Caracterización y representación de una clase de matrices perturbadas en el contexto de la inversa de Drazin *

J. Robles, J.Y. Vélez-Cerrada
Facultad de Informática, Universidad Politécnica de Madrid

Resumen

Dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, definimos el *índice* de A, $\mathrm{ind}(A)$, como el más pequeño entero positivo k tal que $\mathrm{rango}(A^k) = \mathrm{rango}(A^{k+1})$, y la *inversa de Drazin* de A como la única matriz $A^D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $A^D AA^D = A^D$, $AA^D = A^D A$ y $A^{k+1}A^D = A^k$. Para el caso $\mathrm{ind}(A) = 1$, la inversa de Drazin se llama el *grupo inverso* de A y se denota por $A^\sharp$. La *proyección espectral de A correspondiente al autovalor* 0 es la única matriz idempotente A^π tal que $\mathcal{R}(A^\pi) = \mathcal{N}\left(A^k\right)$ y $\mathcal{N}(A^\pi) = \mathcal{R}(A^k)$, donde $\mathcal{N}(\cdot)$ y $\mathcal{R}(\cdot)$ denotan el núcleo e imagen de una matriz, respectivamente. La inversa de Drazin tiene importantes aplicaciones, entre las que se encuentra la resolución de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales y ecuaciones lineales en diferencias [4].

En [1], Campbell y Meyer establecieron que si A_j converge a A, entonces A_j^D converge a A^D si y sólo si $\mathrm{rank}\, A_j^{k_j} = \mathrm{rank}\, A^k$, para todo $j \geq j_0$, donde $k_j = \mathrm{ind}(A_j)$. En este contexto, el problema de perturbación, que aún es un problema abierto, consiste en caracterizar, representar y obtener expresiones explícitas de la inversa de Drazin de las matrices B que verifican la siguiente condición:

$$\mathrm{rank}\, A^k = \mathrm{rank}\, B^s, \ \text{con } s = \mathrm{ind}(B). \tag{1}$$

En este trabajo se estudia la clase de matrices B que verifican las siguientes condiciones geométricas, para algún entero positivo s:

$$(\mathcal{A}_s) \qquad \mathcal{R}(B^s) \cap \mathcal{N}\left(A^{\mathrm{D}}\right) = \{0\},\ \mathcal{R}(A^{\mathrm{D}}) \cap \mathcal{N}\left(A^{\mathrm{D}}B\right) = \{0\} \text{ y } \mathcal{R}(BA^{\mathrm{D}}) = \mathcal{R}(B^s).$$

Observamos que si $B \in (\mathcal{A}_s)$ con $\mathrm{ind}(B) = s$, entonces B verifica la condición (1).

La clase $(\mathcal{A}_s)$ contiene la clase de matrices B, estudiada en [5], que satisfacen las siguientes condiciones:

$$\|A^{\mathrm{D}}(B - A)\| < 1,\ \mathcal{R}(BA^{\mathrm{D}}) \subseteq \mathcal{N}\left(BA^\pi\right) \text{ y } \mathrm{rank}\, B^s = \mathrm{rank}\, A^{\mathrm{D}},$$

donde s es el menor entero positivo de entre los que verifican la tercera condición anterior.

Hacemos notar que para el caso $s = 1$ la clase $(\mathcal{A}_1)$, estudiada en [3], puede ser expresada como:

$$(\mathcal{A}_1) \qquad \mathcal{R}(B) \cap \mathcal{N}\left(A^D\right) = \{0\} \quad \text{y} \quad \mathcal{N}(B) \cap \mathcal{R}(A^D) = \{0\}.$$

El problema de perturbación del grupo inverso es un caso de especial interés debido a su aplicación al estudio de la estabilidad de la cadenas de Markov [2, 6]. En este contexto, probamos que si $\mathcal{C}$ es una cadena de Markov ergódica con matriz de transición T y $\widetilde{\mathcal{C}}$ es una cadena ergódica perturbada, siendo $\widetilde{T}$ su matriz de transición, entonces $I - \widetilde{T} \in (\mathcal{A}_1)$, (ver [6]).

En este trabajo se caracteriza y representa la clase de matrices perturbadas $(\mathcal{A}_s)$. La caracterización se realiza utilizando condiciones algebraicas, condiciones sobre el rango de ciertas matrices y una representación matricial por bloques de la matriz perturbada. Para la clase $(\mathcal{A}_1)$, en [3] se da una cota del error relativo $\|B^\sharp - A^{\mathrm{D}}\|/\|A^{\mathrm{D}}\|$. Para la clase de matrices perturbadas $(\mathcal{A}_s)$, en [7] se obtienen expresiones explícitas de la inversa de Drazin y proyección espectral, así mismo se dan cotas del error relativo $\|B^{\mathrm{D}} - A^{\mathrm{D}}\|/\|A^{\mathrm{D}}\|$ y $\|B^\pi - A^\pi\|$. Con todo lo anterior, se generalizan los resultados obtenidos en [5] y en [6, Teoremas 3.1 y 4.1].

keywords: inversa de Drazin, proyección espectral, perturbación.

*Trabajo financiado por el Proyecto MTM2007-67232, “Ministerio de Educación y Ciencia”.

Referencias

[1] S. L. Campbell and C. D. Meyer, Jr., *Continuity properties of the Drazin Pseudoinverse*, Linear Algebra Appl., 10 (1975), pp. 77–83.

[2] S. L. Campbell and C. D. Meyer, *Generalized Inverses of Linear Transformations*, Dover, New York, 1991. (Originally published: Pitman, London, 1979.)

[3] N. Castro-González, J. Robles, and J. Y. Vélez-Cerrada, *Characterizations of a class of matrices and perturbation of the Drazin inverse*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., preprint.

[4] M. Eiermann, I. Marek, and W. Niethammer, *On the solution of singular linear equations by semiiterative equations*, Numer. Math., 53 (1988), pp. 265–283.

[5] X. Li and Y. Wei, *An expression of the Drazin inverse of a perturbed matrix* , Appl. Math. Comput, 153 (2004), pp. 187–198.

[6] C. D. Meyer, *The condition of a finite Markov chains and perturbation bounds for the limiting probabilities*, SIAM J. Alg. Disc. Math., 1 (3), (1980), pp. 273–283.

[7] J. Y. Vélez-Cerrada y J. Robles, *Cotas de error de la inversa de Drazin de una matriz perturbada*, Encuentro de Álgebra Lineal, Análisis Matricial y Aplicaciones ALAMA2008.