Montilla. On the incompatibility between two AIFS. Aparecerá en *Proceedings of the 8th International FLINS Conference on Computational Intelligence in Decision and Control*, Madrid, 2008.

[6] C. Cornelis, G. Deschrijver. The compositional rule of inference in an intuitionitic fuzzy logic framework. *Proceedings of 13th European Summer School in Logic, Language and Information (ESSLLI)*, Pág. 83-94, Helsinki, 2001.

[7] S. Cubillo, C. Torres, E. Castiñeira. Self-contradiction and contradiction between two intuitionistic fuzzy sets. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, **16** (3), Pág. 283-300.

[8] G. Deschrijver, C. Cornelis, E. Kerre. Intuitionistic fuzzy connectives revisited. *Proceedings of IX Conference of Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (IPMU)*, Annecy (France), Pág. 1839-1844, 2002.

[9] G. Deschrijver, C. Cornelis, E. Kerre, On the Representation of Intuitionistic Fuzzy T-Norms and T-Conorms, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **12** (1), Pág. 45-61, 2004.

[10] J. A. Goguen. L-fuzzy sets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **18**, Pág. 145-174, 1967.

[11] E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap. *Triangular Norms*, Kluwer Academic Publishers (Dordrecht, Netherlands), 2000.