

## EXPERIENCIAS HECHAS EN METODOS DE ENSEÑANZA DE MATEMATICAS (INECE'08)

JOSE M. ANTON, JUAN B. GRAU, ANA M. TARQUIS, JOAQUIN FABREGAT,  
ELENA SANCHEZ

Departamento de Matemática Aplicada a la Ingeniería Agronómica  
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos  
Universidad Politécnica de Madrid  
Av. Complutense s/n, Madrid 28040

e-mail: [fj.grau@upm.es](mailto:fj.grau@upm.es), [josemanuel.anton@upm.es](mailto:josemanuel.anton@upm.es), [anamaria.tarquis@upm.es](mailto:anamaria.tarquis@upm.es),  
[joaquin.fabregat@upm.es](mailto:joaquin.fabregat@upm.es), [mariaelena.sanchez@upm.es](mailto:mariaelena.sanchez@upm.es)

**Resumen.** *Habiendo impartido Matemáticas en dicha Escuela de Agrónomos los autores buscan referencias para posibles desarrollos. Recientemente se ha impartido en grupos separados, repartiendo documentación y problemas, tras esquemas básicos expuestos en pizarra. El alumno se adapta y es guiado por los modos de exámen esperados. El modelo de primer curso es "sin libros", se ha de restringir la materia, y su aplicación al no usarse manuales u ordenadores. En asignaturas optativas se han presentado puntos importantes haciendo de ellos pruebas "con libros" de ciertos esquemas adoptados, junto con el pedir trabajo redactado, teniendo ello buena aceptación y resultado, a adaptar a mayor número de alumnos. Se detalla en experiencias sobre Teoría Matemática de la Decisión, que tiene punto de vista matemático y de consultor analista de decisión. En ello se enseñaron enfoques como el bayesiano y el multicriterio discreto, y se valoraba por clases, trabajo y prueba con libros.*

### 1. Introducción

Con ocasión de modificaciones que pueden ocurrir en los formatos de enseñanza de las Matemáticas en las Escuelas de la U.P.M., especialmente si se cambia de formatos según el "Proceso de Bolonia", ha parecido oportuno el recoger ciertas experiencias habidas por los autores, que han impartido dichas materias en distintos planes y ciclos y que tienen diversas experiencias profesionales fuera en su aplicación y al menos una tesis sobre su docencia, tratando de encontrar en ello cierta estructura y con ello el sacar algunos resultados que puedan ser útiles en planteamientos futuros. Estos autores están agrupados para temas de Innovación Educativa y en ciertas investigaciones, de varias edades e historia anterior, pero que colaboran como docentes en el Departamento de Ampliación de Matemáticas Aplicadas a la Ingeniería Agronómica de la ETS de Ing. Agrónomos. Entre los autores J. Antón y J. Grau son ingenieros del "Plan 57" hoy más bien olvidado, y los otros del "Plan 64", alguno del "Plan 74" que era muy poco distinto al anterior en asignaturas, todos Agrónomos salvo J. Antón que es de Caminos, todos son doctores menos uno, y varios tienen con otras carreras y estudios o partes de ellas, siendo importantes las experiencias y relaciones internacionales de A. Tarquis en universidades extranjeras, habiendo tenido J. Antón que es C.U. experiencias en normas internacionales de construcción y en el Ministerio de Obras Públicas y otras, y J. Grau en relaciones internacionales por parte de Telefónica de España, ambos a nivel relacional alto. El Prof. A. Tarquis es T.U. y de especial experiencia en centros extranjeros, y otros como CEIGRAM.

## **2. Experiencias observadas sobre asignaturas de matemáticas para ingenieros**

El desarrollo de la carrera de Agrónomos fue parecido al de Caminos, Canales y Puertos que empezó en 1999 con alguna interrupción, existiendo entonces algo en Minas y algo aparte en Arquitectura que tiene carácter propio, por profesión y lado de arte aunque como estructura de carrera se acopló a las ingenierías, empezando la de Agrónomos en el espíritu innovador de 1855, un poco después de la de Montes para conservar éstos tras la desamortización, coincidiendo con la creación del Ministerio de Fomento y con la Ley de Ferrocarriles. La estructura es francesa napoleónica de escuela de funcionarios con entrada por examen ingreso en el que era primario el resolver problemas en un programa de matemáticas, estructurándose poco a poco el Cuerpo de Ingenieros Agrónomos. Obviamente existían desarrollos agronómicos anteriores, notorios en España en cuanto a la comunicación de agriculturas europea y americana cruzando cultivos como el maíz, el trigo, la patata y el tomate, en ambos sentidos, y de ganadería hacia el oeste con cerdos, cabras y vacas, pero el disponer de especialistas consagrados permite abordar una época de progresos constantes divulgándolos con eficiencia. De hecho hubo después desarrollos muy importantes en infraestructuras, regadíos, industria alimentaria, energías. Esta estructura de escuelas de ingenieros existe para Agrónomos en Francia, algo en Italia, en países de Iberoamérica y algo en Italia, pero en otros la Agronomía a nivel superior es a veces impartida en Facultades, que no exigen en sí finalidades de Ingeniero, tal como proyectar o dirigir actuaciones. Se mantuvo esta estructura de carrera de funcionario, dedicándose parte a lo privado o a otras administraciones, y más tarde aparecieron estructuras profesionales colegiadas reconocidas siguiendo a médicos y abogados. Esto mantuvo una cantidad pequeña de gente calificada habiendo una única Escuela de Agrónomos en Madrid, paralela a una de Caminos, existiendo pocas escuelas de grado medio.

Esta estructura de vida profesional imprimía carácter al salir tras un ingreso muy competitivo un número reducido de profesionales, que hacía carrera empezando al salir a un nivel cualificado. Este esquema era distinto para profesiones como de derecho, o de medicina, o de profesores mercantiles, o de otras científicas o literarias. Las demás carreras de ingenieros habían seguido estructuras parecidas imitadas, pero algunas con relaciones militares de su época como Aeronáuticos o Navales, otras más hacia la industria como Industriales que contaba con más escuelas y especialidades, y luego la de Ingenieros de Telecomunicaciones que iba a evolucionar con éstas. Estas profesiones siguieron con las vicisitudes de España en el siglo 20, que habiendo hecho antes “una historia específica notoria con baja población al ser los primeros en salir fuera por los mares”, por primera vez se encontró con población creciente, de difícil adaptación a nuevos sistemas con ajustes sociales y paso de campo a ciudad, con déficit de una educación ahora necesaria, con crisis en parte importadas y graves aunque quizás menos que en la Europa más poblada que sufrió de dos guerras mundiales, y al asomarse salida a la época de bajo nivel y aislamientos del 1936-1956 en la que las dos Escuelas de Caminos y Agrónomos estuvieron bastante vinculadas a los ministerios de Obras Públicas y de Agricultura, siendo los profesores muchos funcionarios y ciertos laboratorios anejos, se incorporaron a un cambio de estructura universitaria hacia 1957, que para funcionar en grupos de asignatura agrupados por analogías de un catedrático dispuso de miembros del cuerpo de adjunto y algo del de agregados, que se fueron proveyendo, más lentamente en estas ingenierías en las que se hizo uso de profesionales con experiencia incorporados a menudo en el estado. Para ingenierías y arquitectura se elaboró un plan 57 fijado en un boletín oficial que contenía las asignaturas, y se implantó en las pocas escuelas en marcha manteniéndose un duro control de acceso

efectivamente con “*numerus clausus*” por un segundo curso llamado de Iniciación en la Escuela correspondiente, precedido de uno llamado Selectivo de Ciencias también a aprobar completo antes de pasar a otro, pero más común e incluso factible en otra universidad, por ejemplo en la Facultad de Ciencias de la UCM, que servía para nivelar después del Bachillerato teniendo {Matemáticas, Física, Química, Biología, Geología} y admitiendo notas (de Notable o de Matrícula de Honor). En Iniciación como notas solo había (Apto y No Apto en cada asignatura), cuatro convocatorias máximo y una quinta de gracia para una asignatura, ello creaba una tensión especial, muchos alumnos estaban un año preparándose en una Academia y otros iban a una en el curso, y había una gran proporción de fracaso incluso entre gente esforzada que recibía un daño vital considerable, ello parecía normal después del plan antiguo al haber en la sociedad un respeto a estos títulos. Las Matemáticas con un programa bastante extenso y exámenes con problemas eran un factor importante en esta selección, con otras asignaturas científicas y alguna específica y un dibujo técnico, y la sociedad suponía que los ingenieros sabían Matemáticas.

Se fueron aumentando las plazas de ingreso que habían sido muy escasas, muy inferiores a 100 al año en el Plan antiguo, hasta unas 300 poco a poco, y el ingreso dejó de dar paso al cuerpo correspondiente, lo que no se resolvería hasta los 1970 por concurso oposición al irse agotando los del plan antiguo que fuesen a incorporarse, y para los estudiantes que lo siguieron marcó un tiempo, no sintieron que era en transición entonces. La orden de implantación contenía listas de asignaturas, e incluía asignaturas de Matemáticas en esos cursos y algunas en los siguientes, incluyendo Ecuaciones Diferenciales y Estadística e Investigación Operativa, en cantidades adaptadas a la carrera, siendo más inclinada la carrera de Agrónomos hacia la Biología y la Edafología con menos Ecuaciones pero más uso de Estadística para experimentación agrícola; en su profesión los Agrónomos han de verse algunos con Construcción, maquinarias específicas y encargo de sistemas eléctricos rurales, etc..., lo que está en asignaturas adaptadas en los planes. La asistencia a clase era en el plan 57 obligatoria y controlada, esto en toda la carrera en la que se pasaba lista y suspendían por faltas, y preguntaban la lección en clase, ello en recuerdo a la escuela de funcionarios. Pronto se vio necesario el ir aumentando el número de Escuelas, inicialmente había solo una de Caminos y Agrónomos en España, en esas carreras tras un informe OECD (la entrada en la OECD marcó el fin de la posguerra para la España activa), que decía que había demasiado poco de esos ingenieros en España “en relación con las muchas obras y servicios en curso”, se practicó en los años 60 la “aceleración” por la que “en dos años solares se hacían tres académicos”, ello cruzado con un sistema de milicias o de prácticas fuera (IAESTE, etc...) en verano, además de viajes de prácticas de la carrera en los cursos. Se implantó la posibilidad de hacer Doctorado presentando una tesis lo que fue tomando realidad al irse valorando, los del plan antiguo en casos podían obtenerla presentando a una Comisión un trabajo anterior distinguido. La sociedad iba evolucionando seriamente conociendo un cierto éxito y progreso dentro de un “contrato social” algo peculiar anejos a un primer mundo sorteando la guerra fría, con paso de gente del campo a urbes, industrializaciones; la mejor sanidad ayudaba a un aumento mantenido interno de población, y a partir de 1968 se hizo un esfuerzo firme y constante en educación general, sector que se había postergado desde 1936/39.

Se fue adaptando el sistema de entrada en el Estado a oposición, y los planes pasaron al plan 64 de 5 años, los dos primeros selectivos lo que era un tanto duro salvo para muy buenos alumnos a los que iba bien. Esto tuvo cambios luego distintos en cada ingeniería pasando a carrera de 6 años, tal como el plan 74 en Agrónomos con las mismas asignaturas del 64 habiéndose mejorado la enseñanza de Proyectos

con asignaturas previas al proyecto fin de carrera, el sistema de cursos selectivos siendo cambiado a uno en el que cada asignatura cerraba a otras que la necesitaban. En Agrónomos el plan 57 era más bien de programa único pero los planes 64 y 74 se separaron a partir de 3er curso por especialidades estructuradas. En estos planes a partir del 64 se fue implantando un doctorado con un mínimo de asignaturas durante dos años, teniendo estas carreras enlaces variables con centros de investigación oficiales en sus materias. A partir de 1968 el número de ingenieros fue aumentando, hoy es en España al menos 20 veces superior al de 1961, la calidad profesional general es mejor, y en el año 2007 no había problemas de escasez de empleo.

Un aspecto que fue evolucionando es el de las Matemáticas, que fueron dejando de ser junto con otras asignaturas básicas barrera de ingreso. De los autores el Prof. J. Antón recuerda que habiendo tomado posesión de Catedrático en enero de 1973 siguieron siendo de examen por ejercicios iguales para todos cada uno corregido por un profesor, pero por parciales siendo el final repesca de parciales, con notas que llegaban al 9 o 10 según fuesen los mejores. Existió un sistema de pase de Ingeniero Técnico a Superior mediante un curso de Complementos selectivo con muchas asignaturas básicas fuertes, incluyendo Matemáticas para las que se improvisó una compensación para los que se quedaban con esta asignatura aprobando con un listón inferior.

E. Sánchez (TEU) hizo tesis en Agrónomos (con J. Antón) sobre Enseñanza de Matemáticas en escuelas de Ingenieros, recopilando material de aquí y de informes extranjeros, lo que nos da una información importante de lo que estaba "in mente" sobre todo en cuanto a materias, siendo patente que se suponía que los ingenieros debían por ser tales tener una formación matemática de solidez. Ahora dentro del "proceso de Bolonia" ello continúa en espíritu, si bien puede ser menos por disponerse de horas limitadas, y además del programa se hace énfasis en el lograr en los alumnos una formación deseada. Los autores hicieron en el tiempo largo diversas publicaciones docentes, como J. Antón [1], que ahora van reflejándose a MOODLE para uso por los alumnos en "web Politécnica virtual".

Actualmente en fin de 2008 tenemos en general planes de 5 años, si bien en Caminos de UPM han seguido con el plan de 6 años, Esos planes son con el sistema de créditos y con una estructura de la carrera muy libre con muchas asignaturas optativas, el plan 96 en Agrónomos es de tipo 2+3 (en otras carreras es a veces 3+2), y el plan 2002 ligeramente reformado es con unas asignaturas llave de otras, y a partir del curso 2007-08 se está impartiendo un nuevo título de Ingeniero Agroalimentario de 2º ciclo impartido en el mismo centro, materias que están en parte en una especialidad de Agrónomos. En estos planes se pretendió dar la formación específica más desde un principio, y esto por disminución de créditos llevó a disminución drástica del número de horas de Matemáticas en esta carrera de Agrónomos, en la que la Biología es siempre fundamental ya que la Agricultura comporta en su base el aprovechamiento de especies vegetales y animales escogidas y desarrolladas. Estos planes han coincidido con el cambio de estudios anteriores a formatos menos fuertes, y con un aumento del número de escuelas de ingenieros en España, muy grande en el caso de Agrónomos en lo que hay unas 15 si bien con éxito diverso. También en este largo proceso han mejorado y se han abaratado mucho los equipos informáticos, lo que no ha cambiado las Matemáticas en su fondo, pero sí ha cambiado el proceder de su aplicación con el uso de paquetes específicos, y estos equipos puede usarse en su enseñanza. En Agrónomos en Madrid el plan es bastante estricto para Matemáticas, en otras escuelas se cambió un poco con algo más de créditos, hay una asignatura básica de Matemáticas, otra que es continuación obligatoria de Análisis Matemático,

ambas en primer curso, y unas Optativas de Geometría, Informática, y de Ampliación de Matemáticas de segundo curso, siendo las demás de primer curso principalmente. El departamento tiene asignaturas de segundo ciclo relacionadas, tales como Métodos Numéricos, Optimización y Simulación, Métodos Matemáticos para la Toma de Decisiones, y otras con otros como relacionadas con robótica par Agricultura (por ahí a algo así lo han llamado Agrótica en vistas de que para edificios existe una Domótica). La asistencia a clases no es obligatoria, el examen es "sin libros" en las asignaturas obligatorias, habiéndose hecho con ellos en optativas, en alguna con trabajo en casa. Para las optativas aparecen instrumentos informáticos, y en tesis y para publicaciones se ha hecho uso de técnicas tal como Monte Carlo, de soft computing (algoritmos genéticos, wavelets, fractales, otra sería redes neuronales ... ). De hecho el uso real de Matemáticas es con libros o con manuales, solo se puede indicar pero no es fácil el hacerlos usar en primer curso, en cambio ese uso se lo enseñan en asignaturas específicas de la carrera, no hay quien proyecte estructuras o haga un plan de cultivos sin algún manual o catálogo, psicológicamente en el tiempo disponible en asignaturas obligatorias no se puede hacer más, se puede hacer algo en las optativas. En Cálculo numérico de segundo ciclo se puede llegar a unos usos pensados, en primer ciclo solo a unas indicaciones sobre ejemplos esquemáticos, que se saben los paquetes de PC tales como MATLAB o MATHCAD, o en casos un EXCEL con un Solver, están en [2]. La Informática tiene su vida propia, la Geometría va por la calidad de los que la imparten, en otro tiempo era muy absorbente, hoy lo que Euclides hacía por triángulos iguales se solventa con lo de Descartes y con vectores o transformaciones, pero unas visiones globales enriquecen la capacidad de pensar para aplicaciones, no hablemos de geometría computacional o de geometría arquitectónica o urbanística. O de formas biológicas, a veces se interpretan por lo fractal desde Mandelbröt, alguna geológicas también, no todas. La extensión de citar transformaciones geométricas y su relación entre geometría y álgebra es una cosa a ponderar, y el ver que ha de quedar de ello, sabiendo que el alumno tal vez para sobrevivir tiende a enfocar a lo que le sirve para aprobar y a dejar el resto. La relación con otras asignaturas existe, hay queja si no saben interpretar en maquinaria para su uso, hay ciertos solapes con Física en vectores en parte inevitables, es cuestión de hacer incapié cada cual en su punto de vista. Se dan cónicas brevemente, usando autovalores para giro, quizás se enlace poco con ello con otros temas como polares y métodos anteriores geométricos, no está justificado el pasar demasiado a ellos. Es obvio que no se da proyectiva como tal, ni variable compleja derivando, salvo la serie exponencial y las trigonométricas con ella, y las aplicaciones geométricas elementales.

Se supone que se da Álgebra y Cálculo, el Álgebra es solo lineal y una parte dándose por sabido los polinomios y fracciones racionales, pero está claro que el alumno debe de poder relacionarla con una geometría que incluya cálculo vectorial y métricas. A los alumnos les cuesta el cálculo más, es algo un poco especial y cerrado que se encontraron en el norte y centro de Europa de 1600 al 1900, y que requiere esfuerzo el pasar esa habilidad a los alumnos, sin lo que pueden no entrar en ella. En su día algunos autores impartieron al principio Ampliación de Matemáticas optativa de segundo, desde un principio en grupo reducido que luego fueron varios, y luego uno grande, con un programa amplio, y salió un sistema con pruebas con libros, con temas problema de cierta estructura y complicación que podían ser liberatorias, incluso presentando los alumnos que fallaban la cosa bien redactada después de haber explicado después el examen. Al final se pedía un trabajo bastante libre y lo escogían en general bien, hacían con cuidado, algunos muy bien y con algo con dificultad profundidad. Es un poco al estilo de Bolonia que viene, requería mucho tiempo del profesor que lo llevaba, debe de hacerlo un equipo con cierta estructura para que alguno haga los controles auxiliares. Al final cuando hubo demasiados alumnos le

costaba mucho el puntuar los trabajos, no daba tiempo a corregir un examen, pero con un curriculum de pruebas y trabajo se podía aprobarlos con seriedad, tendían a salir notas un poco altas, casi sin suspensos, esto también atraía alumnos al año siguiente. Se dejó a otros cuando había unos 120 alumnos vivos, podía haber degenerado pero no lo había hecho, de hecho solo se detectó algún caraduras (uno no había aprobado por o matricularse debidamente). Al raro que apareció como libre al final se le puso examen, con lo extenso del programa no lo dominaba en absoluto, se le invitaba a presentar lo que habían hecho los otros en septiembre, ello cubría la asignatura. La experiencia puede ser útil en el nuevo plan, el hacerlo así requiere una distribución de trabajo adecuada porque carga bastante al profesor.

En las fechas de presentación de estas líneas se están elaborando Titulaciones para el esquema del EEES, siendo de menos horas al ser de 4 años para el título de grado, si bien con más proporción de asignaturas obligatorias, estando ello en discusión en comisiones reservadas, y su implantación dependiendo de órdenes ministeriales, para desarrollar decretos existentes, que podrían decidirla en breve.

### **3. Ciertas estructuras en Matemáticas para Ingenieros**

Esto anterior es del pasado y da ideas sobre el papel de las Matemáticas que interesa en vistas al futuro. La Ingeniería va a un hacer efectivo del hombre en el que empujan personas formadas, que funciona dentro de un sistema con recursos naturales o contruidos, y en unas organizaciones humanas que entienden y actúan según sistemas mentales o conceptuales aprendidos, empezando por idiomas, ideas de cómo se actúa, derecho ... , y sistemas técnicos, dentro de lo cual están unos modos de ver y pensar sobre un acervo común usando en parte una lógica estricta que son las Matemáticas, conocidas por aprendizaje y uso. Se suponía en la sociedad que los ingenieros aprendían Matemáticas, pero con una visión un poco más precisa lo que adquirirían es una parte de una ciencia que por su lado iba creciendo entre un mundo de especialistas. El ser de las Matemáticas es algo que existe dentro del conocimiento y hacer humano, que también es amplio, compartido y cambiante, en un hacer que depende de un acervo conceptual más amplio en gran parte hecho por la humanidad, transmitido y aprendido al realizar la vida dentro de una civilización. Tienden las Matemáticas a ser notablemente objetivas usando verdades sentidas, a empezar en evidencias útiles, a ser notablemente independientes del idioma usado, a usar una lógica estricta, a ser en su núcleo algo muy comunicable y común, a necesitar una formación siendo obvio que con dificultad y esfuerzo. Ofrecen esquemas mentales comunicables que sirven para montar mentalmente esquemas comunes para otras ciencias y aplicaciones, y para avanzar esas mismas matemáticas. En parte se descubre algo que ya estaba ahí como en la caverna de Platón, en parte se crea, se usa la intuición, y en ciertas aplicaciones se engancha con métodos informáticos. En un primer tercio del siglo 20 había un acervo de Matemáticas comunicado entre especialistas y pasado a aplicadores como otros científicos, ingenieros varios (hidráulicas o mecánicas, construcción), y a otros como militares (artilleros o topógrafos ...) o marinos (para situar sus barcos con sextante y cronómetro ... ), y un esfuerzo de creación además entre especialistas no numerosos en pocas universidades y bastante comunicados entre sí por revistas y visitas, que creaban teorías siendo solo algunas con aplicaciones a otras ciencias o a ingeniería.

En España la creación europea en Matemáticas estaba bastante fuera y era introducida por estancias fuera y uso de aplicaciones, habiendo más agilidad para implantar técnicas reales. Hubo en la sociedad una idea de que los ingenieros sabían

las mismas matemáticas que los especialistas y un esfuerzo en que fuese así, tiempos de J. Rey Pastor trayendo bien el Análisis desde Alemania, y peor el Álgebra, y una serie de ingenieros matemáticos, siendo notables J. Puig Adam que aparte de estar en Industriales de UPM y hacer sus libros de Cálculo Integral y Ecuaciones Diferenciales tenía unos excelentes para bachillerato en parte con J. Rey Pastor, entre otros estuvo J. Gallego Díaz que era Ingeniero Agrónomo, y hubo muchos en ese esfuerzo. Es obvio que en medios internacionales escogidos hubo un mundo con más temas y creaciones, perfeccionando un sistema lógico afinado de Análisis estándar y una serie de teorías bien demostradas dentro de ello, lo que da un acerbo del que cuelgan bastantes de las Matemáticas que se usan, ya que no parece ahora que haga falta un análisis no estándar para aplicaciones, (a menos que se logre el avance buscado en la física de lo muy pequeño del espacio y tiempo, tal como teorías de branes y strings). Es decir como ejemplo que aquí podía o puede considerarse que un ingeniero bien en matemáticas sabe que una cuerda vibrante tiene unos armónicos según Fourier, pero lo normal es que no sepa de las teorías que demuestran que esos armónicos son una base de base de unas funciones, e. g. con derivadas continuas en  $(a,b)$ , a lo Sturm-Liouville o de operadores compactos de Análisis Funcional, y que por ello las series que construye convergen a lo que necesita; y le basta con creer que funciona para usar Matemáticas a cierto nivel, de hecho el gran creador francés de esas series J. Fourier, que también hizo iniciar la egiptología (el occitano J. F. Champolion fue discípulo más que aventajado, descifró los jeroglíficos egipcios a partir de la Piedra Roseta y apareció el mundo de los faraones) y que promovió obras de desecar marismas alrededor de Grenoble (de donde fue prefecto), tampoco llegó al fondo; las "tres L" (Lagrange, ...) se lo pararon ... hasta que fue presidente de la Academia. Una cosa al estilo pasa con las wavelets (I. Daubechies, etc ...) que se usan para comprimir imágenes, solo conocen la teoría de por qué convergen especialistas, para usarlas basta tener un software adecuado de marca (de MATLAB u otros); métodos de ese estilo son de uso muy general para comprimir imágenes obtenidas a archivos como los de los .jpg (de Joint Photographic Experts Group).

Inicialmente el ingeniero necesitaba Matemáticas para entender la Física y los procesos industriales, y artes intermedios como mecánica, electrotecnia y maquinaria, y para representar el terreno con topografía a efectos de hacer obras en él. Para ello había técnicas de cálculo, siendo notorias y del pasado las tablas de logaritmos y con trigonometría, y ciertos instrumentos de cálculo, en parte a manejar por personal auxiliar, estando lo sacado de lo gráfico a menudo de más uso que lo calculado. Con ordenadores caros y de acceso lejano se fueron usando para topografía, ciertos proyectos como trazado de carreteras, estadística, geodesia y fotogrametría, partes globales de estructuras, circuitos, y otros temas específicos, siendo el proyecto más bien gráfico y de documentos, ambos contractuales. Al abaratare los ordenadores locales y al subir de capacidad se han introducido con herramientas informáticas específicas múltiples cuyos algoritmos son secretos en lenguaje máquina, pero su uso es un tanto en modo de caja negra por lo que depende de la firma del ingeniero que los hace hacer y acepta sus resultados. Esto es patente en construcción, el proyecto tiene una estructura, que a menudo se ve fácil el cambiarla en obra, dice que se han usado hipótesis de cargas expresadas y menciona la herramienta informática y el ingeniero que se responsabiliza que se puede construir con esos planos a partir de esos cálculos. Ello usa algoritmos globales (ej. de reparto de esfuerzos en pórticos) y locales (ej. de cálculo de secciones de vigas), y se supone que el ingeniero tiene una idea de lo que hacen incluso como ecuaciones suficiente como para confiar en ellos tal como están. En otros tiempos habría puesto un anejo con los cálculos puestos en cierta forma a menudo a mano para quitar errores de copia. Parte de ello se cambia por el ingeniero director de obra autorizándolo, así en una vivienda se decide entonces

la marca del forjado, que lleva un tipo, y que influye por tener en sí vigas horizontales, y el director de obra lo autoriza, quizás pasándolo a su calculista. No digamos en industria, donde a menudo el proyecto se hace a la vez que la obra tras contrato llave en mano, y de instalaciones complejas que conllevan circuitos de fluidos y controles. En algo hace falta que el ingeniero tenga conciencia de los principios de fórmulas usados. Los percances suelen partir de efectos de despistes (a lo "Ley de Murphy" o de "efecto Titanic", cuyo capitán cenaba con su presidente a ver si le daba un cargo en tierra mientras que el telegrafista sobreocupado mandaba mensajillos y descuidó el pasarle los que situaban los icebergs) humanos, recuerdo un trozo de barrio cerca de Barcelona que según un artículo de un compañero (Prof. M. Melis) tuvo hundimientos al ceder una estación de tren debajo con un túnel bien calculado en sección transversal final, pero que al avanzar por el método austriaco a plena sección se le coló una lengua de tierra por la boca; no hubiese pasado si se hubiese ejecutado el túnel con celeridad, pero un compañero que estuvo cerca dijo a un autor que se estuvieron demorando por discusiones y entre tanto se vino abajo el terreno; esto es un efecto secundario, el primario es que fallaba por la tercera dimensión en obra, esto puede ser error de geometría, en cuanto hay que pensar en esa dimensión. El que alguien, en proyecto o en obra, al autorizar el método o sus detalles (no es de aquí el ver la estructura humana de revisión de la obra, que era Estado o de ADIF), pensase en a qué iban los algoritmos usados, que debía ser un paquete bidimensional bueno por elementos finitos, pero que la pega es que eran bidimensionales, le hubiese podido hacer cuidar el que la tierra no entrase en lengua por delante, por la tercera dimensión, descalzando bastantes casas de encima. Es decir que interesa saber la base de lo que hay, esto en parte va de esquemas matemáticos globales, y otra de confiar en sistemas de cálculo de detalle, que en parte son de máquina informática.

#### **4. Ciertas estructuras en Matemáticas para Ingenieros**

Se da por evidente el que los Ingenieros necesitan una cierta formación en Matemáticas, que incluye el conocer unas materias y el tener una capacidad de usarlas, y ello junto a formación en otras materias siendo importante y muy relacionada la Física, y menos la Química y las de Representación Gráfica (antes Dibujo, Geometrías tal vez con Descriptiva o hoy hacia Topografía, etc...), y el enfoque hacia praxis precisas de estas carreras le da a esto aspectos típicos. Estos aspectos cambian algo al ser más fácil el cálculo y al estar confiado a máquinas ya no hace falta detallarlos en Topografías, pero hace falta saber la idea de qué hacen. En Dibujo es preciso tener ciertas ideas geométricas, no son precisas ciertas construcciones de detalle de descriptiva, pero otras ideas globales si son de uso, aparte de que la técnica ahora es de dibujo por ordenador, lo que también tiene algo de engorroso y cambiante con los paquetes empleados. El Teleco dan, y eso va con la profesión que es hacia aplicación, Teoría de la Señal antes de las matemáticas de ondas y de información que le sería útil.

Del Análisis común hay varios puntos generales en realidad no resueltos. Aparte son los de cuantas vuelta de examen necesitan los alumnos, quizás al menos requieran asignaturas anuales de 9 meses, más dos a septiembre y otros dos a diciembre para madurar y salvar carencias individuales. La notación del cálculo diferencial de varias variables no está resuelta para uso aplicado de Matemáticas. A Leibnitz a su vuelta de Paris le salió bien el derivar y el usar unos símbolos (dx,dy,dz) que llamó infinitésimos, con unas frases de que eran muy pequeños pero no nulos, fundó de su lado el Análisis. De hecho su definición para  $y = f(x)$  ya era deficiente, pero su sistema funcionó, en manos de Euler y Bernoulli, etc ... Al filo del 1900 se

precisó la lógica matemática para usar el infinito en la lógica, ello requería unas limitaciones de lo que se podía definir y decir, y no se podían definir infinitésimos con coherencia con el resto que formó el Análisis estándar, y que sirve para la parte básica que se aplica en cuanto a fundamento, presentando los “non-standard Analysis” que usan infinitésimos definidos, lo que para uso aplicado tiene poca ventaja con inconvenientes al hacerse las demostraciones más liadas. Con ello los matemáticos optaron e impusieron el seguir máximamente lo estándar y para no contaminarse el no usar los (dx,dy,dz). A fines de teoría ello va, pero la aplicación en casos sencillos se torna complicada en forma, tal como hallar el plano tangente a la superficie S de ecuación  $f(x,y,z) = x^3 + 2 \cdot y^3 + 3 \cdot z^3 - 6 = 0$  en el punto (1,1,1). Como f es diferenciable, salvo en (0,0,0) que no está en S, se puede aplicar el teorema de funciones implícitas que se sabe que justifica la regla siguiente. Esto es cierto en todo punto de S, el explicarlo exigiría el teorema de las funciones implícitas que dice que es relación es cierta, el dz pudiendo por él despejarse en función del ( dx , dy ), que serían independientes donde z no sea 0 y cumpliéndose esa relación lineal; en otros puntos puede despejarse dy y en otros dx. Finalmente sea cual sea la variable independiente la relación es cierta entre unos “incrementos diferenciales” ( dx , dy , dz ), que podrían ser aproximaciones a incrementos cerca del punto ... . El plano tangente se obtendría reemplazándolos por ( X - x , Y - y , Z - z ) donde ( X , Y , Z ) es el punto genérico del plano tangente, que queda con

$$3 \cdot x^2 \cdot dx + 6 \cdot y^2 \cdot dy + 9 \cdot z^2 \cdot dz = 0 \text{ en forma de ecuación del plano tangente}$$

$$x^2 \cdot (X - x) + 2 \cdot y^2 \cdot (Y - y) + 3 \cdot z^2 \cdot (Z - z) = 0 \text{ que conduce a}$$

$$x^2 \cdot X + 2 \cdot y^2 \cdot Y + 3 \cdot z^2 \cdot Z = x^3 + 2 \cdot y^3 + 3 \cdot z^3 = 0 \text{ que en ese punto es}$$

$$X + 2 \cdot Y + 3 \cdot Z = 6 .$$

La regla de la cadena admite interpretaciones similares, hay que admitir que en el entorno utilizado hay variables ( x , ... ) independientes y que los correspondientes ( dx , ... ) lo son como nuevas variables “incrementos diferenciales”, y que las relacionan, sus relaciones no dependiendo de cuales son independientes. En general con ello se puede uno abandonar a un cálculo bastante automático, que se reemplaza mal si no se admite. Para diferenciales segundas la cosa existe y es más delicada (depende más de cuales son variables independientes) por lo que puede no meterse para los alumnos, o decirles que está ahí pero que no se exige de memoria para examen, ya que puede dar lugar a confusiones. Es típico el uso en Termodinámica con expresiones como  $dQ = dU + p \cdot dV$  y  $dS = dQ/T$  donde U y S son variables del punto definible por un valor de ( P , T ), las {dV , dU y dS} siendo incrementos diferenciales de ellas, y las dQ y dW = p \cdot dV formas diferenciales funciones de ellas, de dos independientes como dP y dT , ya que W y Q no son definibles, su variaciones dW y dQ teniendo una integral que depende del camino. Así se suele expresar en Termodinámica, de hecho con precisión. Uno tendría dificultad en no usar esta notación para ello una vez conocida, hay que tener en cuenta que en casos no vale, pero es agradecida en cuanto ello suele avisar en sí al dividir por cero o así. No parece oportuno el proscribir esta notación como se hace porque permite expresar resultados fácilmente en muchos casos sencillos no existiendo alternativa cómoda, véase un libro de Termodinámica de cierto nivel, nos limitamos a indicar un clásico de la Física del alemán [3] que usa el cálculo bien, no llega al laser, uno más moderno bueno era el [4] del suizo Rossel.

Las introducciones a integración y a algo de campos en estos niveles deben hacerse en dimensión 2 o 3 en espacios euclídeos, existiendo notaciones conocidas amigables, ej. para integral de superficie como

$$I = \iint_S \vec{V}(x, y, z) \cdot \vec{n} \cdot dA = \iint_{\Sigma} \vec{V}(\vec{R}(u, v)) \cdot (\vec{R}'_u \wedge \vec{R}'_v) \cdot du \cdot dv \quad \text{para flujo}$$

con  $P = (x, y, z) = \vec{R}(u, v)$ , siendo también

$$I = \iint_{\Sigma} \vec{V}(x, y, f(x, y)) \cdot (-p, -q, 1) \cdot dx \cdot dy \quad \text{si} \quad z = f(x, y), p = f'_x, q = f'_y.$$

Para ecuaciones diferenciales solo se pueden dar unos tipos en derivadas parciales con algo de desarrollos de Fourier, aunque se puede indicar algo de lo que hay detrás para que converjan, que ocurre si las condiciones de borde son homogéneas, problemas de Sturm-Liouville, pero solo indicación. También conviene decir lo que es un “problema bien puesto (físicamente)” que es el que tiene solución, única y que depende continuamente de los datos en la curva o superficie de datos (inicial o de borde). Obviamente solo se podrá dar una ecuación de calor y una de ondas, pero esto abre unos mundos que tienen ciertas aplicaciones que se usan, p. ej. en construcción llevando a métodos de elementos finitos en sistemas informáticos, y a modos de transmitir ondas de radio o de prospecciones geofísicas. Sin hablar del mundo de estas teorías para especialistas, que es aparte (ej. libro difícil de Hörmander en Springer que es solo para Linear Partial Operators y va por tres tomos), En Agrónomos no parece en general necesario el hablar de “distribuciones” que podrían ser útiles en otras carreras de ingeniero, como la transformada de Fourier. La de Laplace debe indicarse, los paquetes de PC la usan o análoga para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

La referencia a paquetes informáticos es interesante y en un fondo procede ya que los alumnos van a tener estos instrumentos en su vida. Su uso en cursos está muy limitado por el tiempo que limita la capacidad de ver cosas. Es curioso lo permanentes y estables que son las Matemáticas bien apreahendidas, frente a lo cambiante que son las herramientas informáticas, de las que solo se puede usar un poco cada vez. Pero existen y mejoran, y hay que hacer en conciencia de que esas herramientas están ahí y estarán en algún modo evolucionado. Los paquetes grandes conocidos, tal como MAPLE del que hay licencia del Rectorado UPM pero que ha de actualizarse ahora cada año, van incrementando su contenido, ya inicialmente bueno, y es muy absorbente el seguirlo, está bien pero no por estar empapado en él se saben Matemáticas. El uso de estos paquetes que cambian requiere su punto.

Es un poco inútil el extender y hacer análisis de que cosas convendría dar en poco tiempo, basta indicar que es para obtener cierta formación de los alumnos de modo que puedan interpretar algo en un libro o método de aplicación en un futuro.

## 5. Algo de segundo ciclo para un Departamento de Matemáticas

Prescindiendo aquí de la Estadística que tiene su enfoque mental y sus herramientas informáticas, en la que estamos ahora algo tal como al estar en relación algunos de los autores con el laboratorio de U K que inventó el Análisis de datos de Fisher y vemos leyes con valores extremos pero de momento la Estadística está aparte por razones personales, se está o puede estar en varias docencias como se indicó, que tienen Matemáticas y enfoque hacia el hacer real. Ya Pascal inventó las Probabilidades pensando en el juego de cartas con azar y dinero, Así salía hacia una Teoría de la decisión que se imparte como Métodos Matemáticos para Toma de Decisiones (MMTD). Aquí hay que escoger entre múltiples enfoques que se ven en los congresos de EURO (RO es Investigación de Operaciones) y de MCDM (M), hay un punto de vista Matemática de OR y otra de consultor de empresas o “Decision Analyst”, y varios enfoques. De ellos es cosa de iniciar a OR con optimizaciones y sus

herramientas de paquetes Lingo, Cplex, Gams u otros, es importante tomar unas que estén en el centro de cálculo montadas, los MATHCAD y MAPLE ya hacen cosas, y los EXCEL con SOLVER.

Luego hay al menos dos escuelas a introducir hacia el alumno, una es la “europea” en la que tenemos una exposición muy ilustrativa y clara de C. Romero, ahora Profesor en Montes de UPM [5]. La otra es la dicha “bayesiana”, Bayes fue un protestante inglés que se dedicó a temas de estos muy amplios, que usa probabilidades y utilidades que introdujeron Von Neumann y Morgestern para decisión [8] aunque algo de eso estaba en Microeconomía, pero que para el uso real han de ser subjetivas (ver como cosa buena [9] en detalle y [7] para visión en árboles y demás, ambos de S. French). Esto se usa cuando todo se puede referir a valores monetarios actualizados, se hace para infraestructuras de transporte y regadío, si bien es débil el enfoque a largo plazo; así el AVE a Valencia salió muy caro, quizás no era justificable así y de hecho se subestimaban los gastos al inicio, pero ha sido muy acertado porque va a durar mucho con uso creciente; un ejemplo de crecimiento era el de los primeros ingleses que se montaron en Australia; otra cosa es si se reemplazase, como lo fueron los barcos de vela o los paquebotes de viajeros a América. En cambio el dinero a plazo acaba cayendo por crisis como ahora, como ejemplo con humor con unas cifras de cambios 30 monedas de plata hace 2000 años al 3% serían ahora 4000 veces el peso de la Tierra en oro; Judas las tiró (y se mató), pero los descendientes de romano Pilatos también conocieron ruinas.

Esto se complica si se han de comparar cosas distintas, siendo notorias las ambientales, véase procedimientos de Impacto Ambiental. Esto ambiental requiere enfoque especial, a uno de los autores le pasaron en un ministerio a informar sobre una propuesta Ley de Medio Ambiente, se le ocurrió decir que “tal como está es problemática porque es de rango superior a la constitución, en efecto ...”, y no se sabe que hicieron con lo que escribí, hubo más informes ya que las leyes se ven antes de pasar a Consejo de Ministros, y la Ley no pasó a Cortes (si había ya una Ley poniendo límites a la contaminación atmosférica con valores límites precisos). Lo ambiental se implantó en España a partir de una Directiva del MC ahora UE, desarrollada por un Decreto real, y esto va, al menos hay que ver si las carreteras meten ruido y con ello van en zanja y meten mucho menos, si se contaminan ríos, ...

Para multicriterio hay métodos bayesianos tal como los bien expuestos por Keeney-Raiffa [6], pero entran otros citados en el libro de Romero, se explican en clase con uso de métodos multicriterio discretos como ELECTRE I o IS y PROMETHEE I o II (hay otros), los AHV (Expert Choice) siendo una alternativa al menos curiosa, hay otros como DEA que tienen su puesto pero que son muchos y no se dan. Lo bayesiano conduce a árboles de decisión y a Programación Dinámica, lo que tiene su ámbito y es formativo. No se pueden dar más que formación general a alumnos, pero en investigación y algo en la realidad los autores han conocido la utilidad de tener al menos estos puntos de vistas a la hora de enfocar problemas reales. En esta asignatura los dos profesores, J. Antón y J. Grau, valoraban al 50%, y como un tercio lo hecho en clase, un trabajo y una prueba de comprensión con libros.

## **6. Algunas observaciones hacia nuevos planes**

Al hacer la presentación en INECE08 de esto salieron en el “power point .ppt” últimas figuras de unas observaciones en esquema a proyectar, a partir de ello se componen e frases, se Titulaban “Ideas resultantes para planes”.

1. Es preciso dar por sabido bastante, se están usando una estrategia de curso cero ahora.
2. En la selección de programas de Matemáticas, necesariamente limitados en profundidad aunque se puede referir algo a fundamentos, han de procurar base y a la vez ser de aplicación a la ingeniería. Es sabido que ya ahora tienen mucho de ello.
3. El examen guía el aprendizaje, lo dijo insistiendo invitado a INECE08. Este suele llevar formas a tipo problema, pero es hacia esquemas esenciales. Se pueden pensar otras formas, no hay tradición para preguntas teóricas y los alumnos las hacen mal. Se podrían hacer tests, pero su confección es muy difícil, es materia muy categórica de si o no. Da trabajo prepararlos, menos el corregirlos, al estar ahora los alumnos divididos en grupos independientes con profesores aparte, lo que tiene algunas ventajas en cuanto el alumno se adapta al profesor más, los tests serían para pocos alumnos lo que hace el trabajo poco rentable, y si fuesen para varios grupos ya se perdería algo la relación profesor-alumno. En el plan 1957 o 64 se hacían tests eliminatorios en primera vuelta en Matemáticas de primer curso (en Informática de UPM), no se presentará ahora ocasión de eso.
4. Hay textos recomendables, ahora son de multinacionales traducidos (ponen eigenvectores en vez de autovectores a menudo, "eigen" es "propio" en alemán), es difícil que salgan escritos aquí al estar divididos, hay que tener visión amplia y comunicante e ir a lo importante. Por ello son productos para mercado amplio que se comunican bien en primera lectura pero tienden a divagar. No profundizan mucho lo que puede dar menos formación, algunos relacionan con historia y aplicaciones y esto es bueno.
5. Se pueden ahora dar apuntes en hojas y de problemas, hay posibilidades en MOODLE que es más rápido de puesta en marcha que lo anterior (web), en cuanto a que el sistema sabe los alumnos de cada asignatura. Obviamente sirve en cuanto enganche a alumnos, es traba el que pocos sigan o vayan a clase en estas asignaturas.
6. Lo esencial para los que van a clase es que el profesor use pizarra para que intenten seguirle lo que hace imitar, las técnicas de proyectar sirven algo, un caso es el de fórmulas complicadas.
7. La relación puede mejorarse haciendo hacer trabajos controlados, el sistema de créditos europeos va en esa dirección, requiere que el alumno se ocupe y que ello salga controlado.
8. Parece útil pruebas tipo puntuables, que pudieren liberar si están bien, para aprender a pensar tipo examen, si el examen hace pensar en la asignatura, por lo extenso de materia ha de quedar en unos tipos de ejercicio bastante estándar. Las pruebas hacen falta en asignaturas cuatrimestrales para que lleguen al examen sabiendo pensar como es preciso al haberlo ensayado. Así se adaptan a unos pocos esquemas que serán tal que el hacerlos enseñe mucho.
9. Es difícil en primer curso en hacer que usen paquetes de PC, o manuales.
10. Es preciso programa y examen conciso si "examen sin libros", va en primer curso.
11. O examen hacia esquemas que hagan entender algo global, en "prueba con libros", más para cursos avanzados, completable con trabajos.
12. Ahora va de coordinación suave si hay varios grupos en misma asignatura cada cual con sus profesores. Es algo cuestión de la psicología del grupo docente. Va reequilibrio entre independencia y coordinación. Tenemos alguna

carencia al haber saltado al iniciar el plan 96 a grupos poco conectados. El remedio va de reuniones de coordinación suave.

13. El plan Bolonia es ocasión de plantearse “modus de entenderse”. Es cuestión de asimilar modos de formación y evaluación. En reuniones recientes en UPM con técnicas de grupos con colegas de Edafología, en eso los alumnos han ido forzando a enseñanza manejando muestras mejor que a decir teoría, lo diverso de los suelos empujando a este proceder, en Matemáticas puede ser distinto.
14. Hay un sentir sobre la Matemática a enseñar en esta Escuela (de Agrónomos UPM), y sobre su uso aplicado.
15. La carrera docente ahora es complicada, muy versada a publicar en inglés algo, las personas son diversas.

## 7. Conclusiones

Las Matemáticas resultan ser una capacidad mental necesaria para ingenieros, son un sistema conceptual con acerbos y mucho desarrollo de especialistas y de ello se debe de dar esquemas básicos y capacidad de uso a los alumnos de escuelas de ingenieros, esto ha de ponerse adecuadamente en tiempo limitado para nuevos planes. En ello importa el que la formación ha de pensarse un poco hacia el sistema de créditos europeos, al que también se adaptarían asignaturas optativas para el segundo ciclo que ya están un poco en esa vía.

## REFERENCIAS

- [1] J. M. Antón, diversos textos para asignaturas de Matemáticas, algunos editados también hace tiempo con ISBN en el centro editorial de Caminos, otros distribuidos a alumnos en fotocopias recientemente, ahora vertiéndose a través de MOODLE para alumnos de la ETS de Agrónomos
- [2] Diversos paquetes de ordenador, tal como MAPLE o MATHEMATICA, también MATLAB, MATHCAD, específicos como LINGO, GAMS, CEPLEX, o EXCEL con SOLVER. El DERIVE era famoso y sigue, hay mucho software libre con cosas de Matemáticas
- [3] G. Joos, Theoretical Physics, 3rd edition, ed. Hafner, New York, reeditado luego por Dover, 1986, menciona proviene de Blackie and Sons, Glasgow UK 1934.
- [4] J. Rossel, Física General, ed. AC Madrid 1974, (traducido de ed. Griffon, Neuchâtel, Suiza, 1960)
- [5] C. Romero, Teoría de la decisión multicriterio: Conceptos, técnicas y aplicaciones, ed. Alianza Universidad Textos, Madrid 1993
- [6] R. L. Keeney, H. Raiffa, Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs, ed. John Wiley & Sons, New York et al., 1976.
- [7] S. French, Readings in Decisión Análisis, ed Chapman & Hall/CRC, 1989, Boca Raton London New Cork Washington D. C.
- [8] J. von Neumann, O. Morgestern, Theory of Games and Economic Behaviour, Princeton University Press, Princeton, 1944 – 3<sup>rd</sup> ed.1947, last copyright 1972, First Princeton Paperback printing 1980
- [9] S. French, Decision Theory, Ellis Horwood Limited 1986 Chichester, UK

