APLICACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS EN EL PRIMER ENLACE GEODÉSICO ENTRE EUROPA Y ÁFRICA.

Marzo de 2008

Verdú Vázquez, Amparo - Dra Ingeniera en Geodesia y Cartografía - Universidad Alfonso X el Sabio. Almazán Gárate, José Luís - Dr Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos - Universidad Politécnica de Madrid. Primo Lara, Salvador - Ingeniero en Geodesia y Cartografía - Universidad Alfonso X el Sabio.

Palabras clave: Azimut, Elipsoide, Geodesia, Geoide, Reducciones

Resumen

La figura que más se acerca a la verdadera forma de la tierra es el Geoide, pero su expresión matemática es muy compleja. Por tanto, para poder hacer mediciones sobre ella debe ser sustituida por diversas superficies de referencia más sencillas (planos, esferas, elipsoides...).

Ha sido la Geofísica, a través de la modelización matemática y a partir de diversas reducciones, la que ha permitido a la Geodesia pasar de una superficie a otra. La figura más aproximada a la forma real de la Tierra y matemáticamente sencilla de representar es el elipsoide de revolución. A lo largo de la historia han sido muchos los elipsoides adoptados, según se adaptasen a las necesidades locales de cada nación. Está siendo la universalización del uso del GPS la razón por la que se tiende a usar un único elipsoide de referencia: el WGS-84 (World Geodetic System), admitido como el que mejor se adapta con carácter general al globo terráqueo. Como aplicación práctica de todo esto se ha analizado el enlace hispano-argelino realizado en 1879, con métodos modernos de cálculo.

El resultado de este trabajo pone de manifiesto la alta calidad del enlace original.

1. Introducción

La Geodesia, según Helmert en su libro Mathematical and Physical Theory of Geodesy, (1880), es la ciencia encargada de medir y representar la forma de la Tierra. Ésta sumi nistra con sus resultados de mediciones y cálculos, la referencia geométrica para las demás ciencias que estudian la dinámica del planeta y los factores que influyen sobre él. La Geodesia, dividida entre la Geodesia Física y la Geodesia Matemática, trata de determinar y representar la figura de la Tierra en términos globales.

La Geodesia siempre ha estado vinculada a la ingeniería civil. Este vínculo cobra aún más importancia cuando se trata de comunicar territorios entre continentes vecinos, como es el caso de la Península Ibérica y el Norte de África.

La oportunidad del presente trabajo viene dada por el interés actual en el enlace fijo Europa-África a través del Estrecho de Gibraltar, que se viene estudiando desde hace tiempo, con un gran interés por parte de los gobiernos de España y Marruecos y por gran parte de la comunidad científica internacional.

El interés de la zona resulta indudable, tanto desde el punto de vista oceanográfico, como geográfico, histórico y político, y la intención de establecer un enlace fijo, carretero o ferroviario, en túnel o puente, justifica la necesidad de enlazar ambos márgenes con la mayor precisión posible.

La Geodesia española ha demostrado a lo largo de la historia el altísimo nivel al que se encuentra desde el siglo XIX. Este hecho se ha podido verificar a partir del análisis de las diferentes campañas llevadas a cabo por equipos españoles desde el primer enlace hispano-argelino, realizado el 1879 por el general Ibáñez de Ibero, hasta nuestros días.

Teniendo como punto de referencia el hito histórico y técnico del enlace hispano-argelino, se hace necesario el estudio de las técnicas de observación astronómico-geodésicas clásicas y su evolución y desarrollo a lo largo del tiempo, para finalmente desembocar en las técnicas espaciales. Todas estas técnicas se basan en desarrollos matemáticos, más o menos complejos según el ámbito de trabajo y/o precisiones requeridas.

Como constatación de los resultados obtenidos en la campaña geodésica de 1879, se ha hecho un recálculo empleando las observaciones originales y métodos actuales de cálculo, introduciendo además las correcciones que por entonces no se consideraban. El resultado del recálculo no hace sino poner de manifiesto la alta calidad del enlace original.

2. Determinación del geoide

El geoide es un esferoide tridimensional que constituye una superficie equipotencial imaginaria resultante de suponer la superficie de los océanos en reposo y prolongada por debajo de los continentes y que sería la superficie de equilibrio de las masas oceánicas sometidas a la acción gravitatoria y a la de la fuerza centrífuga ocasionada por la rotación y traslación del planeta; de manera que la dirección de la gravedad es perpendicular en todos los lugares. Al ser su expresión matemática sumamente complicada, se prescindió del geoide como superficie de referencia y se tomó otra más asequible al cálculo. La obtención de una superficie de referencia, con una definición matemática sencilla que permita efectuar cálculos, es imprescindible para poder realizar la proyección de los puntos del relieve terrestre sobre la misma y permitir la elaboración de mapas y planos. El geoide no puede ser la superficie de referencia adoptada, pues, como hemos dicho, es muy compleja e irregular. Se toma entonces la hipótesis de escoger un elipsoide de revolución que se adapte en lo posible al geoide y que se define por unos parámetros matemáticos, denominándose Elipsoide de referencia.

La elección del elipsoide es más que justificada, por razones de sencillez en su definición matemática y porque se ajusta con aproximación de primer orden al geoide.

Gauss reconoció en 1828, al igual que había hecho antes Laplace (1802) y haría después Bessel (1837) que el modelo elipsoidal no es válido si se pretende obtener una gran exactitud. Es decir, que no se podía seguir ignorando la desviación de la vertical física, materializada por el instrumental, y la vertical definida por el sistema elipsoidal. Lo que se traduce en la necesidad de considerar otra superficie que se ajuste mejor a la forma real de la Tierra.

A pesar de ello, los primeros trabajos y redes geodésicas ajustados por mínimos cuadrados (Legendre 1806, Gauss 1803-1807,...) trataban las desviaciones de la vertical como errores aleatorios y no como sistemáticos. Esta práctica termina formalmente con la definición de Geodesia y presentación del geoide que lleva a cabo Helmert en 1880.

La determinación del geoide sería a partir de entonces y hasta mediados del siglo XX, el objetivo principal de la geodesia. Su determinación permanece como un problema esencial de la geodesia, e incluso actualmente, su importancia se ha visto de nuevo incrementada debido a técnicas GPS y al empleo de sistemas de referencia globales tridimensionales.

A continuación mostramos las reducciones que afectan a las observaciones geodésicas para posteriormente calcularlas con los datos originales.

3. Reducción de observaciones al elipsoide

Se denomina reducción al conjunto de operaciones necesarias para referir las observaciones, magnitudes medidas en un sistema de referencia astronómico local, a la superficie de referencia escogida, generalmente un elipsoide de revolución. Sobre dicha superficie se realizan los cálculos que permiten determinar, a partir de observaciones geodésicas, coordenadas sobre el elipsoide.

Es importante tener en cuenta que las reducciones deben estar de acuerdo con la precisión de las magnitudes medidas y éstas, a su vez, con la precisión final buscada en el trabajo. En muchos casos, la magnitud de las correcciones a efectuar en el proceso de reducción es muy pequeña, lo que puede inducir a no considerar su aplicación. Sin embargo, la acumulación de los errores sistemáticos debidos a los efectos de no reducir las observaciones, mezclados con los errores aleatorios propios de toda medición, dificulta el tratamiento aleatorio de éstos y puede conducir, en grandes redes a distorsiones de difícil control.

Las magnitudes susceptibles de ser medidas y reducidas a la superficie del elipsoide en los trabajos de geodesia terrestre son:

• Coordenadas absolutas

• Distancias

• Azimutes

• Ángulos

En la reducción de observaciones hay dos clases de efectos a tener en cuenta:

• Los efectos geométricos, debidos a la particular geometría del elipsoide de revolución

• La influencia del campo gravitatorio terrestre en las mediciones. Los teodolitos materializan la normal a la superficie equipotencial y no la normal al elipsoide.

La reducción, debido a la geometría del elipsoide y a la naturaleza del campo gravitatorio, es función de las coordenadas geodésicas de los puntos. Es decir, para efectuar correctamente la reducción de observaciones sería necesario conocer las coordenadas de los puntos. Pero, para conocer las coordenadas geodésicas es necesario calcularlas a partir de las observaciones reducidas, lo cual nos conduce a un proceso de reducción iterativo. Sin embargo, en la práctica, al ser las correcciones muy pequeñas, la primera iteración, realizada a partir de coordenadas aproximadas de los puntos, suele ser lo suficientemente precisa.

3.1. Reducción de coordenadas

A través de una observación astronómica se conoce la latitud astronómica (Φ), la longitud astronómica (Λ) y mediante nivelación geodésica, la altitud respecto al geoide (H).

Asumiendo que el semieje menor del elipsoide de referencia es paralelo al eje medio de rotación terrestre, se obtiene la siguiente figura. El punto N es el polo norte del elipsoide de referencia.

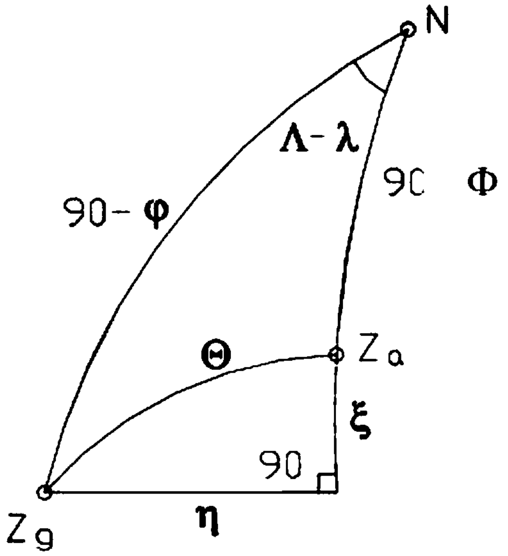

Figura 1: Relación entre coordenadas geodésicas y astronómicas.

Siendo Z_g = cenit geodésico y Z_a= cenit astronómico

A partir de la figura, por trigonometría esférica se relacionan los diferentes lados:

$$\cos(90 - \varphi) = \cos[90 - (\Phi - \xi)] \cos\eta + \mathrm{sen}[90 - (\Phi - \xi)] \,\mathrm{sen}\eta \cos 90$$

$$\mathrm{sen} = \mathrm{sen}\,(\Phi - \xi)\cos\eta$$

y mediante el teorema del seno:

$$\frac{\operatorname{sen}\eta}{\operatorname{sen}(\Lambda-\lambda)}=\frac{\operatorname{sen}(90-\varphi)}{\operatorname{sen}90}$$
$$\operatorname{sen}\eta=\operatorname{sen}(\Lambda-\lambda)\cos\varphi$$

considerando:

$$\cos\eta\approx 1 \operatorname{sen}\eta\approx\eta \operatorname{sen}(\Lambda-\lambda)\approx\Lambda-\lambda$$

se obtiene:

$$\xi=\Phi-\varphi \qquad \eta=(\Lambda-\lambda)\cos\varphi$$

Por tanto, conocidas las componentes de la desviación de la vertical, las coordenadas geodésicas vendrán dadas por:

$$\varphi=\Phi-\xi \quad \lambda=\Lambda-\eta\sec\Phi \quad h = H + N$$

siendo:

ξ = componente de la desviación de la vertical en la dirección del meridiano
η = componente de la desviación de la vertical en la dirección del paralelo
N = ondulación del geoide

3.2. Reducción de distancias
Reducción de la distancia geométrica a la cuerda

En Geodesia, se tienen diferentes distancias dependiendo del horizonte sobre el que se efectúe la reducción. Se toma, como primera aproximación a la distancia reducida, la longitud de la cuerda que une la proyección sobre el elipsoide de los dos puntos considerados.

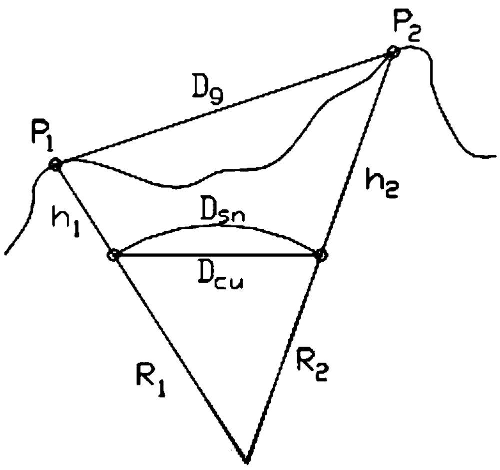

Figura 2: Reducción de distancias al elipsoidde

La expresión para reducir la distancia geométrica a la cuerda es:

$$D_{CU} = \sqrt{\frac{D_g^2 - (h_j - h_i)^2}{\left(1 + \frac{h_j}{R_m}\right)\left(1 + \frac{h_i}{R_m}\right)}} \qquad R_m = \frac{1}{2}(R_i + R_j)$$

$$R_i = \frac{\rho_i v_i}{\rho_i sen^2 \alpha_{ij} + v_i \cos^2 \alpha_{ij}}$$

Para reducir distancias al elipsoide es necesario conocer las altitudes sobre el elipsoide en los extremos de la medición. Generalmente se dispondrá de las altitudes ortométricas, es decir sobre el geoide, siendo necesario conocer las ondulaciones del geoide. Conocidas la altitud ortométrica y la ondulación del geoide se determina la altitud sobre el elipsoide.

$$h_i = H_i + N_i$$

El empleo de altitudes ortométricas en vez de altitudes sobre el elipsoide conduce a errores en escala dependientes de la magnitud de la ondulación del geoide. En la península ibérica la ondulación del geoide respecto al elipsoide de Hayford es de aproximadamente -20 m. En tal caso, el hecho de no considerar la ondulación del geoide supone unas 3 ppm.

Reducción de la cuerda al arco

La distancia calculada en el apartado anterior es la cuerda que une la proyección de los puntos extremos sobre el elipsoide. Para determinar el arco es necesario efectuar la reducción de la cuerda al arco. Se obtiene así la longitud de la sección normal, dada por la expresión:

$$D_{SN} = 2\,\mathrm{R_m}\ \mathrm{arc\,sen}\left(\frac{D_{CU}}{2\,\mathrm{R_m}}\right)$$

La longitud de la sección normal, calculada mediante las expresiones anteriores es equivalente, con la suficiente aproximación, a la longitud de la línea geodésica.

3.3. Reducción de azimutes y de ángulos

Las correcciones que han de efectuarse a un acimut observado son las siguientes:

• Por desviación de la vertical

• Por la altitud del punto de observación

• Por la altitud del punto visado

• Por el paso de la sección normal a la línea geodésica

Corrección por desviación de la vertical

Los azimutes astronómicos, observados sobre la superficie terrestre, están referidos a la vertical astronómica, que depende del campo gravitatorio. Para efectuar cálculos sobre el elipsoide debe estar referido a la vertical geodésica. La corrección debida al efecto del campo gravitatorio sobre un acimut observado viene dado por la ecuación completa de Laplace:

$$C_1 + C_2 = -\eta_i \, tg\varphi_i - \left(\xi_i \text{ sen } \alpha_{ij} - \eta_i \cos\alpha_{ij}\right) \cot g \, \beta_{ij}$$

siendo:

ξi = componente de la desviación de la vertical en la dirección del meridiano
ηi = componente de la desviación de la vertical en la dirección del paralelo
φi = latitud geodésica del punto i
αij = acimut geodésico entre los puntos i y j
βij = ángulo cenital entre los puntos i y j

Si el ángulo cenital está próximo a 100^g esta reducción es prácticamente despreciable, pero en observaciones con mucha pendiente, es la responsable de que los cierres en los grandes triángulos geodésicos alcancen valores de hasta 10^{cc} y 15^{cc}.

Corrección por altura del punto de estación

La reducción anterior corregía la desviación de la vertical en el geoide. La línea de la plomada es perpendicular a todas las superficies equipotenciales que atraviesa. Al no ser éstas paralelas, la altitud del punto de observación sobre el geoide se traducirá en un diferencial de desviación de la vertical.

Esta corrección es mucho menor que la anterior y se suele despreciar.

Corrección por altura del punto visado

Suponiendo que ya ha sido corregida la desviación relativa de la vertical, el plano formado por la normal al elipsoide en el punto de estación y el punto visado generalmente no coincidirá con el plano formado por dicha normal y la proyección del punto visado. Esto es debido a que las normales de P_1 y P_2 no se cortan, excepto cuando estén en el mismo meridiano o en el mismo paralelo. Las secciones normales correspondientes a punto estación-punto visado y punto estación-proyección del punto visado, formarán un ángulo que debe ser corregido. Esta corrección, proporcional a la altura del punto visado y a la torsión geodésica, viene dada por:

$$C_3 = \frac{h_j}{2\rho_m} e^2 \cos^2 \varphi_m \text{ sen } 2\alpha_{ij}$$

siendo:

$$\varphi_m = \frac{1}{2}(\varphi_i + \varphi_j) \qquad \rho_m = \frac{1}{2}(\rho_i + \rho_j)$$

Esta corrección, en el elipsoide de Hayford, empieza a suponer décimas de segundo cuando se observa a altitudes superiores a mil metros.

Corrección por paso de la sección normal a la línea geodésica

Las secciones normales directa y recíproca entre dos puntos generalmente no coincidirán. Es decir, existe una sección directa y una recíproca. Esto, como es sabido, se solventa introduciendo el concepto de línea geodésica.

Se define línea geodésica como el camino mínimo que cumple una cierta imposición física. En el caso de la geometría elipsoidal, geodésica es la mínima distancia que une dos puntos a través de la superficie del elipsoide de revolución.

Se demuestra que la línea geodésica triseca al ángulo formado por las secciones normales recíprocas. La corrección para pasar del acimut de la sección normal al acimut de la línea geodésica viene dada por:

$$C_4 = \frac{e^2 s^2}{12 \nu_m^2} \cos^2 \varphi_m \operatorname{sen} 2\alpha_{ij}$$

siendo:

$$\varphi_m = \frac{1}{2}(\varphi_i + \varphi_j) \qquad \nu_m = \frac{1}{2}(\nu_i + \nu_j)$$

Esta corrección supone milésimas de segundo para distancias de 50 km y comienza a suponer alguna décima a partir de 200 km.

4. Recálculo del enlace hispano-argelino

En el enlace de Ibáñez de Ibero se observó una red geodésica formada por 4 vértices, Tetica y Mulhacén en España y M'Sabiha y Filhaoussen en Argelia. La figura resultante es un cuadrilátero simple con 2 diagonales, que constituye la configuración más adecuada, debiendo ser usada si es posible con preferencia a cualquier otra.

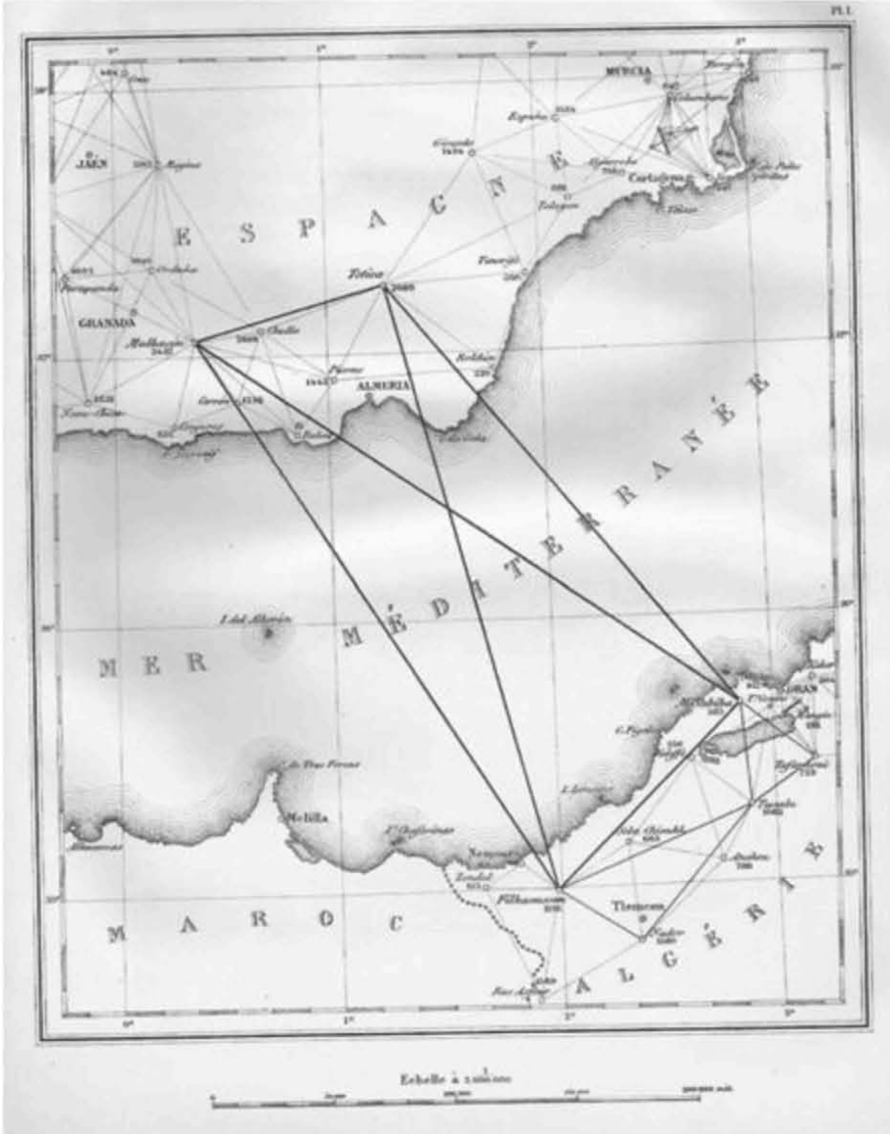

Figura 3: Plano General del enlace.

A = 4 vértices
Q = 12 direcciones
r = Q - 3 A + 4 = 4 ecuaciones de condición

$$K = \frac{Q - r}{Q} = 0{,}67$$ consistencia conjunta

Al efectuar la compensación por mínimos cuadrados de un cuadrilátero con 2 diagonales se obtienen 3 ecuaciones de ángulo y 1 de lado.

El método de observación empleado fue el de vuelta de horizonte, que consiste en tomar un vértice como referencia, y con el instrumento en Círculo Directo, efectuar lectura al resto de vértices que componen la vuelta, por orden de situación en el horizonte, hasta visar de nuevo al de referencia, efectuando una nueva lectura. La diferencia entre las lecturas final e inicial al vértice de referencia constituye el error de cierre de la vuelta de horizonte. Este error depende del instrumento empleado, de las condiciones de observación y del tiempo empleado en leer la vuelta. Para un teodolito de segundo debe ser menor de 5-10^{cc}. A continuación se efectúa vuelta de campana y se observa en Círculo Inverso y en sentido contrario, obteniendo un nuevo error de cierre. Con esto concluiría la primera fase. El valor angular definitivo será el promedio de las n series efectuadas:

$$\omega_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} \omega_i}{n}$$

y su error medio cuadrático:

$$e.m.c. = \sigma_{\omega m} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\omega_i - \omega_m)^2}{n(n-1)}}$$

Para una serie el error medio cuadrático es:

$$e.m.c. = \sigma_{\omega} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\omega_i - \omega_m)^2}{(n-1)}} = \sigma_{\omega m}\sqrt{n}$$

A partir de las observaciones angulares de las cuatro estaciones se hizo una compensación de la vuelta de horizonte de direcciones observadas. Las observaciones se agruparon en función de su peso. Se consideraron los pesos a partir de los vértices observados. Por ejemplo, desde Mulhacén se midieron 69 series, de las cuales solamente 20 series pudieron observar a los otros 3 vértices del cuadrilátero, 18 series a Tetica y Filhaoussen, ya que M'Sabiha no se visaba, 6 series a Tetica y M'Sabiha y 25 a Filhaoussen y M'Sabiha.

Se obtuvieron por tanto 4 grupos de peso 20, 18, 6 y 25, a partir de los cuales se planteó un sistema de ecuaciones ponderado en función de las observaciones.

La resolución del sistema por mínimos cuadrados da como resultado los valores que sirven para obtener las direcciones más probables.

En la actualidad, se ha procedido a una compensación diferente. Como en cada punto se observan tres direcciones a otros tantos vértices, y por tanto, se tienen tres ángulos observados (ab, bc y ac, supuesto éste el mayor) que deben cumplir la condición ab+bc-ac=0 y, como cada uno ha sido observado un número de veces diferente, sus medias tienen una desviación estándar propia que sirve para asignar el peso adecuado a cada uno de los tres. Así se han obtenido nuevos valores para las direcciones compensadas que difieren de los del cálculo original.

Además en el enlace hispano argelino, solamente aplicaron el tercio de exceso esférico como corrección a cada ángulo del triángulo. El resto de correcciones que hemos tenido en cuenta en la actualidad (corrección por altura del punto visado *(C_3)*, corrección por paso de la sección normal a la línea geodésica *(C_4)* y corrección por desviación de la vertical *(C_2))* no se calcularon en su día por desconocimiento en profundidad del geoide[1]

Las correcciones calculadas en la actualidad difieren de las calculadas en origen, lo que lógicamente afecta al resultado final. No así a la precisión, ya que estas correcciones resultan valores tan bajos que, aunque es interesante tenerlas en cuenta, el resultado final es prácticamente invariable, demostrando que la precisión obtenida en el enlace original fue de muy alto grado.

1. Es de remarcar que el enlace hispano-argelino fue realizado en 1879, poco tiempo antes de la presentación oficial del geoide, por Helmert en 1880.

5. Conclusiones

Las coordenadas resultantes de ambos cálculos no nos sirven para poder hacer un análisis comparativo, ya que en el enlace original se trabajó con el elipsoide de Bessel, y en el cálculo actual se ha empleado el WGS-84.

Por tanto, interesa un cierto análisis en relación con la solución de cálculo primitivo, que podemos hacer a través de las longitudes de los lados y diagonales del cuadrilátero, que se resumen en el siguiente cuadro.

DISTANCIAS	AJUSTE ACTUAL	AJUSTE 1879	dif	ppm
M - T	82827.20	82827.20	0.00	
M - M´S	269846.35	269847.24	-0.89	-3.30
M -F	269925.76	269926.93	-1.17	-4.34
T - M´S	225711.46	225712.49	-1.03	-4.55
T - F	257410.91	257412.28	-1.37	-5.31
M´S - F	105178.56	105179.35	-0.79	-7.55

De su observación se puede concluir que las diferencias en relación con el ajuste original, que son del orden de un metro, se hallan dentro de los errores relativos, por lo que cabe decir que es una solución aceptable, aunque la actual tiene un grado de libertad 7 (superior) que induce a pensar en una solución mejor para los datos adquiridos en 1879 en una operación audaz y ejemplar.

Concluimos por tanto que la Geodesia, tanto clásica como espacial, tiene la misma base matemática que la de hace más de un siglo, pero ha sido sin duda el avance de la informática y de los métodos de cálculo numérico lo que permite actualmente rápidos cálculos bajo diversas hipótesis, que han fomentado el desarrollo del manejo de datos en tiempo real, como muestra más clara el actual auge de los sistemas GPS.

Referencias Bibliográficas

Bomford, G (1971): Geodesy. At the Clarendon Press. Oxford

García-Asenjo Villamayor, Luis. (2002): Apuntes de Geodesia. Editorial UPV. Valencia

General Ibáñez; Coronel Perrier (1883): «Enlace Geodésico y Astronómico de la Argelia con España» en Memorias del Instituto Geográfico y Estadístico. Tomo VII. Instituto Geográfico y Estadístico, Madrid

Heiskanen, W; Moritz, H. (1985): Geodesia Física. Instituto Geográfico y Nacional. Instituto de Astronomía y Geodesia, Madrid

Martín Asín, Fernando (1990): Geodesia y cartografía matemática. Editorial Paraninfo. Madrid

Ruiz Morales, Mario; Ruiz Bustos, Mónica (1999): Artículo «La medición de la tierra entre Pitágoras y la era espacial» Mapping interactivo. Julio 1999

Ruiz Morales, Mario; Ruiz Bustos, Mónica (2000): Forma y dimensiones de la tierra. Síntesis y evolución histórica. Ediciones del Serbal. Barcelona

Torge, W. (1993): Geodesia. Editorial Diana. Mexico

Vanicek, Petr; Krakiwsky, Edward (1986): Geodesy: The Concepts. University of New Brunswick. Canadá

Verdú Vázquez, A (2006): Artículo: «El Primer enlace geodésico entre Europa y África» MAPPING. Revista Internacional de Ciencias de la Tierra. Número 111. Julio 2006.

Zakatov. P. (1981): Curso Superior de Geodesia Superior. Editorial Mir. URSS