Anales de Mecánica de la Fractura 25, Vol. 2 (2008)

CARACTERIZACIÓN DE LA DURABILIDAD DEL HORMIGÓN SOMETIDO A CICLOS HIELO DESHIELO MEDIANTE MODELOS MICROMECÁNICOS

M. Acebes¹, Ghaida Al-Assadi², T. Sánchez³ y M. G. Hernández²

¹ Laboratorio de Ensayos Físico-Mecánicos y No Destructivos, CARTIF Parque Tecnológico de Boecillo. Parcela 205. Valladolid 20018. España E-mail: monace@cartif.es

² Departamento de Ingeniería Civil: Construcción, E.T.S.I. de Caminos, Canales y Puertos, UPM, C/ Profesor Aranguren s/n, 28040 Madrid, España. E-mail: ghaida@caminos.upm.es mglezhdez@caminos.upm.es

³ Departamento de Sistemas, Instituto de Automática Industrial, CSIC Carretera Campo Real km 0,200, La Poveda. Arganda del Rey, 28500 Madrid, España. E-mail: <u>teresa@iai.csic.es</u>

RESUMEN

En este trabajo se exponen los resultados previos de la caracterización de la durabilidad del hormigón frente a los ciclos hielo-deshielo mediante la micromecánica. Los modelos micromecánicos permiten estudiar las propiedades globales del material en función de las propiedades microestructurales de las fases constituyentes: propiedades elásticas, fracción de volumen, distribución y orientación de las heterogeneidades así como su geometría. El trabajo se divide en dos partes, un estudio teórico y una posterior validación experimental. En el estudio teórico se aborda el comportamiento de la velocidad a partir de la variación de las características microestructurales por este tipo de deterioro. Estas predicciones se han comparado con las medidas de velocidad ultrasónica, mostrando buenos resultados.

ABSTRACT

In this paper we describe several preliminary results of the characterization of the durability of concrete subjected to freezing and thawing using micromechanics. Micromecanical models allow studying the global properties of the materials according to the microstructural properties of the constituent phases: elastic properties, volume fraction, distribution and orientation of heterogeneities and their geometry. The paper is divided in two parts, a theoretical study and the corresponding experimental validation. The former shows the behaviour of the velocity varying the microstructural characteristics due to this type of deterioration. These predictions have been compared with ultrasonic velocity measurements showing good results.

PALABRAS CLAVE: ciclos hielo-deshielo, ultrasonidos, modelos micromecánicos

1. INTRODUCCIÓN

El daño provocado por los ciclos hielo-deshielo es uno de los principales problemas que presentan los hormigones en climas fríos. Las grietas y los desconchados (fisuras) son las consecuencias más comunes de los daños por dichos ciclos. El objetivo de este trabajo es caracterizar el grado de degradación del hormigón mediante una técnica no destructiva.

El método no destructivo normalizado más usado para medir el daño del hormigón durante los ciclos hielo deshielo, es el método de resonancia [1]. Recientemente, el comité RILEM ha publicado unas recomendaciones [2] para determinar la resistencia del hormigón a los daños internos producidos durante la congelación. Para eso ha recomendado dos métodos A y

B, el método A es el de resonancia, anteriormente mencionado, y el método B esta basado en la propagación de las ondas ultrasónicas. Son numerosos los trabajos publicados [3,4] en donde a partir de la medida de la velocidad se calcula el módulo de elasticidad dinámico, evaluando de esta forma el factor de durabilidad y por consiguiente el daño producido a medida que aumentan los ciclos de hielo-deshielo.

Cuando pretendemos usar la velocidad ultrasónica para la caracterización cuantitativa de la microestructura, es necesario un conocimiento detallado de la relación existente entre las propiedades de las fases y las propiedades globales del material. Esto puede ser logrado con la ayuda de la micromecánica del compuesto, que permite calcular el tensor de constantes elásticas a partir de las propiedades microestructurales:

propiedades elásticas, tamaño, geometría y orientación de las fases. Estos modelos permiten establecer una relación entre la velocidad ultrasónica y las características microestructurales del compuesto, y están basados en la teoría de Mori-Tanaka [5] y en el principio de la inclusión equivalente de Eshelby [6].

El equipo investigador de este proyecto lleva varios años trabajando en la aplicación de la micromecánica a la caracterización de materiales cementicios. En Hernández et al [7], se utilizó un modelo bifásico para evaluar el contenido de agua presente en los poros de la pasta de cemento, logrando una predicción con un error inferior al 2%. Mientras que en [8] se formuló y desarrolló un modelo trifásico que ha permitido, utilizando la medida de la velocidad ultrasónica, estimar la porosidad en una serie limitada de probetas de mortero con un error medio del 10% [9], así como caracterizar la degradación acelerada de morteros sumergidos en nitrato de amonio, logrando predecir el comportamiento de la porosidad con un error medio inferior al 5% [10].

En este trabajo se plantea la extensión del citado modelo, así como su aplicación para la caracterización del daño por ciclos hielo deshielo en hormigones. La presencia de inclusiones heterogéneas como los poros o microgrietas afecta a las propiedades mecánicas y físicas del material. El grado de cambio de estas propiedades dependerá de características tales como la fracción de volumen, geometría y orientación de las inclusiones.

2. MODELO MICROMECÁNICO TETRAFÁSICO

Consideremos un material heterogéneo, formado por una matriz y diferentes tipos de inclusiones, al cual se le aplica una fuerza o deformación. A partir de las formulaciones de los modelos bifásico y trifásico expuestos en [7, 8], se ha observado que las propiedades elásticas del material heterogéneo son función de las propiedades elásticas, fracciones de volumen y distribución de orientaciones de las fases constituyentes.

Si consideramos que no hay interacción entre los tipos de inclusiones y que la interacción sólo se produce entre la matriz y las inclusiones, el tensor de constantes elásticas para materiales con cuatro fases [12] viene dado por la expresión (1):

$$C = C^{m} + \sum_{i=1}^{3} v^{i} \left(C^{i} - C^{m} \right) \left\langle T^{i} \right\rangle \left[v^{m} I + \sum_{i=1}^{3} v^{i} \left\langle T^{i} \right\rangle \right]^{-1} \tag{1}$$

donde C representa el tensor de constantes elásticas, *v* la fracción de volumen y T es el Tensor de Wu [11] de cuarto orden, el cual tiene en cuenta la geometría, distribución y orientación de las inclusiones. Los subíndices `i´ denotan los diferentes tipos de inclusiones y `m´ la matriz.

2.1. Aplicación del modelo a materiales cementicios.

Consideremos el material cementicio compuesto de una matriz sólida (pasta de cemento) y tres tipos de inclusiones: agregados, poros y microgrietas. Si suponemos que todas las fases son isotrópicas, el tensor \mathbf{C} se reduce a dos constantes elásticas independientes: C_{1111} y C_{2323} . Dichas constantes en notación reducida se expresan como C_{11} y C_{44} (2, 3):

$$C_{11} = C_{11}^{m} + \frac{v^{a} \left[C_{11}^{a} - C_{11}^{m} - \frac{4}{3} \left(C_{11}^{a} - C_{11}^{m} \right) \right] \left(\left\langle T_{1111}^{a} \right\rangle + 2 \left\langle T_{1122}^{a} \right\rangle \right)}{v^{m} + v^{a} \left\langle T^{a} \right\rangle + v^{p} \left\langle T^{p} \right\rangle + v^{w} \left\langle T^{w} \right\rangle} + \frac{v^{p} \left[C_{11}^{p} - C_{11}^{m} - \frac{4}{3} \left(C_{11}^{p} - C_{11}^{m} \right) \right] \left(\left\langle T_{1111}^{p} \right\rangle + 2 \left\langle T_{1122}^{p} \right\rangle \right)}{v^{m} + v^{a} \left\langle T^{a} \right\rangle + v^{p} \left\langle T^{p} \right\rangle + v^{w} \left\langle T^{w} \right\rangle} + \frac{v^{w} \left[C_{11}^{w} - C_{11}^{m} - \frac{4}{3} \left(C_{11}^{w} - C_{11}^{m} \right) \right] \left(\left\langle T_{1111}^{w} \right\rangle + 2 \left\langle T_{1122}^{w} \right\rangle \right)}{v^{m} + v^{a} \left\langle T^{a} \right\rangle + v^{p} \left\langle T^{p} \right\rangle + v^{w} \left\langle T^{w} \right\rangle} + \frac{\frac{8}{3} v^{a} \left(C_{44}^{a} - C_{44}^{m} \right) \left\langle T_{1212}^{a} \right\rangle + \frac{8}{3} v^{p} \left(C_{44}^{p} - C_{44}^{m} \right) \left\langle T_{1212}^{p} \right\rangle}{v^{m} + 2v^{a} \left\langle T_{1212}^{a} \right\rangle + 2v^{p} \left\langle T_{1212}^{p} \right\rangle + 2v^{w} \left\langle T_{1212}^{w} \right\rangle} + \frac{\frac{8}{3} v^{w} \left(C_{44}^{w} - C_{44}^{m} \right) \left\langle T_{1212}^{m} \right\rangle}{v^{m} + 2v^{a} \left\langle T_{1212}^{a} \right\rangle + 2v^{p} \left\langle T_{1212}^{p} \right\rangle + 2v^{w} \left\langle T_{1212}^{w} \right\rangle}$$

$$C_{44} = C_{44}^{m} + \frac{v^{a} \left(C_{44}^{a} - C_{44}^{m}\right) 2 \cdot \left\langle T_{1212}^{a} \right\rangle + v^{p} \left(C_{44}^{p} - C_{44}^{m}\right) 2 \cdot \left\langle T_{1212}^{p} \right\rangle}{v^{m} + 2v^{a} \left\langle T_{1212}^{a} \right\rangle + 2v^{p} \left\langle T_{1212}^{p} \right\rangle + 2v^{w} \left\langle T_{1212}^{w} \right\rangle} + \frac{v^{w} \left(C_{44}^{w} - C_{44}^{m}\right) 2 \cdot \left\langle T_{1212}^{w} \right\rangle}{v^{m} + 2v^{a} \left\langle T_{1212}^{a} \right\rangle + 2v^{p} \left\langle T_{1212}^{p} \right\rangle + 2v^{w} \left\langle T_{1212}^{w} \right\rangle}$$

$$(3)$$

Los subíndices a, p y w se refieren a los agregados, poros y microgrietas respectivamente. T_{ijkl} son las componentes de T, las cuales se pueden calcular según [11]. A su vez C_{11} y C_{44} están relacionadas con las velocidades ultrasónicas longitudinal y transversal por las expresiones (4):

$$V_{t} = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}} \qquad V_{t} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} \tag{4}$$

En estas expresiones ρ denota la densidad del compuesto que es función de las densidades y fracciones de volumen de las fases constituyentes.

2.2. Geometría de las inclusiones.

En el modelo micromecánico la información relativa a la geometría de las inclusiones está implícita en el tensor de Wu, más concretamente en el tensor de Eshelby S, el cual describe las inclusiones generalmente por un elipsoide. Las componentes de T en coordenadas globales pueden ser calculadas usando la transformación de tensores usual, a partir de T', que en coordenadas locales viene dado por (5):

$$T' = \left[I + S \left(C^m \right)^{-1} \left(C^i - C^m \right) \right]^{-1} \tag{5}$$

Para una matriz isotrópica, el tensor S está dado por la relación de Poisson de la matriz y por la relación de aspecto α o tamaño relativo de los tres ejes de la inclusión a_1 , a_2 y a_3 , según se muestra en la figura 1. Las expresiones para el cálculo de S se pueden encontrar en [13].

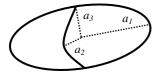


Figura 1. Elipsoide que describe la forma general de las inclusiones

En este trabajo la geometría de las inclusiones será modelada por un esferoide, que caracterizaremos por su relación de aspecto. Si definimos la relación de aspecto como la relación entre el eje desigual y los dos ejes coincidentes, para $\alpha=a_3/a_1<1$ obtendremos un esferoide lenticular, para $\alpha=a_1/a_3>1$ un esferoide oblongo, y finalmente $\alpha=1$ representa a las inclusiones esféricas. La relación de aspecto es el parámetro que nos aportará la información acerca de la presencia o no de microgrietas en el hormigón.

2.3. Influencia de la geometría de las inclusiones en la velocidad de las ondas ultrasónicas.

Tal como hemos dicho, consideramos el hormigón formado por la matriz de pasta de cemento no porosa y tres tipos de inclusiones, agregados y dos fases no sólidas (poros y/o microgrietas). La forma de distinguir los poros de las microgrietas es a través de la relación de aspecto, ya que los poros de aire ocluido se pueden considerar esféricos ($\alpha = 1$), los poros capilares se modelan como cilindros alargados ($\alpha > 1$) y las microgrietas se pueden modelar como planos circulares ($\alpha \rightarrow 0$).

A partir del modelo tetrafásico expuesto anteriormente, se evaluará la influencia de la geometría de las microgrietas en la velocidad de las ondas ultrasónicas. Para esto consideraremos que las microgrietas tienen una relación de aspecto inferior a 0.5.

Para evaluar el comportamiento de la velocidad longitudinal con la relación de aspecto de las fases no sólidas, consideramos que las propiedades elásticas y densidad de la matriz no porosa son conocidas. Los agregados finos y gruesos los modelaremos como una fase promedio [12] con propiedades elásticas conocidas y geometría esférica; mientras que consideraremos que los poros y microgrietas se encuentran completamente llenos de agua y distribuidos aleatoriamente dentro de la matriz, tabla 1.

Tabla 1. Propiedades de las fases constituyentes.

	C ₁₁ (GPa)	C ₄₄ (GPa)	ρ (kg/m^3)
Matriz (m)	40	13	1900
Agregados (a)	86	28	2600
Poros con agua (p)	2.2	0	1000

Para la simulación hemos considerado que tenemos un hormigón con una porosidad inicial del 8%, al cual le hemos ido añadiendo microgrietas en diferentes proporciones y relaciones de aspecto.

En la figura 2 se muestra la influencia de la relación de aspecto y la fracción de volumen de las microgrietas en la velocidad longitudinal. Se puede observar como, incluso con porcentajes pequeños de microgrietas, la disminución de la velocidad puede ser importante entre 400 m/s y 1000 m/s, si disminuye la relación de aspecto.

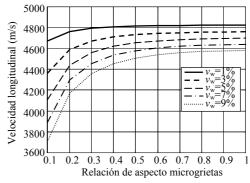


Figura 2. Efecto de la relación de aspecto y volumen de las microgrietas en la velocidad.

Si bien, al ser un modelo micromecánico, el tamaño de las diferentes inclusiones no está contemplado, una disminución de la relación de aspecto está directamente relacionada con la progresión del tamaño de las microgrietas que se produce en la realidad en los ciclos de hielo-deshielo. Por consiguiente el modelo presentado puede ser útil para caracterizar esta progresión y evaluar los daños producidos por este tipo de proceso.

3. DESCRIPCIÓN EXPERIMENTAL

Para la validación experimental se han fabricado probetas normalizadas de hormigón H30 con y sin aireantes, y se han sometido a 300 ciclos hielo-deshielo. Las medidas no destructivas de velocidad ultrasónica se han realizado antes, durante y al finalizar los ciclos. En este trabajo sólo se van a mostrar los resultados obtenidos en el hormigón sin aireantes ya que presenta mayores daños y por tanto es más adecuado para validar el método expuesto. La dosificación de estas probetas se muestra en la tabla 2.

Tabla 2. Dosificación del hormigón

Material	Cantidad/m ³
Cemento (kg)	381.1
a/c	0.5
Arena (kg)	879.99
Áridos (kg)	936.4
Agua (litros)	190.55
Superplastificante %	0.60%

Para estudiar experimentalmente la influencia de las microgrietas en la velocidad, evaluando su relación de aspecto se siguió la siguiente metodología: medida de la velocidad ultrasónica, aplicación del modelo tetrafásico y comparación de los resultados experimentales con el estudio teórico del modelo.

3.1. Medida de la velocidad ultrasónica.

Para la caracterización del hormigón mediante ensayos no destructivos por ultrasonidos se ha utilizado la medida de la velocidad de las ondas ultrasónicas, las cuales se han realizado antes y después de los ciclos hielo-deshielo.

Las medidas se han realizado mediante un sistema automatizado de barrido con las probetas sumergidas en agua. Se ha utilizado un sistema SENDAS para la generación y recepción de las señales ultrasónicas.

Se han realizado dos inspecciones en transmisión, una en sentido radial y otra en sentido axial. El barrido en dirección radial se realizó con una rejilla de 2mm en altura y una separación entre radios de 5°, mientras que para la inspección en el sentido axial se empleó una rejilla de 4x4mm. Las inspecciones se han llevado a cabo empleando transductores Panametrics de banda ancha de 500 kHz, emitiendo en modo longitudinal, con una frecuencia de muestreo de 20 MHz y se ha utilizado el algoritmo de doble cruce por cero para determinar el tiempo de vuelo de la señal ultrasónica [12]. La velocidad longitudinal en inmersión se determina como:

$$V_L = \frac{X_c}{t_c - t_{agua} + \frac{X_c}{V_{agua}}} \tag{7}$$

donde X_c indica las dimensiones de la probeta, t_c el tiempo de vuelo a través de la muestra, t_{agua} el tiempo de vuelo en agua (sin la muestra) y V_{agua} la velocidad en agua a la temperatura de inspección (1420 m/s).

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. Resultados de la medida de la velocidad.

Cuando las ondas ultrasónicas atraviesan un material muy dañado sufren una alta atenuación y puede que incluso no logren atravesar la probeta. Con los sistemas habituales de medida de velocidad ultrasónica en hormigón no se puede detectar fácilmente el grado y localización del daño en el material. Sin embargo con el tipo de inspección realizado es fácil detectar las zonas muy dañadas como se puede ver en la figura 3 (zona azul $V < 4.3 \, \mathrm{km/s}$).

La tabla 3 muestra las velocidades medias, en sentido radial, en las zonas donde atraviesa el sonido de 6 probetas de hormigón, antes y después de los ciclos hielo-deshielo. Se puede apreciar que todas las probetas no se han deteriorado por igual, así como que el daño en las probetas degradadas provoca una disminución de la velocidad de 400 m/s, en el peor de los casos.

Tabla 3. Velocidades medias radiales de las probetas de hormigón, antes (A) y después (D) de los ciclos.

	1	2	3	4	5	6
Α	4696	4706	4723	4720	4718	4726
D	4691	4564	4351	4546	4640	4530

Para profundizar en el estudio del daño por ciclos hielodeshielo se ha seleccionado la probeta 2. En la figura 3 se presentan los mapas de velocidad ultrasónica, en falso color, de la probeta antes y después de los ciclos. El color de las caras superior e inferior nos indica el daño que ha provocado los ciclos hielo – deshielo.

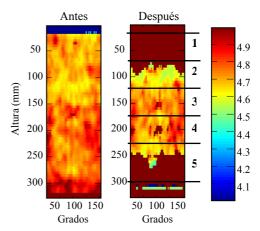


Figura 3. Mapa de velocidad radial (en km/s) de la probeta 2, antes y después de los ciclos.

La probeta se ha cortado en 5 rodajas y en cada una se ha hecho nuevamente la inspección ultrasónica en transmisión, pero en este caso en sentido axial, con objeto de caracterizar y localizar mejor el daño en las

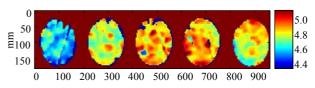


Figura 4. Mapa de velocidad axial (en km/s) de los cortes de la probeta, 2 después de los ciclos.

diferentes zonas.

A partir de los mapas de velocidad se ha determinado la velocidad media de los cortes que se muestran en la tabla 4. Se puede observar una considerable disminución de la velocidad en el corte 1 frente al resto de la probeta, mientras que en los restantes cortes ha aumentado velocidad con respecto a la velocidad radial. La causa de esta diferencia entre las velocidades ultrasónicas en sentido radial y axial es porque en la inspección radial la influencia de la zona exterior de la probeta, la más dañada, es mayor.

Tabla 4. Velocidades medias (m/s) en las diferentes zonas de la probeta 2.

1	2	3	4	5
4574	4748	4850	4860	4788

4.2. Aplicación del modelo tetrafásico.

Para aplicar el modelo tetrafásico a las probetas hormigón se hacen las simplificaciones indicadas con anterioridad: material tetrafásico (matriz de pasta de cemento y tres tipos de heterogeneidades: agregados poros, microgrietas), modelamos los poros como cilindros circulares alargados y los agregados como esferas, ambos distribuidos aleatoriamente en la matriz. Con este dato, podemos establecer la solución de Eshelby para el tensor **S** y calcular el tensor **T**.

Las constantes elásticas de la pasta de cemento sin poros se calcularon a partir de la metodología descrita en [8] y las propiedades de los agregados son las indicadas en la tabla 1.

A partir de las dosificaciones y la porosidad medida en la probeta mediante porosimetría de mercurio antes de empezar los ciclos, se determinaron las fracciones de volumen de los agregados y poros, que eran 0.69 y 0.08, respectivamente. El volumen de microgrietas y su geometría se varió de forma análoga al estudio teórico.

Para evaluar la presencia de microgrietas en el hormigón compararemos las velocidades medidas en la probeta con el estudio teórico realizado anteriormente.

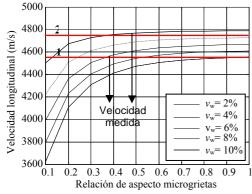


Figura 5. Velocidad longitudinal vs fracción de volumen de microgrietas.

En la figura 5 se muestra la relación entre la velocidad teórica obtenida a partir del modelo tetrafásico y las velocidades medidas en las capas más dañadas 1 y 2.

Utilizando sólo la velocidad longitudinal según los resultados mostrados en la figura 5, no se puede determinar exactamente cual es el volumen y la relación de aspecto de las microgrietas producidas. Sin embargo sí es posible determinar el daño máximo producido. Por ejemplo en la capa 2 el volumen de microgrietas será inferior al 2 % y con relaciones de aspecto inferiores a 0.4, mientras que para la capa 1, la más dañada, la proporción será inferior al 8 % y con relación de aspecto inferior 0.4.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se han presentado los resultados preliminares de un estudio acerca de la influencia de las características microestructurales de las microgrietas en las propiedades globales del hormigón mediante técnicas ultrasónicas. Este estudio se realizó estableciendo la relación entre la velocidad ultrasónica y el modelo tetrafásico.

El parámetro microestructural que nos ha permitido evaluar las microgrietas ha sido la relación de aspecto.

Los resultados son alentadores pero no concluyentes y se impone realizar un estudio más profundo así como utilizar de manera combinada otros ensayos no destructivos que nos permitan cuantificar más exactamente la proporción y tamaño de las microgrietas producidas en este tipo de deterioro.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación esta subvencionada por el Ministerio de Educación y Ciencia y el Ministerio de Fomento dentro de los proyectos BIA 2006-15188-C03-01, C14/2006 y FOM 01/07, respectivamente. La Dra. Margarita González Hernández agradece la subvención del contrato postdoctoral CSIC-I3P, financiado por los Fondos Sociales Europeos.

REFERENCIAS

- [1] ASTM C 666-84. Standard Test Method for Resistance of Concrete to Rapid Freezing and Thawing.
- [2] TC 117-FDC: Freeze Thaw and de-icing resistance of concrete. CDF Test: Test method for the freeze-thaw resistance of concrete test with sodium chloride solution. Recommendation.
- [3] Vesa Penttala. Surface and internal deterioration of concrete due to saline and non-saline freeze-thaw

- loads. Cement and Concrete Research Vol. 36 pp.921–928, 2006.
- [4] Kaufmann, J. Experimental identification of ice formation in small concrete pores. Cement and Concrete Research Vol. 34, pp. 1421-1427, 2004.
- [5] Mori, T. and Tanaka, K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgical, Vol. 21, No. 5, pp. 571-574. 1973.*
- [6] Eshelby, J.D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proc. Royal Society London, A241, pp. 376-396, 1957.*
- [7] Hernández, M.G. et al. Effect of the fluid in the inclusions of cement paste on the ultrasonic velocity. *Ultrasonics Vol.* 42, pp. 865-869, 2004.
- [8] Hernández, M.G. et al. Formulation of a new micromechanic model of three phases for ultrasonic characterization of cement-based material. *Cement and Concrete Research Vol. 36* pp. 609-616, 2006.
- [9] Hernández, M.G. et al. Application of a micromechanical model of three phases to estimating the porosity of mortar by ultrasound. *Cement and Concrete Research Vol. 36 pp. 617-624, 2006.*
- [10] Hernández, M.G. et al. Porosity estimation of aged mortar using a micromechanical model. *Ultrasonics Vol. 44*, pp. e1007-e1011, 2006.
- [11] Wu, T. The effect on inclusion shape on the elastic moduli of a two place material. *International Journal of Solids Structure*, Vol. 2, pp. 1-8, 1966.
- [12] M. Acebes Pascual. Estudio y extensión de un modelo micromecánico trifásico para la caracterización ultrasónica de materiales compuestos. Tesis Doctoral, 252 páginas. UPM, 2007.
- [13] Mura, Toshio. Micromechanics of defects in solids. 2nd edition. Martinus Nijhoff Publishers. Dordrecht, The Netherlands, 1987.