Las ecuaciones de Euler de la mecánica de fluidos

AMABLE LIÑÁN
Real Academia de Ciencias y Universidad Politécnica de Madrid

1. INTRODUCCIÓN

El Instituto de España celebró en 2007 el tercer centenario del nacimiento de Leonhard Euler con un ciclo de conferencias organizadas para honrar la herencia que nos dejó. A mí me ha correspondido, dada mi actividad docente e investigadora, hablar de la trascendencia de sus contribuciones a la Mecánica de Fluidos; en particular, de su trascendental descubrimiento de los principios generales que determinan la fluidostática y el movimiento de los fluidos.

A la hora de valorar las contribuciones de Euler a la Ciencia, sus grandes aportaciones como matemático tienden a acaparar la atención frente a sus contribuciones al terreno más resbaladizo de la Física. Sin embargo, estas contribuciones son tan importantes que, a mi juicio, le convierten en el físico más importante del Siglo XVIII. Si Galileo nos enseñó que las leyes de la Naturaleza estaban escritas en lenguaje matemático, aunque debían ser deducidas por la observación, fue Newton, nacido el año 1642 de la muerte de Galileo, el que descubrió las leyes de la Mecánica que seguimos utilizando para describir el movimiento de cuerpos macroscópicos, cuando se mueven a velocidades pequeñas frente a la de la luz.

Fue Euler quien nos mostró cómo utilizar la segunda ley de Newton (originalmente aplicable sólo a masas puntuales) para determinar la aceleración de cualquier parte infinitesimal del fluido. Para los fluidos esa determinación sólo fue posible después del descubrimiento por Euler del concepto moderno de presión; permitiéndole calcular la resultante de estas fuerzas, de contacto, ejercidas por el resto del fluido considerado como medio continuo, sobre esa masa elemental. Fue Euler el que descubrió así, en 1755, las leyes que rigen el movimiento de los fluidos ideales, mucho antes de su descubrimiento de las leyes que gobiernan el movimiento de los cuerpos rígidos.

Mi pequeña aportación a nuestro homenaje a la obra de Euler se limita esencialmente a resumir lo publicado por Euler, en 1752 y 1755, en las Memorias de Academia de Ciencias de Berlín, que él dedicó a la exposición de los principios, que ahora nosotros consideramos leyes, que rigen los movimientos de los fluidos ideales. Estas leyes de Euler están escritas en un lenguaje actual y siguen manteniendo hoy su vigencia y su capacidad predictiva de muchos flujos de gran interés práctico en la Ingeniería. Eso a pesar de que las Ecuaciones de Euler no incluyen los efectos de la viscosidad, por no jugar un papel esencial en esos flujos, y a pesar de que sus leyes han de ser complementadas con la forma apropiada de la ecuación de la energía, que no se conoció hasta un siglo después.

Aunque las contribuciones de Euler a la Mecánica, y en particular a la Mecánica de Fluidos, han sido glosadas abundantemente en la literatura dedicada a la Historia de las Ciencias, nadie ha resaltado mejor que Clifford Ambrose Truesdell el carácter tan original y trascendental de las aportaciones de Euler a la Mecánica de Fluidos; sin dejar de poner de manifiesto la inevitable deuda de la obra singular de Euler con la de los científicos de su época.

Nada mejor, para conocer bien las extraordinarias aportaciones de Euler a la Mecánica de Fluidos, que leer las más importantes memorias originales de Euler sobre el tema publicadas en los Volúmenes 12 y 13, de la Serie II de la Opera Omnia de Euler. Ésta ha sido publicada en Lausanne por la Sociedad de Ciencias Naturales Helvética, y los Volúmenes 12 y 13, publicados en 1954, fueron editados por Truesdell. Éste aportó una extensa Introducción, y los análisis y comentarios que nos parecen imprescindibles para conocer mejor la relación de la Obra de Euler con las aportaciones a la Mecánica de Fluidos de los grandes científicos anteriores y posteriores. También es muy recomendable la lectura de sus ensayos sobre Euler recogidos en la obra de Truesdell «Essays in the History of Mechanics», publicada en 1968 en Springer-Verlag. Está traducida al español, con el título «Ensayos de Historia de la Mecánica», publicada en 1975 por Tecnos en Madrid.

También recomiendo al lector la extensa monografía, de 692 páginas, escrita por Julián Simón Calero con el título «La génesis de la mecánica de fluidos», publicada en 1996 por la UNED en su colección Áula

Abierta. Esta monografía contiene una excelente exposición del desarrollo de la Mecánica de Fluidos en el periodo 1640-1780. Contiene un análisis detallado y riguroso de las aportaciones más importantes, en esa época crucial, al desarrollo de nuestros conocimientos de la Mecánica de Fluidos, tanto de sus aspectos científicos como de sus aplicaciones.

Los comentarios de Truesdell y de Simón Calero, pueden ser muy útiles a quien, como yo, trate de entender las aportaciones hechas antes de Euler a la Mecánica de Fluidos, cuando la dificultad de su desarrollo estaba en el desconocimiento de los principios generales. Buscaban en la oscuridad estos principios, tratando de seguir el modelo de los Principia de la Mecánica de Newton. Debían apoyarse en conceptos, como el de la presión, entonces mal definidos, al igual que los principios que, como el de las fuerzas vivas, proponían tentativamente para describir el movimiento de los fluidos.

2. LAS APORTACIONES DE NEWTON

La segunda de las leyes de la mecánica de Newton iguala la variación de la cantidad de movimiento de un cuerpo a la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre el mismo. Por ello, también se ocupó de la descripción de las fuerzas de interacción ente cuerpos materiales, que en todo caso deben estar sujetas a su tercera ley. En particular, Newton aportó su descripción de las fuerzas gravitatorias que determinan el movimiento de los planetas alrededor del Sol, y la caída de los cuerpos en la Tierra.

Cuando Newton se ocupa de los fluidos distingue entre los líquidos y los gases como el aire. Estos últimos supone que están constituidos por partículas o corpúsculos, que no interaccionan entre ellas, pero sí con los cuerpos que se mueven en el seno del gas. Las partículas del gas colisionan con la superficie del cuerpo, manteniendo en la colisión la componente tangencial de su velocidad relativa al cuerpo; para la componente normal Newton propone dos hipótesis: en la primera, supone que después de la colisión la componente normal al sólido de la velocidad relativa de las partículas simplemente cambia de signo, mientras que con la segunda hipótesis esta componente se anula. El análisis de Newton sólo está justificado en el régimen molecular libre (como el del aire alrededor de los satélites artificiales) y, con la segunda hipótesis, en el flujo hipersónico alrededor de cuerpos.

En cuanto al movimiento de los líquidos Newton comprendía que las fuerzas de interacción entre los corpúsculos que los formaban les proporcionaba una cohesión que determinaba su dinámica. El problema de calcular la resistencia que ofrecía un líquido al movimiento relativo de cuerpos sumergidos en el mismo estaba lejos de las posibilidades de descripción coherente por Newton. Propuso que también en los líquidos la resistencia era, tal como se deducía de su teoría del movimiento en gases, proporcional a la sección frontal del cuerpo, a la densidad del fluido y al cuadrado de la velocidad relativa; con un coeficiente de proporcionalidad, de orden unidad, a determinar experimentalmente.

Para el problema de la descarga de líquidos de un depósito bajo la acción de las fuerzas gravitatorias propuso una teoría (su teoría de la catarata), apoyada en hipótesis hoy inaceptables, que determinaba como velocidad de salida la de caída libre desde la superficie libre hasta la sección de salida; el valor anticipado por Torricelli en 1642. Para que este valor permitiese calcular el caudal de salida, que encontraba experimentalmente, Newton observó que era necesario tener en cuenta la contracción que mostraba la vena líquida, fuera del depósito, desde la sección de salida hasta la sección contraída, donde ya se alcanzaba la velocidad de caída libre.

3. LAS APORTACIONES DE DANIEL Y JOHAN BERNOULLI

Las aportaciones a la Dinámica de Fluidos después de Newton incluyen las importantes contribuciones de Daniel Bernoulli, en su Hydrodynamica publicada en Estrasburgo en 1738, y de su padre Johan Bernoulli en su Hydraulica, que publicó, como parte de sus obras completas, en 1743 en Ginebra. Hay traducción inglesa, editada por Hunter Rouse y publicada por Dover en 1968, de las dos obras, escritas originariamente en latín.

En la Hydrodynamica de Daniel Bernoulli encontramos el primer intento de relacionar la presión con el movimiento del fluido. Por presión Bernoulli, y antes Pascal, entiende la fuerza ejercida, por unidad de superficie, por el fluido sobre las paredes del recipiente que lo contiene y la mide por la altura de la columna líquida que debido a las fuerzas gravitatorias originaría esta fuerza[1].

[1] En su libro Hydrodynamica, Daniel Bernoulli incluye el primer intento de una teoría cinética de gases para explicar la fuerza de presión ejercida por un gas en equilibrio macroscópico sobre las paredes de un recipiente. El resultado conduce a $p=\rho v^2/3$, en función de la densidad ρ del gas y la velocidad v de agitación térmica de las moléculas. Esta fue una aportación muy importante de Bernoulli a la Física de los Fluidos.

Los análisis incluidos tanto en la Hydrodynamica como en la Hydraulica de los Bernoulli (hijo y padre) se refieren en su mayoría al flujo en conductos; utilizando la hipótesis de que el movimiento es unidimensional, con lo que la velocidad, v, sería uniforme en cada sección transversal al conducto (que para ello debe tener una longitud grande frente a la dimensión transversal de la sección, y se han de excluir los efectos de las fuerzas de fricción). El resultado para el movimiento en régimen estacionario de un líquido en un conducto, bajo las fuerzas gravitatorias, conduce a la ecuación

$$p'/(\rho g)+v^2/(2g)+z=H_0$$

que hoy llamamos de Bernoulli, que liga la sobrepresión $p' = p - p_a$ (respecto a la presión atmosférica p_a), la velocidad v del fluido en la sección local de cota media z, y la cota H_0 de la superficie libre del líquido en el depósito que alimenta el flujo en el conducto, y sobre la que actúa también la presión atmosférica.

Esta forma de la ecuación se debe a Euler. No aparece en esta forma explícita en los libros de los Bernoulli; sólo pudo escribirse después de que Euler aportase la noción moderna de presión del fluido y los principios generales introducidos por él para el análisis de los movimientos de fluidos no viscosos. Daniel Bernoulli la obtuvo admitiendo que sería aplicable a los movimientos de líquidos el principio de Leibnitz de conservación de las fuerzas vivas (en realidad de conservación de la energía mecánica) que éste había introducido para el movimiento de sólidos en caída libre bajo las fuerzas gravitatorias.

Aunque los argumentos aportados por Daniel Bernoulli para demostrar la validez de la ecuación que lleva su nombre son poco convincentes, parece claro que llegó a esta ecuación guiado por la observación experimental; buscando explicar cuantitativamente los resultados de muchos de los experimentos que él llevó a cabo, como el representado esquemáticamente en la Figura 1. El líquido del depósito se descarga a través de un conducto, de sección A_c pequeña frente a la del depósito. El conducto está taponado parcialmente a la salida, donde hay un orificio o de salida, cuya área efectiva, A_0, es menor que la del conducto. Los resultados de este experimento se explican perfectamente con la ecuación de Bernoulli. En la superficie libre del depósito $z = H_0$, $p' = 0$ y v es despreciable; en la sección de salida

$$p' = z = 0, \quad v = v_s = \sqrt{2gH_0}$$

la velocidad de salida de Torricelli; en cualquier sección del conducto la ecuación de conservación del caudal, $vA_c = v_s A_0$, permite calcular v en función de v_s y después la ecuación de Bernoulli proporciona el valor de la sobrepresión p'.

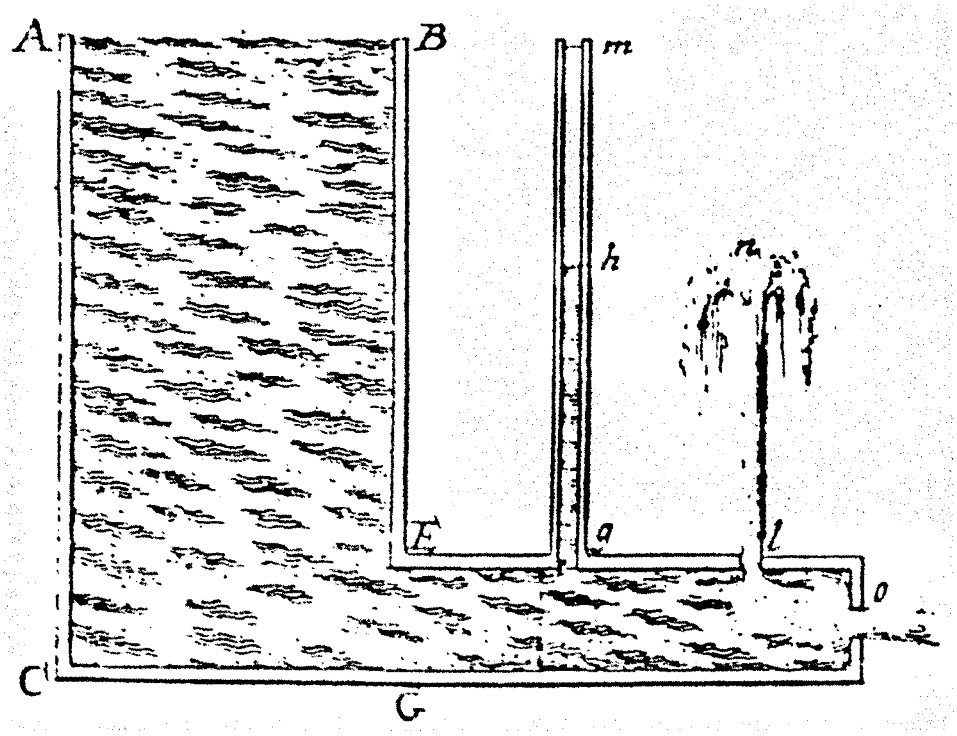

FIGURA 1.

Bernoulli pudo medir esta sobrepresión dotándo al conducto de salida de un manómetro[2], o toma lateral vertical. La altura «manométrica» *ah* que alcanza el líquido en la toma corresponde a la sobrepresión en el conducto; esta altura es inferior a la altura, $am \approx H_0$, de la superficie libre en el depósito; lo que implica que la presión en el conducto es inferior a la que hay en la base del depósito. La altu-

[2] Técnica de medición de la presión que él introdujo por primera vez en la Mecánica de Fluidos.

ra, *ah* es aproximadamente igual a la altura, *ln*, del surtidor generado por un chorro asociado a un orificio lateral de área pequeña, al igual que la de la toma manométrica, frente a la A_0 del orificio de salida *o*. En el orificio lateral la energía específica potencial *gah*, asociada a la sobrepresión, se convierte en energía cinética y luego ésta en el chorro se reconvierte de nuevo en energía potencial.

Bernoulli pudo obtener su ecuación, que iguala la caída H_0 $-p'/(\rho g)$ a la altura cinética $v^2/(2g)$, como sigue: Primero, para calcular la velocidad v_s de salida del líquido, podía utilizar su versión del principio de conservación de las fuerzas vivas, que él enuncia como igualdad del «descenso real» del centro de gravedad de un sistema de partículas, que arrancan del reposo, con su «ascenso potencial», correspondiente *a la energía cinética de las mismas. Aplica el principio a una* gota de líquido que arranca, con velocidad muy pequeña, de la superficie libre, de cota H_0, y que termina saliendo, con cota nula, por el orificio *o*. Así obtiene v_s, al igualar el descenso potencial H_0 y su ascenso potencial final $v_s^2/(2g)$. Después, Bernoulli observaría que su principio no es aplicable al movimiento del líquido entre su superficie libre en el depósito hasta cualquier sección del conducto, por no estar el líquido en caída libre al estar parcialmente taponado el conducto. Parecía como si sólo la parte, H_0-*ah*, del descenso real H_0 se invertía en el ascenso potencial del líquido, dado por el valor $v^2/(2g)$, asociado a la velocidad v en el conducto; el resto, *ah*, del descenso real se invierte en aumentar el ascenso potencial del líquido desde $v^2/(2g)$ al valor $v_s^2/(2g)$. Cuando se identifica *gah* con la sobrepresión, p-p_a, sobre las paredes del conducto, la igualdad H_0-ah = $v^2/(2g)$, toma la forma de la ecuación de Bernoulli.

$$\rho g H_0 = p - p_a + \rho v^2 / 2,$$

que liga la presión con la velocidad en el conducto y que permite calcular ambas, en función de la relación A_0/A_c, cuando añadimos la ecuación de continuidad, $v=v_sA_0/A_c$.

Johan Bernoulli, el padre de Daniel y maestro de Euler, envió a éste, en marzo de 1739, una copia del manuscrito de la primera parte de su Hydraulica, que también envió a la Academia de San Petersburgo, aunque no aparecería publicada hasta 1743, como parte de su Opera Omnia. En la primera parte de la Hydraulica se propone obtener la fuerza de presión sobre las paredes de un conducto, de diámetro pequeño frente a su longitud. Se apoya en la segunda ley de Newton aplicada a un volumen de líquido, en forma de rodaja, limitado por dos secciones transversales al conducto, a una distancia infinitesimal, teniendo en cuenta las fuerzas ejercidas por el líquido adyacente a esa rodaja infinitesimal. Aunque las hipótesis o argumentos que después utilizó Johan Bernoulli no nos parecen justificados, llegó al mismo resultado que había obtenido su hijo Daniel para la fuerza de presión sobre la pared del conducto, cuya prioridad no reconoce al datar la fecha de su Hydraulica como 1732.

Sin embargo, Euler recibió entusiasmado la primera parte de la Hydraulica de Johan Bernoulli; al que agradece mucho, en una carta del 9 de mayo de 1739, porque con su «método genuino de análisis mecánico me ha proporcionado una luz sobre este tema del movimiento de los fluidos que antes estaba para mí cubierto por una muy densa niebla». El método genuino es sin duda la aplicación de la ecuación de la cantidad de movimiento a un volumen infinitesimal.

4. ALGUNAS CONTRIBUCIONES DE EULER A LA MECÁNICA DE FLUIDOS ANTES DE 1752

Como nos señala Truesdell en su Introducción al Volumen 12 de la Opera Omnia de Euler, éste en su traducción al alemán, que publicó en Berlín en 1745, de la obra «New principles of Gunnery» de Benjamin Robins, publicada en Londres en 1742, incluye unos extensos comentarios que contienen aportaciones precursoras a la Física de los Gases. Me limitaré a señalar dos:

En sus comentarios al Capítulo I dedicado a la naturaleza del aire y el fuego Euler nos advierte de que, a la vista de las consideraciones de Daniel Bernoulli sobre la presión de los gases sobre las paredes que los limitan, la ecuación de Townley-Boyle, que supone constante el producto de la presión por el volumen, no se cumple cuando hay cambios de temperatura. Esto es, que la relación entre la elasticidad (presión) y la densidad depende de la temperatura; de manera que hay una relación entre las tres variables que se traduce en una «ecuación térmica de estado». Es interesante que ya en 1739 en una «Disertación sobre el Fuego», premiada por la Academia de Ciencias de París, Euler había considerado que «el calor consiste en ciertos movimientos de las partículas más pequeñas de los cuerpos». Así los fenómenos del calor y el fuego deberían poder explicarse por las leyes de la Mecánica, «sin cualidades ocultas».

En otro de sus comentarios a la Balística de Robins, Euler divide la masa del gas que fluye alrededor de un cuerpo en filamentos, en los que el movimiento del gas se puede tratar como si tuviese lugar en un conducto, para calcular así las fuerzas que han de asociarse a las aceleraciones normal y tangencial al filamento de corriente. Euler observa que si el flujo del gas alrededor de un cuerpo fuese simétrico aguas arriba y aguas abajo del mismo la resistencia del gas al movimiento estacionario del cuerpo sería nula. (Con esta observación, Euler anticipa la Paradoja de d'Alembert, que éste re-descubrió en una memoria que presentó en 1749 a un premio, que no recibió, de la Academia de Ciencias de Berlín, y que posteriormente publicó en 1752). Para evitar este resultado paradójico, Euler supone que en el movimiento relativo al cuerpo el flujo no es simétrico, porque la componente radial de la velocidad cambiará aguas abajo para dejar una estela de aire muerto.

Entre 1749 y 1752, había publicado en la misma Academia de Berlín, 13 memorias dedicadas a los movimientos unidimensionales en conductos[3]. En la última «Sur le mouvement de l'eau par des tuyaux de conduite» publicada en 1752 aparece por primera vez el concepto moderno de la fuerza de presión ejercida sobre el líquido que ocupa una rodaja infinitesimal por el líquido que lo limita aguas arriba y aguas abajo y, también, por la propia pared del conducto. En este trabajo obtiene en su forma moderna, y de un modo transparente, la ecuación de Bernoulli y la solución a varios de los problemas considerados en sus libros por los Bernoulli.

La aplicación por Euler a los problemas de la Mecánica del «método genuino» que en 1739 le había sugerido la lectura de la primera parte de la Hydraulica de Johan Bernoulli, tuvo que esperar diez años. En 1750 envió a la Academia de Ciencias de Berlín una memoria con el título «Découvert d'un nouveau principe de mécanique», que finalmente fue publicada en 1752. En ella escribe, utilizando coordenadas cartesianas, las tres ecuaciones diferenciales (hoy conocidas como 2ª ley de Newton), que describen para cualquier elemento de volumen infinitesimal de un medio continuo, las tres componentes de la aceleración (de su centro de gravedad) que multiplicadas por la masa del elemento deben ser iguales a las tres componentes de las fuerzas ejercidas por el exterior sobre su masa.

[3] En ellas Euler trata de abordar, todavía con los conocimientos que se estaban desarrollando en su época, los problemas ingenieriles asociados al suministro de agua a las ciudades, al diseño de turbinas hidráulicas y eólicas, y a los problemas de la Balística. Para que Euler, el matemático más famoso de su época, se ocupara de esos problemas fue llamado por Federico el Grande de Prusia a ocupar un puesto en la Academia de Berlín.

Su aplicación a la Mecánica de Fluidos debe ir acompañada de una descripción de las fuerzas ejercidas sobre cualquier volumen infinitesimal del fluido. Ésta aparece ya en una memoria presentada por Euler en 1752 a la Academia de Ciencias de Berlín y después, de un modo definitivo, en las dos primeras memorias de las tres publicadas por Euler en 1755 en la misma Academia. Éstas están dedicadas a los principios generales del equilibrio y el movimiento de los fluidos no viscosos, y van seguidas de una tercera dedicada a consideraciones generales y aplicaciones a movimientos en conductos.

5. PRINCIPIOS GENERALES DEL MOVIMIENTO DE FLUIDOS IDEALES INCOMPRESIBLES

Como hemos indicado antes, una parte muy importante de las aportaciones de Euler, recogidas en las memorias de 1755, aparecieron antes en otra memoria «Principia Motus Fluidorum», presentada en 1752 en la Academia de Ciencias de Berlín (E258, pp 133-168). La memoria tiene como objetivo la determinación del movimiento posible del fluido, supuesto incompresible, cuando se caracteriza por los valores que (para un observador que usa un sistema de referencia cartesiano) tienen las tres componentes de la velocidad, en función del tiempo t y de las tres coordenadas x, y, z. La determinación del movimiento obliga a calcular también la presión p «con la que las partículas de fluido actúan mutuamente entre ellas, de modo que toda partícula es presionada por todos sus lados por las vecinas[4]. Dado que esta presión no es la misma en todas partes su acción se traducirá en cambiar el movimiento de la partícula». Esta descripción del movimiento se denomina Euleriana, para distinguirla de la descripción Lagrangiana, también introducida por Euler, en la que la posición de cada partícula fluida sustituye a la velocidad como variable cinemática independiente; esta posición ha de determinarse como función del

[4] Según Euler la fuerza entre las partes adyacentes del fluido ejercida a través de cada elemento diferencial de la superficie de separación es normal al elemento, con un valor por unidad de superficie dado por la presión p. Sin embargo, Euler sabe que, además de esta fuerza de contacto, debe haber una fuerza adicional de fricción, tangente a la superficie, que, a falta de mejor información, supone que podría ser proporcional a la presión (como propuso posteriormente Coulomb para la fuerza de fricción entre sólidos cuando hay deslizamiento). En todo caso, Euler no incluyó en sus ecuaciones los efectos de la fricción, lo que implica que, en la terminología moderna, el fluido se comporta como ideal.

tiempo y de las tres coordenadas x_0, y_0, z_0, que caracterizan su posición inicial.

En la primera parte de la memoria se ocupa de obtener las restricciones que la incompresibilidad del fluido impone al movimiento. Euler deduce la ecuación correspondiente exigiendo que «cualquier parte del fluido no pueda ser forzada a ocupar un volumen menor ni a que su continuidad sea interrumpida». Euler aplica esta consideración a la evolución de la parte del fluido que en un instante dado ocupa un paralepípedo de aristas infinitesimales, paralelas a los ejes de coordenadas. Así obtiene la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad (1)$$

que hoy llamamos de continuidad.

En la segunda parte de la memoria empieza con consideraciones cinemáticas, para calcular las tres componentes de la aceleración que tienen las partículas fluidas, cuando se utiliza esta descripción Euleriana. Así obtiene

$$a_x=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y=\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z=\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}$$

A continuación introduce las consideraciones dinámicas imprescindibles para poder determinar el movimiento de las partículas. Lo hace aislando el fluido que en un instante t ocupa un paralepípedo de tamaño diferencial, con aristas paralelas a los ejes coordenados, centrado en el punto x, y, z; para identificar después, de acuerdo con la segunda ley de Newton, el producto de su masa por su aceleración con la resultante de las fuerzas que ejerce el exterior sobre esa masa infinitesimal de fluido.

En cuanto a las fuerzas exteriores ejercidas sobre una parte del fluido por el exterior había una gran confusión en la época de Euler. Se conoce bien que entre ellas está la fuerza de atracción gravitatoria, que para el movimiento cerca de la superficie de la Tierra está dada por el producto de la masa por la aceleración gravitatoria g. En esta Memoria de 1752 la gravitatoria es la única fuerza exterior que considera[5], adicional a las fuerzas de presión ejercidas sobre la parte aislada del fluido por el fluido adyacente exterior.

Como ya hemos indicado, Euler nos enseña que estas fuerzas de presión se calculan dividiendo la superficie del volumen fluido en elementos diferenciales y se suman (vectorialmente) las fuerzas ejercidas por el fluido exterior sobre el interior a través de cada elemento $d\sigma$ de superficie. Cada una de estas fuerzas, siendo localmente normal a la superficie, está orientada según la normal interior, y tiene un módulo dado por $pd\sigma$, donde p es la presión local, independiente de la orientación. Las consideraciones físicas que justifican esta hipótesis están más desarrolladas en las memorias, publicadas en 1755 en la Academia de Ciencias de Berlín, dedicadas a los principios del equilibrio y del movimiento de los fluidos

Apoyándose en esta hipótesis respecto a las fuerzas de superficie ejercidas mutuamente entre las distintas partes del fluido, hace aplicación de evaluar las ejercidas sobre el volumen que, en un instante dado, ocupa el paralepípedo ya citado de aristas infinitesimales dx, dy, dz. La resultante de las fuerzas de presión está asociada a las variaciones espaciales de p y, para esa partícula infinitesimal del fluido, obtiene una fuerza igual y contraria al producto del volumen, $dxdydz$, por el gradiente local de presiones, de componentes

$$\partial p/\partial x_{,}\ \partial p/\partial y_{,}\ \partial p/\partial z_{.}$$

Así, cuando elige un sistema de coordenadas en las que z es la coordenada vertical, ascendente, deduce las ecuaciones

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x} \tag{2}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y} \tag{3}$$

[5] Lo que está justificado si el fluido no tiene cargas eléctricas libres y no hay fuerzas másicas asociadas al movimiento de giro o con aceleración, respecto a la Tierra, del sistema de referencia.

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}-\rho g, \qquad (4)$$

que, junto a la ecuación de continuidad (1), constituyen el sistema[6] de cuatro ecuaciones, (1)-(4), con cuatro incógnitas (u,v,w,p) que describen los movimientos de fluidos ideales incompresibles, de densidad constante ρ, sometidos a la fuerza gravitatoria, caracterizada por la aceleración g.

Como nos advierte Euler en la Introducción a esta memoria de 1752, este sistema de ecuaciones ha de ser complementado con el conocimiento, en un instante inicial, del movimiento; caracterizado éste por los valores iniciales de u, v, w; que deben satisfacer la ecuación (1). No se puede imponer la distribución inicial de presiones, que ha de poder calcularse como parte de la solución. Euler no dio explícitamente en este trabajo las condiciones de contorno; aunque si lo hará en las memorias publicadas en 1755, para el caso en que el fluido está limitado por un sólido; apoyándose en la hipótesis de impenetrabilidad del fluido y sólido.

Aunque el movimiento de los fluidos ideales incompresibles, debe estar descrito por estas ecuaciones (1)-(4), Euler advierte que «el desarrollo completo de estas ecuaciones implica las más grandes dificultades. Sin embargo toda esta teoría ha sido reducida a un problema de análisis puro y lo que queda por completar depende solamente del progreso en el análisis. Así pues, no es cierto en absoluto que las investigaciones puramente analíticas no sean de utilidad en las matemáticas aplicadas; al contrario, ahora necesitamos adiciones al análisis puro».

En esta misma memoria muestra cómo el análisis permite deducir información valiosa respecto al movimiento de los fluidos partiendo de estas ecuaciones. Por ejemplo, Euler nos enseña que podemos eliminar el gradiente de presiones de las ecuaciones (2)-(4), teniendo en cuenta las igualdades

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) \text{ etc}$$

[6] Conviene advertir al lector de las obras originales de Euler que debe tener en cuenta que no se había impuesto en su época el uso de sistemas coherentes de unidades. En la memoria que comentamos $p/\rho g$, que es una altura, aparece como variable que mide la presión. Las unidades de longitud y tiempo elegidas por Euler dan a g el valor *1/2;* y así no aparecen los parámetros ρ y g en sus ecuaciones del movimiento.

para obtener el sistema de ecuaciones, que hoy podemos escribir en forma vectorial usado la notación de Gibbs, como

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega + v \cdot grad\omega = \omega \cdot grad v, \tag{5}$$

que nos permite determinar la evolución de las tres componentes

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \; \omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \; \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

del vector vorticidad $\omega = rot v$.

Esta ecuación vectorial (5) fue redescubierta en 1858 por Helmholtz (publicada en Crelles, J.55, 25), quien nos mostró el papel tan importante que en la dinámica de fluidos tienen los torbellinos, o filamentos fluidos con vorticidad concentrada. Euler no llegó a descubrir el carácter cinemático de las tres componentes del vector vorticidad y lo que estas ecuaciones implicaban. Sin embargo, sí observó que el sistema de ecuaciones escalares asociado a (5) se cumple cuando $\omega = 0$. Esto es, cuando

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \; \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \; \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{6}$$

Euler señala que si se cumplen estas relaciones, $udx+vdy+wdz$ será, en cada instante t, la diferencial exacta de una función $\varphi(x, y, z, t)$; que hoy, siguiendo a Helmholtz, llamamos potencial de velocidades. Como dedujo Euler, existen soluciones exactas del sistema de ecuaciones (1)-(4) en las que la velocidad deriva de un potencial; en estas soluciones las componentes de la velocidad pueden obtenerse a partir de φ como

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \; v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \; w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{7}$$

Para que la ecuación de continuidad (1) se cumpla, el potencial φ debe ser solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \tag{8}$$

publicada por primera vez por Euler en esta memoria de 1752. Hoy esta ecuación se llama de Laplace, aunque éste la obtuvo muy posteriormente en sus estudios del potencial gravitatorio.

Por otra parte, si se cumplen las relaciones (7), las ecuaciones (2)-(4) se satisfacen exactamente si

$$p + \rho g z + \rho\left(u^2 + v^2 + w^2\right)/\,2 + \partial\varphi/\partial t = C(t), \qquad (9)$$

la ecuación que hoy llamamos de Euler-Lagrange; aunque como vemos fue obtenida por Euler en 1752, mucho antes de ser publicada en 1781 por Lagrange. En esta ecuación, *C(t)* es una función del tiempo cuyo valor depende del valor que se asigne a φ en algún punto del sistema de referencia, donde también debemos conocer p. En el caso de los movimientos estacionarios, la ecuación (9) se reduce a la ecuación de Bernoulli, que aquí aparece generalizada para movimientos tridimensionales irrotacionales.

En la memoria de Lagrange «Mémoire sur la théorie du mouvement des fluides», publicada en las Nuevas Memorias de la Academia de Ciencias de Berlín, 151-198 (1781), están sus contribuciones más importantes a la Mecánica de Fluidos. Expone de un modo, claro y conciso, las leyes de la dinámica de fluidos ideales; obviamente recogidas, y sin citarle, de las memorias de Euler de 1752 y 1755. Lagrange sólo cita a d'Alembert, al que atribuye «la reducción de las verdaderas leyes del movimiento de los fluidos a ecuaciones analíticas».

6. LAS APORTACIONES D'ALEMBERT

Es cierto que la obra «Essai d'une nouvelle théorie de la resistance des fluides», que d'Alembert publicó en París en 1752, contiene contribuciones muy notables a las ciencias matemáticas y a la mecánica de fluidos. Como ya hemos indicado, esta obra arranca del ensayo que envió, en diciembre de 1749, a la Academia de Ciencias de Berlín, para competir a uno de sus premios. La Academia quería premiar al mejor ensayo dedicado a la descripción teórica y experimental de la resistencia de fluidos al movimiento de cuerpos en su seno. Al quedar el premio, momentáneamente, desierto porque d'Alembert no había aportado ninguna evidencia experimental, éste retiró su ensayo y lo publicó posteriormente en su obra de 1752.

En esta obra, d'Alembert introduce, al mismo tiempo que Euler (que había conocido el ensayo enviado al premio por d'Alembert), una teoría de campos para la descripción de los movimientos fluidos, considerados como medios continuos.

En su obra d'Alembert se limita finalmente a describir los movimientos estacionarios bidimensionales o axisimétricos de líquidos, caracterizados por las dos componentes no nulas de la velocidad. Obtiene en primer lugar la ecuación de continuidad, que en el caso bidimensional toma la forma

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{10}$$

Después, d'Alembert calcula las dos componentes de la aceleración de las partículas fluidas; pero no consiguiendo definir apropiadamente las fuerzas de presión que contribuyen a las fuerzas «aceleratrices» que determinan esa aceleración, usa argumentos aportados por Clairaut en sus estudios sobre hidrostática, publicados en 1743, para, imponiendo el equilibrio del fluido ante esas fuerzas aceleratrices, obtener la ecuación

$$\left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0, \tag{11}$$

correspondiente a la forma simplificada, para el caso del movimiento estacionario, bidimensional, de la ecuación (5) obtenida por Euler para la evolución de la vorticidad. Al igual que Euler, d'Alembert, observa que la condición

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0, \tag{12}$$

de irrotacionalidad es una solución exacta de la ecuación (11), cuya unicidad él cree, erróneamente, haber podido demostrar.

D'Alembert considera que el sistema de las dos ecuaciones (10) y (12) describen todos los movimientos bidimensionales de líquidos; aunque en realidad sólo es aplicable a los muchos casos en los que el movimiento puede considerarse que se comporta, con buena aproximación, como irrotacional.

Aunque d'Alembert no llega a escribir la forma bidimensional de la ecuación de Laplace, que debe cumplir el potencial de velocidades, cuya existencia se deduce de (12), sí contribuyó con un descubrimiento seminal, de gran trascendencia matemática, al mostrar que una solución general del sistema de las dos ecuaciones (10) y (12) se obtiene igualando la «velocidad compleja» u-iv a cualquier función de la variable compleja $x+iy$. D'Alembert da algunos ejemplos de cómo serían los movimientos asociados a funciones polinómicas de $x+iy$, pero no ve como podrían obtenerse las funciones correspondientes al flujo alrededor de perfiles; lo que no se conseguiría hasta principios del Siglo XX.

7. LOS PRINCIPIOS GENERALES DE LA FLUIDOSTÁTICA DE EULER

En la memoria de Euler publicada en 1755 por la Academia de Ciencias de Berlín 11 p. 217-273, con el título «Principes generaux de l'etat d'equilibre des fluides», Euler se propone desarrollar los principios que sirvan como fundamento de la ciencia del equilibrio de los fluidos. Se ocupará no sólo de los fluidos que tienen en todas partes la misma densidad, tales como el agua y otros líquidos, sino también los que tiene densidad variable, como el aire y otros gases, que entonces llamaban fluidos elásticos. No limitará su atención a las fuerzas gravitatorias, como únicas fuerzas másicas exteriores, sino que desarrollará su teoría para incluir otras fuerzas másicas más generales.

Euler advierte de que «las leyes del equilibrio de los fluidos pueden diferir de las leyes del equilibrio de los sólidos solamente como consecuencia de la naturaleza diferente de los fluidos y de los sólidos. Se trata de conocer la diferencia verdadera y esencial que distingue los fluidos de los sólidos. Es muy posible que las partículas más pequeñas de los fluidos no tengan conexión entre ellas, y estén en un estado de movimiento continuo; pero esta noción puede resultar estéril para la descripción del equilibrio que observamos de los líquidos, pues nos obligaría a un examen más profundo de la naturaleza de los medios fluidos. Como propiedad esencial de lo fluidos que debería proporcionarnos los principios de la hidrostática yo la encuentro en esta cualidad por la cual sabemos que: una masa fluida no puede estar en equilibrio a menos que esté sometida en todos los puntos de su superficie a fuerzas perpendiculares a la superficie (e iguales en todos sus puntos si las partículas no están sometidas a ninguna otra fuerza). Sin embargo, un sólido puede mantenerse en equilibrio sometido a dos fuerzas iguales y opuestas, sin que sus partes laterales no adquieran una tendencia a escapar».

Euler, que ha tenido en cuenta la información proporcionada por los investigadores anteriores (empezando por Arquímides) de la fluidostática, que está frecuentemente expresada de un modo impreciso, nos muestra cómo esta información puede condensarse en su definición cuantitativa de las fuerzas de presión. Así las fuerzas ejercidas sobre una parte del fluido por el fluido exterior aparecen, cuando se mira al fluido como un medio continuo, como fuerzas de contacto. Pueden evaluarse, como hemos dicho antes, dividiendo la superficie de separación en elementos de área infinitesimal $d\sigma$, y postulando que para los fluidos en equilibrio la fuerza ejercida a través de cada elemento es normal al mismo y proporcional a $d\sigma$, dada por $pd\sigma$, en función de la presión local, p, que es independiente de la orientación de $d\sigma$.

La presión debe variar de un punto a otro para que el fluido pueda estar en equilibrio cuando está sometido a fuerzas másicas exteriores. Por ello señala «que toda la teoría del equilibrio de fluidos está contenida en un único problema:

Dadas las fuerzas a las que están sometidos todos los elementos del fluido junto con la relación, válida en cada punto, entre la densidad y la elasticidad del fluido; encontrar las presiones que debe haber en todos los puntos del fluido para que se encuentre en equilibrio.

La solución de este problema debe atender tanto a los fluidos incompresibles como los comprensibles».

Para obtener las leyes del equilibrio empieza por describir las fuerzas exteriores ejercidas sobre el volumen fluido que ocupa el paralepípedo infinitesimal, de aristas dx, dy, dz, centrado en un punto (x,y,z). Euler supone que estas fuerzas exteriores (incluyendo entre ellas a las gravitatorias), que debemos añadir a las fuerzas de presión para establecer el equilibrio, son proporcionales a la masa $\rho dxdydz$ del volumen elemental del fluido; estando definida la fuerza por unidad de masa por sus componentes P, Q, R en la dirección de los ejes de coordenadas.

Estableciendo que la resultante de las fuerzas másicas y de presión sobre el volumen fluido elemental es nula; o lo que es lo mismo, que deben compensarse las fuerzas exteriores con la fuerza de presión, llega como resultado a la relación diferencial

$$dp = \rho P dx + \rho Q dy + \rho R dz \tag{13}$$

que sólo puede cumplirse si la diferencial que aparece en el segundo miembro es, como ya había deducido Clairaut[7], la diferencial exacta de una función; que Euler nos muestra que coincide con el valor de la presión p, función de las tres coordenadas x, y, z. (Esta relación diferencial es equivalente a un sistema de tres ecuaciones en derivadas parciales, obtenidas al identificar cada una de las tres componentes del gradiente de presiones con las componentes correspondientes ρP, ρQ, ρR de la fuerza exterior por unidad de volumen).

En el caso de fluidos de densidad constante, para que el equilibrio sea posible $Pdx + Qdy + Rdz$ debe ser la diferencial exacta, $-dV$, de una función $V(x,y,z)$ que hoy designamos como potencial de las fuerzas másicas. En este caso la ecuación (13) de equilibrio conduce al resultado de que

$$p + \rho V = p_0 \tag{14}$$

donde p_0 es el valor de la presión en el punto que hayamos elegido como origen del potencial V. Como consecuencia, las isobaras, o superficies de presión constante, son equipotenciales.

Si las únicas fuerzas másicas fuesen las gravitatorias (que es el caso en el que el líquido está en equilibrio respecto a la Tierra), $V=gz$, si se orienta el sistema de coordenadas para que z corresponda a la dirección vertical ascendente. En este caso, (14) toma la forma familiar

$$p + \rho g z = p_0, \tag{15}$$

debida a Euler; que, con la más general (14), recoge toda la experiencia que se había acumulado antes para la Hidrostática.

En el caso de ser ρ variable, Euler advierte que, si nos limitamos a los casos en que las fuerzas másicas derivan de un potencial, el equilibrio no será posible a menos que la distribución espacial de densidades sea tal que dp/ρ sea una diferencial exacta, que a la vista de (13) debe coincidir con $-dV$. Esto ocurrirá en los casos en que exista

[7] «Théorie de la figure de la terre, tirée des principes de l'hydrostatique». París 1743.

una relación «de elasticidad», que hoy decimos de barotropía, del fluido $\rho=\rho(p)$. En este caso, Euler introduce la función, que podemos llamar potencial de barotropía,

$$\Omega(p) = \int^{p} dp / \rho$$

con lo que la ecuación (13) de equilibrio conduce al valor constante de $\Omega + V = \Omega(p_0)$.

Euler señala que si tenemos en cuenta que en la relación de elasticidad puede intervenir «la cualidad térmica» r, esto es si $\rho = \rho(p,r)$, el equilibrio no será posible a menos que las superficies r constante sean equipotenciales. (Por ejemplo, en el caso en que sólo intervienen las fuerzas gravitatorias, las superficies r constante deben ser horizontales). Si éste no es el caso aparecerán movimientos convectivos, que decimos de convección natural, en cuya descripción estuvo muy interesado Euler, por su relación con el viento atmosférico.

En esta misma memoria, Euler hace un estudio exhaustivo del equilibrio atmosférico, para el que utiliza como ecuación de estado[8] $p/(\rho r)$ = constante; con lo que solo resta tener en cuenta la dependencia con la altura de r, que entonces identifica con el calor, aunque en trabajos posteriores identificará con la temperatura. Buscando luz sobre ese tema escribe:

«Ya que no se han establecido medidas fijas para el calor, por las que se pueda decir que un calor sea doble que otro, parece que la influencia misma del calor sobre la elasticidad del aire podría proporcionarnos el método más conveniente de organizar estas medidas (del calor)».

8. LOS PRINCIPIOS GENERALES DEL MOVIMIENTO DE LOS FLUIDOS

Euler presenta sus leyes del movimiento de los fluidos en la memoria «Principes generaux du mouvement des fluides», publicada en

[8] Esta relación de elasticidad coincide con la ecuación de los gases perfectos, si r se identifica con la temperatura absoluta T, y aparece en otros de los trabajos de Euler. Está incluida ya en sus comentarios a la obra de Robbins sobre Balística, donde, como hemos dicho antes, usa el resultado de la teoría cinética de Daniel Bernoulli, cuya relación $p=\rho v^2/3$ coincide con la ecuación de los gases perfectos si $v^2/3$ se sustituye por RT.

las Memorias de la Academia de ciencias de Berlín 11 p. 274-315, correspondientes a 1755.

En esta memoria Euler se propone obtener los principios que rigen el movimiento de los fluidos utilizando la metodología que había usado para obtener los principios del equilibrio de fluidos en la Memoria precedente.

Euler nos indica que «esta materia es mucho más difícil, y que encierra investigaciones incomparablemente más profundas: a pesar de ello yo espero llevarlas a cabo felizmente, de manera que las dificultades que quedan, no sean del lado de la mecánica, sino únicamente del lado analítico: esta ciencia no ha alcanzado todavía el grado de perfección que será necesario para desarrollar en fórmulas analíticas lo que encierran los principios generales».

En esta memoria extiende a flujos compresibles el análisis del movimiento de fluidos incompresibles presentado en la memoria de 1752, «Principia Motus Fluidorum», que ya hemos comentado, y que aunque presentada antes en la Academia fue publicada después.

Euler empieza suponiendo que aunque los fluidos estén en movimiento las fuerzas que sobre un volumen fluido ejerce el resto del fluido, a través de su superficie de separación, siguen siendo fuerzas de tipo presión, como en el equilibrio de los fluidos; estando ésta relacionada en el caso compresible con la densidad y la cualidad térmica por la misma ecuación de estado que encontramos en la fluidostática.

Euler es consciente de que con esta hipótesis no quedan excluidos los efectos de la fricción entre capas fluidas (ya anticipados por Newton, que introdujo la idea de fuerzas viscosas). Estos efectos no pudieron introducirse en la Mecánica de Fluidos, hasta después de que, en los años veinte del Siglo XIX, Cauchy introdujese el tensor de esfuerzos; que también fue imprescindible para el desarrollo de la estática y dinámica de sólidos elásticos. Afortunadamente, en muchos de los flujos de interés práctico los efectos de las fuerzas viscosas, que sí están incluidos en las Ecuaciones de Navier-Stokes, son despreciables; comportándose en estos casos el fluido como ideal; y entonces su movimiento responde a las Ecuaciones de Euler.

En la memoria que estamos comentando, Euler aplica el principio de conservación de la masa y la segunda ley de Newton al volumen fluido que ocupa un paralepípedo infinitesimal, para obtener el siguiente sistema de ecuaciones

ECUACIONES DE EULER

Conservación de la masa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0 \tag{16}$$

Ecuaciones de balance de la cantidad de movimiento

$$\rho\left\{\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right\}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho P \tag{17}$$

$$\rho\left\{\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right\}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho Q \tag{18}$$

$$\rho\left\{\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right\}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\rho R \tag{19}$$

Ecuación de estado

$$p = p(\rho,\ r) \tag{20}$$

Si, como ya hemos comentado, la cualidad térmica, que hoy definimos por la temperatura T, ó por la entropía, se considera como una variable a determinar, es obligado añadir a estas ecuaciones de Euler la de la energía, que sólo pudo escribirse cien años después. Sin embargo, ya Poisson había mostrado antes que, si se consideraba que era adiabática la evolución de las partículas fluidas de los gases, se mantendría constante p/ρ^{γ}, donde γ es el cociente entre los colores específicos; esta relación de Poisson, correspondiente al movimiento homentrópico de gases, sigue utilizándose hoy. En (17)-(19), *P, Q, R,* son las componentes de las fuerzas másicas (o exteriores), por unidad de masa del fluido, supuestas conocidas al igual que la cualidad térmica r como funciones de x, y, z.

El sistema de (cinco) ecuaciones de Euler para las cinco incógnitas u,v,w,p,ρ, ha de complementarse con condiciones iniciales y con condiciones de contorno. Estas ecuaciones contienen como caso particular, cuando $v=v=w=0$, las ecuaciones de la fluidoestática.

En cuanto a las condiciones iniciales Euler nos dice: «Se debe suponer que sea conocido en un cierto tiempo el estado del fluido, al que llamaré estado primitivo del fluido: ha de conocerse la disposición de las partes y el movimiento que se le haya impuesto, a menos que se arranque del reposo. Sin embargo, el movimiento primitivo no es tan arbitrario, tanto la continuidad como la impenetrabilidad del fluido introducen una cierta limitación. Pero a menudo no se conoce nada del estado primitivo y entonces los investigadores se limitan a tratar de encontrar el estado permanente».

En cuanto a las condiciones de contorno dice: «si se conoce la superficie del recipiente, en el que se mueve el fluido, las partículas del fluido en contacto con la superficie deben seguir en ella, lo que implica una relación para los valores de u, v, w en el contorno». Esta relación, supuesta conocida la superficie de separación $f(x,y,z,t)=0$, se traduce en que, en todos sus puntos, se debe cumplir la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial t}+u\frac{\partial f}{\partial x}+v\frac{\partial f}{\partial y}+w\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

que asegura que la superficie $f=0$ es una superficie fluida. (Euler señala que si el fluido es un líquido éste puede abandonar la superficie dejando una cavidad vacía, cuando la presión resultante tome valores negativos). La gran diversidad de configuraciones en que pueden moverse los fluidos no permite, con carácter general, una mayor precisión en las condiciones de contorno.

Los conocimientos de la época están muy lejos de poder permitir a Euler abordar los problemas de existencia y de unicidad. Euler da por supuesto que p, ρ, u, v, w son funciones continuas y derivables; sin embargo, las ecuaciones no tiene términos reguladores, como los de viscosidad en las ecuaciones de Navier-Stokes, que impidan las discontinuidades en las variables fluidas o en sus derivadas.

De hecho el sistema de ecuaciones de Euler es hiperbólico, por lo que hemos de esperar la existencia o aparición de discontinuidades de las derivadas de las magnitudes fluidas en sus superficies características, como nos mostró Riemann en 1858. Éste también mostró que en el movimiento de los fluidos compresibles podían formarse discontinuidades, en ondas de choque, de las propias magnitudes fluidas. Helmholtz nos descubrió, en 1868, dificultades adicionales en los problemas regidos por las ecuaciones de Euler, al mostrar que, para la descripción de muchos flujos reales con estas ecuaciones, debemos admitir discontinuidades tangenciales de velocidad, en forma de capas de torbellinos, que deben ser superficies fluidas; cuya inestabilidad, demostrada por Kelvin un año después, puede conducir a la turbulencia.

Euler también se planteó describir las trayectorias de las partículas fluidas, supuesto conocido el campo de velocidades representado por las funciones continuas, u, v, w, de x, y, z, t. Estas trayectorias vienen dadas por la solución del sistema de tres ecuaciones

$$dx/dt=u, \quad dy/dt=v, \quad dz/dt=w,$$

con las condiciones iniciales

$$x=x_0, \quad y=y_0, \quad z=z_0, \quad \text{en } t=0$$

Sabemos que el problema tiene solución única

$$x=x_T(x_0, y_0, z_0, t)$$

$$y=x_T(x_0, y_0, z_0, t)$$

$$z=z_T(x_0, y_0, z_0, t)$$

que determina las tres coordenadas de la posición de la partícula como función continua de la posición inicial y el tiempo; lo que llamamos descripción Lagrangiana del movimiento, representada por estas funciones y los valores de ρ (y con ello de p) en función de las mismas variables.

El análisis matemático de las ecuaciones de Euler sigue siendo todavía un pozo sin fondo. Euler también contribuyó a extraer información de sus ecuaciones buscando tipos especiales de soluciones, algunas rotacionales, como el movimiento de rotación alrededor de un eje, y otras irrotacionales, como las descritas antes.

Euler muestra que en los movimientos de fluidos compresibles, cuando las fuerzas másicas derivan de un potencial V, también existen soluciones exactas de sus ecuaciones correspondientes a movimientos irrotacionales para los que la velocidad deriva de un potencial, con tal de que la relación de elasticidad $\rho=\rho(p, r)$ se reduzca a la relación de barotropía $\rho=\rho(p)$, que permite escribir $dp/\rho=d\Omega$, como mostró Euler en su memoria sobre la fluidoestática.

Esto es, si

$$P=-\frac{\partial V}{\partial x}, \; Q=-\frac{\partial V}{\partial y}, \; R=-\frac{\partial V}{\partial z}, \tag{21}$$

y si además *ρ=ρ(p),* que implica *dp/ρ=dΩ(p),* existen soluciones irrotacionales del sistema de ecuaciones (16-20); para las que la velocidad deriva de un potencial *φ*, que determina las tres componentes de la velocidad:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\ , \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}\ , \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}\ , \tag{22}$$

Sustituyendo estas relaciones en las ecuaciones (17)-(19), éstas, como muestra Euler, se cumplen exactamente si *φ* verifica la relación

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(grad\varphi)^2 + V + \Omega = C(t)\,, \tag{23}$$

que es una generalización de la ecuación (9), en la que *p/ρ* aparece aquí sustituido por el potencial de barotropía *Ω(p),* del que derivan las fuerzas de presión por unidad de masa, *(grad p)/ρ= grad Ω.* Esta ecuación (23), junto con la ecuación de continuidad (16), y la relación de barotropía, que implica *ρ=ρ(Ω),* permiten reducir el problema de la descripción de los movimientos irrotacionales de fluidos compresibles a la solución de una ecuación no lineal en derivadas parciales para *φ,* que se reduce a la ecuación de Laplace en el caso incompresible.

Se comprende bien que Euler viese dificultades insalvables para extraer información de este sistema de ecuaciones; que, poniendo sólo un ejemplo, en su forma linealizada para las pequeñas perturbaciones respecto al reposo, conduce a las ecuaciones de la Acústica.

Para clarificar esto, y hacer ver el papel que la velocidad del sonido tiene en los movimientos de los fluidos ideales, escribiré la ecuación de continuidad (16), usando la notación de Gibbs, en la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho\right\} = 0 \tag{24}$$

Aquí aparece *dρ/ρ* que, si se cumple la relación de barotropía *ρ=ρ(p),* que podemos escribir, apoyandonos en la relación

dp/ρ=dΩ,

en función del potencial de barotropía $\Omega(p)$, que aparece en (23). En efecto, podemos evaluar $d\rho/\rho=(d\rho/dp)dp/\rho=d\Omega/c^2$; donde aparece $c^2=dp/d\rho$, el cuadrado de una velocidad c, que resulta ser la velocidad del sonido local, una función de p ó de Ω.

Así la ecuación de la continuidad (16), si $\mathrm{v}=\nabla\varphi$ y $d\rho/\rho=d\Omega/c^2$ toma la forma

$$\Delta\varphi+\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}+\nabla\varphi\bullet\nabla\Omega\right)=0\,, \qquad (25)$$

que, complementada con la ecuación (23), conduce a una ecuación única para el potencial de velocidades. Estas ecuaciones, si se linealizan, para pequeñas perturbaciones alrededor del reposo, caracterizado por el subíndice *o*, conduce, cuando se desprecia el efecto de las fuerzas másicas, al sistema de ecuaciones de la Acústica lineal:

$$c_0^2\Delta\varphi-\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0 \qquad (26)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\Omega=\Omega_0\,,\;\;(p-p_0)/\rho_0=\Omega-\Omega_0=c_0^2(\rho-\rho_0)/\rho_0 \qquad (27)$$

Euler también dedicó, con éxito, un esfuerzo considerable a los problemas de la Acústica, recogidos en el Volumen 13 de la Serie II de su Opera Omnia, que por falta de espacio no comentaré aqui. No llegó a deducir la ecuación (26) a partir de su formulación, que acabo de resumir, de los movimientos irrotacionales de gases; aunque sí lo hizo utilizando su formulación Lagrangiana.

Termino agradeciendo a Euler la extraordinaria obra que nos dejó en herencia, y el enorme esfuerzo que hizo, con éxito notable, para descubrir algunas de las leyes importantes que rigen los fenómenos de la naturaleza. La lectura de su obra es una gran fuente de placer, por su claridad y concisión, y también de inspiración, por la joyas que contiene.

Leonhard EULER (1707-1783)

Figura 2.