

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS



**AEROELASTICIDAD DE UNA AERONAVE
EN PRESENCIA DE NOLINEALIDADES
ESTRUCTURALES CONCENTRADAS**

Tesis Doctoral

Félix Arévalo Lozano

Ingeniero Aeronáutico

2008

DEPARTAMENTO DE VEHÍCULOS AEROESPACIALES
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

**AEROELASTICIDAD DE UNA AERONAVE
EN PRESENCIA DE NOLINEALIDADES
ESTRUCTURALES CONCENTRADAS**

Autor

Félix Arévalo Lozano
Ingeniero Aeronáutico

Director de Tesis

Pablo García-Fogeda Núñez
Doctor Ingeniero Aeronáutico

11 de mayo de 2008



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Tribunal nombrado por el Magfco. y Excmo. Sr. Rector de la Universidad Politécnica de Madrid, el día de de 200....

Presidente:_____

Vocal:_____

Vocal:_____

Vocal:_____

Secretario:_____

Secretario:_____

Suplente:_____

Suplente:_____

Realizado el acto de defensa y lectura de la Tesis el día de de 200...
en la E.T.S.I./Facultad.....

EL PRESIDENTE

LOS VOCALES

EL SECRETARIO

¿Has pensado alguna vez que no sólo el avión,
sino todo aquello que el hombre construye,
que todo el esfuerzo industrial del ser humano,
todos sus cálculos,
todas las noches pasadas en vela delante de los planos,
le conducen, como signos visibles, a la sencillez?.
Como si fuera necesaria la experiencia de muchas generaciones
para ir mejorando poco a poco la curvatura de una columna,
la del fondo de un barco,
o la del fuselaje de un avión,
hasta conseguir la pureza elemental
de la curvatura de un seno o un hombro.
Es como si, en todo,
la perfección se alcanzase
no cuando está todo añadido,
sino cuando ya no se puede suprimir nada.

Antoine De Saint Exupéry, "Tierra de hombres"

Curriculum vitae del autor

1. DATOS PERSONALES

Nombre: Félix
Apellidos: Arévalo Lozano
D.N.I. 02634017-B
Teléfono: (trabajo) 91-624-50-71
e-mail: felix.arevalo@upm.es

2. TÍTULOS ACADÉMICOS (orden cronológico inverso)

- 2003: Título de *Suficiencia Investigadora* expedido por la E.T.S.I.A.
- 1990-1996: Ingeniero Superior Aeronáutico, título expedido en 1996 por la E.T.S.I.A. Especialidad en Aeronaves, Misiles y Motopropulsión. Número 4º de promoción (nota media 8,86).

3. PREMIOS Y BECAS RECIBIDOS

a) PREMIOS

- 1996: *Tercer Premio Nacional* de Terminación de Estudios de Educación Universitaria, concedido por el Ministerio de Educación y Ciencia.
- 1993: *Premio al Rendimiento Académico* tras los tres primeros años de carrera concedido por la Universidad Politécnica de Madrid.

b) BECAS-COLABORACIÓN

- 1997: Concesión de una Beca Colaboración ETSIA-CASA.
- 1997: Concesión de una beca del MEC para el año 1997 (Beca de Formación de Personal Investigador).
- 1995-96: Concesión de una Beca Colaboración del MEC para la realización de un proyecto de investigación durante el curso académico 1995-96.
- 1994-95: Beca de colaboración entre ETSIA y la Universidad de Syracuse (Estado de Nueva York, EEUU).

4. ACTIVIDAD PROFESIONAL (orden cronológico inverso)

- Actualmente:
 - Profesor asociado en la ETSIA, dentro del Departamento de Fundamentos Matemáticos (desde 2001).
 - EADS/CASA: Responsable del cálculo de cargas dinámicas (aterrizaje y ráfaga) y aeroelasticidad en aviones derivados de Airbus: A310-MRTT, A330-MRTT, tail-boom (pértiga de reabastecimiento en vuelo), KC-45A, etc.
 - Investigador dentro de un Grupo de Investigación e Innovación Educativa de la ETSIA.
- 2002-07: Funciones de ingeniero de proyectos en el *Departamento de Aeroelasticidad y Dinámica Estructural de EADS/CASA*, dentro de la división MTAD (Military Aircraft Division), estando involucrado en los siguientes proyectos:
 - Avión de transporte militar A400M.
 - Estudios aeroelásticos del avión para reabastecimiento en vuelo A310-MRTT: cálculo de *flutter*, modelo FEM, correcciones transónicas y ensayos en vuelo.
 - (PROYECTO DE INVESTIGACIÓN) Proyecto europeo TAURUS: responsable de EADS/CASA para el desarrollo de un código europeo aeroelástico con acoplamiento fluido (CFD) - estructura (FEM).
 - Desarrollo de software aeroelástico para cálculo de *flutter*.
- 1999-2002: Ingeniero de proyectos en el *Departamento de Cargas* (Subdirección de Aerodinámica de EADS/CASA). Proyectos realizados:
 - Avión de transporte militar A400M: responsable del modelo de Cargas.
 - Estudios aeroelásticos de divergencia del caza EF2000.
 - C295: Análisis de ensayos en vuelo y puesta a punto del modelo de Cargas.
 - Desarrollo de software de cálculo aeroelástico estático: divergencia, inversión de mando, etc.
- 1997-99: Ingeniero de proyectos en la *empresa aeronáutica española ITP* (Industria de Turbopropulsores), trabajando principalmente en los dos proyectos siguientes:
 - 1997-98: Diseño aerodinámico de la turbina de baja presión del motor Trent 500 que equipa los Airbus A330-600.
 - 1998-99: Destinado en las instalaciones de Allied Signal en Phoenix (Arizona, EEUU) trabajando en el diseño aerodinámico de la turbina de baja presión del motor AS900.
- 1996-97: Servicio militar SEFOCUMA destinado en las instalaciones del Centro Logístico de Armamento y Experimentación CLAEX. Proyecto: migración de programas de cálculo aeroelástico del caza F-18 a ordenadores con sistema UNIX.

5. ACTIVIDAD INVESTIGADORA (orden cronológico inverso)

- Obtenido el grado de *Suficiencia Investigadora* en Junio de 2003.
- Realizado los cursos de Doctorado en la especialidad de Aeronaves, Misiles y Motopropulsión.
- Julio 2001: Organizador y ponente en el Congreso Internacional IFASD2001 (International Forum of Aeroelasticity and Structural Dynamics). Presentados dos artículos en este congreso dos artículos de investigación sobre:
 - Métodos de paneles en el cálculo de ráfagas laterales sobre configuraciones cuerpo-ala.
 - Estudio de *flutter* en misiles cuando se incluyen no linealidades estructurales.
- 1997 (PROYECTO DE INVESTIGACIÓN) Contrato a través de la ETSIA con la empresa aeronáutica CASA (ahora EADS/CASA) sobre la evaluación de los métodos de esta empresa para el cálculo de la aerodinámica no estacionaria. Se realizó un análisis de los métodos estudiando las limitaciones, mejoras y soluciones futuras para el desarrollo de un código válido para configuraciones cuerpo-ala con cuerpo no esbelto (aviones como el A380).
- 1996-97: Servicio militar realizado en el CLAEX, en el que fui responsable del mantenimiento de programas de cálculo aeroelástico del avión F-18, en el momento en el que se realizaba un programa militar de integración de nuevos misiles.
- 1993-96 (PROYECTO DE INVESTIGACIÓN) Colaboración con la Cátedra de Vibraciones y Aeroelasticidad de la ETSIA en el desarrollo de métodos de cálculo de aerodinámica no estacionaria alrededor de configuraciones cuerpo-ala (misiles, aviones, etc.). Como resultado, se obtuvo un método de paneles (denominado UWBC2000) para flujo incompresible alrededor de configuraciones cuerpo-ala.
- 1992-1994: Colaboración con la Cátedra de Aerodinámica de la ETSIA en varios proyectos entre los que destaco los siguientes:
 - Puente líquido.
 - (PROYECTO DE INVESTIGACIÓN) Participación en las jornadas de microgravedad con el estudio del efecto de la microgravedad en sistemas simples como el péndulo. El proyecto incluyó montaje y ensayo en avión Caravelle bajo condiciones de microgravedad.
- 1995 (PROYECTO DE INVESTIGACIÓN) Estancia en la Universidad de Syracuse (Estado de Nueva York, EEUU), participando en un intercambio con la ETSIA. El proyecto versó sobre el análisis de la aerodinámica con alto nivel de turbulencia alrededor de estatores o rótores de los compresores de reactores. Se utilizó un método de análisis de resultados experimentales conocido como *Wavelet Analysis*.
- 1994 (PROYECTO DE INVESTIGACIÓN) Colaboración con la Cátedra de Vibraciones y Aeroelasticidad en el proyecto Vela Solar: responsable del diseño preliminar de una Vela Solar (nave espacial impulsada por tecnología fotónica) en colaboración con centros internacionales como el CNES francés.

6. PUESTOS DOCENTES DESEMPEÑADOS

- Actualmente, y desde 2001, profesor asociado (6+6) en la ETSIA dentro del Departamento de Fundamentos Matemáticos.
- 1999: Experiencia como profesor en varias academias en la enseñanza de materias técnicas, como vibraciones, ruido medioambiental, ruido de aeronaves, etc.
- 1999: Profesor colaborador del IMEFE en el curso *Especialista en Ruido Medioambiental* (vibraciones, impacto del ruido de aeronaves en aeropuertos, etc.).

7. PUBLICACIONES

- 2007 (International Congress on Acoustics ICA2007) An approach for characterizing the Aerodynamics/Structure Coupling at the Aircraft Design Stage in the Presence of Structural Nonlinearities.
- 2007 (International Forum of Aeroelasticity and Structural Dynamics IFASD2007) Refueling Boom Aeroelasticity.
- 2001 (International Forum of Aeroelasticity and Structural Dynamics IFASD2001) Aeroelastic Study of a Slender Wing-Body Configuration with Structural Nonlinearities.
- 2001 (International Forum of Aeroelasticity and Structural Dynamics IFASD2001) Applications of the Transfer Functions of Wing-Body Configurations in Unsteady Incompressible Flow to the Problem of Gust Response.
- 1998 (Ingeniería Aeronáutica y Astronáutica, No. 352) Efectos de Ráfagas Discretas en Configuraciones Elásticas del tipo Cuerpo-Ala (parte II).
- 1998 (Ingeniería Aeronáutica y Astronáutica, No. 351) Efectos de Ráfagas Discretas en Configuraciones Elásticas del tipo Cuerpo-Ala.
- 1996 (Ingeniería Aeronáutica y Astronáutica, No. 345) Propulsión Espacial Ecológica: Diseño Preliminar de una Vela Solar (parte II).
- 1996 (Ingeniería Aeronáutica y Astronáutica, No. 344) Propulsión Espacial Ecológica: Diseño Preliminar de una Vela Solar (parte I).
- 1996 (Ingeniería Aeronáutica y Astronáutica, No. 343) Influencia de la Gravedad en la Dinámica de un Péndulo Simple.

8. ESTANCIAS EN CENTROS/EMPRESAS EXTRANJEROS/AS

- 1995: Syracuse University, New York, EEUU. 12 semanas.
- 1998-99: Allied-Signal, Arizona, EEUU. 9 meses.

Resumen

La aeroelasticidad es la disciplina de la ingeniería aeronáutica que estudia la respuesta de vehículos flexibles sometidos a acciones externas aerodinámicas y, en el caso de aeronaves, requiere el acoplamiento de fuerzas inerciales, estructurales, aerodinámicas y de leyes de control (aeroservoelasticidad). La aproximación clásica considera modelos lineales, algo que puede no ser cierto en determinadas condiciones: no linealidades estructurales por holgura o fricción en la rotación de las superficies de control, movimiento del combustible en los depósitos (*fuel sloshing*) en maniobras con elevados factores de carga de aviones de altas prestaciones, desprendimiento de corriente, flujo transónico o leyes de vuelo no lineales que dependen de la condición de vuelo o de la maniobra. Las no linealidades provocan inestabilidades aeroelásticas que no predicen los modelos lineales, como *oscilaciones de ciclo límite* o *respuesta caótica*, y que tienen influencia en la vida en fatiga de los materiales o en las cualidades de vuelo de la aeronave.

Esta tesis desarrolla una metodología novedosa para el estudio en la etapa de diseño de una aeronave del efecto aeroelástico de no linealidades estructurales concentradas. La metodología es aplicada a una configuración cuerpo/ala esbelta tipo misil.

En una primera parte, se realiza una revisión bibliográfica de la literatura sobre el efecto de no linealidades estructurales en la aeroelasticidad de aeronaves, incluyendo una revisión de las normas de certificación civiles y militares respecto a este tema. Se discute el estado del arte y las principales ventajas e inconvenientes de los distintos métodos de cálculo.

En una segunda parte, se estudia el efecto de no linealidades estructurales concentradas en la aeroelasticidad de configuraciones flexibles cuerpo/ala esbeltas, típicamente misiles, aunque la formulación es aplicable a otras configuraciones como pods subalares o tanques de combustible exteriores. Las no linealidades estructurales, del tipo *freeplay* o *hysteresis*, se localizan en la unión misil-avión y en la rotación de las aletas del misil. El modelo estructural es un modelo flexible tipo *viga* para el cuerpo del misil y aletas rígidas, el modelo inercial se basa en una masa distribuída por unidad de longitud y el modelo aerodinámico está basado en la teoría aerodinámica no estacionaria de Cuerpos Esbeltos. Se plantean las ecuaciones aeroelásticas del sistema en la formulación Estado-Espacio y se desarrolla un código Fortran 90/Matlab que las resuelve, incluyendo métodos de integración específicos para este tipo de sistemas no lineales y herramientas de postproceso e identificación de la respuesta.

Este código se denomina **FHSWB**, acrónimo de *Freeplay Hysteresis on Slender Wing/Body Configurations*, e incluye las siguientes módulos: módulo de planteamiento de ecuaciones aeroelásticas en el Estado-Espacio, módulo de integración en el dominio del tiempo (con método *illinois* para determinar condiciones de cambio), módulo de identificación en tiempo real de la respuesta, módulos de postproceso y análisis de señales (análisis de Fourier, planos de fase, diagramas de bifurcación), y

módulos para caracterización de respuestas de caótico (mapas de Poincaré, Tasa de Dispersión o *DIRA*).

El código **FHSWB** es autocontenido para el diseño aeroelástico lineal/nolineal preliminar de configuraciones esbeltas, y ha sido validado con resultados teóricos y experimentales de otros autores. Por otro lado, los módulos de integración, identificación, postproceso, análisis y de caracterización de caos pueden integrarse en el diseño de configuraciones más complejas tipo aeronaves. El único requisito es recibir en formato Estado-Espacio las ecuaciones aeroelásticas del sistema.

Se comprueba que la presencia de no linealidades estructurales induce respuestas de tipo armónico no amortiguado (LCO o *Limit Cycle Oscillations*) y caóticas por debajo de la velocidad de *flutter*, lo que afecta de modo fundamental a las predicciones de fatiga.

En resumen, los principales resultados de esta Tesis son:

1. Resumen del Estado del Arte en el tratamiento teórico y experimental de las no linealidades estructurales desde el punto de vista aeroelástico.
2. Revisión de las Normas de Certificación (civiles y militares) con respecto al tratamiento de las no linealidades estructurales.
3. Desarrollo teórico de una formulación Estado-Espacio de las ecuaciones aeroelásticas de una configuración cuerpo/ala esbelta.
4. Desarrollo de un código autocontenido (**FHSWB**) para el diseño aeroelástico preliminar de una configuración cuerpo/ala esbelta, incluyendo el cálculo de los coeficientes aerodinámicos, cálculo de la aeroelasticidad lineal (divergencia y *flutter*) y análisis de la aeroelasticidad en presencia de no linealidades estructurales concentradas del tipo *freeplay* o *hysteresis*.
5. Desarrollo de herramientas para la integración en el tiempo, postproceso y análisis de la respuesta de sistemas aeroelásticos no lineales, aplicable a todo tipo de configuraciones, con la única condición de conocer sus ecuaciones aeroelásticas en la formulación Estado-Espacio. Estas herramientas son:
 - a) Módulo que incorpora un integrador específico para no linealidades tipo *freeplay* o *hysteresis*. En estas no linealidades es fundamental determinar el tiempo de paso por las esquinas de las zonas muertas o *deadband*, que es donde el sistema cambia de ecuaciones aeroelásticas.
 - b) Módulos para caracterización en tiempo real de la respuesta. Una caracterización pronta de la respuesta, es decir, determinar si se tiene una respuesta amortiguada, LCO, caos o *flutter*, ayuda a reducir los tiempos de cálculo, algo fundamental en el diseño de cualquier aeronave que requiere decenas de configuraciones combinadas con cientos de puntos de vuelo.
 - c) Módulos para postproceso y análisis de la respuesta de sistemas aeroelásticos: transformadas de Fourier, planos de fase, diagramas de bifurcación, etc.
 - d) Módulos que incorporan diversas metodologías para caracterización de la caoticidad de la respuesta (diagramas de bifurcación, mapas de Poincaré, etc.), definiendo un parámetro (*DIRA*) que cuantifica el grado de caoticidad de los mapas de Poincaré.

Abstract

Aeroelasticity is the discipline of the aeronautical engineering that studies the vibration of flying flexible structures as affected by the surrounding air. The aeroelastic behaviour of an aircraft depends basically of four major inputs: structure, inertia, aerodynamics, and flight control systems (aeroservoelasticity). The classical approach considers linear models, hypothesis that must be reviewed under certain circumstances: inherent structural nonlinearities like *freeplay* or *hysteresis* on the control surfaces, motion of the fuel into the tanks (fuel sloshing) on manouvers with high load factors in high performance fighters, flow detachment, transonic dip, or nonlinear electronic flight control laws. Nonlinearities modify the classical aeroelastic behaviour of the structure by introducing vibration-type instabilities like Limit Cycle Oscillations (LCOs) or chaotic response. These undamped vibrations, although not catastrophic, have important influence on the fatigue life of the structure or flying qualities of the aircraft.

This thesis develops a novel simulation methodology for analysing the aeroelastic effect of concentrated structural nonlinearities at the design stage of the aircraft. The methodology is applied to a slender wing/body configuration.

The first part of the thesis is devoted to review the state of art on the analysis of structural nonlinearities from the aeroelastic standpoint. Both technical publications and civil/military airworthiness regulations are reviewed, discussing the current methodologies and analyzing advantages and disadvantages of each one.

The second part of the thesis studies the effect of concentrated structural nonlinearities (freeplay and hysteresis) on the aeroelastic characteristics of slender wing/body configurations, typically missiles, although it can also be applied to underwing pods or fuel tanks. These nonlinearities are located at the missile-to-pylon fittings in case the missile is hanged on an aircraft, or at the control surfaces rotation due to freeplay/hysteresis of the actuators or even wear of the hinge bearings. The structural model is a beam-like flexible finite element model for the missile body while control surfaces are assumed to behave as rigid plates. The inertia is based on a mass per unit length distributed along the longitudinal axis of the missile, and the aerodynamics is calculated with the unsteady slender body theory. The aeroelastic equations are formulated into the state-space form and are integrated with a Fortran 90 code developed ad hoc for the thesis. The code includes specific integration methods for freeplay and hysteresis nonlinearities, and Matlab postprocessing tools for characterizing the response.

The Fortran 90/Matlab code is called **FHSWB**, which stands for **F**reeplay **H**ysteresis on **S**lender **W**ing **B**ody Configurations, and includes the following modules: module that formulates the aeroelastic equations of slender wing/body configurations into the state-space form, time-domain integration module with Illinois method for capturing the corners of the nonlinearities, module for real-time

identification of the response, module for postprocessing and signal analysis (Fourier transform, phase plane plots, bifurcation diagrams) and modules for chaos characterization (Poincaré maps and Dispersal Rate).

The **FHSWB** code is self-contained for the preliminary design of slender wing/body configurations, and has been validated with theoretical and experimental results of various authors. On the other hand, the other modules (integration, identification, postprocessing, analysis and chaos characterization) can be easily integrated into the design of more complex configurations. The unique requirement is to know the aeroelastic equations in the state-space form.

The results of the thesis confirm the presence of undamped LCOs and chaotic response due to the structural nonlinearities, what can affect the fatigue life of the structure.

As a summary, these are the main contributions and results of this thesis:

1. State of art of the theoretical and experimental methods for evaluating the effect of the structural nonlinearities on the aeroelastic behaviour of a vehicle.
2. Review of the civil/military airworthiness regulations concerning the aeroelastic effect of structural nonlinearities.
3. Theoretical formulation of the aeroelastic equations for slender wing/body configurations including concentrated structural nonlinearities.
4. A Fortran 90/Matlab code **FHSWB** has been developed that is self-contained for the preliminary design of slender wing/body configurations from the aeroelastic standpoint. This code includes the calculations of the unsteady aerodynamic coefficients, linear aeroelasticity (divergence, flutter, and command reversal) and analysis of the response in the presence of freeplay- or hysteretic-type nonlinearities.
5. The code **FHSWB** includes different modules that can be easily used for analysing the response of other complex systems, as complete aircrafts:
 - a) Time-domain integrator of the state-space equations, including specific features for treating freeplay and hysteresis nonlinearities.
 - b) Module for real time characterization of the system response.
 - c) Module for postprocessing the system response: Fourier transforms, phase plane plots, and bifurcation diagrams. These tools allow to characterize the main important characteristics of the response: amplitude, characteristic frequencies, type of response, evolution with the flight speed, and so on.
 - d) Specific modules for chaos characterization and quantification in case of chaotic behaviour: Poincaré maps and a magnitude that is introduced into this thesis, the so-called Dispersal Rate DIRA, a parameter that quantifies the chaos intensity.

Agradecimientos

En primer lugar quería agradecer el apoyo incondicional de Sara, Félix y Alejandra en los últimos momentos de esta tesis. Los tres han contribuido de forma fundamental para terminar este trabajo. Por supuesto, este trabajo tampoco habría sido posible sin la ayuda de mis padres y hermanas. Gracias a todos por permitir que os robe parte del tiempo que os corresponde.

No querría dejar de mencionar a las tres personas que más han influido en mi carrera profesional: el Hno. Marcos, que en paz descanse, y al que nunca podré agradecer lo suficiente sus clases magistrales de Matemáticas, D. Pablo García-Fogeda, catedrático de Vibraciones y Aeroelasticidad de la ETSIA, tutor e impulsor de esta tesis, con el que dí mis primeros pasos en tareas de investigación y al que debo mi vocación a la Aeroelasticidad, y a D. Héctor Climent, jefe del Departamento de Dinámica Estructural y Aeroelasticidad de EADS/CASA, al que agradezco no dejar de aprender día a día.

Gracias a los compañeros David, Anna, Enrique, Vincent y Davide por sus comentarios y aportaciones.

Por último, aunque no menos importante, gracias también a los amigos Javier, Eva, Sebas, Mari Mar y Manuel por su compañía en los buenos y malos momentos.

Lista de Símbolos

a	Velocidad del sonido local.
a_∞	Velocidad del sonido en el infinito aguas arriba (flujo no perturbado).
A	Área de la sección transversal del cuerpo.
$[A]$	Matriz de la 1ª ecuación de estado-espacio: $d\{x\}/dt = [A]\{x\} + [B]\{u\}$.
$[B]$	Matriz de la 1ª ecuación de estado-espacio: $d\{x\}/dt = [A]\{x\} + [B]\{u\}$.
C_{p0}	Coefficiente de presiones del problema de espesor (deformación $w(x;t)$ nula).
C_p	Coefficiente de presiones total, i.e., $C_p = C_{p0} + \Delta C_p$, donde C_{p0} es el coeficiente de presiones del problema de espesor (deformación $w(x;t)$ nula) y ΔC_p es el coeficiente de presiones asociado a la deformación $w(x;t)$.
ΔC_p	Coefficiente de presiones asociado a la deformada $w(x;t)$.
$[C]$	Matriz de la 2ª ecuación de estado-espacio: $\{y\} = [C]\{x\} + [D]\{u\}$.
$[D]$	Matriz de la 2ª ecuación de estado-espacio: $\{y\} = [C]\{x\} + [D]\{u\}$.
DSI	Acrónimo del término inglés <i>Deadband Switch Indicator</i> . $DSI = 1$ si no existe soporte o el desplazamiento del soporte no lineal está dentro de las zonas <i>deadband</i> ; $DSI = 0$ si el soporte es lineal o el desplazamiento del soporte no lineal está fuera de las zonas <i>deadband</i> .
E	Módulo de elasticidad o módulo de Young.
$EDOs$	Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
F_{up}	Precarga superior del ciclo de histéresis del soporte no lineal en desplazamiento.
F_{down}	Precarga inferior del ciclo de histéresis del soporte no lineal en desplazamiento.
G	Módulo de elasticidad transversal.
GVT	Acrónimo del término inglés <i>Ground Vibration Test</i> .
I_y	Momento de inercia de la sección transversal del cuerpo respecto al eje y .
I_z	Momento de inercia de la sección transversal del cuerpo respecto al eje z .
K_{ij}	Término de la matriz de rigideces generalizadas $[K_{hh}]$ situado en la fila i y columna j .
$[K_{hh}]$	Matriz de rigidez generalizada.
$[K_{hh}^A]$	Matriz de rigidez asociada a los actuadores.
$[K_{hh}^{LDR}]$	Matriz de rigidez asociada a los soportes lineales.
K_k^{LD}	Rigidez del soporte lineal en desplazamiento con índice k .
K_k^{LR}	Rigidez del soporte lineal en rotación con índice k .
K^A	Rigidez de los actuadores.
K^{NLD}	Rigidez del soporte no lineal en desplazamiento.
K^{NLR}	Rigidez del soporte no lineal en rotación.
L	Longitud del cuerpo en la configuración cuerpo/ala.
LCO	Acrónimo del término inglés <i>Limit Cycle Oscillations</i> .
$m(x)$	Masa por unidad de longitud de la configuración cuerpo/ala.
$m_b(x)$	Masa por unidad de longitud del cuerpo.
$m_w(x)$	Masa por unidad de longitud de las aletas.

M_∞	Número de Mach.
M_{down}	Precarga del soporte no lineal en rotación correspondiente al ciclo de histéresis inferior.
$[M_{hh}]$	Matriz de masas generalizada.
M_{ij}	Término de la matriz de masas generalizada $[M_{hh}]$ situado en la fila i y columna j .
M_t	Momento torsor.
M_{up}	Precarga del soporte no lineal en rotación correspondiente al ciclo de histéresis superior.
M_y	Momento flector en la sección transversal del cuerpo respecto al eje y .
M_z	Momento flector en la sección transversal del cuerpo respecto al eje z .
N	Fuerza axial en el cuerpo.
nLD	Número de soportes lineales en desplazamiento.
nLR	Número de soportes lineales en rotación.
\vec{Q}_∞	Velocidad de vuelo $\vec{Q}_\infty = (U_\infty, V_\infty, W_\infty)$.
Q_∞	Módulo de la velocidad de vuelo $Q_\infty = \vec{Q}_\infty $
r	Coordenada radial en polares (ejes <i>cuerpo</i>).
$r(x)$	Radio del cuerpo en la coordenada axial x .
\tilde{r}	Coordenada radial en polares (ejes <i>viento</i>).
R	Radio del cuerpo.
R_{max}	Radio máximo del cuerpo en la configuración esbelta cuerpo/ala.
$s(x)$	Semienvergadura de las aletas en la coordenada axial x .
S	Ecuación de la superficie mojada $S(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t) = 0$.
S_{ref}	Superficie de referencia utilizada para adimensionalizar las fuerzas aerodinámicas generalizadas.
t	Tiempo.
\hat{t}	Tiempo adimensional; $\hat{t} = t \cdot U_0 / L$, siendo U_0 una velocidad de referencia y L una longitud de referencia.
T	Tiempo característico.
T	Energía cinética.
T_b	Energía cinética del cuerpo.
T_w	Energía cinética de las aletas.
T_y	Fuerza de cortadura transversal según el eje y .
T_z	Fuerza de cortadura transversal según el eje z .
u	Velocidad de perturbación axial; la velocidad local se escribe como $\vec{V} = \vec{Q}_\infty + (u, v, w)$.
U_0	Velocidad de vuelo utilizada como referencia en la adimensionalización de las ecuaciones aeroelásticas. Por ejemplo, la velocidad de vuelo adimensional se escribe $\hat{U}_\infty = U_\infty / U_0$. Un valor de 0,5144 [m/s] hace que el valor de la velocidad adimensional \hat{U}_∞ coincida con el valor de la velocidad de vuelo en KTAS.
U_b	Energía de deformación del cuerpo.
U_{LA}	Energía de deformación asociada a la rotación de aletas mediante actuadores lineales.
U_{LS}	Energía de deformación de los soportes lineales.
U_∞	Velocidad de vuelo en dirección x ; la velocidad total se escribe como $\vec{Q}_\infty = (U_\infty, V_\infty, W_\infty)$.
$\{u\}$	Vector de entrada o realimentación en las ecuaciones de estado-espacio; 1ª ecuación: $d\{x\}/dt = [A]\{x\} + [B]\{u\}$ y 2ª ecuación: $\{y\} = [C]\{x\} + [D]\{u\}$.
v	Velocidad de perturbación; la velocidad local se escribe como $\vec{V} = \vec{Q}_\infty + (u, v, w)$.
V_{int}	Velocidad lateral en el intradós de las aletas.
V_{ext}	Velocidad lateral en el extradós de las aletas.
V_r	Velocidad radial del fluido en coordenadas cilíndricas.
V_θ	Velocidad azimutal del fluido en coordenadas cilíndricas.
V_∞	Velocidad de vuelo en dirección y ; la velocidad total \vec{Q}_∞ se escribe $\vec{Q}_\infty = (U_\infty, V_\infty, W_\infty)$.
w	Velocidad de perturbación; la velocidad local se escribe como $\vec{V} = \vec{Q}_\infty + (u, v, w)$.

w_{int}	Velocidad de perturbación en el intradós de las aletas.
w_{ext}	Velocidad de perturbación en el extradós de las aletas.
W_{int}	Velocidad vertical en el intradós de las aletas.
W_{ext}	Velocidad vertical en el extradós de las aletas.
$w_b(x; t)$	Desplazamiento del cuerpo $w_b(x; t) = \sum_{i=1}^m \psi_{i,b}(x)\xi_i(t)$.
w_{NLD}	Desplazamiento en la coordenada axial en la que se sitúa el soporte no lineal en desplazamiento; $w_{NLD} = w(x^{NLD}; t)$
$w_w(x; t)$	Desplazamiento de las aletas $w_w(x; t) = \sum_{i=1}^m \psi_{i,w}(x)\xi_i(t)$.
W_∞	Velocidad de vuelo en dirección z ; la velocidad total se escribe como $\vec{Q}_\infty = (U_\infty, V_\infty, W_\infty)$.
x	Coordenada axial x del sistema curvilíneo de <i>ejes cuerpo</i> .
x_0	Coordenada axial menor del borde de ataque de las aletas.
x_f	Coordenada axial mayor del borde de salida de las aletas.
x_h	Coordenada axial del eje de giro de las aletas.
x_k^{LD}	Coordenada axial del soporte lineal en desplazamiento con índice k .
x_k^{LR}	Coordenada axial del soporte lineal en rotación con índice k .
x^{NLD}	Coordenada axial del soporte no lineal en desplazamiento.
x^{NLR}	Coordenada axial del soporte no lineal en rotación.
\tilde{x}	Coordenada x del sistema <i>ejes viento</i> , siguiendo la dirección de la velocidad de vuelo U_∞ .
\tilde{x}_{le}	Ecuación del borde de ataque de las aletas; $\tilde{x}_{le}(\tilde{y})$
\tilde{x}_{te}	Ecuación del borde de salida de las aletas; $\tilde{x}_{te}(\tilde{y})$
$\{x\}$	Vector de estado-espacio; $\{x\} = [\xi_1 \xi_2 \dots \xi_m \dot{\xi}_1 \dot{\xi}_2 \dots \dot{\xi}_m]^T$
y	Coordenada y del sistema curvilínea de <i>ejes cuerpo</i> . Coincide con \tilde{y} .
\tilde{y}	Coordenada y del sistema <i>ejes viento</i> , formando triedro a derechas con los ejes \tilde{x} y \tilde{z} .
z	Coordenada z del sistema curvilínea de <i>ejes cuerpo</i> .
z_{ext}	Superficie extradós de las aletas; $z_{ext}(\tilde{x}, \tilde{y}, t)$
z_{int}	Superficie intradós de las aletas; $z_{int}(\tilde{x}, \tilde{y}, t)$
\tilde{z}	Coordenada z del sistema <i>ejes viento</i> , formado por la intersección de un plano perpendicular al eje \tilde{x} y un plano de simetría de la configuración cuerpo/ala.
\emptyset_{max}	Diámetro del cuerpo en la sección de mayor área transversal.

Símbolos griegos

β	Giro de la aleta.
β_A	Rotación relativa de la aleta respecto al cuerpo; $\beta_A = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \psi_{i,wb}}{\partial x}(x_h)\xi_i(t)$.
β_{down}^-	Soporte en actuadores: esquina izquierda de la zona <i>deadband</i> en el tramo inferior del ciclo de histéresis.
β_{down}^+	Soporte en actuadores: esquina derecha de la zona <i>deadband</i> en el tramo inferior del ciclo de histéresis.
β_{up}^-	Soporte en actuadores: esquina izquierda de la zona <i>deadband</i> en el tramo superior del ciclo de histéresis.
β_{up}^+	Soporte en actuadores: esquina derecha de la zona <i>deadband</i> en el tramo superior del ciclo de histéresis.
γ	Relación de calores específicos del aire.
γ_{down}^-	Soporte no lineal en rotación: esquina izquierda de la zona <i>deadband</i> en el tramo inferior del ciclo de histéresis.
γ_{down}^+	Soporte no lineal en rotación: esquina derecha de la zona <i>deadband</i> en el tramo inferior del ciclo de histéresis.
γ_{up}^-	Soporte no lineal en rotación: esquina izquierda de la zona <i>deadband</i> en el tramo superior del ciclo de histéresis.

γ_{up}^+	Soporte no lineal en rotación: esquina derecha de la zona <i>deadband</i> en el tramo superior del ciclo de histéresis.
δ_{down}^-	Soporte no lineal en desplazamiento: esquina izquierda de la zona <i>deadband</i> en el tramo inferior del ciclo de histéresis.
δ_{down}^+	Soporte no lineal en desplazamiento: esquina derecha de la zona <i>deadband</i> en el tramo inferior del ciclo de histéresis.
δ_{up}^-	Soporte no lineal en desplazamiento: esquina izquierda de la zona <i>deadband</i> en el tramo superior del ciclo de histéresis.
δ_{up}^+	Soporte no lineal en desplazamiento: esquina derecha de la zona <i>deadband</i> en el tramo superior del ciclo de histéresis.
ζ	Variable compleja en el plano <i>transformado</i> ; $\zeta = \xi + i \cdot \eta$.
θ	Coordenada azimutal en ejes <i>cuerpo</i> .
$\tilde{\theta}$	Coordenada azimutal en ejes <i>viento</i> .
$\xi_i(t)$	Coordenada generalizada.
ρ	Densidad local del fluido.
σ	Variable compleja en el plano <i>físico</i> ; $\sigma = y + i \cdot z$.
τ	Relación de esbeltez del cuerpo en la configuración cuerpo/ala; $\tau = 2R_{max}/L$.
ϕ	Potencial de velocidades de perturbación asociado a deformaciones $w(\tilde{x}, t)$.
ϕ_0	Potencial de velocidades de perturbación asociado problema de espesor, i.e., configuración cuerpo/ala no deformada con ángulo de ataque nulo.
Φ	Potencial de velocidades de perturbación; el potencial total Ω se escribe $\Omega = U_\infty \tilde{x} + \nabla \Phi$
χ_y, χ_z	Factores de cortadura.
$\psi_i(x)$	Modo de deformación i .
$\psi_{i,b}(x)$	Modo de deformación i : deformación en el cuerpo.
$\psi_{i,kLD}$	Valor del desplazamiento modal i en la coordenada axial donde se sitúa el soporte lineal en desplazamiento k ; $\psi_{i,kLD} = \psi_{i,b}(x_k^{LD}; t)$.
$\psi_{i,NLD}$	Valor del desplazamiento modal i en la coordenada axial donde se sitúa el soporte no lineal en desplazamiento k ; $\psi_{i,NLD} = \psi_{i,b}(x_k^{NLD}; t)$.
$\psi'_{i,kLR}$	Rotación asociada al modo i en la coordenada axial donde se sitúa el soporte lineal en rotación k ; $\psi'_{i,kLR} = \psi'_{i,b}(x_k^{LR}; t)$.
$\psi_{i,w}(x)$	Modo de deformación i : deformación en las aletas.
$\psi_{i,wb}(x)$	Modo de deformación i : deformación de las aletas relativa al cuerpo.
Ω	Potencial de velocidades $\vec{V} = \nabla \Omega$.

Índice general

1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Consideraciones generales.	1
1.2. Aeroelasticidad No Lineal en la Industria Aeronáutica.	8
1.3. Contribución de esta Tesis Doctoral.	18
1.4. Esquema General de la Tesis.	19
1.5. Consideraciones Finales	22
2. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA CRONOLÓGICA. ESTADO DEL ARTE.	23
2.1. Introducción	23
2.2. Bibliografía sobre Nolinealidades Estructurales	23
2.3. Configuraciones de Estudio: Estado del Arte	35
2.4. Normativa sobre Nolinealidades Estructurales Concentradas.	35
2.5. Métodos de Cálculo: Estado del Arte	56
2.6. Consideraciones Finales	71
3. CONFIGURACIÓN CUERPO/ALA: ECUACIONES DE LA DINÁMICA	73
3.1. Introducción	73
3.2. Hipótesis simplificadoras en la obtención de las ecuaciones	74
3.2.1. Teoría Linealizada de Pequeñas Perturbaciones	74
3.2.2. Geometría	74
3.2.3. Modelo Aerodinámico: Potencial de Velocidades	76
3.2.4. Desplazamientos	76
3.2.5. Tipo y Localización de la Nolinealidad Estructural Concentrada	80
3.2.6. Ecuaciones de Estado-Espacio	81
3.3. Modos de Deformación	81
3.3.1. Modelos Teóricos Estructurales en casos particulares	82
3.4. Coordenadas Generalizadas	84
3.5. Energía Cinética	85
3.6. Fuerzas Generalizadas Potenciales: Energía Potencial	87
3.6.1. Energía de Deformación	87
3.6.2. Modelización de Soportes y Actuadores	91
3.7. Fuerzas Generalizadas No Potenciales: Aerodinámica No Estacionaria	99
3.7.1. Formulación de las Fuerzas Aerodinámicas Generalizadas en el Cuerpo	100

3.7.2.	Formulación de las Fuerzas Aerodinámicas Generalizadas en la Aleta	101
3.8.	Formulación matricial de las Ecuaciones de Lagrange	102
3.9.	Formulación adimensional de las ecuaciones de Lagrange	105
3.10.	Simulación de Otras Nolinealidades	108
3.11.	Formulación Matricial Estado-Espacio	109
3.12.	Flutter Lineal: distintos métodos de solución.	117
3.13.	Solución estacionaria: <i>Divergencia</i>	125
3.14.	Estado-Espacio: Solución Analítica vs Solución Numérica	125
3.14.1.	Solución Analítica de Sistemas Lineales	125
3.14.2.	Solución Analítica: Cálculo de la Matriz de Transición	127
3.14.3.	Solución Analítica de Sistemas Lineales a Trozos	128
3.14.4.	Solución Analítica vs Numérica	128
3.15.	Consideraciones Finales	129
4.	FUERZAS AERODINÁMICAS GENERALIZADAS	131
4.1.	Introducción	131
4.2.	Revisión de la <i>Teoría Aerodinámica de Cuerpos Esbeltos</i>	131
4.3.	Sistemas de Referencia: Ejes Viento y Ejes Cuerpo	133
4.4.	Potencial de Velocidades. Condiciones de Contorno	136
4.4.1.	Condiciones de Contorno	136
4.4.2.	Método de Pequeñas Perturbaciones	138
4.5.	Linealización de la Ecuación Diferencial del Potencial	141
4.5.1.	Formulación en el Sistema de Ejes Viento	141
4.5.2.	Formulación en el Sistema de Ejes Cuerpo	144
4.6.	Condición de Contorno	155
4.6.1.	Formulación en el Sistema de Ejes Viento	155
4.6.2.	Formulación en el Sistema de Ejes Cuerpo	158
4.7.	Coefficiente de Presiones	161
4.7.1.	Formulación en el Sistema de Ejes Viento	161
4.7.2.	Formulación en el Sistema de Ejes Cuerpo	164
4.8.	Aerodinámica de configuraciones esbeltas	170
4.8.1.	Flujo axial y flujo bidimensional cruzado	170
4.8.2.	Primera aproximación al flujo cruzado en deformaciones tipo WjB : ángulo de ataque estacionario α	172
4.8.3.	Flujo cruzado no estacionario: contribución de los términos WjB	176
4.8.4.	Flujo cruzado no estacionario: desplazamiento WrB	186
4.9.	Consideraciones Finales	203
5.	SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES AEROELÁSTICAS. CÓDIGO FHSWB	205
5.1.	Introducción	205
5.2.	Principales Características del Código FHSWB	206
5.2.1.	Formulación de las Ecuaciones Aeroelásticas de Configuraciones Esbeltas	206

5.2.2.	Método de Solución en el Dominio de la Frecuencia	206
5.2.3.	Método de Solución en el Dominio del Tiempo	207
5.2.4.	Integración con Detección de Entrada/Salida de la Zona Muerta o <i>Deadband</i>	207
5.2.5.	Módulos de representación gráfica en tiempo de ejecución	209
5.2.6.	Detectores en tiempo real del tipo de respuesta	211
5.3.	Programa Principal: Secuencia de Ejecución	216
5.4.	Elección de la Base Modal	218
5.5.	Descripción de los Ficheros de Control	219
5.5.1.	Ejemplo de fichero de control con parámetros generales	229
5.5.2.	Ejemplo de fichero de control con formas modales	230
5.6.	Consideraciones Finales	230
6.	VALIDACIÓN DEL CÓDIGO FHSWB	231
6.1.	Introducción	231
6.2.	Validación del módulo inercial/estructural	232
6.3.	Validación del módulo aerodinámico	236
6.3.1.	Validación del modulo aerodinámico: cuerpos esbeltos.	236
6.3.2.	Validación del modulo aerodinámico: alas esbeltas.	238
6.3.3.	Validación del modulo aerodinámico: configuraciones cuerpo/ala.	240
6.4.	Validación del módulo de solución de flutter lineal (método Vg)	245
6.5.	Validación del integrador numérico	249
6.5.1.	Formulación de las ecuaciones del tren de masas	249
6.5.2.	Ecuaciones en Estado-Espacio y Solución Analítica	254
6.5.3.	Integración numérica: módulo integrador de FHSWB	254
6.5.4.	Solución analítica: <i>Point Transformation Method</i>	254
6.5.5.	Comparación solución analítica vs. integración numérica.	256
6.6.	Consideraciones Finales	261
7.	CONFIGURACIÓN DE ESTUDIO. PRESENTACIÓN DE RESULTADOS	263
7.1.	Introducción	263
7.2.	Problema físico	264
7.3.	Configuración Geométrica	266
7.4.	Modelo Inercial	266
7.5.	Modelo Estructural/Soportado del Misil	268
7.6.	Nolinealidades Estructurales Concentradas	269
7.7.	Estudio paramétrico	271
7.8.	Presentación de resultados	275
7.9.	Consideraciones finales	281
8.	FLUTTER LINEAL	283
8.1.	Introducción	283
8.2.	Comparación de resultados: FHSWB vs MSC.NASTRAN	284
8.2.1.	Modelo inercial/estructural MSC.NASTRAN	284

8.2.2. Modelo aerodinámico MSC.NASTRAN	286
8.3. Comparación MSC.NASTRAN vs FHSWB: Configuración S01	287
8.4. Comparación MSC.NASTRAN vs FHSWB: Configuración S02	290
8.4.1. Configuración S02: modelos RIG y FLE	290
8.4.2. Modos de sólido rígido: modelo RIG	290
8.4.3. Modos de sólido rígido + 1ª flexión del cuerpo: modelo FLE	293
8.5. <i>Flutter</i> lineal: resumen de resultados	296
8.6. Consideraciones Finales	297
9. NOLINEALIDAD DEL TIPO <i>FREEPLAY</i>: RESULTADOS	299
9.1. Introducción	299
9.2. Estructura (RIG) / Soportado (S01)	300
9.2.1. Nolinealidad en Rotación de Aletas (RIG.S01.ROT)	301
9.2.2. Nolinealidad en Flexión Lateral de Pílon (RIG.S01.LAT)	320
9.2.3. Nolinealidad en Guiñada de Pílon (YAW)	339
9.3. Estructura (RIG) / Soportado (S02)	357
9.4. Estructura (FLE) / Soportado (S02)	374
9.5. Consideraciones Finales	391
10. NOLINEALIDAD DEL TIPO <i>HYSTERESIS</i>: RESULTADOS	393
10.1. Introducción	393
10.2. Estructura (RIG) / Soportado (S01)	393
10.2.1. Nolinealidad en Rotación de Aletas (ROT)	395
10.2.2. Nolinealidad en Flexión Lateral de Pílon (LAT)	412
10.2.3. Nolinealidad en Guiñada de Pílon (YAW)	429
10.3. Estructura (RIG) / Soportado (S02)	447
10.4. Estructura (FLE) / Soportado (S02)	463
10.5. Consideraciones Finales	480
11. RESUMEN DE RESULTADOS: TIPOS DE RESPUESTA	483
11.1. Introducción	483
11.2. Respuesta Amortiguada	485
11.3. Respuesta de tipo armónica	486
11.4. Respuesta de tipo caótica	487
11.4.1. Detección de Respuesta Caótica.	489
11.4.2. Tasa de Dispersión o <i>Dispersal Rate</i>	493
11.5. Consideraciones Finales	497
12. CONCLUSIONES	499
13. ESTUDIOS FUTUROS	503

A. Informes de las Autoridades de Aeronavegabilidad.	505
A.1. FAA: Free-play Limits and Inspection Procedures	505
A.2. FAA: Memorandum ANM-05-115-019	508
B. Fundamentos de Mecánica de Fluidos	517
B.1. Flujo Irrotacional	518
B.1.1. Condiciones para Flujo Irrotacional	519
B.1.2. Ecuaciones de la Mecánica de Fluidos para Flujo Irrotacional	520
B.2. Coeficiente de Presión Local	522
C. Sistema de Ejes Cuerpo	525
C.1. Correspondencia Biunívoca entre Ejes Cuerpo y Ejes Viento	527
C.2. Transformación de Coordenadas entre Ejes Viento y Ejes Cuerpo	529
C.3. Comprobación de Ortogonalidad del Sistema de Ejes Cuerpo	530
D. Derivada Parcial respecto al Tiempo	533
D.1. Sistemas de Referencia Ortonormales	534
D.2. Sistemas de Referencia Cartesianos	535
E. Bifurcación en Sistemas No Lineales	537
F. Modelo de elementos finitos MSC.NASTRAN del vehículo	539

Índice de figuras

1.1. Esquema de estabilizador vertical con los actuadores que actúan sobre el timón de dirección, los cojinetes de los actuadores, y los cojinetes de articulación en el eje de charnela del timón.	2
1.2. Figura extraída de [Bro07]: Estudio del efecto del par de apriete de las sujecciones pílón/ala y misil/lanzador en la amplitud de las oscilaciones LCOs.	2
1.3. Nolinealidad del tipo <i>freeplay</i> con los principales parámetros que la definen.	3
1.4. Izquierda: nolinealidad tipo <i>freeplay</i> en una aeronave recién fabricada (<i>Brand new aircraft</i>). Derecha: evolución de la nolinealidad debido al uso de la aeronave (<i>Aged aircraft</i>).	4
1.5. Nolinealidad de tipo <i>hysteresis</i> (extraída de la referencia [Dim07])	5
1.6. Arriba: Procedimiento para medida del <i>freeplay</i> en un timón de profundidad del avión Airbus A320. Medio: Instrumentación para medida. Abajo: operario introduciendo carga vertical de 30 daN y midiendo desplazamiento del borde de salida del timón de profundidad.	6
1.7. Directiva de aeronavegabilidad (<i>Airworthiness Directive AD</i>) número 39-12377 aplicable a los aviones modelo Airbus A319, A320 y A321 (1/4).	13
1.8. Directiva de aeronavegabilidad (<i>Airworthiness Directive AD</i>) número 39-12377 aplicable a los aviones modelo Airbus A319, A320 y A321 (2/4).	14
1.9. Directiva de aeronavegabilidad (<i>Airworthiness Directive AD</i>) número 39-12377 aplicable a los aviones modelo Airbus A319, A320 y A321 (3/4).	15
1.10. Directiva de aeronavegabilidad (<i>Airworthiness Directive AD</i>) número 39-12377 aplicable a los aviones modelo Airbus A319, A320 y A321 (4/4).	16
1.11. Directiva de aeronavegabilidad (<i>Airworthiness Directive AD</i>) número AD/B737/298 aplicable a los aviones modelo Boeing 737.	17
1.12. Esquema general de la Tesis.	21
2.1. Diagrama de bifurcación de la respuesta (extraída de referencia [Dim07]).	62
2.2. Diagrama de bifurcación (extraído de referencia [Dim07]) obtenido con un método <i>Numerical Continuation</i> aplicable a cualquier tipo de respuesta, incluida respuestas aperiódicas.	63
2.3. <i>Describing Function</i> para una nolinealidad de tipo <i>freeplay</i>	65
3.1. Grados de libertad de la configuración rígida RIG: LATERAL (desplazamiento en flexión lateral del conjunto pílón+misil), YAW (guiñada del conjunto pílón+misil) y ROTATION (rotación de las aletas respecto su eje de charnela o <i>hinge line</i>).	77
3.2. Nolinealidad del tipo <i>hysteresis</i>	93
3.3. Nolinealidad del tipo <i>hysteresis</i>	95
3.4. Momento no lineal de un actuador en función de la rotación de las aletas.	98
3.5. Figura 2D (plano xz) de la configuración cuerpo/ala deformada	100
4.1. Figura 3D de la configuración cuerpo/ala deformada.	135
4.2. Figura 2D (plano xz) de la configuración cuerpo/ala deformada	135
4.3. Planos <i>físico</i> y <i>transformado</i> en el problema de <i>flujo cruzado</i>	172

4.4. Planos <i>físico</i> y <i>transformado</i> en el problema de <i>flujo cruzado</i>	187
4.5. Potencial de perturbación en el <i>plano transformado</i>	190
5.1. Integración del código FHSWB con paso de tiempo 0,001 [sec] comparado con un método Runge-Kutta sin detección de las esquinas de la no linealidad y con paso de tiempo de integración: (a) 0,001 [sec] (b) $1 \cdot 10^{-4}$ [sec] (c) $5 \cdot 10^{-5}$ [sec] y (d) $5 \cdot 10^{-6}$ [sec]	208
5.2. Método <i>illinois</i> comparado con el método <i>regula-falsi</i>	209
5.3. Función <i>ConstraintFunction(1:3,1)</i> que controla el paso por las esquinas de las no linealidades tipo <i>freeplay</i> o <i>hysteresis</i>	210
5.4. : Elongación del actuador de las aletas del sistema de reabastecimiento en vuelo <i>boom</i> . Figura (a): respuesta del sistema lineal con rigidez nominal. Figura (b): respuesta del sistema lineal con rigidez nula. Figura (c): respuesta del sistema no lineal con <i>hysteresis</i>	219
6.1. Fichero de control del código FHSWB con las formas modales: modelo flexible FLE	233
6.2. Modos de deformación calculados con el código comercial MSC.NASTRAN: los círculos azules (○) representan la deformación del cuerpo, mientras que los círculos verdes (◉) representan la deformación de las aletas. La línea continua de color rojo (—) representa el modo aproximado de deformación del cuerpo $\psi_{i,b}$ (aproximación polinómica de 5º orden al modo de MSC.NASTRAN) que se introduce como <i>modo asumido</i> al código FHSWB . La línea de color verde (—) representa el modo aproximado de deformación de las aletas $\psi_{i,w}$ que, al considerarse rígidas, es una aproximación de 1ª orden y coincide de forma exacta al modo de MSC.NASTRAN.	234
6.3. Fichero de control con los principales parámetros de la configuración, incluyendo distribución de masa y rigidez por unidad de longitud.	235
6.4. Configuración esbelta cuerpo/ala (obtenida de [Sac54]) utilizada en la validación del código FHSWB	240
6.5. Resultados de las derivadas de estabilidad documentados en la referencia [Sac54] para la configuración de la figura 6.4.	244
6.6. Resultados de las derivadas de estabilidad para la configuración de la figura 6.4 obtenidos con el código FHSWB	244
6.7. Configuración utilizada en la validación del módulo de solución de flutter lineal.	245
6.8. Velocidad de <i>flutter</i> adimensional (figura superior) y frecuencia del mecanismo de <i>flutter</i> (figura inferior) en función de la relación entre la frecuencia del modo vertical ω_h y la frecuencia del modo de cabeceo ω_α , es decir, ω_h/ω_α	248
6.9. Tren de N masas unidad por muelles	249
6.10. Descomposición del ciclo de histéresis en dos no linealidades de tipo <i>freeplay</i>	250
6.11. Zonas del ciclo de histéresis	251
6.12. Comparación entre la integración numérica (—) y solución analítica (x)	258
6.13. Comparación entre la integración numérica (—) y solución analítica (x)	259
6.14. Elongación del muelle no lineal en función del tiempo (figura superior) y fuerza no lineal en función de la elongación del muelle no lineal (figura inferior).	260
6.15. Intervalo de tiempo seleccionado que muestra la captura de las esquinas de la no linealidad con el código FHSWB	260
7.1. Configuración geométrica del misil (arriba) comparada con el misil AMRAAM (abajo).	267
7.2. Panoplia de misiles y stores con soportado S01 (foto: Eurofighter).	269
7.3. Soportado S01 : misil colgado de pílón (foto: F16).	269
7.4. Misil en vuelo libre: soportado S02 (foto: Boeing F15).	270
7.6. No linealidad del tipo <i>freeplay</i> con los principales parámetros que la definen.	271

7.7. Nolinealidad del tipo <i>hysteresis</i> con los principales parámetros que la definen.	272
7.5. Grados de libertad de la configuración rígida RIG: LATERAL (desplazamiento en flexión lateral del conjunto pilón+misil), YAW (guiñada del conjunto pilón+misil) y ROTATION (rotación de las aletas respecto su eje de charnela o <i>hinge line</i>).	273
7.8. Mapa 2D de colores representando el número de frecuencias reducidas en función de la velocidad de vuelo U_∞ (eje x) y el parámetro de la nolinealidad que se varía (eje y).	277
7.9. Mapas 2D de colores representando, en función de la velocidad de vuelo U_∞ (eje x) y el parámetro de la nolinealidad (eje y), los resultados siguientes: (gráfico superior) número de frecuencias reducidas, (gráfico intermedio) valor en <i>Hz</i> de la primera frecuencia característica y (gráfico inferior) valor en <i>Hz</i> de la segunda frecuencia característica.	277
7.10. Mapa 2D de colores representando, en función de la velocidad de vuelo U_∞ (eje x) y el parámetro de la nolinealidad (eje y): (gráfico superior) valor máximo de la respuesta, (gráfico intermedio) valor medio de la respuesta y (gráfico inferior) valor mínimo de la respuesta.	278
7.11. Mapas 2D de colores representando, en función de la velocidad de vuelo U_∞ (eje x) y el parámetro de la nolinealidad (eje y): (gráfico superior) valor medio cuadrático (<i>root mean square</i>) de la respuesta y (gráfico inferior) desviación estándar (<i>standard deviation</i>).	278
7.12. Diagramas de bifurcación representando el valor máximo y mínimo de la respuesta en función de la velocidad de vuelo U_∞ (eje x). Cada uno de los gráficos corresponde a un valor del parámetro de la nolinealidad.	279
8.1. (Arriba): Modelo de elementos finitos en MSC.NASTRAN. (Abajo): Primera flexión del vehículo extraída directamente del modelo de elementos finitos MSC.NASTRAN	284
8.2. 1 ^{er} modo de deformación de sólido rígido: ángulo de guiñada (YAW) / cabeceo (PITCH).	285
8.3. 2 ^o modo de deformación de sólido rígido: desplazamiento lateral / vertical.	285
8.4. 3 ^{er} modo de deformación: rotación simétrica de aletas.	285
8.5. 4 ^o modo de deformación: primera flexión lateral/vertical del cuerpo.	285
8.6. Modelo aerodinámico Doublet-Lattice de MSC.NASTRAN incluyendo cuerpo	286
8.7. Diagrama Vg resultado de MSC.NASTRAN para configuración S01 , modelo RIG . Cuerpo CON aerodinámica.	288
8.8. Diagrama Vg resultado de MSC.NASTRAN para configuración S01 , modelo RIG . Cuerpo sin movimiento.	289
8.9. Diagrama Vg resultado de MSC.NASTRAN para configuración S02 , modelo RIG . Cuerpo CON movimiento.	291
8.10. Diagrama Vg resultado de MSC.NASTRAN para configuración S02 , modelo RIG . Cuerpo SIN movimiento.	292
8.11. Diagrama Vg resultado de MSC.NASTRAN para configuración S02 , modelo FLE . Interpolación estructura/aerodinámica del cuerpo ON.	294
8.12. Diagrama Vg resultado de MSC.NASTRAN para configuración S02 , modelo FLE . Interpolación estructura/aerodinámica del cuerpo OFF.	295
9.1. Nolinealidad del tipo <i>freeplay</i> con los principales parámetros que la definen.	301
9.2. Nolinealidad del tipo <i>freeplay</i> con los principales parámetros que la definen.	320
9.3. Nolinealidad del tipo <i>hysteresis</i> con los principales parámetros que la definen.	339
9.4. Nolinealidad del tipo <i>freeplay</i> con los principales parámetros que la definen.	357
9.5. Nolinealidad del tipo <i>freeplay</i> con los principales parámetros que la definen.	374
10.1. Nolinealidad del tipo <i>hysteresis</i> con los principales parámetros que la definen.	395
10.2. Nolinealidad del tipo <i>hysteresis</i> con los principales parámetros que la definen.	412

10.3. Nolinealidad del tipo <i>hysteresis</i> con los principales parámetros que la definen.	429
10.4. Nolinealidad del tipo <i>hysteresis</i> con los principales parámetros que la definen.	447
10.5. Nolinealidad del tipo <i>hysteresis</i> con los principales parámetros que la definen.	463
10.6. Respuesta de la configuración FLE.S02.ROT.HDC para HDC=-0.005 y dos velocidades de vuelo: 100 KTAS (izquierda) y 200 KTAS (derecha).	472
11.1. Frecuencia característica de la respuesta en función de la velocidad de vuelo U_∞ (eje x) y amplitud adimensional de la holgura (eje y).	484
11.2. Coordenadas Generalizadas en función del tiempo (columna izquierda) y plano de fases para $U_\infty = 100$ KTAS (columna derecha).	485
11.3. Coordenadas Generalizadas en función del tiempo (columna izquierda) y plano de fases (columna derecha) para $U_\infty = 350$ KTAS. Se representa de 10 a 12 en tiempo adimensional.	486
11.4. Coordenadas Generalizadas en función del tiempo (columna izquierda) y plano de fases (columna derecha) para $U_\infty = 350$ KTAS. Se representa el último medio segundo adimensional para poder visualizar la forma de la respuesta.	487
11.5. Coordenadas Generalizadas en función del tiempo (columna izquierda) y plano de fases (columna derecha) para $U_\infty = 260$ KTAS. Se representa de 10 a 60 en tiempo adimensional.	488
11.6. Coordenadas Generalizadas en función del tiempo (columna izquierda) y plano de fases (columna derecha) para $U_\infty = 260$ KTAS. Se representa el último segundo adimensional con el objetivo de visualizar la forma de la respuesta.	488
11.7. Transformada de Fourier de una respuesta de tipo armónica. Se caracteriza por tener un número discreto de frecuencias características.	489
11.8. Transformada de Fourier de una respuesta de tipo caótica. Se caracteriza por no tener frecuencias características de forma que la energía se distribuye en una banda de frecuencias.	489
11.9. Mapa de Poincaré de la Ecuación de Duffing (ver [Sey94], págs. 335 y 336).	490
11.10 Dos soluciones de la Ecuación de Lorenz con condiciones iniciales muy próximas (ver [Sey94], pág. 333)	491
11.11 Plano de fase (velocidad vs. desplazamiento) característico en respuestas de tipo caótico.	492
11.12 Mapa de Poincaré de la segunda frecuencia característica frente a la primera.	492
11.13 Dos secciones de Poincaré para dos velocidades de vuelo distintas: $U_\infty = 259$ KTAS y $U_\infty = 261$ KTAS.	494
11.14 Secciones de Poincaré basadas en el par $(\hat{\xi}_3, d\hat{\xi}_3/d\hat{t})$ en $\hat{t} = 30$ para distintas velocidades de vuelo. La coordenada generalizada $\hat{\xi}_3$ corresponde al modo de rotación de aleta (grado de libertad no lineal).	495
11.15 Secciones de Poincaré basadas en el par $(\hat{\xi}_3, d\hat{\xi}_3/d\hat{t})$ en $\hat{t} = 30$ para distintas velocidades de vuelo. La coordenada generalizada $\hat{\xi}_3$ corresponde al modo de rotación de aleta (grado de libertad no lineal).	496
11.16 Tasa de Dispersión (<i>Dispersal Rate</i> DIRA) en función de la velocidad de vuelo U_∞	497
13.1. Nolinealidad bilineal de tipo <i>freeplay</i> . C/S es acrónimo del término C ontrol S urface.	504
A.1. Memorando ANM-05-115-019 emitido por la <i>Federal Aviation Administration</i> FAA en relación a <i>recomendaciones para la certificación de superficies de control con holguras tipo freeplay y otras nolinealidades</i> (1/8).	508
A.2. Memorando ANM-05-115-019 emitido por la <i>Federal Aviation Administration</i> FAA en relación a <i>recomendaciones para la certificación de superficies de control con holguras tipo freeplay y otras nolinealidades</i> (2/8).	509

A.3. Memorando ANM-05-115-019 emitido por la <i>Federal Aviation Administration</i> FAA en relación a <i>recomendaciones para la certificación de superficies de control con holguras tipo freeplay y otras no linealidades (3/8)</i>	510
A.4. Memorando ANM-05-115-019 emitido por la <i>Federal Aviation Administration</i> FAA en relación a <i>recomendaciones para la certificación de superficies de control con holguras tipo freeplay y otras no linealidades (4/8)</i>	511
A.5. Memorando ANM-05-115-019 emitido por la <i>Federal Aviation Administration</i> FAA en relación a <i>recomendaciones para la certificación de superficies de control con holguras tipo freeplay y otras no linealidades (5/8)</i>	512
A.6. Memorando ANM-05-115-019 emitido por la <i>Federal Aviation Administration</i> FAA en relación a <i>recomendaciones para la certificación de superficies de control con holguras tipo freeplay y otras no linealidades (6/8)</i>	513
A.7. Memorando ANM-05-115-019 emitido por la <i>Federal Aviation Administration</i> FAA en relación a <i>recomendaciones para la certificación de superficies de control con holguras tipo freeplay y otras no linealidades (7/8)</i>	514
A.8. Memorando ANM-05-115-019 emitido por la <i>Federal Aviation Administration</i> FAA en relación a <i>recomendaciones para la certificación de superficies de control con holguras tipo freeplay y otras no linealidades (8/8)</i>	515
C.1. Figura 3D de la configuración cuerpo/ala deformada.	526
C.2. Figura 2D (plano xz) de la configuración cuerpo/ala deformada	526
E.1. Ejemplo de diagrama de bifurcación extraído de la referencia [Aré07]	538

Índice de tablas

2.1. Revisión de artículos sobre no-linealidades estructurales concentradas.	24
2.2. Normas de Certificación sobre no-linealidades estructurales.	37
4.1. Coeficiente de presiones sobre la superficie superior del CUERPO en deformaciones tipo WjB (W ing j oined to B ody) y WrB (W ing r elative to B ody).	201
4.2. Coeficiente de presiones sobre la superficie superior de las ALETAS (extradós) en deformaciones tipo WjB (W ing j oined to B ody) y WrB (W ing r elative to B ody).	202
6.1. Coeficientes que determinan las funciones polinómicas asociadas a las formas modales de la configuración flexible.	233
6.2. MSC.NASTRAN vs FHSWB : comparación de frecuencias modales.	233
6.3. Matrices de fuerzas aerodinámicas generalizadas para la configuración cuerpo/ala de la referencia [Sac54]	243
6.4. Derivadas de estabilidad para la configuración propuesta en la referencia [Sac54]	243
6.5. Derivadas de estabilidad para la configuración propuesta en la referencia [Sac54]	243
6.6. Resultados numéricos para la configuración de la figura 6.7 comparando el código FHSWB con resultados experimentales y resultados de Munk-Jones.	247
6.7. Parámetros del ciclo de histéresis	252
7.1. Principales propiedades másicas de la configuración.	267
7.2. Variables que se representan en los <i>mapas 2D</i> y los <i>diagramas de bifurcación</i>	276
7.3. Tabla resumen con las principales conclusiones de los mapas de colores 2D (figuras 7.8 a 7.12).	280
8.1. Resultados de <i>flutter</i> lineal. Comparativa MSC.NASTRAN y FHSWB	296
8.2. Resultados de <i>flutter</i> lineal. Caso nominal comparado con los casos: [1] $K_{ROT} = 0$, i.e., rotación de aletas libre, [2] $K_{LAT} = 0$, i.e., desplazamiento lateral libre, y [3] $K_{YAW} = 0$, i.e., giro en guiñada libre. Estos resultados han sido obtenidos con el código FHSWB	296
9.1. Configuraciones de estudio para el misil RIG (modelo estructural con 3 modos de sólido rígido) con soportado S01 (instalado en la plataforma que lo transporta).	300
9.2. Configuraciones de estudio para el misil RIG (modelo estructural con 3 modos de sólido rígido) con soportado S02 (vuelo equilibrado).	357
9.3. Configuraciones de estudio para el misil FLE (modelo estructural de misil flexible) con soportado S02 (vuelo libre equilibrado).	374
10.1. Configuraciones de estudio para el misil RIG (modelo estructural con 3 modos de sólido rígido) con soportado S01 (instalado en la plataforma que lo transporta).	394
10.2. Configuraciones de estudio para el misil RIG (modelo estructural con 3 modos de sólido rígido) con soportado S02 (vuelo equilibrado).	447

10.3. Configuraciones de estudio para el misil **FLE** (modelo estructural de misil flexible) con soportado **S02** (vuelo libre equilibrado). 463

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1. Consideraciones generales.

Esta tesis se enmarca dentro de la disciplina de *Aeroelasticidad*, una rama de la ingeniería aeronáutica que estudia los fenómenos de acoplamiento entre inercia, estructura, aerodinámica y leyes de control (aeroservoelasticidad), y que son causantes de inestabilidades que pueden causar la rotura catastrófica de la estructura.

El estudio aeroelástico en la etapa de diseño de una aeronave requiere desarrollar modelos teóricos del avión, unos modelos teóricos que se actualizarán y validarán posteriormente con ensayos en tierra (GVT, acrónimo del término inglés *Ground Vibration Test*) o ensayos en vuelo (FVT, acrónimo del término inglés *Flight Vibration Test*). La aproximación tradicional en la industria aeronáutica es considerar modelos lineales. Sin embargo, los ensayos mencionados anteriormente (GVT y FVT) demuestran que existen no linealidades que afectan en gran medida al comportamiento aeroelástico del sistema. Las no linealidades pueden ser de tipo:

1. No linealidades estructurales

La estructura de una aeronave presenta no linealidades estructurales de distintos tipos. Diversos autores las suelen dividir en (ver la referencia clásica [Bre80] o [PAL94a]):

a) No linealidades estructurales *distribuidas*:

Este tipo de no linealidades son inherentes a toda estructura y aparecen cuando las deformaciones superan el umbral de la linealidad. Cuando las deformaciones aumentan, las distintas partes que integran la estructura (remaches, bulones o componentes estructurales) entran en un mayor contacto y rozamiento que provocan variaciones en los modos de deformación, principalmente en la frecuencia pero también en la forma modal.

En el ensayo GVT de una aeronave se tienen en cuenta estas no linealidades y se analizan los modos de deformación del avión (frecuencia y forma modal) bajo distintos niveles de excitación.

b) No linealidades estructurales *concentradas*:

Este tipo de no linealidades aparecen en contactos locales entre distintas estructuras, en actuadores, etc. y la diferencia más importante con las anteriores no linealidades distribuidas

es que tienen efecto incluso bajo pequeñas deformaciones de la estructura. Esta característica fundamental provoca que sean las no linealidades estructurales más críticas desde el punto de vista de la inestabilidad de *flutter*. De todas ellas, las no linealidades en los actuadores de las superficies de control (alergones, timón de profundidad o timón de dirección) son las que estadísticamente provocan un mayor número de incidentes (en algunos casos desgraciadamente accidentes).

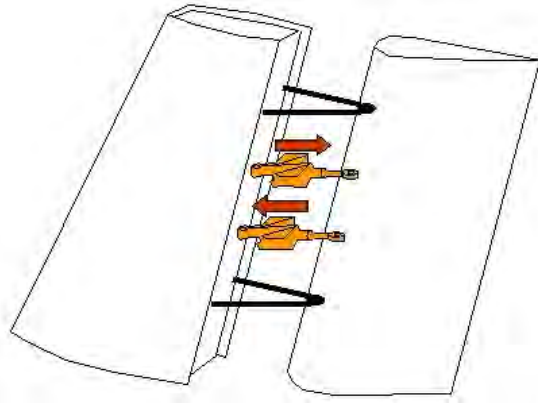


Figura 1.1: Esquema de estabilizador vertical con los actuadores que actúan sobre el timón de dirección, los cojinetes de los actuadores, y los cojinetes de articulación en el eje de charnela del timón.

Las no linealidades estructurales concentradas pueden catalogarse en:

- Holgura, *freeplay* o *backlash*¹.

Las holguras más críticas en aeronaves desde el punto de vista aeroelástico se localizan en la rotación superficies de control (figura 1.1), y son debidas fundamentalmente a tolerancias de fabricación o montaje y/o desgaste en:

- Actuadores.
- El par de apriete de las sujeciones (bulones) entre pílón/ala o misil/lanzador (figura 1.2 extraída de [Bro07]).
- Cojinetes de unión de los actuadores a las estructuras sobre las que actúan.
- Cojinetes de articulación de los ejes de charnela de las superficies de control.



Figura 1.2: Figura extraída de [Bro07]: Estudio del efecto del par de apriete de las sujeciones pílón/ala y misil/lanzador en la amplitud de las oscilaciones LCOs.

¹El término *backlash* es más utilizado en ingeniería mecánica para definir *juego excesivo* entre dos piezas.

La no linealidad *freeplay* se manifiesta en un momento no lineal que depende del ángulo de rotación de la superficie de control, tal como se indica en la figura 1.3. La zona intermedia con momento en la superficie de control constante (denominada en la literatura anglosajona *deadband*) indica un intervalo del ángulo de giro en el que la superficie de control no presenta resistencia para rotar.

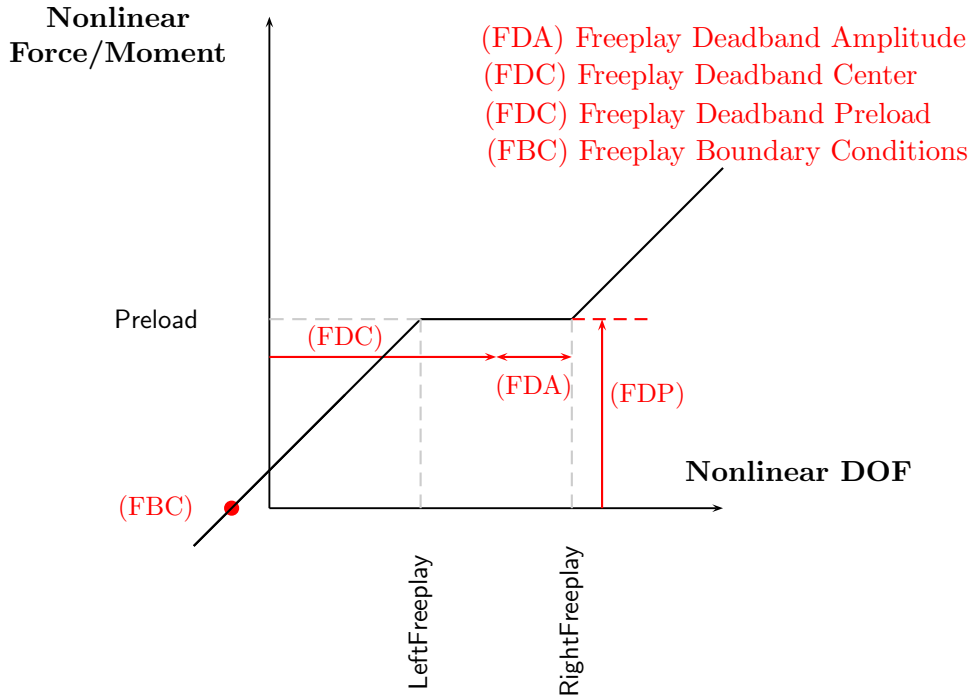


Figura 1.3: No linealidad del tipo *freeplay* con los principales parámetros que la definen.

La holgura o *freeplay* (en la figura 1.3 es el doble del parámetro **FDA**) depende en gran medida del uso del avión, siendo necesario en la actualidad establecer revisiones periódicas de las aeronaves para detectar un posible exceso de holgura en alguna de las superficies de control. La figura 1.4 representa la holgura típica en un avión recién construido (figura del lado izquierdo con la etiqueta *Brand new aircraft*), comparada con la holgura de un avión en uso (figura del lado derecho con la etiqueta *Aged aircraft*). Recientes estudios en un avión de transporte civil de gran capacidad, han demostrado las siguientes pautas de aumento de la holgura con la operación del avión:

- Timón de profundidad: al tercio de vida operativa del avión, la holgura se duplicaba con respecto a la que tenía el avión fabricado salido de la cadena de montaje. Al finalizar la vida operativa, la holgura era 3,5 veces la holgura del avión salido de la cadena de montaje.
- Timón de dirección: al finalizar la vida operativa del avión, la holgura era del orden de 3 veces la del avión recién salido de la cadena de montaje.

Este incremento en la amplitud de holgura se traducían de forma lineal a incrementos en los *factores de carga* en la cabina de pilotos e incrementos en el porcentaje de *carga límite* que soporta la estructura y los actuadores correspondientes.

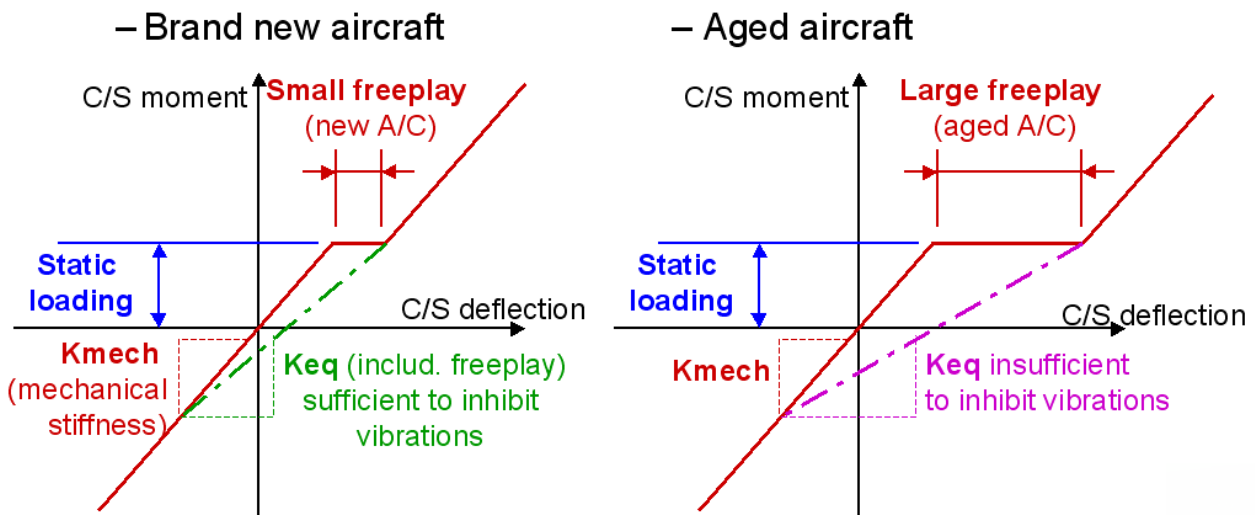


Figura 1.4: Izquierda: no linealidad tipo *freeplay* en una aeronave recién fabricada (*Brand new aircraft*). Derecha: evolución de la no linealidad debido al uso de la aeronave (*Aged aircraft*).

Los resultados anteriores corresponden a actuadores sin *precarga*, el caso más crítico para el que una determinada holgura induce la mayor amplitud de oscilación. La forma de reducir estas oscilaciones es introducir una precarga en los actuadores mediante las leyes de control de la aeronave, i.e., las denominadas EFCS (acrónimo del término inglés *Electronic Flight Control System*).

Las empresas constructoras de aeronaves deben declarar en el Manual de Mantenimiento de la aeronave las holguras admisibles, un procedimiento de medición de la holgura, así como un plan de inspecciones determinando la periodicidad de las mismas. La periodicidad deberá estar condicionada a demostrar que la probabilidad de existencia de LCOs antes de cada inspección es extremadamente baja. Una inspección cada 12000 horas es algo típico (Airbus A320). Actualmente, estas inspecciones son la única forma de controlar las holguras.

El método estándar de medición consiste en aplicar una fuerza conocida en el borde de salida de la superficie de control y medir la deflexión en [mm] (figura 1.6, extraída de [A3204]). Si la deflexión supera un determinado valor especificado por el fabricante, será necesario una inspección más profunda que podría incluir el desmontaje de la superficie de control. Para distinguir de donde proviene la holgura, de los actuadores o de los cojinetes, será necesario en alguna de las mediciones bloquear los actuadores.

Otros métodos de medición que se están utilizando actualmente son:

- Medición *mecánica* mediante un aparato que aplica fuerza directamente en el cojinete de articulación y mide su desplazamiento: es un método simple y no requiere entrenamiento especial. Se utiliza en el caso de requerir una precisión elevada en la medida (del orden de menos de décima de milímetro).
- Medición mediante *rayos X*: realizar una *foto* del cojinete y medir la holgura en las placas resultado de los rayos X. Este método no requiere aplicar fuerza, pero tiene el inconveniente de necesitar un entrenamiento especial y el peligro asociado

de la radiación.

- Medición mediante *ultrasonidos*: requiere la aplicación de una pequeña fuerza en una dirección y la holgura debe estar llena de líquido. Tiene el inconveniente de necesitar entrenamiento específico.

- Histéresis:

Es una combinación de no linealidades de tipo *freeplay* y aparece como consecuencia de incluir la fricción entre superficies, holguras de tipo *backlash* en mecanismos de rotación (trenes de engranajes), no linealidades en las leyes de control, etc. La figura 2.1 representa una no linealidad de tipo *hysteresis*.

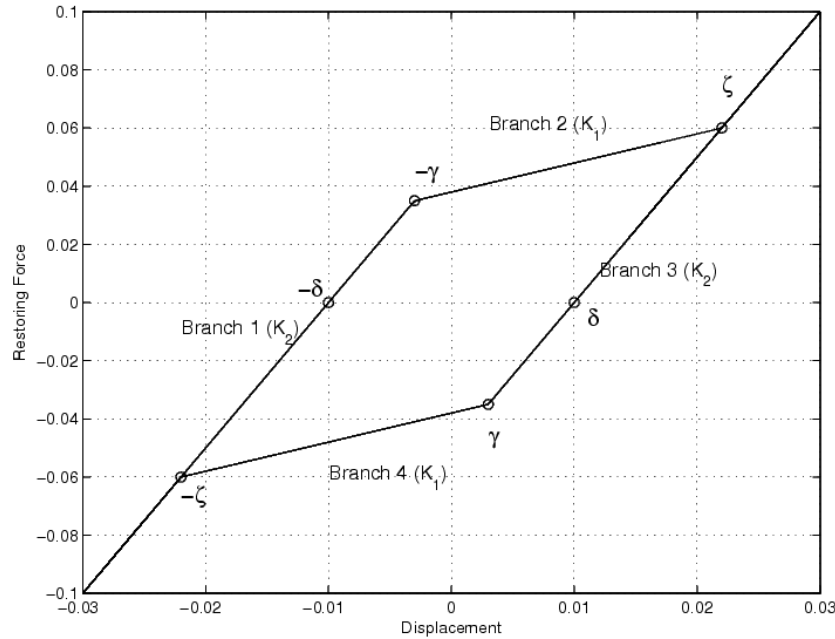


Figura 1.5: No linealidad de tipo *hysteresis* (extraída de la referencia [Dim07])

- No linealidad cúbica de endurecimiento/reblandecimiento: se formulan mediante dependencia cuadrática/cúbica del grado de libertad asociado a la no linealidad. Por ejemplo, la referencia [KSK98b] analiza la respuesta de un perfil 2D con una no linealidad estructural en el modo de cabeceo del tipo $k_\alpha = k_{\alpha_0} + k_{\alpha_1}\alpha + k_{\alpha_2}\alpha^2 + o(\alpha^2)$.

Un ejemplo de este tipo de no linealidad es el endurecimiento del modo de torsión de algunas superficies sustentadoras (ala, estabilizador horizontal, *canard*, etc.) al aumentar la amplitud de la torsión.

2. No linealidades inerciales

Los modelos lineales aeroelásticos suelen considerar distribuciones másicas concentradas (el denominado *lumped mass model* en la literatura inglesa) unidas a la estructura. Cuando la estructura se deforma, cada una de las masas se mueve según dicta la zona estructural a la que se considera unida, de forma que la masa carece de *movimiento relativo* respecto a la estructura que la rodea. Sin embargo, cuando los tanques de combustible del avión no están completamente llenos o vacíos, el combustible se mueve dentro del tanque afectado por las maniobras o vibraciones del

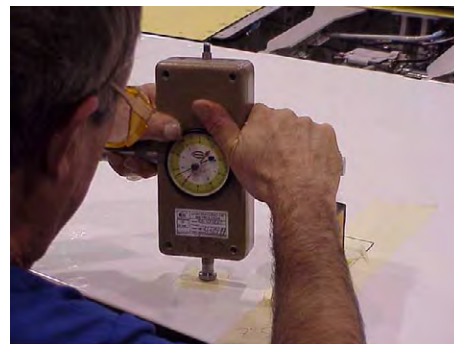
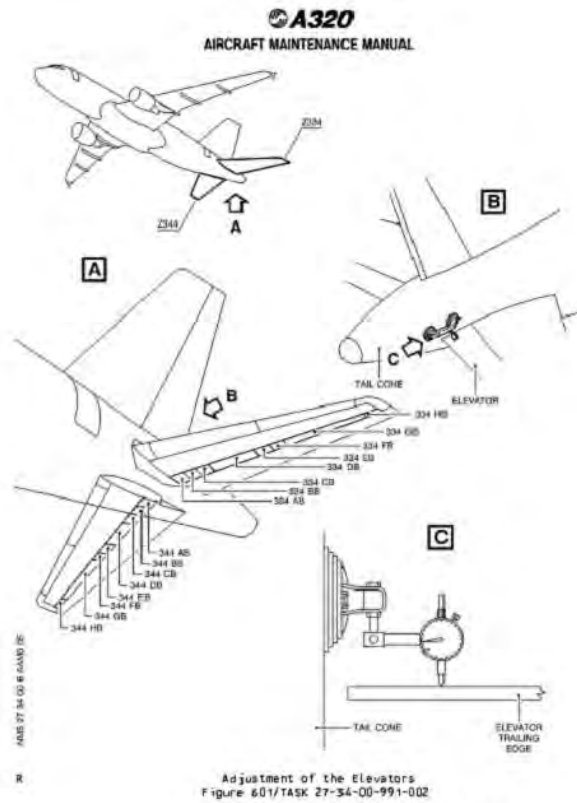


Figura 1.6: Arriba: Procedimiento para medida del *freeplay* en un timón de profundidad del avión Airbus A320. Medio: Instrumentación para medida. Abajo: operario introduciendo carga vertical de 30 daN y midiendo desplazamiento del borde de salida del timón de profundidad.

avión. Este fenómeno es especialmente crítico en aviones de altas prestaciones como los cazas, en los que se alcanzan maniobras de elevados factores de carga y el combustible está sometido a un mayor movimiento dentro del tanque.

Otro ejemplo de no linealidad másica es la variación de la carga de pago durante la suelta de cargas en aviones de transporte militar, la distribución de combustible en aviones tanqueros de altas prestaciones con sistemas como *boom*, variación de la carga de pago y/o consumo del combustible sólido en cohetes ([GGL07]), etc.

3. Nolinealidades aerodinámicas

La aerodinámica de un avión presenta no linealidades por diversos motivos:

- Condiciones de alto ángulo de ataque (entrada en pérdida, *buffet*, ...). Estas situaciones son frecuentes en aviones militares de altas prestaciones en maniobras de evasión y en vehículos sin piloto **UAVs** (acrónimo del inglés *Uninhabited Aerial Vehicles*) de tipo **HALE** (*High-Altitude Long Endurance*) para aplicaciones civiles o militares. Estos aviones de tipo **HALE** vuelan a alta altitud (baja densidad) y baja velocidad por lo que necesitan un ángulo de ataque elevado que propicia la entrada en pérdida.
- Régimen transónico (en aviones comerciales $M_\infty > 0,8$ aproximadamente), con posibles ondas de choque locales en pilones de motores, de pods subalares, etc.
- Desprendimiento de flujo por excrescencias en el avión, i.e., radares, pods, etc.

4. Nolinealidades geométricas

Nolinealidades por la cinemática del movimiento de determinados stores. [KS02], [TS00] y [Tho01] analizan este tipo de no linealidad que, por otro lado, ya ha sido documentada en [BD00] y [Den00], en las que se analiza las no linealidades que aparecen en un avión tipo caza por la inclusión de stores.

Las deformaciones en el ala producidas por la presencia de stores obligan a considerar las ecuaciones elásticas no lineales del ala. Las referencias [HD74], [DTH77], [HCdSP98], [CdSG78] y [PN90] desarrollan las ecuaciones no lineales de deformación de las vigas elásticas.

5. Otros tipos de no linealidades: atmósfera cambiante durante la primera fase del vuelo de los cohetes ([GGL07]), etc...

Las no linealidades introducen respuestas del sistema que no aparecerían en caso de considerar modelos lineales. Una de las más características es la aparición de oscilaciones no amortiguadas o LCOs (del término inglés *Limit Cycle Oscillations*) que, con los modelos lineales, no habrían sido detectadas. Es importante considerar estas respuestas LCOs por varios motivos:

- Los LCOs asociados producen vibraciones locales y/o globales en el avión. Por ejemplo, en el caso de que el LCO esté concentrado en el timón de profundidad, este movimiento de vibración puede introducir momento aerodinámico de cabeceo M_y oscilatorio en el avión, que será especialmente crítico en cabina de pilotos. Lo mismo ocurre con las vibraciones laterales inducidas por una holgura en el timón de dirección.

Estudios en unos de los últimos aviones de transporte desarrollados, demuestran que una holgura de $\mp 0,185$ [deg] en el timón de profundidad, provoca un factor de carga lateral $N_y = 0,19$ [g] en la cabina de pilotos, reduciendo a un 40 % la *pilotabilidad* lateral del avión, y un factor de carga vertical en cabina de $N_z = 0,27$ [g], reduciendo a un 60 % la *pilotabilidad* longitudinal del avión.

- Los LCOs pueden reducir considerablemente la vida en fatiga de determinados componentes. Los mismos resultados mencionados en el punto anterior demuestran que la holgura de $\mp 0,185$ [deg] en el timón de profundidad provocan una carga del 26 % la carga límite del actuador, y cargas del orden de 5 % la carga límite en distintos componentes estructurales cercanos al timón de profundidad.
- La existencia de LCOs puede obligar a modificar las leyes de control de la aeronave para evitar influencia en la dinámica del vuelo.

En resumen, las no linealidades aerodinámicas o estructurales tienen un efecto importante en el comportamiento aeroelástico de una aeronave, y su efecto debe tenerse en cuenta en la etapa de diseño, fabricación y mantenimiento.

En las secciones posteriores de este capítulo se detalla la aproximación que realiza la industria aeronáutica para abordar estos estudios aeroelásticos no lineales (sección 1.2), los campos a los que puede contribuir esta Tesis Doctoral (sección 1.3), y un esquema general de lo que el lector encontrará en los próximos capítulos (sección 1.4).

1.2. Aeroelasticidad No Lineal en la Industria Aeronáutica.

En la etapa de diseño de una aeronave, las simulaciones aeroelásticas se realizan principalmente asumiendo comportamiento lineal de la estructura, inercia y aerodinámica. Esta aproximación es válida en la gran mayoría de casos y, por otro lado, la simplicidad de la linealidad permite calcular cientos de puntos de vuelo (pares Mach/Altura) combinados con decenas de configuraciones de avión (estados máxicos de combustible y carga de pago) en un tiempo razonable. Sólo en determinados puntos de vuelo (régimen transónico) o en condiciones particulares (aparición de ondas de choque locales) se realizan análisis no lineales.

En el ámbito de las no linealidades aerodinámicas, el desarrollo de códigos CFD (*Computational Fluid Dynamics*) no estacionarios y de software de acoplamiento fluido-estructura basados en redes de ordenadores trabajando en paralelo, han posibilitado reducir el tiempo de cálculo (procesador de ordenador) de días a horas para configuraciones completas de avión. Por este motivo, y cada vez más, las simulaciones con aerodinámica no lineal se están utilizando en la etapa de diseño de la aeronave aunque siempre con el soporte imprescindible e insustituible (por el momento) de las herramientas clásicas de aeroelasticidad lineal: Doublet-Lattice con métodos de solución de la ecuación de flutter en el dominio de la frecuencia (método k, kE, pk ó Vg). Por otro lado, los resultados del túnel aerodinámico, imprescindible en el desarrollo del proyecto, proporciona al ingeniero de aeroelasticidad la zona de la envuelta del avión en la que es previsible encontrar problemas por régimen transónico o de onda de choque. En resumen, las no linealidades aerodinámicas tienen un seguimiento importante en la etapa de diseño de la aeronave dada su criticidad en las especificaciones de la aeronave.

Las no linealidades de tipo estructural son más difíciles de predecir y, en muchas ocasiones, aparecen una vez fabricado el vehículo, por tolerancias de fabricación o debido al desgaste de piezas tras unos ciclos de uso. En la etapa de diseño, no se aplican procedimientos estándar que permitan obtener un mapa completo del comportamiento aeroelástico de la aeronave en presencia de estas no linealidades. Es más, se podría decir que el efecto de estas no linealidades parece ser desconocido y, por alguna directiva de las autoridades de Certificación, *temido*. A continuación se adjunta el informe expedido por la *Federal Aviation Administration* FAA (ver figuras 1.7 a 1.10) sobre una no linealidad de tipo *freeplay* en el timón de profundidad de los aviones modelo Airbus A319, A320 y A321. En esta directiva, las autoridades FAA califican de *insegura* la existencia de holguras en el timón de profundidad por poder potencialmente *reducir la integridad estructural* y la *controlabilidad* del aparato. A pesar de las alegaciones por parte de la empresa constructora (es interesante leer el documento completo para observar alegaciones de Airbus Inc. y las resoluciones posteriores de la FAA), la FAA se ratifica en la mayor parte de sus decisiones y obliga a una inspección cada 18 meses de los aviones.

Resulta más sorprendente aún la siguiente directiva (ver figura 1.11) emitida por el organismo australiano *Civil Aviation Safety Authority* (CASA) en Noviembre de 2006, y relativa a vibraciones inducidas por holguras en el tab del timón de profundidad del avión Boeing 737. Haciendo referencia a otras directivas de la *Federal Aviation Administration* FAA, concluye lo siguiente:

”The FAA received reports of freeplay-induced vibration of the aileron balance tab. The potential of vibration of the control surface should be avoided *because the point of transition from vibration to divergent flutter is unknown*. This Directive requires repetitive measurements of the freeplay of both aileron balance tabs, and repetitive lubrication of the aileron balance tab hinge bearings and rod end bearings”

La frase *”the point of transition from vibration to divergent flutter is unknown”* resume de una forma clara la solución actual dada por la industria aeronáutica a este tipo de no linealidades: *mantenimiento*. Mantenimiento preventivo ante un problema cuyo efecto se desconoce, es decir, no existen modelos teóricos predictivos, y que en el peor de los casos puede dar lugar al fallo catastrófico de la estructura por *flutter*. Actualmente existen multitud de directivas emitidas por diversas Autoridades de Certificación regulando el mantenimiento preventivo de las holguras en los *tabs* de las superficies de control. Es posiblemente una de las no linealidades estructurales más peligrosas, ya que cualquier inestabilidad en estos dispositivos puede dar lugar a una situación de pérdida de control del avión.

Otro ejemplo de la criticidad del *backlash* o *freeplay* lo encontramos en algunos cazas militares de última generación, que incorporan una superficie tipo *canard* como control. El *backlash* en este tipo de superficies móviles es crítico y las normas de mantenimiento exigen que, ante cualquier cambio o reparación de los actuadores de dichas superficies, se debe comprobar que las holguras están dentro de tolerancias antes de emprender el siguiente vuelo. Esta medición de las holguras puede que no se pueda realizar en el sitio de la reparación y será necesario esperar la llegada de las máquinas de medición al lugar donde se encuentra el avión paralizado, algo que no parece ser muy operativo para un avión militar de altas prestaciones y más aún si esto ocurre durante un conflicto bélico.

Las no linealidades estructurales concentradas tipo *freeplay* (o *backlash*) han adquirido más importancia en los últimos años, a partir de que las empresas constructoras de aeronaves empezaban a desarrollar superficies de control no equilibradas (ni aerodinámica, ni másicamente) basándose en el desarrollo tecnológico de los actuadores ([FAA00]). Durante los años 80, los actuadores que coman-

dan el giro de las superficies de control adquirirían mayor precisión y robustez y éste fue el principal motivo para evitar equilibrar las mismas con contrapesos que añadían peso al avión y, por otro lado, requerían un mantenimiento adicional en operaciones que pudieran variar el centro de gravedad de la superficie de control (repintado, cambio de actuador, etc.). El desarrollo en la robustez y fiabilidad de los actuadores ha sido tal que, en aviones de reciente diseño, las superficies de control se comandan con un único actuador, quedando un actuador para redundancia pero funcionando en modo *damping*.

Sin embargo, las superficies de control no equilibradas presentan un inconveniente importante: en caso de fallo de actuador con el resultado de desconexión superficie/actuador: una superficie no equilibrada puede dar lugar a una inestabilidad aeroelástica de *flutter*. Por otro lado, e incluso sin tener que llegar a la desconexión de actuador/superficie, una holgura (*freeplay*) en el giro de la superficie de control puede dar lugar a oscilaciones de ciclo límite (las denominadas *Limit Cycle Oscillations* o *LCOs*) con tal amplitud que degeneren en el *flutter* anteriormente mencionado. Por eso es tan importante controlar la no linealidad *freeplay* en este tipo de superficies de control no equilibradas.

Las Normas de Certificación han ido evolucionando a medida que se detectaban este tipo de problemas. Las normas militares (la norma estadounidense MIL-A-8870C o las inglesas DEF-STAN) han ido adelantadas debido a las exigencias en este tipo de aeronaves (aviones o misiles), mientras que las normas civiles se han ido completando con *Advisory Circulars* (AC) o *Notice of Proposed Amendment* (NPA) que detallaban de forma más precisa los denominados Medios de Cumplimiento o, en inglés, *Means of Compliance* (MoC) de las normas civiles. Estas ayudas a la interpretación de las normas resultan de gran ayuda a las empresas de diseño y construcción de aeronaves, ya que de alguna forma detallan trabajos o estudios a realizar con el objetivo del cumplimiento de las normas, lo que facilitará el proceso de certificación de la aeronave. En la tabla 2.2 del capítulo siguiente se han extraído los párrafos de las normas civiles y militares en los que se describe algún cumplimiento relacionado con las no linealidades estructurales. Sólo en la fila correspondiente a las DEF-STAN 07-85 ([Def99]) se han incluido más párrafos de esta norma debido a su aplicación directa a configuraciones tipo *misil*, objeto de estudio más detallado en esta tesis.

La experiencia del autor, que actualmente trabaja en el Departamento de Aeroelasticidad de una empresa aeronáutica, revela que las simulaciones aeroelásticas en la etapa de diseño suelen ceñirse a demostrar que el avión está libre de las principales inestabilidades aeroelásticas que son más críticas: el denominado *flutter clásico* e inestabilidades estacionarias como *divergencia* o *inversión de mando*. En estas simulaciones se consideran *nolinealidades aerodinámicas* asociadas al *transónico*, que puede variar considerablemente la velocidad de flutter al aparecer el *transonic dip*, ondas de choque, desprendimientos de la corriente, etc., pero no se tienen en cuenta otras no linealidades. El motivo no es la *inconsciencia* de empresas constructoras de aeronaves y Autoridades de Certificación, sino que estas no linealidades no modifican (al menos las conocidas hasta el día de hoy) las propiedades aeroelásticas críticas del avión: velocidad de flutter, de divergencia o de inversión de mando. De esta forma, con los métodos clásicos de cálculo, se *predice* que el avión no tendrá inestabilidades aeroelásticas catastróficas en la envuelta de vuelo, y se dejan los ensayos en vuelo para:

1. Comprobar que efectivamente inestabilidades aeroelásticas catastróficas están fuera de la envuelta de vuelo.
2. Verificar que los modelos estructural, inercial y aerodinámico utilizados en las simulaciones

previas al vuelo se ajustan a la realidad.

3. Detectar cualquier inestabilidad aeroelástica adicional causada por otros efectos: buffet, LCOs, etc... En el caso de existir alguna de estas inestabilidades, se deberá estudiar el origen: el fenómeno de *buffet* puede estar producido por una interferencia de una estela con la estructura o altos ángulos de ataque locales, los LCOs puede estar asociados a no linealidades aerodinámicas o estructurales, etc...

El estudio del *flutter* clásico, divergencia e inversión de mando suele ser suficiente para que las Autoridades de Certificación autorizen los primeros ensayos en vuelo del avión prototipo. Sin embargo, y cada vez más, las Autoridades introducen exigencias de medición del *freeplay* de las superficies de control. Durante la redacción de este párrafo, allá por Enero del 2007, recibí un correo electrónico de una persona responsable de la certificación del avión de reabastecimiento en vuelo A330-MRTT, construido por EADS. Esta persona trabaja directamente para la Organización Europea de Certificación EASA y enviaba comentarios a la especificación del ensayo GVT (*Ground Vibration Test*) que emitió el Departamento de Dinámica Estructural y Aeroelasticidad de EADS/CASA, para el que actualmente trabajo. Las casualidades de la vida hicieron que recibiera este correo justo en el momento en el que redactaba esta parte de la Tesis. Dicho correo terminaba con la siguiente pregunta por parte de EASA: *Is there any test schedule for control surfaces freeplay?*. Esta pregunta se la formulé al ingeniero que participó en la certificación del avión básico A330-200² desde el punto de vista aeroelástico y su respuesta fue: *This is not an easy topic. We have not done much on this aircraft. Meanwhile, since A380 authorities request a lot more to demonstrate, we think that a re-analysis for the aircraft control surfaces will be done.* Con este ejemplo quería resaltar dos hechos; por un lado, las Autoridades están interesadas en cubrir este aspecto con más detalle de lo que se ha hecho hasta ahora; por otro lado, la Industria necesita desarrollar tecnologías que permitan cubrir por análisis (al menos en parte) el requerimiento de las autoridades.

En los últimos prototipos de aviones, las holguras en las superficies de control sigue siendo un punto clave en el diseño, certificación y mantenimiento de la aeronave. Véase por ejemplo cómo se pronunciaron las autoridades en este tema durante el diseño de uno de los últimos aviones civiles de gran capacidad ([FAA04]):

In spite of measures to assure that control surfaces will not become free, experience has shown that usage and wear can introduce free-play in the control surface restraint system. This free-play has resulted in airplane vibrations in service and damage to airframe structure. These vibrations are called "limited amplitude flutter" by the FAA and "Limit Cycle Oscillations" by the applicant. Regardless of the term applied to them, the FAA considers the occurrence of these events to be inconsistent with a FAR 25.629 compliance finding that the airplane be "free from aeroelastic instability for all configurations and design conditions within the aeroelastic stability envelopes...". The FAA considers the events to be a form of aeroelastic instability from which the airplane is required to be shown free under 25.629. The occurrence of limit cycle flutter due to unbalanced control surface can lead to a catastrophic event through accelerated wear and degradation of structure and the attendant reduced aeroelastic stability.

...

²Avión del que deriva el avión tanquero A330-MRTT.

FFA Position (at Stage 2/October 15, 2003): Unless the airplane can be shown to be free from flutter to V_D with a free surface, adequate design features must be incorporated to assure the surface will not become free. Freedom from flutter must be shown for all forms of restraint loss not shown to be extremely improbable. This demonstration must include showing that adequate amounts of free-play are considered and reliable free-play inspection programs are in place on the airplane to preclude the possibility of flutter, including limited amplitude flutter, occurring in service.

Validation of Stiffness Requirements - The rotational stiffness of the control surface restraint should be validated by static load versus deflection component testing and by ground vibration testing. Both tests should be accomplished over a range of amplitudes to identify any nonlinearity and determine that stiffness requirements are met. Testing should be accomplished for any probable failure such as the disconnect of one actuator or any expected degradation such as air in the fluid. The torsional stiffness and frequency of the control surfaces should be validated by ground vibration test.

Control surface Free-play - Free-play must be controlled throughout the life of the airplane. Limits, measurement procedures, and inspection intervals must be set and established as a CMR. The inspection procedures must be validated by engineering test which would include a determination of load versus deflection characteristics. Human Factors of the inspection procedure of very large control surfaces should be assessed to avoid the possibility that the free-play is measured inaccurately. Free-play limits must be established and validated by flight testing with a greater amount of free-play than allowed in service built into the control surface of the test airplane, to establish that even if the free-play is adjusted to the maximum allowable, additional wear or distress will not result in flutter, including limited amplitude flutter later in its service life. It must be shown that flutter, including limit amplitude flutter, does not occur during flight testing. Flight test maneuvers should include those that will slowly vary the static aerodynamic loading on the control surface from up to down load.

Se comprueba por tanto la creciente necesidad de la Industria por la caracterización de las oscilaciones de ciclo límite causadas por no linealidades, no sólo por introducir su efecto en la etapa de diseño de la aeronave (efecto en fatiga, desarrollo de leyes de control, etc.), sino también por desarrollar metodologías que soporten la fase de certificación del vehículo. Esta tesis introduce una metodología para el estudio del efecto de las no linealidades estructurales en la aeroelasticidad de la aeronave, y sus principales contribuciones se resumen en la siguiente sección.

Note 4: Information concerning the existence of approved alternative methods of compliance with this AD, if any, may be obtained from the Seattle ACO.

Special Flight Permits

(j) Special flight permits may be issued in accordance with sections 21.197 and 21.199 of the Federal Aviation Regulations (14 CFR 21.197 and 21.199) to operate the airplane to a location where the requirements of this AD can be accomplished.

Incorporation by Reference

(k) Except as provided by paragraphs (a), (e), (f), and (g) of this AD; the actions shall be done in accordance with Boeing Service Bulletin 747-54A2196, Revision 1, dated August 17, 2000. This incorporation by reference was approved by the Director of the Federal Register in accordance with 5 U.S.C. 552(a) and 1 CFR part 51. Copies may be obtained from Boeing Commercial Airplane Group, P.O. Box 3707, Seattle, Washington 98124-2207. Copies may be inspected at the FAA, Transport Airplane Directorate, 1601 Lind Avenue, SW., Renton, Washington; or at the Office of the Federal Register, 800 North Capitol Street, NW., suite 700, Washington, DC.

Effective Date

(l) This amendment becomes effective on September 24, 2001.

Issued in Renton, Washington, on August 10, 2001.

Vi L. Lipski,

Manager, Transport Airplane Directorate,
Aircraft Certification Service.

[FR Doc. 01-20699 Filed 8-17-01; 8:45 am]

BILLING CODE 4910-13-P

DEPARTMENT OF TRANSPORTATION

Federal Aviation Administration

14 CFR Part 39

[Docket No. 2000-NM-342-AD; Amendment 39-12377; AD 2001-16-09]

RIN 2120-AA64

Airworthiness Directives; Airbus Model A319, A320, and A321 Series Airplanes

AGENCY: Federal Aviation Administration, DOT.

ACTION: Final rule.

SUMMARY: This amendment supersedes an existing airworthiness directive (AD), which is applicable to all Model A320 series airplanes, that currently requires repetitive measurements of the deflection of the elevator trailing edge; inspections of the elevator servo controls and their attachments; and replacement of worn or damaged parts, if necessary. This amendment requires periodic inspection of the elevators for excessive freeplay, repair of worn parts if excessive freeplay is detected, and

modification of the elevator neutral setting. It also revises the applicability to include additional airplane models. This amendment is prompted by additional reports of severe vibration in the aft cabin of Model A320 series airplanes and studies that indicate that the primary cause is excessive freeplay in the elevator attachments. The actions specified by this AD are intended to prevent excessive vibration of the elevators, which could result in reduced structural integrity and reduced controllability of the airplane.

DATES: Effective September 24, 2001.

The incorporation by reference of certain publications listed in the regulations is approved by the Director of the Federal Register as of September 24, 2001.

ADDRESSES: The service information referenced in this AD may be obtained from Airbus Industrie, 1 Rond Point Maurice Bellonte, 31707 Blagnac Cedex, France. This information may be examined at the Federal Aviation Administration (FAA), Transport Airplane Directorate, Rules Docket, 1601 Lind Avenue, SW., Renton, Washington; or at the Office of the Federal Register, 800 North Capitol Street, NW., suite 700, Washington, DC.

FOR FURTHER INFORMATION CONTACT: Tim Dulin, Aerospace Engineer, International Branch, ANM-116, FAA, Transport Airplane Directorate, 1601 Lind Avenue, SW., Renton, Washington 98055-4056; telephone (425) 227-2141; fax (425) 227-1149.

SUPPLEMENTARY INFORMATION: The FAA issued a proposal to amend part 39 of the Federal Aviation Regulations (14 CFR part 39) to supersede AD 92-04-06, amendment 39-8177 (57 FR 6068, February 20, 1992). (A correction of AD 92-04-06 was published in the **Federal Register** on April 1, 1992 (57 FR 11137).) AD 92-04-06 is applicable to all Airbus Model A320 series airplanes. The proposed AD was published in the **Federal Register** on March 1, 2001 (66 FR 12913). The action proposed to require periodic inspection of the elevators for excessive freeplay; repair or replacement of worn parts, if excessive freeplay is detected; replacement of the elevator servo controls with modified elevator servo controls; and modification of the elevator neutral setting. The action also proposed to revise the applicability to include additional airplane models.

Comments

Interested persons have been afforded an opportunity to participate in the making of this amendment. Due

consideration has been given to the comments received.

Support for Proposed AD

Several commenters, including the National Transportation Safety Board, support the proposed AD.

Request To Withdraw the Proposed AD

One commenter (the manufacturer) requests that the proposed AD be withdrawn. The commenter asserts that there is no unsafe condition due to limit cycle oscillation (LCO) of the elevator. The commenter disagrees with the FAA's conclusion that elevator LCO could result in reduced structural integrity and reduced controllability of the airplane. The commenter notes that because LCO is a fixed-frequency vibration with a constant amplitude, it is therefore not a stability problem. The commenter contends that such a phenomenon is well detectable, and the flight crew can determine the significance of the airframe vibration and initiate appropriate corrective action. The commenter claims that, during the period between LCO initiation and uncomfortable vibration, there is no structural concern. The commenter adds that extensive flight tests have been conducted by the manufacturer, with representative backlash configurations combined with low hinge moment, and no adverse effect on handling qualities was found. The commenter considers the actions included in existing tasks in the aircraft maintenance manual (AMM) and service bulletins to be sufficient to address any possible LCO phenomenon. In addition, the commenter does not consider that there would be any benefit from imposing corrective action on an airplane with no vibration reported.

The FAA does not concur with the request to withdraw the proposed AD. The FAA has determined that the A320 elevator LCO, as defined by Airbus, is actually an aeroelastic stability problem (i.e., self-excited and not damped with time), which, if not addressed, could result in reduced structural integrity and reduced controllability of the airplane. The FAA is aware of all of the analytical and experimental investigations conducted by Airbus that have shown that LCO is caused by a combination of low hinge moment and elevator freeplay. The FAA is also aware that the amplitude of the vibration increases with freeplay and airspeed. The FAA disagrees with the Airbus contention that the vibration will be felt by the flight crew, who can initiate the appropriate corrective action. The FAA notes that the modification of the elevator neutral setting would tend to

Figura 1.7: Directiva de aeronavegabilidad (*Airworthiness Directive AD*) número 39-12377 aplicable a los aviones modelo Airbus A319, A320 y A321 (1/4).

mask the presence of freeplay and associated vibration, and make the freeplay checks even more critical. The FAA also disagrees with the Airbus contention that there would be no benefit from imposing these actions on airplanes that have not had vibration problems. To address potential LCO events, Airbus has revised the AMM to reduce the allowable freeplay limits, and issued service bulletins to recommend installation of improved spherical bearings to reduce the wear rate, and modification of the elevator neutral setting to ensure that elevators have sufficient hinge moment loading under most flight conditions. The FAA agrees with these recommendations but considers that these actions, except as noted below, must be mandated to ensure the continued safe operation of the fleet, by reducing the likelihood of LCO events and ensuring that the amplitude of any LCO event that does occur is controlled to a level that will not result in reduced structural integrity of the airplane.

The FAA notes that this LCO phenomenon is not unique to Airbus airplanes; the actions required by this AD are consistent with actions taken on other airplanes. The FAA considers this final rule necessary to adequately address the identified unsafe condition.

Request To Remove Requirement To Replace Elevator Servo Controls

One commenter (the manufacturer) considers that the effect of replacing the elevator servo controls would merely improve the wear resistance of the servo control spherical bearings, and would not cure the root cause of the LCO phenomenon. The commenter asserts that mandating the servo control replacement would place an unnecessary financial burden on airlines. (The commenter subsequently clarified this comment as a request to remove this requirement from the proposed AD.)

The FAA concurs. The FAA has determined that replacing the servo controls with new improved controls, as proposed, would provide improved wear resistance but would not prevent wear from occurring. Therefore, the FAA has determined that mandatory replacement is not necessary. Paragraph (c) of the proposed AD has been removed from this final rule. The freeplay checks and rigging change required by this AD will adequately address the identified unsafe condition.

Request To Revise Unsafe Condition

One commenter (an operator) requests that the AD be revised to reflect the position that the identified unsafe

condition is instead more a matter of passenger inconvenience. The operator has revised its airplane flight manual (AFM) to include a "Vibration Section," which explains vibration types, methods of identifying vibrations, and specific reporting procedures.

The FAA does not concur. The FAA considers the LCO to be unsafe for the reasons identified in response to the previous comment. No change to the final rule is necessary in this regard.

Request To Extend Compliance Time of the Inspection

Two commenters request that the proposed AD be revised to extend the compliance time for the freeplay inspection. One commenter (an operator) requests that the compliance time be extended from 18 to 18.5 months to correspond to its "L" check. This commenter states that the inspection at 18.5-month intervals has proven to be effective at detecting deterioration before elevator-induced vibration is reported. Another commenter (also an operator) reports that, based on its experience, it takes significantly longer than 18 months for the Airbus elevator system components to degrade to a level at which the trailing edge freeplay would fail the test. The commenter suggests that 36 months is a more appropriate inspection interval.

The FAA does not concur with the requests to extend the inspection interval. The FAA has determined that 18 months is the maximum amount of time allowable for these airplanes to continue to safely operate between inspections. The FAA finds that the 18-month compliance time is consistent with the maintenance schedules of most operators. Further, the experience of a couple operators is not sufficient to indicate that the interval should be increased. In the absence of data to justify a longer interval, the FAA finds no reason to deviate from the 18-month interval, as proposed, to accommodate the special maintenance schedules of one operator. No change to the final rule is necessary in this regard.

Request To Extend Compliance Time for Replacement

One commenter (an operator) requests that the proposed AD be revised to extend the compliance time from 18 to 36 months to replace the elevator servo controls. The commenter states that the vendor turnaround time for nonroutine repair of the servo is 26 days, which does not support a servo replacement for its fleet within 18 months, and suggests 36 months for the compliance time for the servo replacement.

As stated previously, the proposed requirement to replace the elevator servo controls has been removed from this final rule. Therefore, no change to the final rule is necessary regarding this comment.

Request To Provide Credit for Actions Completed

One commenter (an operator) states that upgrading the elevator servo controls, uprigging the elevators, and accomplishing a trailing edge play check have been completed on nearly all its airplanes, and asserts that no value would be added by repeating the actions.

The FAA infers that the operator requests the addition of specific language to provide credit for prior accomplishment of those actions. The FAA notes that operators are given credit for work previously performed by means of the phrase in the "Compliance" section of the AD that states, "Required as indicated, unless accomplished previously." Therefore, for this AD, if the modification has been accomplished prior to the effective date of the AD, this AD does not require that the action be repeated. No change to the final rule is necessary in this regard.

Request To Revise Cost Estimates

Two commenters request that the proposed AD be revised to indicate that required parts for elevator servo control replacement are not free of charge. One commenter (the manufacturer) notes that the elevator servo bearing replacement is free only on an attrition basis, and not to accommodate the required replacement on all affected airplanes. Another commenter (an operator) notes that removal and upgrade of the elevator servo controls resulted in nonroutine maintenance, costing in excess of \$16,666 per airplane.

As stated previously, the proposed requirement to replace the elevator servo controls has been removed from this final rule. Therefore, no change to the final rule is necessary regarding this comment.

Request To Allow Alternative Tooling

Two commenters request that paragraph (a) of the proposed AD be revised to allow the use of "equivalent tooling" to perform the inspection for excessive elevator freeplay. One commenter (an operator) states that the proposed AD could be interpreted as requiring the use of the tooling identified in the AMM. The commenter contends that applying this interpretation would preclude credit for previous freeplay checks performed

Figura 1.8: Directiva de aeronavegabilidad (*Airworthiness Directive AD*) número 39-12377 aplicable a los aviones modelo Airbus A319, A320 y A321 (2/4).

with the alternative tooling, and that the AD would therefore require all of the operator's airplanes to be inspected within three months. The commenter asserts that use of a calibrated spring scale to apply force along with a pointer affixed to the trailing edge to measure the freerplay provides results equivalent to those provided by the AMM-specified tooling.

The commenter has correctly interpreted the AD as requiring the tooling specified in the AMM. The FAA does not concur with the request to revise the final rule to allow alternative tooling to accomplish the inspection. The commenter did not provide any data regarding this alternative tooling to substantiate that the alternative tooling would provide results equivalent to those intended by this AD. However, under the provisions of paragraph (d) of the final rule, the FAA may approve requests for alternative methods of compliance if data are submitted to substantiate that the use of such alternative tooling would provide equivalent results. No change to the final rule is necessary in this regard.

Request To Allow Alternative Materials

One commenter (an operator) requests that the proposed AD be revised to allow use of 535K001/930K016A primer instead of Mastinox 6856K primer for accomplishment of the elevator servo control replacement. The commenter reports that 535K001/930K016A primer was substituted for Mastinox 6856K primer during the modification because of environmental concerns.

As stated previously, the proposed requirement to replace the elevator servo controls has been removed from this final rule. Therefore, no change to the final rule is necessary regarding this comment.

Request To Refer to Future Revision of CMM

This same commenter requests that the proposed AD be revised to indicate a reference to a future revision of the Lucus CMM. Lucus has advised the commenter that CMM 34-52 misidentified the primer as "Mastinox 5866K" primer, which will be corrected to "Mastinox 6856K" in the next CMM revision.

As stated previously, the proposed requirement to replace the elevator servo controls has been removed from this final rule. Therefore, no change to the final rule is necessary regarding this comment.

Request To Allow Previous Versions of Service Bulletin

One commenter (an operator) requests that the proposed AD be revised to allow compliance with the modification requirement in accordance with Airbus Service Bulletin A320-27-1114, Revision 01, dated April 11, 1997; Revision 02, dated October 13, 1998; and Revision 03, dated December 3, 1998. Based on experience with this type of vibration, the commenter reports that the elevator neutral setting modification has already been accomplished on numerous airplanes, in accordance with Revisions 01, 02, and 03 of the service bulletin. The commenter adds that Revisions 02, 03, and 04 all state: "No additional work required for previously accomplished aircraft."

The FAA partially concurs with the request. (Although the commenter refers to "item 'C' of the Replacement section," the FAA infers that the commenter intended to refer to the "Modification" requirement, which was paragraph (d) in the proposed AD.) The FAA agrees that airplanes modified in accordance with Revision 01, 02, or 03 should not be required to repeat the modification in accordance with Revision 04. However, the FAA notes that, after the effective date of the AD, only Revision 04 may be used to ensure that the most accurate information is being followed. This final rule has been revised to include new Note 2, which provides credit for the modification in accordance with Revisions 01, 02, and 03 of the service bulletin, if accomplished prior to the effective date of this AD.

Request To Allow Future Service Bulletin Revision

One commenter requests that the proposed AD be revised to specify a future revision to Airbus Service Bulletin A320-27-1114 (which was cited at Revision 04 as the appropriate source of service information for accomplishment of the modification specified by paragraph (d) of the proposed AD). The commenter notes that Airbus has advised that an upcoming revision of the service bulletin will include additional airplanes not included in Revision 04.

The FAA does not concur. Referring to documents that do not exist at the time the AD is published violates Office of the Federal Register (OFR) regulations regarding approval of materials "incorporated by reference" in rules. These OFR regulations require that either the service document be submitted for approval by the OFR as

"referenced" material, in which case it may be simply called out in the text of an AD, or the service document contents be published as part of the actual AD language. An AD may reference only the specific service document that was submitted and approved by the OFR for "incorporation by reference." In order for operators to use later revisions of the referenced document (issued after the publication of the AD), either the FAA must revise the AD to reference the specific later revisions, or operators must request the approval of their use as an alternative method of compliance (under the provisions of paragraph (d) of this AD). The FAA may consider additional rulemaking if it is determined that additional airplanes must be modified.

Request To Revise Repair Requirements

One commenter (an operator) requests that paragraph (b) of the proposed AD be revised to require that repair be accomplished "as necessary," rather than in accordance with specific AMM task numbers. The commenter notes that those AMM tasks address only the servo control and the elevator, not the rod end bearings. The commenter reports that, for almost every check that revealed freerplay outside the AMM limits, it was necessary to replace the rod end bearings of the servo control to correct the deterioration.

The FAA partially concurs. The FAA notes that repair of rod end bearings is addressed under the AMM procedure referenced in the AD. However, the FAA agrees that the specific repair task number is not included in the AMM procedure. Therefore, paragraph (b) of the final rule has been revised to remove specific AMM task references and clarify that the repair must be accomplished in accordance with the AMM to bring freerplay within AMM-specified limits.

Conclusion

After careful review of the available data, including the comments noted above, the FAA has determined that air safety and the public interest require the adoption of the rule with the changes previously described. The FAA has determined that these changes will neither significantly increase the economic burden on any operator nor increase the scope of the AD.

Cost Impact

Approximately 352 airplanes of U.S. registry will be affected by this proposed AD.

Inspecting to detect elevator freerplay will take approximately 2 work hours, at an average labor rate of \$60 per work

Figura 1.9: Directiva de aeronavegabilidad (*Airworthiness Directive AD*) número 39-12377 aplicable a los aviones modelo Airbus A319, A320 y A321 (3/4).

hour. Based on these figures, the cost impact of the initial inspection required by this AD on U.S. operators is estimated to be \$42,240, or \$120 per airplane.

Approximately 112 airplanes will require adjustment of the elevator neutral setting, which will take approximately 12 work hours, at an average labor rate of \$60 per work hour. Based on these figures, the cost impact of the required adjustment on U.S. operators is estimated to be \$80,640, or \$720 per airplane.

The cost impact figures discussed above are based on assumptions that no operator has yet accomplished any of the requirements of this AD action, and that no operator would accomplish those actions in the future if this AD were not adopted. The cost impact figures discussed in AD rulemaking actions represent only the time necessary to perform the specific actions actually required by the AD. These figures typically do not include incidental costs, such as the time required to gain access and close up, planning time, or time necessitated by other administrative actions.

Regulatory Impact

The regulations adopted herein will not have a substantial direct effect on the States, on the relationship between the national Government and the States, or on the distribution of power and responsibilities among the various levels of government. Therefore, it is determined that this final rule does not have federalism implications under Executive Order 13132.

For the reasons discussed above, I certify that this action (1) is not a "significant regulatory action" under Executive Order 12866; (2) is not a "significant rule" under DOT Regulatory Policies and Procedures (44 FR 11034, February 26, 1979); and (3) will not have a significant economic impact, positive or negative, on a substantial number of small entities under the criteria of the Regulatory Flexibility Act. A final evaluation has been prepared for this action and it is contained in the Rules Docket. A copy of it may be obtained from the Rules Docket at the location provided under the caption ADDRESSES.

List of Subjects in 14 CFR Part 39

Air transportation, Aircraft, Aviation safety, Incorporation by reference, Safety.

Adoption of the Amendment

Accordingly, pursuant to the authority delegated to me by the Administrator, the Federal Aviation

Administration amends part 39 of the Federal Aviation Regulations (14 CFR part 39) as follows:

PART 39—AIRWORTHINESS DIRECTIVES

1. The authority citation for part 39 continues to read as follows:

Authority: 49 U.S.C. 106(g), 40113, 44701.

§ 39.13 [Amended]

2. Section 39.13 is amended by removing amendment 39-8177 (57 FR 11137, April 1, 1992); and by adding a new airworthiness directive (AD), amendment 39-12377, to read as follows:

2001-16-09 Airbus Industrie: Amendment 39-12377. Docket 2000-NM-342-AD. Supersedes AD 92-04-06, Amendment 39-8177.

Applicability: All Model A319, A320, and A321 series airplanes; certificated in any category.

Note 1: This AD applies to each airplane identified in the preceding applicability provision, regardless of whether it has been modified, altered, or repaired in the area subject to the requirements of this AD. For airplanes that have been modified, altered, or repaired so that the performance of the requirements of this AD is affected, the owner/operator must request approval for an alternative method of compliance in accordance with paragraph (d) of this AD. The request should include an assessment of the effect of the modification, alteration, or repair on the unsafe condition addressed by this AD; and, if the unsafe condition has not been eliminated, the request should include specific proposed actions to address it.

Compliance: Required as indicated, unless accomplished previously.

To prevent excessive vibration of the elevators, which could result in reduced structural integrity and reduced controllability of the airplane, accomplish the following:

Inspection

(a) Within 18 months from the last inspection for excessive freeplay or within 3 months after the effective date of this AD, whichever occurs later: Inspect the elevators for excessive freeplay, using a load application tool and a spring scale assembly, in accordance with Airbus A319/A320 Aircraft Maintenance Manual (AMM) Task 27-34-00-200-001, including all changes through August 1, 2000. Thereafter, repeat the inspection at intervals not to exceed 18 months.

Repair

(b) If any inspection required by paragraph (a) of this AD indicates that the freeplay in the elevator exceeds 7 millimeters: Prior to further flight, repair the elevator or servo controls in accordance with the Airbus A319/A320 Aircraft Maintenance Manual, including all changes through August 1, 2000, to bring elevator freeplay within the limits specified by the AMM.

Modification

(c) For the airplanes listed in Airbus Service Bulletin A320-27-1114, Revision 04, dated December 7, 1999: Within 18 months after the effective date of this AD, shift the elevator neutral setting to minus 0.5 degree, nose-up, in accordance with Airbus Service Bulletin A320-27-1114, Revision 04, dated December 7, 1999.

Note 2: Accomplishment prior to the effective date of this AD of the modification in accordance with Airbus Service Bulletin A320-27-1114, dated December 12, 1996; Revision 1, dated April 11, 1997; Revision 2, dated October 13, 1998; or Revision 3, dated December 3, 1998; is acceptable for compliance with the requirements of paragraph (c) of this AD.

Alternative Methods of Compliance

(d) An alternative method of compliance or adjustment of the compliance time that provides an acceptable level of safety may be used if approved by the Manager, International Branch, ANM-116, Transport Airplane Directorate, FAA. Operators shall submit their requests through an appropriate FAA Principal Maintenance Inspector, who may add comments and then send it to the Manager, International Branch, ANM-116.

Note 3: Information concerning the existence of approved alternative methods of compliance with this AD, if any, may be obtained from the International Branch, ANM-116.

Special Flight Permits

(e) Special flight permits may be issued in accordance with sections 21.197 and 21.199 of the Federal Aviation Regulations (14 CFR 21.197 and 21.199) to operate the airplane to a location where the requirements of this AD can be accomplished.

Incorporation by Reference

(f) The modification shall be done in accordance with Airbus Service Bulletin A320-27-1114, Revision 04, dated December 7, 1999. This incorporation by reference was approved by the Director of the Federal Register in accordance with 5 U.S.C. 552(a) and 1 CFR part 51. Copies may be obtained from Airbus Industrie, 1 Rond Point Maurice Bellonte, 31707 Blagnac Cedex, France. Copies may be inspected at the FAA, Transport Airplane Directorate, 1601 Lind Avenue, SW., Renton, Washington; or at the Office of the Federal Register, 800 North Capitol Street, NW., suite 700, Washington, DC.

Effective Date

(g) This amendment becomes effective on September 24, 2001.

Issued in Renton, Washington, on August 10, 2001.

Vi L. Lipski,

Manager, Transport Airplane Directorate, Aircraft Certification Service.

[FR Doc. 01-20700 Filed 8-17-01; 8:45 am]

BILLING CODE 4910-13-P

Figura 1.10: Directiva de aeronavegabilidad (*Airworthiness Directive AD*) número 39-12377 aplicable a los aviones modelo Airbus A319, A320 y A321 (4/4).

COMMONWEALTH OF AUSTRALIA
CIVIL AVIATION SAFETY AUTHORITY
SCHEDULE OF AIRWORTHINESS DIRECTIVES

(Civil Aviation Safety Regulations 1998), PART 39 - 105

AIRWORTHINESS DIRECTIVE

For the reasons set out in the background section, the CASA delegate whose signature appears below issues the following Airworthiness Directive (AD) under subregulation 39.001(1) of CASR 1998. The AD requires that the action set out in the requirement section (being action that the delegate considers necessary to correct the unsafe condition) be taken in relation to the aircraft or aeronautical product mentioned in the applicability section: (a) in the circumstances mentioned in the requirement section; and (b) in accordance with the instructions set out in the requirement section; and (c) at the time mentioned in the compliance section.

Boeing 737 Series Aeroplanes

AD/B737/298

Aileron Balance Tab

13/2006

Applicability: All Model 737-100, -200, -200C, -300, -400, -500, -600, -700, -700C, -800, and -900 series aircraft.

Requirement: Action in accordance with the technical requirements of FAA AD 2006-21-01 Amdt 39-14784.

Note: Boeing Special Attention Service Bulletins 737-27-1272 and 737-27-1273, or later FAA approved revisions, refer.

Compliance: As specified in the Requirement document, with a revised effective date of 21 December 2006.

This Airworthiness Directive becomes effective on 21 December 2006.

Background: The FAA received reports of freeplay-induced vibration of the aileron balance tab. The potential for vibration of the control surface should be avoided because the point of transition from vibration to divergent flutter is unknown. This Directive requires repetitive measurement of the freeplay of both aileron balance tabs, and repetitive lubrication of the aileron balance tab hinge bearings and rod end bearings.



David Villiers
Delegate of the Civil Aviation Safety Authority

7 November 2006

Figura 1.11: Directiva de aeronavegabilidad (*Airworthiness Directive AD*) número AD/B737/298 aplicable a los aviones modelo Boeing 737.

1.3. Contribución de esta Tesis Doctoral.

Esta tesis se compone de dos bloques independientes: por un lado, un módulo de cálculo de propiedades másicas, estructurales y aerodinámicas de configuraciones esbeltas cuerpo/ala y, por otro lado, un módulo para integración de ecuaciones diferenciales de sistemas estado-espacio especialmente adaptado al caso de no linealidades concentradas tipo *freeplay* o *hysteresis*. Este último módulo se completa con herramientas de postproceso y análisis de la respuesta de sistemas no lineales (análisis de Fourier, diagramas de bifurcación, mapas de Poincaré, etc.)

El conjunto de los dos módulos hace de esta tesis un trabajo autocontenido y aplicable directamente al diseño de aeronaves con una configuración esbelta, es decir, misiles, pods subalares (depósitos de combustible, pods de reabastecimiento en vuelo o radares), etc. La ventaja de tener dos módulos independientes radica en la utilidad per sé del integrador de las ecuaciones de estado-espacio. Este segundo módulo de la tesis puede aplicarse a cualquier sistema cuyo modelo estado-espacio sea conocido, sin ninguna restricción.

Ya es sabido que cualquier tesis doctoral representa un pequeño paso en el camino interminable de una línea de investigación. Si he de resumir en unas líneas la contribución que espero tenga esta tesis, lo haría en los siguientes puntos:

- Desarrollo de un módulo para cálculo de los coeficientes aerodinámicos no estacionarios de configuraciones cuerpo/ala esbeltas. La ESDU 83010 ([Soc92]) desarrolla un método teórico y propone el código *ESDUpac A8310* para el cálculo de la aerodinámica no estacionaria sobre cuerpos esbeltos. El código desarrollado en esta tesis extiende el método de la ESDU 83010 a configuraciones de tipo misil con aletas y permite tener una primera estimación de la aerodinámica.
- Desarrollo de un módulo autocontenido para cálculo de aeroelasticidad lineal/nolineal de configuraciones esbeltas cuerpo/ala en la etapa de diseño. Este código, basado en la Teoría de Cuerpos Esbeltos, presenta una mayor robustez sin pérdida de precisión frente a otras aproximaciones actuales en la industria aeronáutica.
- Estudio de la aeroelasticidad no lineal de configuraciones esbeltas cuerpo/ala: efecto de los dos principales tipos de no linealidades, i.e., *freeplay* e *hysteresis*, existencia de LCOs (*Limit Cycle Oscillations*), caracterización de la respuesta (periódica o caótica).
- Efecto de la flexibilidad del misil en la respuesta. En la situación de vuelo libre, el primer modo flexible del misil (típicamente la primera flexión del cuerpo) tiene una frecuencia relativamente baja (puede que próxima a la de rotación de las aletas) y por tanto puede tener importancia en la respuesta.
- Desarrollo de un módulo de integración de las ecuaciones aeroelásticas Estado-Espacio de cualquier tipo de vehículo. Incluye un método de integración que captura las esquinas de las no linealidades, algo imprescindible en *freeplay* o *hysteresis*. Este módulo de integración tiene como entrada las ecuaciones aeroelásticas del sistema en el Estado-Espacio, y el sistema puede ser una planta tan compleja como un avión.
- Desarrollo de herramientas de caracterización de la respuesta en tiempo real que permitan reducir el tiempo de cálculo. Una completo análisis del efecto de una no linealidad estructural en toda la

envuelta de vuelo de un avión puede conllevar el cálculo de miles de simulaciones, cada una de las cuales consiste en una integración en el tiempo de las ecuaciones aeroelásticas de Estado-Espacio. Una integración de unos 60 segundos suele ser más que suficiente en la mayoría de los casos para obtener la respuesta sin los transitorios, aunque también es cierto que los transitorios suelen durar menos de 10 segundos (dependiendo de las condiciones iniciales y formas modales). Por tanto, posiblemente no sea necesaria la integración del tiempo total de 60 segundos si se tiene un código que haya aislado los transitorios y detectado el tipo de respuesta en esa condición de vuelo: amortiguada, LCO armónico, caos, o divergencia (*flutter*). Esta reducción del tiempo de integración afecta de forma drástica cuando se tienen que calcular miles de puntos.

- Desarrollo de herramientas de postproceso que permitan obtener varios parámetros de la respuesta con los que poder evaluar el efecto en la fatiga del material:
 - Tipo de respuesta (amortiguada, LCO armónico, caos o *flutter*) y, en el caso de caos, grado de caoticidad (secciones de Poincaré, o parámetro DIRA).
 - Frecuencia(s) característica(s) en el caso de LCO armónico.

Todos los puntos anteriores son distintos módulos embebidos en el código **FHSWB** de *Freeplay Hysteresis on Slender Wing-Body Configurations*.

Resultados parciales de esta tesis han sido publicados en dos Congresos Internacionales:

- IFASD 2001 (*International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics*, ver [AGF01]).
- ICA 2007 (*International Congress on Aeroacoustics*, ver [Aré07]).

Tal y como dice el memorandum [FAA]:

Accounting for freeplay by linear analysis, while adequate to prove freedom from divergent flutter, has been inadequate to prove freedom from LCO.

Espero y deseo que los resultados de esta tesis contribuyan a la mejora de la metodología utilizada en la industria aeronáutica para la predicción de este tipo de fenómenos no lineales, introduciendo mejoras en el proceso de diseño y reduciendo inspecciones de las holguras de las superficies de control en el posterior mantenimiento.

1.4. Esquema General de la Tesis.

El esquema general de la tesis puede verse en el diagrama de bloques de la figura 1.12.

En este capítulo 1 se ha introducido el tema de tesis, el campo en el que enmarca dentro de la Aeroelasticidad y sus principales contribuciones. El capítulo 2 realiza una revisión bibliográfica del estado del arte, analizando las publicaciones en las principales revistas técnicas y el estado actual de las normas de aeronavegabilidad civiles y militares con respecto al tema de tesis.

Los capítulos 3 y 4 desarrollan la formulación teórica para el cálculo de las ecuaciones aeroelásticas de configuraciones cuerpo/ala esbeltas, obteniéndose la parte del código **FHSWB** programada en Fortran 90, que implementa estas ecuaciones aeroelásticas además de un módulo de integración en el dominio del tiempo desarrollado ad hoc para el tratamiento de no linealidades de tipo *freeplay*

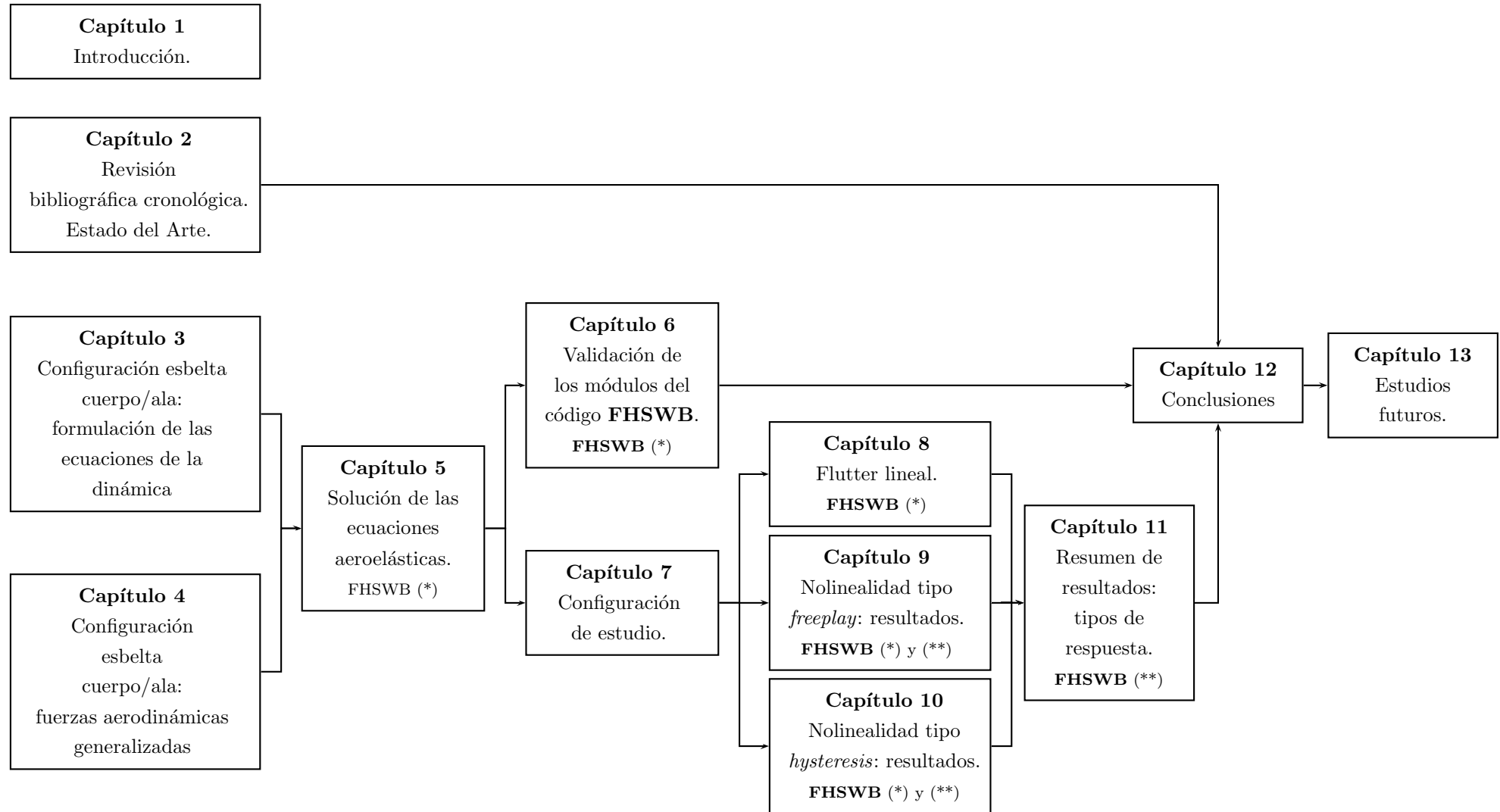
e *hysteresis*. Las principales características y el potencial de estos módulos del código **FHSWB** se resumen en el capítulo 5. Antes de aplicar el código **FHSWB** a una configuración típica de estudio, todos sus módulos en Fortran 90 son validados en el capítulo 6 con casos resueltos en la literatura o problemas con solución analítica.

La configuración de estudio en la tesis se detalla en el capítulo 7, y en las siguientes secciones se procede a la caracterización aeroelástica de la misma en tres fases: aeroelasticidad lineal en el capítulo 8, aeroelasticidad no lineal con no linealidad del tipo *freeplay* en el capítulo 9 y aeroelasticidad no lineal con no linealidad del tipo *hysteresis* en el capítulo 10. En estos dos últimos capítulos se utilizan todos los módulos del código **FHSWB**, tanto los codificados en Fortran 90 como los de análisis y postproceso de la respuesta programados en Matlab.

Los distintos tipos de respuesta obtenidos en los tres estudios anteriores se analizan de forma cualitativa y cuantitativa en el capítulo 11. En este análisis cualitativo se presentan con más detalle los módulos del código **FHSWB** programados en Matlab y orientados al análisis y post-proceso de la respuesta de sistemas no lineales, incluyendo caracterización del caos con mapas de Poincaré o el parámetro desarrollado en esta tesis *Dispersal Rate* o DIRA.

Por último, la tesis se cierra con las conclusiones (capítulo 12) y los estudios futuros (capítulo 13).

Figura 1.12: Esquema general de la Tesis.



(*) Módulos del código **FHSWB** desarrollados en Fortran 90: Aeroelasticidad cuerpo/ala esbeltas + Integrador de las ecuaciones de estado-espacio (cualquier configuración).

(**) Módulos del código **FHSWB** desarrollados en Matlab: análisis y post-proceso de la respuesta, incluyendo caracterización de caos.

1.5. Consideraciones Finales

El objetivo de este capítulo introductorio ha sido centrar el tema de tesis y describir las aportaciones que se consideran más relevantes. El estudio del efecto aeroelástico de las no linealidades estructurales, tema que aborda esta tesis, está recibiendo un impulso considerable dentro de la industria aeronáutica, fundamentalmente debido a la necesidad por parte de la industria de caracterizar y evaluar su efecto.

Actualmente, la prevención de problemas asociados a estas no linealidades pasa por mejorar los procesos de fabricación e incrementar las tareas de mantenimiento, pero no existen métodos robustos de análisis que permitan optimizar la aeronave en el proceso de diseño. Este vacío de metodologías, junto con las cada vez más exigentes normas de aeronavegabilidad, hace necesario el desarrollo de herramientas utilizables en la etapa de diseño de la aeronave y que permitan identificar y prevenir problemas futuros.

Esta tesis aborda el estudio aeroelástico de no linealidades estructurales en la etapa de diseño de la aeronave, con las siguientes dos contribuciones principales:

1. Desarrollo del código autocontenido **FHSWB** para el estudio aeroelástico lineal y no lineal de configuraciones cuerpo/ala esbeltas, tales como pods subalares, misiles, tanques de combustible, etc. Este código puede utilizarse no sólo para el diseño aeroelástico de este tipo de configuraciones, sino también para evaluar el efecto en la aeronave que las transporta, analizando por ejemplo los ciclos de carga que estaría introduciendo un misil por la presencia de oscilaciones de ciclo límite asociadas a las no linealidades estructurales.
2. Desarrollo de herramientas de integración y postproceso (integradas en el mismo código anterior) aplicables al diseño de cualquier vehículo, siempre y cuando sea conocida la ecuación de la planta, es decir, la ecuación matricial de estado-espacio del sistema. Estas herramientas incluyen software de integración de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) adaptado al análisis de no linealidades tipo *freeplay* u *hysteresis*, detectores de tipo de respuesta que permiten caracterizar la respuesta en menor tiempo con la consiguiente reducción de tiempos de computación, software de postproceso como transformadas de Fourier, diagramas de bifurcación, mapas de Poincaré, etc. Estas herramientas han sido probadas y validadas en las configuraciones esbeltas cuerpo/ala descritas en el punto anterior, para las que el código **FHSWB** es capaz de formular las ecuaciones de estado-espacio.

El código **FHSWB** se basa en la formulación de las ecuaciones aeroelásticas en el dominio del tiempo; sin embargo, existen algunas otras metodologías que se utilizan en la actualidad en el estudio de sistemas no lineales. El capítulo siguiente realiza una revisión general del estado del arte. Por un lado, se realiza un análisis de las publicaciones técnicas editadas hasta el día de hoy sobre el tema, analizando las principales ventajas e inconvenientes y resumiendo los métodos de cálculo actuales. Por otro lado, se realiza también un análisis del estado actual de las normas de certificación (civiles y militares) respecto a este tema, ya que uno de los principales objetivos futuros de esta metodología podría ser llegar a ser un método de cumplimiento de las normas y que mejor que empezar conociendo lo que exigen las autoridades.

Capítulo 2

REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA CRONOLÓGICA. ESTADO DEL ARTE.

2.1. Introducción

Una vez enfocado el tema de estudio de esta Tesis Doctoral en el capítulo 1, el capítulo 2 se dedica a analizar el estado del arte en el estudio de las no linealidades estructurales (distribuidas¹ y concentradas) desde el punto de vista aeroelástico. Esta revisión del estado del arte se ha realizado en las siguientes cuatro áreas:

1. *Publicaciones*: Estudio de las publicaciones sobre el tema en las principales revistas técnicas y congresos internacionales (sección 2.2).
2. *Normas de aeronavegabilidad*: Estudio de las normas de aeronavegabilidad civiles y militares aplicables al diseño, construcción y mantenimiento de aeronaves (sección 2.4).
3. *Configuraciones*: Breve resumen estadístico de las configuraciones típicas analizadas en las distintas publicaciones (sección 2.3).
4. *Métodos de cálculo*: Análisis de los principales métodos de cálculo utilizados en la actualidad, analizando ventajas y desventajas de cada uno de ellos (sección 2.5).

2.2. Bibliografía sobre No linealidades Estructurales

La siguiente tabla 2.2 resume la documentación encontrada relativa al tratamiento de no linealidades estructurales desde el punto de vista aeroelástico. En cada artículo se detalla su título, los autores, la institución a la que pertenecen, e información adicional importante como la geometría a la que es aplicable (2D o 3D), tipo de no linealidad, si es teórico o experimental, y detalles generales de cómo se modeliza la estructura y aerodinámica.

¹Aunque la Tesis Doctoral se centra en el estudio de no linealidades estructurales *concentradas*, la revisión bibliográfica incluye por su interés todo lo publicado referente a no linealidades estructurales *distribuidas*.

Tabla 2.1: Revisión de artículos sobre no-linealidades estructurales concentradas.

	AUTORES	REFERENCIA/TÍTULO UNIVERSIDAD/EMPRESA	T E	2D 3D	ESTRUCTURA	AERODINÁMICA	NOLINEALIDAD	SOLUCIÓN COMENTARIOS
07	L.K.Abbas Q.Chen K.O'Donnell D.Valentine P.Marzocca	[ACO ⁺ 07]: Bifurcation and Chaotic Behaviour of Hypersonic Lifting Surfaces with Freeplay including the Stiffness and Damping Nonlinearities. -Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing, China. -Clarkson University, Postdam, NY, USA.	T	2D	-Perfil 2D con 2DOFs: plunging + pitching.	-Flujo supersónico/hipersónico: <i>third order Piston Theory</i> .	-Nolinealidad freeplay o cúbica en el modo de <i>plunging</i> o <i>pitching</i> . -Nolinealidad aerodinámica.	-Integración numérica: Runge-Kutta Fehlberg de 5-6º orden con control de paso de tiempo. -Obtención de respuesta armónica LCO y caos.
04	A.Akmese M.D.Cömert B.E.Platin	[ACP04]: Aeroservoelastic Analysis of Missile Control Surfaces Via Robust Control Methods. -The Scientific and Technical Research Council of Turkey, Defense Industries Research and Development Institute, Ankara, Turkey. Middle East Technical University, Ankara, Turkey.	T	2D	-Perfil 2D con 3DOFs: plunging, cabeceo y modo de superficie de control. -Superficie de control se modeliza con un perfil 2D.	-Flujo incompresible estacionario.	- <i>Robust Analysis</i> con incertidumbres en varios parámetros del sistema: incertidumbre en coeficientes aerodinámicos y en la dinámica, rigidez y amortiguamiento del actuador.	-Robust Flutter -V-g y μ -method. -Herramienta de cálculo: MATLAB SIMULINK (The MathWorks, Inc.). Resultados en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia.
01	H.Alighanbari B.H.K.Lee	[AL01]: Analysis of Nonlinear Aeroelastic Signals. - Department of Mechanical, Aerospace and Industrial Engineering, Ryerson Polytechnic University, Toronto, Canada. - High Speed Aerodynamics Laboratory, Institute of Aerospace Research, National Research Council, Ottawa, Canada.	T	2D	-Perfil 2D.	-Flujo incompresible.	-Nolinealidad en pitch: bilineal y cúbica.	Herramienta para el análisis de señales no lineales: -Reconstrucción del mapa de fases para determinar el tipo de movimiento. -Método de <i>false nearest neighbor</i> para determinar la dimensión del problema. -Cálculo de los exponentes de Lyapunov. -Sistemas con no linealidad débil.
02	H.Alighanbari S.M.Hashemi	[AH02]: Bifurcation Analysis of an Airfoil Containing a Cubic Structural Nonlinearity and Subjected to Two-Dimensional Incompressible Flow. -Ryerson University, Toronto, Canada	T	2D	-Perfil 2D con 2DOFs: plunging + cabeceo.	-Flujo bidimensional incompresible.	-Nolinealidad estructural cúbica en el modo de cabeceo.	- <i>Collocation method</i> con el paquete de software AUTO: realiza análisis de bifurcación de las ecuaciones diferenciales con la velocidad de vuelo como parámetro. Uso de multiplicadores de Floquet para determinar el tipo de bifurcación. -Integración numérica con un 8th-order Runge-Kutta: determinación de diagramas de bifurcación (α para valores $d\alpha/dt = 0$). -Chaos confirmado con los exponentes de Lyapunov.
02	J.-S.Bae I.Lee	[BL02]: Nonlinear Aeroelastic Characteristics of a Fighter-type Wing with Control Surface. -Department of Aerospace Engineering, KAIST, Gusong-dong, Yusong-gu, Daejeon, Korea.	T	3D	-Método de Elementos Finitos MSC/NASTRAN. -Método de las masas ficticias (<i>Fictitious Mass Modal Approach</i>)	-Aerodinámica subsónica calculada con el método <i>Doublet-Hybrid Method (DHM)</i> . -Fuerzas aerodinámicas en el dominio del tiempo con el método <i>Minimum State Approximation</i> (M.Karpel).	-Nolinealidad estructural tipo <i>freeplay</i> en el modo de rotación de la superficie de control.	State-space equations.
02	J.-S.Bae I.Lee	[BLSL02]: 1C5 Limit Cycle Oscillation Characteristics of 2D Model with Bilinear Plunge Spring. -Department of Aerospace Engineering, KAIST, Gusong-dong, Yusong-gu, Daejeon, Korea	T	2D	-Perfil 2D con 2DOFs: plunging + cabeceo.	-Método DPM (Doublet-Point Method) para calcular las fuerzas aerodinámicas en supersónico + Método de aproximación de <i>minimum-state approximation</i> .	-Nolinealidad estructural bilineal (asimétrica) en el modo <i>plunging</i> .	-Dominio de la frecuencia: DPM+Linealización de la no linealidad con el método <i>Describing Function Method</i> . -Dominio del tiempo: DPM+Aproximación racional de las fuerzas generalizadas (método de Karpel)

Revisión de artículos sobre no-linealidades estructurales concentradas (Continuación).

98	J.J.Block T.W.Strganac	[BS98]: Applied Active Control for a Nonlinear Aeroelastic Structure. -Texas A&M University, College Station, Texas.	T E	2D	-Perfil 2D con 3DOFs: plunging, cabeceo y superficie de control. -Sistema de control activo en la superficie de control.	-Teoría de Theodorsen.	-Amortiguamiento (tipo Coulomb). -Endurecimiento de la rigidez en cabeceo.	-Simulaciones numéricas con Matlab. -Resultados experimentales.
97	J.J.Block H.Gilliatt	[Blo96]: Active Control of an Aeroelastic Structure. -Texas A&M University, College Station, Texas.	T E	2D	-Perfil 2D con 3DOFs: plunging + cabeceo + superficie de control.	-Teoría de Theodorsen.	-Amortiguamiento tipo Coulomb. -Endurecimiento rigidez del modo de cabeceo.	-Modelos teóricos: resultados en bucle abierto/cerrado con sistema de control activo (Matlab). -Resultados experimentales.
05	E.Boltz P.Marzocca	[BM05]: Active Aeroelastic Control of Lifting Surfaces via Jet Reaction Limiter Control. -Clarkson University, Postdam, New York.	T	2D	-Perfil 2D con 2DOFs: plunging+cabeceo.	-Flujo incompresible.	-Nolinealidad <i>freeplay</i> en el modo de cabeceo.	-Simulaciones en el dominio del tiempo.
02	P.B.Bornemann U.Galvanetto M.A.Cridfield	[BGC02]: Some Remarks on the Numerical Time Integration of Non-Linear Dynamical Systems. -Imperial College of Science, Technology and Medicine, Prince Consort Road, London.	T	-	-	-	-Ecuación Nolineal del Péndulo.	-Validación de varios métodos de integración en sistemas no lineales.
88	L.O.Braser W.Eversman	[BE88]: The Application of Transient Aerodynamics to the Structural Nonlinear Flutter Problem. -McDonnell Aircraft Company, St. Louis, Mo. University of Missouri-Rolla.	T	2D 3D	-Perfil 2D con 2DOFs: plunging + cabeceo. -3D: Estabilizador horizontal del F/A-18.	-2D: Flujo incompresible (Theodorsen). -3D: Doublet-Lattice.	-2D: Freeplay en DOF de cabeceo. -3D: Modelo NASTRAN del estabilizador horizontal del F/A-18 con no linealidad en el grado de libertad de giro en el soporte (cabeceo).	-Aproximación racional de la aerodinámica, método de Abel [Abe79] (aplicado a perfil 2D) y Burkhart [Bur77] (aplicado a 3D). -Método de solución: Runge-Kutta de 4º orden.
78	E.Breitbach	[Bre78]: Effects of Structural Non-Linearities on Aircraft Vibration and Flutter.	T E	2D 3D	-Diversos ejemplos reales y 2 aplicaciones (perfil 2D con 3 modos heaving, cabeceo y control, y ala 3D con 2 modos estructurales y modo de control no lineal de alerón).	-Perfil 2D: teoría incompresible usando la función de Wagner. -Ala 3D con alerón: ensayos en túnel.	-Paper descriptivo: analiza desde no linealidades concentradas hasta distribuidas, etc... -Perfil 2D: no linealidad en superficie de control. -Ala 3D: no linealidad en alerón.	-Resultados experimentales. -Integración en el dominio del tiempo. -Aplicación del método <i>Harmonic Balance</i> .
98	B.M.Brooking	[Bro98]: Flutter Analysis of a Two-Dimensional Airfoil Containing Structural Hysteresis Nonlinearities. (-PhD Thesis presented at Carleton University, Ottawa, Ontario, Canada)	T	2D	-Perfil 2D con 2DOFs: plunging + cabeceo	-Fuerzas aerodinámicas no estacionarias (Teoría de Wagner).	-Histéresis en el grado de libertad de cabeceo.	-Describing Function Method. -Time marching (Houbolt Finite Difference Method)
07	M.B.Brooks	[Bro07]: Limited Evaluation of Stations 3 and 7 Pylon and Stations 1 and 9 Launcher Bolt Torques on F-16B (CORAL PHOENIX) LCO Characteristics. - USAF Test Pilot School, Edwards AFB, CA.	E	3D	-Ensayos en avión F-16B	-Ensayos en vuelo.	-Par de apriete en sujecciones pilón/ala y missile/lanzador.	-Postproceso de ensayos en vuelo: PSD, etc. -Aumentar el factor de carga N_z reduce la amplitud de los LCOs. -Amplitud de los LCOs aumenta a mayores M_∞ . -Cantidad de combustible en el fuselaje influye en la amplitud de los LCOs. -Sistema de sujeción misil/lanzador importante.
03	S.Chae D.H.Hodges	[CH03]: Dynamics and Aeroelastic Analysis of Missiles. -Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia.	T	3D	-Formulación variacional geométrica exacta.	-Cuerpo: Teoría de Cuerpo Esbelto modificada por 2D viscoso. -Aletas: Thin-airfoil Theory a baja velocidad y Piston Theory en hipersónico. -Modelo simplificado de resistencia aerodinámica.	-Nolinealidad geométrica del modelo estructural.	-Estudio de estabilidad (sin/con aero).

Revisión de artículos sobre no-linealidades estructurales concentradas (Continuación).

02	P.C.Chen E.Sulaeman D.D.Liu C.M.Denegri	[CSLD02]: Influence of External Store Aerodynamics on Flutter/LCO of a Fighter Aircraft. -ZONA Technology, Inc., Scottsdale, Arizona. -U.S.Air Force SEEK Eagle Office. Eglin Air Force Base, Florida.	T E	3D	-Modelo de Elementos Finitos del avión completo (F16).	-Matrices AIC obtenidas con Doublet-Lattice (ZAERO code; ZONA6 subsónico, ZTAIC transónico, ZONA7 supersónico).	-Nonlinealidad de tipo aerodinámico.	-Dominio de la frecuencia (g-method del código ZAERO)
07	P.G. L.N.Virgin E.H.Dowell	[CGS07]: A Numerical Method for Nonlinear Aeroelastic Analysis of Wings with Large Deformation. -Department of Aerospace Engineering, Texas A&M University, College Station, Texas. -Air Force Research Laboratory, Wright-Patterson AFB, Ohio.	T	3D	-Nolinealidad estructural: modelo viga nolineal (ala <i>Goland</i>). -Nolinealidad aerodinámica: modelo aerodinámico viscoso; flujo transónico, interacción onda de choque/capa límite, entrada en pérdida.	-Modelo aerodinámico: Reynolds-averaged Navier Stokes.	-Nolinealidad por grandes deformaciones + nolinealidad aerodinámica.	-Integración en el dominio del tiempo: sincronización modelo estructural/aerodinámico. -numerical continuation con el software AUTO2000. -Diagramas de bifurcación: amplitud LCO vs U_∞ .
96	M.D.Conner L.N.Virgin E.H.Dowell	[CVD96]: Accurate Numerical Integration of State-Space Models for Aeroelastic Systems with Free Play. -Duke University, Durham, North Carolina.	T	2D	-Perfil 2Dcon 3DOFs: plunging + cabeceo + superficie de control.	-Teoría de Theodorsen.	-Freeplay en la superficie de control.	-Integración con método Runge-Kutta -Método de Henon.
04	P.A.Cummings	[Cum04]: Continuation Methods for Qualitative Analysis of Aircraft Dynamics. -National Institute of Aerospace, Hampton, Virginia (NASA).	T	-	-Genérico.	-Genérico.	-Genérico.	-Métodos de Continuación. -Software: CONSOL/AUTO.
07	F.Demourant A.Pavie	[DP07]: Frequency Domain Analysis of the Aeroelastic Stability with a Control Surface Freeplay. -ONERA-CERT/DCSD System Control and Flight Dynamics Department. -Airbus, Loads and Aeroelastics.	T	3D	-Avión civil.	-No declarado.	-Nolinealidad de tipo <i>freeplay</i> en una superficie de control. Nolinealidad centrada y con precarga.	-Describing Function Method para nolinealidad simétrica y <i>Dual Describing Function</i> para nolinealidad asimétrica. -Criterio de Popov para estudio de estabilidad + técnica (<i>dual</i>) describing function para determinar la amplitud del LCO.
00	C.M.Denegri	[Den00]: Limit Cycle Oscillation Flight Test Results of a Fighter with External Stores. -U.S. Air Force SEEK EAGLE Office, Eglin Air Force Base, Florida.	T E	3D	-Ensayos en vuelo completados con un modelo estructural flexible con masas concentradas (modelo típico en la industria aeronáutica).	-Aerodinámica de ensayos en vuelo completados con análisis usando el Doublet-Lattice method.	-Conjunto de no-linealidades obtenidas en ensayos en vuelo: aerodinámicas, estructurales, leyes de control, etc...	-Análisis exclusivamente lineal para interpretar resultados de vuelo, incluyendo LCOs.
07	G.Dimitriadis	[Dim07]: Approximate Numerical Continuation for Aeroelastic Systems Undergoing Aperiodic Limit Cycle Oscillations. -School of MACE, University of Manchester, United Kingdom.	T	3D	-Modelo MSC.NASTRAN correspondiente a avión genérico de transporte (extraído de ZAERO v7.2).	-Aerodinámica con el método Doublet-Lattice; método de Roger.	-Nolinealidad tipo <i>hysteresis</i> en la rigidez del alerón.	-Método de Continuación Numérica.
01	E.H.Dowell J.P.Thomas K.C.Hall	[DTH01]: Transonic Limit Cycle Oscillation Analysis Using Reduced Order Aerodynamic Models. -Duke University, Durham, NC 27708-0300	T	2D	-Perfil 2D con 3DOFs: plunging + cabeceo + rotación superficie de control.	-Euler/CFD con uso de modelo aerodinámico reducido (<i>reduced order model</i>)	-Freeplay en la rotación de la superficie de control.	-Dominio de la frecuencia: <i>Describing Function Method</i> .
06	D.Eller	[Ell06]: On an Efficient Method for Time-Domain Computational Aeroelasticity. -Aeronautical and Vehicle Engineering. Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden.	T	3D	-Avión tipo velero: modelo MSC.NASTRAN validado a Ground Vibration Test.	-Flujo incompresible (Boundary Element Method).	-Nolinealidad de tipo geométrico: deformación de vehículos muy flexibles.	-Dominio de Laplace con <i>Describing Function Method</i> . -Dominio del tiempo.
07	D.Eller	[Ell07]: Friction, Freeplay and Flutter of Manually Controlled Aircraft. -Aeronautical and Vehicle Engineering. Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden.	T	3D	-Avión tipo velero: modelo MSC.NASTRAN validado a Ground Vibration Test.	-Flujo incompresible (Boundary Element Method de [Ell06])	-Fricción/Freeplay en el timón de profundidad.	-Dominio de Laplace con <i>Describing Function Method</i> . -Dominio del tiempo.

Revisión de artículos sobre no-linealidades estructurales concentradas (Continuación).

07	R.Gil Annes da Silva J.Guido Damilano J.Luiz	[GGL07]: A Sensitivity Investigation on the Aeroelastic Dynamic Stability of Slender Spinning Sounding Rockets. -Instituto de Aeronáutica y Espacio, Brasil.	T	3D	-MSC.NASTRAN FEM model: modelo <i>beam</i> para cuerpo + modelo <i>plate</i> para aletas. -Inercia mediante <i>lumped mass model</i> (CONM2). Masa varía con el tiempo. -Efecto de la rotación <i>spinning</i> en la velocidad de <i>flutter</i> .	-Supersonic Linearized Potential Flow Equation: código comercial ZAERO. -Aletas: modelo <i>lifting surface</i> incluyendo efecto espesor. -Cuerpo: modelo de paneles.	-Análisis lineal.	-Interesante las particularidades asociadas a misiles balísticos: variación de la inercia, cambiantes condiciones de vuelo (desde 0 a 250 km de altura), etc...
98	H.C.Gilliatt T.W.Strganac A.J.Kurdila	[GSK98]: On the Presence of Internal Resonances in Aeroelastic Systems. -Department of Aerospace Engineering, Texas A&M University. -Department of Aerospace Engineering, Mechanics and Engineering Science, University of Florida.	T	2D	-Perfil 2D con 2DOFs: plunging + cabeceo.	-Aerodinámica no estacionaria 2D basada en la teoría de Theodorsen -Baja frecuencia: formulación cuasi-estacionaria de las fuerzas aerodinámicas.	-Amortiguamiento modelado como combinación de tipo viscoso y Coulomb.	- <i>Centre manifold method</i> .
08	P.Gold M.Karpel	[GK08]: Reduced-Size Aeroservoelastic Modeling and LCO Simulations with Structurally Non-Linear Actuators. -Technion, Israel Institute of Technology. Faculty of Aerospace Engineering, Haifa, Israel.	T	3D	-UAV model: modelo de elementos finitos MSC.NASTRAN.	-Modelo aerodinámico Doublet-Lattice (ZAERO). Aproximación racional de las matrices aerodinámicas para formular las ecuaciones de estado-espacio.	-Holgura en el mecanismo del actuador de la superficie de control (alerón) de un UAV.	-Método de las masas ficticias. -La no linealidad se introduce mediante fuerzas de realimentación, de forma que la planta permanece lineal e igual a la del sistema sin holgura.
95	P.L.Green	[Gre95]: Dynamic Aspects of Army Missile Systems. -U.S.Army Research, Development and Engineering Center. Redstone Arsenal, Alabama.	E	3D	-Misiles VIPER, ANSSR, HELLFIRE, y HAWK.	-N/A	-N/A	-Detalla problemas de acoplamiento modal en el desarrollo de distintos misiles de la U.S.Army. -Misl VIPER: Acoplamiento de la primera flexión con la rotación <i>spin</i> de estabilización.
99	S.Hedlund M.Johansson	[HJ99]: A Toolbox for Computational Analysis of Piecewise Linear Systems. -Department of Automatic Control. Lund Institute of Technology, Lund, Sweden.	T	3D	-Genérico.	-Genérico.	-Genérico.	-Sistemas lineales a trozos. -Herramientas basadas en Matlab (<i>PWLTOOL</i>). -Funciones de Lyapunov.
95	M.Holden R.E.J.Brazier A.A.Cal	[HBC95]: Effects Of Structural Non-Linearities On A Tailplane Flutter Model. -British Aerospace Limited, Filton, Bristol.	T E	3D	-Estabilizador horizontal de un avión comercial. Modos flexibles.	-Ensayos en túnel de viento (Instalaciones de BAe en Filton, Bristol).	-Freeplay causado por <i>backlash</i> en actuadores.	-Dominio de la frecuencia (harmonic balance method) -Simulación en el dominio del tiempo. -Ensayos.
56	E.D.Katzen L.H.Jorgensen	[KJ56]: Aerodynamics of Missiles Employing Wings of Very Low Aspect Ratio. -Ames Aeronautical Laboratory, Moffet Field, California.	E	3D	-Resultados experimentales en maquetas de túnel aerodinámico (no flexibles). -Ángulo de ataque desde 0 a 30 [deg]. -Deflexión de superficies de 45 [deg].	-Ensayos en túnel de viento.	-N/A	-Resultados experimentales (sustentación, resistencia y centro de presiones) de misiles. -Efecto de la forma del L.E. en el centro de presiones. -Estudio del momento de balance.
02	D.B.Kholodar J.P.Thomas E.H.Dowell K.C.Hall	[KTDH02]: A Parameter Study of Transonic Airfoil Flutter and Limit Cycle Oscillation Behaviour. -Duke University, Durham.	T	2D	-Perfil 2D con 2DOFs: Plunging + cabeceo.	- <i>Harmonic Balance Method</i> con un CFD (Euler no viscoso).	-Estructura lineal, aerodinámica no lineal.	-Frequency-domain: two or three harmonics are used in the aerodynamic solution to determine the effect of higher harmonics on the fundamental harmonic.

Revisión de artículos sobre no-linealidades estructurales concentradas (Continuación).

02	K.Kim I. Lee	[KL96]: Aeroelastic Analysis of a Flexible Airfoil with a Freeplay Nonlinearity. -Department of Aerospace Engineering, Korea Advanced Institute of Science and Technology, Taejon, Korea.	T	2D	-Airfoil: modelo viga y dos soportes tipo muelle para simular <i>pitch</i> y <i>plunge</i> . -Modos obtenidos con la teoría <i>fictionous mass modal approach</i> .	-Subsónico (Doublet-Lattice). -Aerodinámica en el tiempo mediante el método <i>Rational Approximation</i> .	-Nolinealidad en el modo de cabeceo de sólido rígido.	-Estudios en el dominio de la frecuencia (<i>Describing Function Method</i>) y del tiempo. -Solución dominio de la frecuencia: V-g method. -Solución dominio del tiempo: método Runge-Kutta-Verner de 5°-6° orden. -Efecto de la flexibilidad del perfil 2d: resultados similares al modelo rígido excepto que se producen más oscilaciones en el modo de cabeceo (modo no lineal).
02	K.Kim T.W.Strganac	[KS02]: Aeroelastic Studies of a Cantilever Wing with Structural and Aerodynamic Nonlinearities. -Department of Aerospace Engineering, Texas A&M University, College Station, Texas.	T	3D	-Modelo de viga flexible.	-Modelo aerodinámico simplificado.	-Estructural, aerodinámica e inducida por los <i>stores</i> .	-Ecuaciones en el estado-espacio.
98	J.Ko T.W.Strganac A.J.Kurdila	[KSK98b]: Stability and Control of a Structurally Nonlinear Aeroelastic System. -Texas A&M University, College Station, Texas. -University of Florida, Gainesville, Florida.	T	2D	-Perfil 2D con modos de heaving, cabeceo y superficie de control.	-Modelo de aerodinámica cuasi-estacionaria incompresible.	-Nolinealidad en el modo de cabeceo (k_α).	-Ecuaciones en estado espacio con realimentación.
98	J.Ko T.W.Strganac	[KSK99]: Adaptive Feedback Linearization for the Control of a Typical Wing Section with Structural Nonlinearities. -Texas A&M University, College Station, Texas. -University of Florida, Gainesville, Florida.	T	2D	-Perfil 2D con 2DOFs: plunging + cabeceo.	-Fuerzas aerodinámicas cuasi-estacionarias.	-Nolinealidad en el modo de cabeceo formulada como polinomio con grados impares en el ángulo de cabeceo.	-Ecuaciones estado-espacio.
97	J.Ko A.J.Kurdila T.W.Strganac	[KKS97c]: Nonlinear Dynamics and Control for a Structurally Nonlinear Aeroelastic System. -Texas A&M University, College Station, Texas. -University of Florida, Gainesville, Florida.	T	2D	-Perfil 2D con 2DOFs: plunging + cabeceo.	-Fuerzas aerodinámicas cuasi-estacionarias.	-Nolinealidad en el modo de cabeceo formulada como polinomio con grados impares en el ángulo de cabeceo.	-Teoría de control.
98	J.Ko T.W.Strganac A.J.Kurdila	[KSK98a]: Nonlinear, Adaptive Control of an Aeroelastic System via Geometric Methods. -Texas A&M University, College Station, Texas. -University of Florida, Gainesville, Florida.	T E	2D	-Perfil 2D con 2DOFs: plunging + cabeceo.	-Fuerzas aerodinámicas cuasi-estacionarias. -Teoría de Theodorsen.	-Nolinealidad en el modo de cabeceo formulada como polinomio con grados impares en el ángulo de cabeceo.	-Formulación estado-espacio.
98	G.Kuruwila R.E.Bartels M.S.Hong K.G.Bhatia	[KBHB07]: Nonlinear Aeroelastic Analysis Using a Time-Accurate Navier-Stokes Equations Solver. -Flight Sciences Technology, The Boeing Company. -Aeroelasticity Branch, NASA Langley Research Center. -Enabling Technology and Research, The Boeing Company. -Aeroelasticity and Multidisciplinary Optimization, The Boeing Company.	T E	2D	-Perfil 2D con 3DOFs: plunging + cabeceo + rotación de superficie de control.	-Aerodinámica no lineal: Navier-Stokes.	-Nolinealidad en el giro de la superficie de control.	-Formulación estado-espacio. -Base modal del sistema nominal.
80	R.M.Laurenson	[LT80]: Flutter Analysis of Missile Control Surfaces Containing Structural Nonlinearities. -McDonnell Douglas Astronautics Company, St. Louis, Mo.	T	3D	-Superficie de control flexible soportada en la raíz en los grados de libertad <i>roll</i> & <i>pitch</i> con muelles no lineales.	-Modelo aerodinámico simplificado: sustentación proporcional al grado de libertad (<i>roll</i> & <i>pitch</i>).	-Freeplay en el soporte (<i>roll</i> & <i>pitch</i>) de la superficie de control del misil.	-Método <i>Describing Function Approach</i> . -Solución directa de las ecuaciones no lineales comparando on el método <i>Describing Function Method</i> .
86	C.L.Lee	[Lee86]: An Iterative Procedure for Nonlinear Flutter Analysis. -Texas Instruments Incorporated, Lewisville, Texas.	T E	3D	-Sistemas dinámicos de varios DoFs.	-Distintos métodos aerodinámicos dependiendo del sistema.	-Diferentes no linealidades: bilineal, freeplay e histéresis.	-Dominio de la frecuencia (<i>Describing Function Method</i>). -Método adaptable a la industria.

Revisión de artículos sobre no-linealidades estructurales concentradas (Continuación).

89	B.H.K.Lee A.Tron	[LT89]: Effects of Structural Nonlinearities on Flutter Characteristics of the CF-18 Aircraft. -National Research Council, Ottawa, Ontario, Canada.	T E	3D	-Avión CF-18. Modelo MSC.NASTRAN con 23 formas modales.	-Doublet-lattice (transónico).	-Bilineal: CF-18 wing-fold hinge. -Freeplay en el flap exterior de borde de ataque.	-Dominio de la frecuencia: <i>Describing Function Method</i> .
95	I.Lee S.H.Kim	[LK95]: Aeroelastic Analysis of a Flexible Control Surface with Structural Nonlinearity. -Korea Advanced Institute of Science and Technology.	T	3D	-Superficie de control 3D. -Cabeceo como sólido rígido + modos flexibles. - <i>Fictitious Mass Method</i> para definir una única base modal.	-Doublet-Lattice (dominio de la frecuencia) + Brace and Eversman (paso de la frecuencia al dominio del tiempo).	-Freeplay en el modo de cabeceo como sólido rígido.	-Uso del <i>Fictitious Mass Modal Approach</i> para definir una única base modal. -Dependencia de condiciones iniciales.
02	R.Lind K.Snyder M.Brenner	[LSB01]: Wavelet Analysis to Characterise Non-linearities and Predict Limit Cycles of an Aeroelastic System. -NASA Dryden Research Center, MS 4840, Edwards, CA 93523, USA.	T E	2D	-Perfil 2D con 2DOFs: plunging + cabeceo.	-Teoría aerodinámica cuasi-estacionaria.	-Nolinealidad en el modo de cabeceo: endurecimiento y reblandecimiento de la rigidez con el ángulo de giro en cabeceo.	-Análisis con <i>wavelets</i> de las respuestas en el tiempo.
02	L.Liu Y.S.Wong B.H.K.Lee	[LWL02a]: Non-linear Aeroelastic Analysis Using the Point Transformation Method, Part I: Freeplay Model. Department of Mathematical Sciences, University of Alberta, Edmonton, Alta. Canada. Institute of Aerospace Research, National Research Council, Ottawa, Ont., Canada.	T E	2D	-Perfil 2D con 2DOFs: plunging + cabeceo.	-Flujo bidimensional incompresible ([Fun93]).	-Freeplay (bilineal) en el modo de cabeceo como sólido rígido.	-Método <i>Point Transformation Technique</i> .
01	L.Liu Y.S.Wong B.H.K.Lee	[LWL02b]: Non-linear Aeroelastic Analysis Using the Point Transformation Method, Part II: Hysteresis Models. -Department of Mathematical Sciences, University of Alberta, Edmonton, Alta. Canada. -Institute of Aerospace Research, National Research Council, Ottawa, Ont., Canada.	T	2D	-Perfil 2D con 2DOFs: plunging + cabeceo.	-Flujo bidimensional incompresible ([Fun93]).	-Nolinealidad tipo <i>freeplay</i> (histéresis) en el modo de cabeceo como sólido rígido.	-Método <i>Point Transformation Technique</i> .
01	L.Liu Y.S.Wong B.H.K.Lee	[LWL02b]: Non-linear Aeroelastic Analysis Using the Point Transformation Method, Part II: Hysteresis Models. -Department of Mathematical Sciences, University of Alberta, Edmonton, Alta. Canada. -Institute of Aerospace Research, National Research Council, Ottawa, Ont., Canada.	T	2D	-Perfil 2D con 2DOFs: plunging + cabeceo.	-Flujo bidimensional incompresible (ver [Fun93]).	-Nolinealidad de tipo <i>freeplay</i> en el modo de cabeceo.	-Método <i>Point Transformation Technique</i> .
07	F.D.Marques E.Camilo C. De Marqui J.L.F.Azevedo K.J.Badcock	[MCC ⁺ 07a]: Structural Nonlinearities Parameter Analysis for Typical Section Transonic Aeroelasticity. -University of Sao Paulo, Brasil -Instituto de Aeronáutica y Espacio, Brasil -University of Liverpool, UK	T	2D	-Perfil 2D con heaving + pitching.	-CFD Euler no estacionario.	-Nolinealidad de tipo <i>tanh</i> o <i>freeplay</i> en heaving o pitching.	-Time-marching con método de integración Runge-Kutta.
07	C.C.Marsden S.J.Price	[MP07]: Transient and Limit Cycle Simulation of a Nonlinear Aeroelastic System. -McGill University, Montreal, Quebec, Canada.	T E	2D	-Sección 2D con heaving + pitching.	-Flujo subsónico con teoría de Theodorsen.	-Nolinealidad de tipo <i>freeplay</i> en el modo de <i>pitching</i> . -Fricción en modos de <i>heaving</i> y <i>pitching</i> .	-Método de Diferencias Finitas de Houbolt ([Hou50]).
58	D.J.Martin	[Mar58]: Summary of Flutter Experiences as a Guide to the Preliminary Design of Lifting Surfaces on Missiles. -Langley Aeronautical Laboratory & Langley Field, Va., Washington.	T E	3D	-Resultados experimentales: modos de sólido rígido + flexibles.	-Flutter lineal/nolineal.	-Analiza 3 tipos de flutter: wing bending-torsion flutter, stall flutter y pitch-bending flutter.	-Resultados experimentales. -Criterios para diseño preliminar.

Revisión de artículos sobre no-linealidades estructurales concentradas (Continuación).

96	F.Mastroddi L.Morino	[MM96]: Limit-Cycle Taming by Nonlinear Control with Applications to Flutter. (Tesis Doctoral de F.MAstroddi) -University of Rome La Sapienza & University of Rome III, Rome, Italy.	T	2D	-3 modos estructurales + modo de superficie de control.	-Finite-state aerodynamic model (aproximación racional).	-Nolinealidad de tipo polinómica (orden ≤ 3), aunque no responde a no-linealidad estructural física (paper académico).	-Limit-cycle taming: use of nonlinear control laws to extend the stability boundary. -Utiliza realimentación para modificar los autovalores del sistema. -Método <i>asymptotic expansion</i> .
81	S.C.McIntosh R.E.Reed Jr. W.P.Rodden	[MRR81]: Experimental and Theoretical Study of Nonlinear Flutter. -Nielsen Engineering and Research, Inc., Mountain View, Calif.	T E	2D	-Perfil 2D con 2DOFs: plunging + cabeceo.	-Resultados experimentales: túnel de viento aerodinámico.	-Varios tipos de no-linealidad.	-Análisis de resultados experimentales.
02	G.Mortchélewicz L.Dadois	[MD02]: Limit Cycle Analysis of a Structure in an Inviscid Compressible Flow in Presence of Freeplay Nonlinearities. -ONERA	T	2D	-Perfil NACA 64A010 2D airfoil con 2DOFs: plunging + cabeceo.	-Ecuaciones de Euler linealizadas.	-Nolinealidad de tipo freeplay.	-Método de Continuación (<i>Continuation Method</i>). -Simulación en el tiempo -Diferentes algoritmos.
95	S.Narayanan P.Sekar	[Nar95]: Periodic and Chaotic Responses of an SDF System with Piecewise Linear Stiffness Subjected to Combined Harmonic and Flow Induced Excitations. -Department of Applied Mechanics, Indian Institute of Technology, India.	T	1D	-Oscilador de 1DOF.	-Aerodinámica no lineal proporcional a $\dot{x}(t)$ y $\dot{x}(t)^3$	-Rigidez lineal a trozos (<i>Unsymmetrical piecewise linear stiffness</i>).	-Método de solución aproximada: método de <i>Fast Galerkin</i> (análisis numérico-analítico usando un <i>multiharmonic balance method</i>). -Análisis de estabilidad: multiplicadores de Floquet, mapas de Poincaré, diagramas de bifurcation y exponentes de Lyapunov. -Integración exacta en el dominio del tiempo: Runge-Kutta de cuarto orden.
98	T. O'Neil T.W.Strganac	[OS98]: Aeroelastic Response of a Rigid Wing Supported by Nonlinear Springs. -Texas A&M University, College Station.	T E	2D	-2DOFs: plunging + cabeceo.	-Theodorsen.	-Endurecimiento / reblandecimiento cúbico de la rigidez.	-Método de Diferencias Finitas de Houbolt (ver [Hou50]). -Subrutinas IMSL.
96	T.O'Neil H.Gilliatt T.W.Strganac	[OGS96]: Investigations of Aeroelastic Response of a System with Continuous Structural Nonlinearities. -Texas A&M University, College Station.	T E	2D	-Ala limitada a movimiento en 2DOFs: plunging + cabeceo.	-Aerodinámica lineal 2D (ver [Fun93])	-Rigidez no lineal en el modo de cabeceo: $\sum_{i=1}^5 \gamma_n \alpha^n$	-Integración con el método de diferencias finitas de Houbolt.
96	C.P.Pagwiwoko	[PS90]: A New Method Development in Time Domain Simulation of Nonlinear Aeroelastic Vibrations.	T	2D	-2D perfil: <i>pitch</i> and <i>plunge</i> DoF.	-2D: Theodorsen (incompressible) / 3D: MSC.NASTRAN Doublet-Lattice. -Aproximación racional de Padé para dominio del tiempo.	-Freeplay. -Endurecimiento/reblandecimiento de rigidez local. (<i>Softening/Hardening</i>)	-Dominio del tiempo. - <i>Power Bound Graph Method</i> : Dividir un problema de N grados de libertad en N sistemas tipo muelle. -Simulink/MATLAB. -Resultados para perfil 2D.
00	M.J.Patil D.H.Hodges C.E.S.Cesnik	[PHC00]: Limit Cycle Oscillations of a Complete Aircraft. -Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia & Massachusetts Institute of Technology, Boston, Massachusetts.	T	3D	i) Ala en voladizo (<i>cantilever wing</i>). ii) Avión completo incluyendo modos de sólido rígido. iii) Avión completo trimado en vuelo.	-Modelo de aerodinámica no estacionaria, incluyendo entrada en pérdida.	-Teoría de vigas geoméricamente exacta.	-Solución en el dominio del tiempo (<i>Time-marching</i>)
00	M.J.Patil D.H.Hodges C.E.S.Cesnik	[PH00a]: Nonlinear Aeroelastic Analysis of Complete Aircraft in Subsonic Flow. -Georgia Institute of Technology, Georgia, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts.	T	3D	-Formulación variacional exacta de las ecuaciones de la dinámica de vigas en deformación.	-Aerodinámica con el método <i>Finite State</i> : Formulación perfiles 2D con correcciones por espesor y número de Mach. -Aerodinámica de entrada en pérdida: ONERA. -Modelo simple para estimar la resistencia aerodinámica.	-Nolinealidad estructural geométrica (aumenta rigidez al aumentar deformación). -Nolinealidad aerodinámica: entrada en pérdida por elevado AoA.	-Formulación Estado-Espacio (dominio el tiempo). -Ala en voladizo de <i>Goland</i> . -Efecto de condiciones iniciales.

Revisión de artículos sobre no-linealidades estructurales concentradas (Continuación).

00	M.J.Patil D.H.Hodges	[PH00b]: On the Importance of Aerodynamic and Structural Geometrical Nonlinearities in Aeroelastic Behaviour of High-Aspect-Ratio Wings. -Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia.	T	3D	-Formulación variacional de la dinámica de vigas desarrollada por [Hod90]. Ala de semienvergadura 16 (ver [PHC99])	-Modelo de aerodinámica no estacionaria (Doublet-Lattice).	-Nolinealidades geométricas, nolinealidad geométrica-aerodinámica, y modelo aeroelástico completo <i>geoméricamente exacto</i> .	-k-method (también conocido como V-g method)
95	D.M.Pitt	[Pit98]: AIAA-95-1387. A Physical Explanation of Freeplay Effects on the Flutter Response of an All-Movable Control Surface. -McDonnell Douglas Corporation, St. Louis, Missouri.	T E	3D	-Estabilizador Horizontal que actúa como superficie de control (All-movable Control Surface) - Modos flexibles	-Aerodinámica no estacionaria en el dominio del tiempo.	-Freeplay provocado por una holgura en el actuador de la superficie de control.	-Modelo Estado-Espacio (switching entre actuador ON/OFF).
02	G.Platanitis T.W.Strganac	[PS02]: Control of a Wing Section with Structural Nonlinearities Using Leading and Trailing Edge Control Surfaces. -Texas A&M University, College Station, Texas.	T E	2D	-4DOFs: Sección de ala (perfil) con los grados de libertad plunging, cabeceo y superficies de control en borde de ataque y borde de salida.	-Modelo de aerodinámica cuasi-estacionaria (ver [Fun93], pp. 207-215). -Baja frecuencia reducida, flujo subsónico.	-Nolinealidad estructural en el modo de cabeceo.	-Teoría de control en bucle abierto y cerrado.
97	D.C.Poirel S.J.Price	[PP97]: Post-Instability Behaviour of a Structurally Nonlinear Airfoil in Longitudinal Turbulence. -National Defence Headquarters, Ottawa, Ontario, Canada, & McGill University, Montreal, Quebec, Canada.	T	2D	-Perfil 2D con 2DOFs: plunging + cabeceo.	-Flujo no viscoso incompresible.	-Nolinealidad con endurecimiento cúbico en el modo de cabeceo.	-Ecuaciones en el estado-espacio. -Runge-Kutta de 4º orden. -Subrutinas IMSL (International Mathematical and Statistical Library)
02	C.Popescu S.Y.Wong	[PW02]: A Nonlinear Statistical Approach for Aeroelastic Response Prediction. -Department of Mathematical and Statistical Sciences. University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada.	E	3D	-N/A	-N/A	-N/A	-Predicción de LCOs mediante análisis de time-histories. -Aplicación a un perfil 2D con 2DOFs (plunging + cabeceo).
94	S.J.Price B.H.K.Lee H.Alighanbari	[PAL94a]: Postinstability Behaviour of a Two-Dimensional Airfoil with a Structural Nonlinearity. -McGill University, Montreal, Quebec, Canada. National Research Council, Ottawa, Ontario, Canada.	T	2D	-Perfil 2D.	-Flujo incompresible (function de Wagner).	-Nolinealidad en el modo de cabeceo: freeplay con precarga.	-Ecuaciones se integran con el método de Houbolt (ver [Hou50]).
01	I.Roberts D.P.Jones N.A.J.Lieven M. di Bernardo A.R.Champneys	[RJD ⁺ 01]: Analysis of Piecewise Linear Aeroelastic Systems Using Numerical Continuation. -Departments of Aerospace Engineering & Engineering Mathematics. Bristol University, Bristol, England.	T	2D	-Perfil 2D.	-Flujo incompresible (función de Wagner).	-Nolinealidad tipo <i>freeplay</i> en la rotación del <i>flap</i> .	-Boundary Identification Method (\approx Point Transformation Method). -Numerical Continuation. -Integración Runge-Kutta.
05	I.Roberts A.L.Gaitonde N.A.J.Lieven D.P.Jones	[RGLJ05]: Identification of Limit-Cycles for Piecewise Non-Linear Transonic Aeroelastic Systems. -Departments of Aerospace Engineering & Engineering Mathematics. Bristol University, Bristol, England.	T	2D	-Perfil 2D (NACA64A010).	-Eigenvalue Realisation Algorithm (ERA) que calcula un modelo reducido (Reduced Order Model ROM) a partir de simulaciones Euler.	-Nolinealidad tipo <i>freeplay/hysteresis</i> en la rotación del <i>flap</i> . -Aproximación de la nolinealidad con combinaciones de tanh y funciones logarítmicas. -Régimen transónico.	-Simulación en el tiempo. -Numerical Continuation.
00	A.Sedaghat J.E. Cooper J.R. Wright A.Y.T. Leung	[SCWL00b]: Limit Cycle Oscillation Prediction for Aeroelastic Systems with Continuous Non-linearities. -Manchester School of Engineering, University of Manchester, Manchester, UK	T	3D	-Ala de gran envergadura.	-Aerodinámica cuasi-estacionaria.	-Rigidez de tipo cúbico.	-Teoría <i>Normal Form Theory</i> .

Revisión de artículos sobre no-linealidades estructurales concentradas (Continuación).

00	A.Sedaghat G.A.Vio J.E.Cooper J.R.Wright	[SVCW00]: Modelling of Nonlinear Aerodynamics During Limit Cycle Oscillations. -Manchester School of Engineering, Manchester University, Oxford Road, Manchester.	T	2D	-Perfil 2D con 2DOFs: plunging + cabeceo.	(1) Función de Wagner y (2) CFD no estacionario.	-Aerodinámica no lineal: código Euler transónico.	-Método Runge-Kutta.
00	A.Sedaghat J.E.Cooper J.R.Wright A.Y.T.Leung	[SCWL00a]: Prediction of Nonlinear Aeroelastic Instabilities. -Manchester School of Engineering, Manchester University.	T	2D	-Modelo aeroelástico de ala con 2DOFs.	-Aerodinámica 2D (función de Wagner).	-Rigidez cúbica.	-Normal Form Theory
05	U.Sharma	[Sha05]: Effects of Cubic Hardening Nonlinearities on the Flutter of a Three Degree of Freedom Airfoil. -School of Aerospace Engineering, Georgia Institute of Technology.	T	2D	-Perfil 2D con 3DOFs: plunging + cabeceo + rotación de superficie de control.	-Aerodinámica no estacionaria (perfil de espesor despreciable).	-Nolinealidad tipo cúbica en plunging, cabeceo o rotación de superficie de control.	-Ecuaciones de estado-espacio integradas con un Runge-Kutta de 4º orden y correcciones de 5º orden.
55	S.F.Shen	[She59]: An Approximate Analysis of Nonlinear Flutter Problems. -University of Maryland.	T	2D	-Perfil 2D con 3 DOFs: plunging, cabeceo y rotación de superficie de control.	-Flujo incompresible (Theodorsen).	-Freeplay (con/sin precarga) e histéresis.	-Método <i>Harmonic Balance Method</i> .
00	E.F.Sheta V.J.Harrand D.E.Thompson T.W.Strganac	[SHTS00]: Computational and Experimental Investigation of Limit Cycle Oscillations in Nonlinear Aeroelastic Systems. -CFD Research Corporation. -Department of Aerospace Engineering of Texas A&M University.	T E	2D	-Cabeceo y plunging de una sección de ala (perfil 2D).	-Fuerzas aerodinámicas (sustentación y momento) utilizando códigos de Navier-Stokes. Baja frecuencia reducida y bajo número de Mach.	-Nolinealidades: aerodinámica (Navier-Stokes), amortiguamiento estructural tipo Coulomb, no linealidad en rigidez, y no linealidad cinemática de alto orden	-Ecuaciones aeroelásticas con diferencias finitas utilizando una subrutina basado en el modelo introducido por [LL86]
00	T.W.Strganac K.Ko D.E.Thompson A.J.Kurdila	[SKTK00]: Identification and Control of Limit Cycle Oscillations in Aeroelastic Systems. -Texas A&M University, College Station, Texas. -University of Florida, Gainesville, Florida.	T E	2D	-Perfil 2D con 2DOFs: plunging + cabeceo.	-Modelo aerodinámica cuasi-estacionaria: flujo subsónico y baja frecuencia reducida.	-Rigidez torsional no lineal con el siguiente polinomio de aproximación: Nonlinear torsional stiffness with an approximate polynomial form $k_{\alpha}(\alpha) = k_{\alpha 0} + k_{\alpha 1}\alpha + k_{\alpha 2}\alpha^2 + \dots$	
92	D.Tang E.H.Dowell	[TD92]: Flutter and Stall Response of a Helicopter Blade with Structural Nonlinearity. -Duke University, Durham, North Carolina.	T	2D	-Pala de rotor: flap-pitch sin rotación.	-Modelo aerodinámico lineal y modelo no lineal incluyendo entrada en pérdida, o <i>stall</i> .	-Nolinealidad aerodinámica de entrada en pérdida y no linealidad estructural (freeplay).	-Dominio de frecuencia: <i>Describing function method</i> . -Integración en el dominio del tiempo.
00	D.Tang D.Kholodar E.H.Dowell	[TKD00]: Nonlinear Aeroelastic Response of a Typical Airfoil Section with Control Surface Freeplay. -Duke University, Durham, North Carolina.	T E	2D	Ver referencia [TDD00]	Ver referencia [TDD00]	Ver referencia [TDD00]	Ver referencia [TDD00]
00	D. Tang D. Kholodar E.H. Dowell	[TDD00]: Nonlinear Response of Airfoil Section with Control Surface Freeplay to Gust Loads. -Duke University, Durham, North Carolina.	T E	2D	-Perfil 2D con 3DOFs: plunging + cabeceo + rotación de superficie de control.	-Flujo incompresible: modelo de Peters [Pet94].	-Nolinealidad tipo freeplay.	
00	D.Tang J.K.Henry E.H.Dowell	[THD00]: Nonlinear Aeroelastic Response of Delta Wing to Periodic Gust. -Duke University, Durham, North Carolina	T E	3D	-Ala en delta.	-Modelo aerodinámico 3D vortex-lattice en el dominio del tiempo, incluyendo técnica de reducción del orden. -Ráfaga armónica y con barrido en frecuencia continuo.	-Ecuaciones no lineales de placa de Von Kármán	

Revisión de artículos sobre no-linealidades estructurales concentradas (Continuación).

02	D.Tang E.H.Dowell	[TD02]: Limit-Cycle Hysteresis Response for a High-Aspect-Ratio Wing Mode. -Duke University, Durham, North Carolina.	T E	3D	-Modelo aeroelástico de ala de gran envergadura con cuerpo esbelto en punta de ala. Teoría de vigas no lineal.	-Modelo aerodinámico de ONERA (<i>strip theory aerodynamics</i>) con introducción de no linealidad por entrada en pérdida.	-Deformación de viga no lineal.	-Dominio de la frecuencia: <i>Harmonic balance approach</i> . -Método <i>Newton-Raphson</i> para resolver ecuaciones algebraicas no lineales.
02	D.Tang E.H.Dowell	[TD02]: Limit-Cycle Hysteresis Response for a High-Aspect-Ratio Wing Model. -Duke University, Durham, North Carolina.	T E	3D	-Ecuaciones estructurales basadas en la teoría no lineal de vigas. Modos estructurales seleccionados: modo <i>chordwise</i> , primeros 4 modos de flap, y primer modo de torsión.	-Modelo aerodinámico de ONERA (<i>strip theory</i>) para estudiar LCOs causados por altos ángulos de ataque.	-No linealidad en aerodinámica y estructura.	-Simulación en el dominio del tiempo y <i>Harmonic Balance Approach</i> .
06	D.Tang E.H.Dowell	[TD06]: Flutter and Limit-Cycle Oscillations for a Wing-Store Model with Freeplay. -Duke University, Durham, North Carolina.	T E	3D	-Ala en delta con <i>store</i> : Modelo placa de von Kármán para el ala.	-Método <i>vortex-lattice</i> con el método ROM (<i>Reduced Order Model aerodynamic technique</i>) + <i>Slender Body Theory</i> . -Aerodinámica en el dominio del tiempo.	- <i>Freeplay</i> en la unión store-avión.	-Simulación en el dominio del tiempo.
00	D.E.Thompson (Jr.) T.W.Strganac	[TS00]: Store-Induced Limit Cycle Oscillations and Internal Resonances in Aeroelastic Systems. -Texas A&M University, College Station, TX.	T E	2D	-Modelo analítico 2D con 2DOFs: plunging + cabeceo. Experimento en Texas A&M University (Nonlinear Test Apparatus NATA)	-Modelo aerodinámico cuasi-estacionario (bajas velocidades y bajas frecuencias reducidas).	-No linealidad estructural cúbica en el modo de cabeceo, aunque el modelo incluye polinomio de hasta grado 5 para ajustar el experimento.	-Método de variación de parámetros. El código MATLAB es el que se utiliza para resolver las ecuaciones variando parámetros
00	S.T.Trickey L.N.Virgin E.H.Dowell	[TVD00]: Characterizing Stability of Responses in a Nonlinear Aeroelastic System. -Department of Mechanical Engineering and Materials Science, Duke University.	T	2D	-Perfil 2D con 3DOFs: plunging + cabeceo + modo de flap.	-Aproximación de Jones de la función de Wagner.	-No linealidad tipo <i>freeplay</i> en el modo de flap.	-Runge-Kutta de 4º orden con <i>switching point</i> capturado mediante el método de interpolación inversa de Henon (ver [Hen82]).
05	G.A.Vio J.E.Cooper	[VC05]: Limit Cycle Oscillation Prediction for Aeroelastic Systems with Discrete Bilinear Stiffness. -Manchester School of Engineering, University of Manchester, Oxford Road, Manchester	T	3D	-Modelo de ala de Hancock (ver [HWS85]). (1) Ala rígida soportada en cabeceo y plunging (2) Ala flexible con los dos grados de libertad anteriores y dos modos flexibles (de flexión y torsión)	- <i>Strip theory</i> modificada con la introducción de términos no estacionarios (ver [HWS85]).	-Muelle bilineal en el modo rígido de torsión.	- <i>Centre Manifold Theory + Normal Form Theory</i>
03	P.Viguiet	[Vig03]: Wind Tunnel Test of a Non-Linear Flutter Model. -ONERA	E	3D	-Modelo 3D: fuselaje + ala.	-Predicciones de Flutter con modelo de elementos finitos (FE Model) y fuerzas aerodinámicas con <i>Doublet-Lattice</i> .	-No linealidad tipo <i>freeplay</i> en el modo de rotación de elevador.	-Resultados de ensayos en túnel.
07	Z.Wang D.D.Liu P.C.Chen D.T.Mook	[WLCM07]: Tightly-Coupled Nonlinear Aerodynamics/Nonlinear Structure Interaction: A Hale Wing Aeroelastic Case Studied. -ZONA Technology, Inc., Arizona AZ, USA. -Virginia Tech, Department of Engineering Science and Mechanics, Blacksburg, VA.	T	3D	-Modelo viga no lineal.	-Método <i>vortex-lattice</i> (flujo incompresible) con desprendimiento de estela.	-No linealidad estructural: modelo viga no lineal. -Aerodinámica no lineal: entrada en pérdida.	-Análisis en el dominio del tiempo. -Aerodinámica no lineal: ráfaga y entrada en pérdida.
01	Y.S.Wong L.Liu B.H.K.Lee	[WLL01]: Frequency and Amplitude Prediction of Limit Cycle Oscillations of an Airfoil Containing Concentrated Structural Nonlinearities. -Department of Mathematical Sciences. University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada. -Institute of Aerospace Research. National Research Council, Ottawa, Ontario, Canada.	T	2D	-Perfil 2D.	-Flujo bidimensional incompresible (función de Wagner).	-No linealidad polinómica, <i>freeplay</i> (bilineal), e histéresis en modos de plunging y cabeceo.	-Método: <i>Centre manifold method</i> .

Revisión de artículos sobre no-linealidades estructurales concentradas (Continuación).

57	D.S.Woolston H.L.Runyan R.E.Andrews	[WRA57]: An Investigation of Effects of Certain Types of Structural Nonlinearities on Wing and Control Surface Flutter. -Langley Aeronautical Laboratory, NACA	T E	2D	-Superficie de control móvil (<i>all-movable control surface</i>) con modos de plunging y cabeceo. -Superficie de control en ala con modos de plunging, cabeceo del ala y rotación de la superficie de control.	-Flujo 2D incompresible.	-Nolinealidad tipo <i>freeplay</i> con/sin precarga. -Histéresis. -Rigidez cúbica.	-Resultados muy dependientes de la condición inicial. -Resultados dependientes de la precarga.
95	Y.-R.Yang	[Yan95]: KBM Method of Analyzing Limit Cycle Flutter of a Wing with an External Store and Comparison with a Wind-Tunnel Test. -Institute of Applied Mechanics, Southwest Jiaotong University, Chengdu, P.R. China	T E	2D 3D	-Perfil 2D con <i>store</i> externo; grados de libertad de plunging, cabeceo del perfil y cabeceo del <i>store</i> . -Ala delta (3D) con <i>store</i> externo; tres modos de deformación de ala y cabeceo del <i>store</i> .	-Perfil 2D: aerodinámica estacionaria; aerodinámica del <i>store</i> externo despreciable. -Ala 3D: Double-Lattice para ala, <i>store</i> externo despreciable.	-Nolinealidad de tipo <i>freeplay</i> con precarga en modo de cabeceo del <i>store</i> .	-Método KBM (linealización de ecuaciones). -Integración en el tiempo (Runge-Kutta). -Resultados de túnel de viento.

Revisión de artículos sobre no-linealidades estructurales concentradas (Fin de tabla).

2.3. Configuraciones de Estudio: Estado del Arte

Una vez analizadas las publicaciones referentes al estudio de no linealidades estructurales desde el punto de vista aeroelástico, del orden de 90 publicaciones en total, se establece la siguiente estadística en relación a las configuraciones que han sido objeto de estudio:

1. Perfil 2D: 60 %.
2. Configuraciones esbeltas cuerpo/ala: 6 %.
3. Configuraciones 3D (no aviones completos, i.e., ala, estabilizadores horizontal o vertical, etc.): 18 %.
4. Aviones completos: 16 %.

Puede observarse que la mayor parte de publicaciones se refieren al perfil clásico bidimensional, mientras que las configuraciones esbeltas tipo misil han sido poco estudiadas.

2.4. Normativa sobre Nolinealidades Estructurales Concentradas.

En este apartado se resume el estado actual de las Normas de Certificación (civiles y militares) en relación a las no linealidades estructurales. Se podrá observar que se obliga al cumplimiento de unas tolerancias en las no linealidades tipo *freeplay* o *backlash* y se propone un ejercicio de *variación de rigidez* con métodos lineales para estimar el efecto de este tipo de no linealidades. Sin embargo, esta aproximación con métodos lineales no es válida debido al inherente carácter no lineal del problema y, por tanto, es necesario formular el problema aeroelástico en el dominio del tiempo o Laplace.

Se detallan a continuación, ordenadas por orden cronológico de edición, las normas civiles y límites que se han consultado:

- (Norma militar) MIL-A-8870C ([MAC93]). Military Specification. Airplane Strength and Rigidity Vibration, Flutter, and Divergence. 25/03/1993. Naval Air Warfare Center Aircraft Division Lakehurst.
- (Norma civil) *Advisory Circular* AC No. 25.629-1A ([FAA98]): Aeroelastic Substantiation of Transport Category Airplanes. US Department of Transportation. 23/07/1998.
- (Norma militar) Joint Service Specification Guide JSSG-2006 ([JSS98]). 30/10/98.
- (Norma militar) Defence Standard DEF STAN 07-85 (Part 3), Issue 1 ([Def99]). Design Requirements for Weapons and Associated Systems. Part 3: Supporting Information. Ministry of Defence. 24/12/1999.
- (Norma civil) Freeplay Limits and Inspection procedures for flutter prevention, 25.629 and *Advisory Circular* AC No. 25.629-1A. US Department of Transportation (incluido en el apéndice A por su interés). 27/09/2000.
- (Norma civil) *Advisory Circular* AC No. 23.629-1B ([AC204]). Means of Compliance with Title 14 CFR, Part 23, Section 23.629, Flutter. Federal Aviation Administration FAA. 28/09/2004.

- (Norma civil) Notice of Proposed Amendment (NPA) No. 11/2004 ([NPA04]). Draft Decision of the Executive Director of the Agency, on Certification Specifications for Large Aeroplanes (CS-25). Miscellaneous Structure. 01/11/2004.
- (Norma militar) MIL-HDBK-516B ([MHB05]). Airworthiness Certification Criteria. Department of Defense. USA. 26/09/2005.
- (Norma militar) Defence Standard DEF STAN 07-85 (Part 1), Issue 3 ([Def06a]). Design Requirements for Weapons and Associated Systems, Part 1, Mandatory Design Requirements. Ministry of Defence. 13/01/2006.
- (Norma militar) Defence Standard DEF STAN 00-970 (Part 1/3), Section 4 ([Def07a]). Leaflet 24. Aeroelasticity. Main Surface Flutter. 27/01/06.
- (Norma militar) Defence Standard DEF STAN 00-970 (Part 1/3), Section 4 ([Def07b]). Leaflet 25. Aeroelasticity. Flutter of Control Surfaces (Ailerons, Elevators and Rudders). 27/01/06.
- (Norma civil) *Memorandum* ANM-05-115-019 ([FAA]): Interim Guidelines for Certification and Continued Airworthiness of Unbalanced Control Surfaces with Freeplay and other Nonlinear Features. Federal Aviation Administration FAA (incluido en el apéndice A por su interés). 04/09/2006.

La tabla 2.2 presenta un resumen de las normas civiles y militares mencionadas en esta sección.

Tabla 2.2: Normas de Certificación sobre no linealidades estructurales.

<p>MIL-A-8870C Naval Air Warfare Center Aircraft Division Lakehurst. 25/03/1993 (ver [MAC93])</p>	<p>Military Specification. Airplane Strength and Rigidity Vibration, Flutter, and Divergence.</p>	<p>Naval Air Force</p>	<p>This specification is approved for use by Naval Air Systems Command, Department of the Navy, and is available for use by all Departments and Agencies of the Department of Defence.</p> <p>3.1 General requirements: ... Flutter, buzz, divergence, aeroservoelastic instability, aerothermoelastic instability, or other related static or dynamic aeroelastic instabilities, including sustained limit amplitude instabilities, shall not occur consistent with the requirements of 3.1.1.</p> <p>...</p> <p>3.1.1 Aeroelastic Stability. All configurations of the airplane shall be free from any aeroelastic instability for all combinations of altitude and speed encompassed by the limit speed (V_L/M_L) versus altitude envelope enlarged at all points by the airspeed margin of safety. The airplane shall meet the following stability design requirements for both normal and failure conditions:</p> <p>Airspeed margin: The equivalent airspeed, W_e, margin of safety shall be not less than 15 percent at all points on the V_L/M_L envelope of the airplane, both at constant Mach number, M, and separately, at constant altitude, (see Figure 1).</p> <p>Damping: The total (aerodynamic plus structural) damping coefficient, g, shall be not less than 3 percent ($g=0.03$) for any critical flutter mode for all altitudes and flight speeds from minimum cruising speeds up to V_L/M_L, (see Figure 2).</p> <p>...</p> <p>3.2.1.1.4 Freeplay of control surfaces and tabs. Detail design shall assure that normal wear of components, of control surfaces and tabs, and actuating systems will not result in values of freeplay greater than those specified below throughout the service life of the airplane. Components having an adequately established wear life may be replaced at scheduled intervals as approved by the contracting activity. However, all replacements shall be included in the wearout replacement budget established for the overall airplane.</p> <p>a. For a trailing edge control surface which extends outboard of the 75 percent span station of main surface, the total freeplay shall not be greater than 0.13°.</p> <p>b. For a trailing edge control surface which extends outboard of the 50 percent but inboard of the 75 percent span station of main surface, the total freeplay shall not be greater than 0.57°.</p> <p>c. For a trailing edge control surface which is inboard of the 50 percent span station of main surface, the total freeplay shall not be greater than 1.15°.</p> <p>d. For an all-movable control surface, the total freeplay shall not be greater than 0.034°. e. For a tab span than is less than 35 percent of the span of supporting control surface, the total freeplay shall be not greater than 1.15°.</p> <p>f. For a tab span than is equal to or greater than 35 percent of the span of supporting control surface, the total freeplay shall be not greater than 0.57°.</p> <p>g. For leading edge flaps, the total freeplay shall be not greater than 0.25°.</p> <p>h. For wing fold, the total freeplay shall be not greater than 0.25°.</p> <p>i. For other movable components which are exposed to the airstream including, but not limited to, trailing edge flaps, spoilers, dive brakes, scoops, landing gear doors, weapon bay doors, and ventral fins (retractable, or jettisonable), the total freeplay shall be not greater than the applicable value specified above in 3.2.1.1.4 a through c.</p> <p>NOTA: Los valores anteriores son pico-a-pico. Por ejemplo, en el caso de <i>all-movable surface</i>, el <i>freeplay</i> será $0,017^\circ$.</p> <p>...</p>
---	---	--------------------------------	---

<p>MIL-A-8870C (Continuación)</p>		<p>3.2.1.1.7 Hydraulic dampers. In the event of...</p> <p>...</p> <p>c. The freeplay of the damper shall not be greater than the applicable values specified in 3.2.1.1.4.</p> <p>...</p> <p>3.2.1.3 Fail-safe aeroelastic stability criteria. The stability design requirements of 3.1.1 shall be met after each of the adverse conditions listed below.</p> <p>a. Failure, malfunction, or disconnection of any single element of the main flight control systems, augmentation systems, automatic flight control system, or tab control system.</p> <p>b. Failure, malfunction, or disconnection of any single element of any flutter damper connected to a control surface or tab.</p> <p>c. Detail design shall either satisfy the stability system requirements of 3.1.1 after each structural failure listed below, or provide the required static strength and fatigue life design margins such that these failures will not occur during the service life of the aircraft.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Failure of any single element in any hinge mechanism and its supporting structure of any control surface and tab. 2. Failure of any single element in any actuator's mechanical attachment to structure of any control surface or tab. 3. Failure of any single element in the supporting structure of any pylon, rack, or external store. 4. Failure of any single element in the supporting structure of any large auxiliary power unit. 5. Failure of any single element in the supporting structure of any engine pod. <p>... 3.2.1.6 Variable geometry airplanes. Airplanes having variable or movable geometry, such as tilt rotors, tilt wings, variable sweep, variable dihedral or pivoting stores shall be designed to prevent all aeroelastic instabilities including the effects of freeplay in pivots and joints and the interaction between lifting surfaces in close proximity.</p> <p>...</p> <p>4.3.2.2 Freeplay measurements of control surfaces and tabs. Tests shall be performed to demonstrate that the freeplay for central surfaces, tabs, and other applicable surfaces specified in 3.2.1.1.4 is within the limits specified in 3.2.1.1.4. The freeplay measurements shall be made for both nominal and emergency operating conditions. These shall be performed prior to or during the ground vibration modal tests as follow:</p> <ol style="list-style-type: none"> a. Both clockwise and counterclockwise moments shall be applied to determine freeplay. b. The loads used in the tests shall not cause appreciable structural deformations. c. For tabs, the maximum employed shall not be greater than three times the tab weight and shall be applied near the trailing edge of the tab midspan. <p>4.3.2.3 Rigidity tests for control surfaces and tabs. Rotational rigidity tests shall be performed on all control surfaces, tabs, and other applicable surfaces specified in 3.2.1.1.5 to determine the rigid-body rotation of the surface as a function of applied torque for both normal and emergency operating conditions. These tests may be combined with the free play tests specified in 4.3.2.2.</p> <ol style="list-style-type: none"> a. Both clockwise and counterclockwise moments shall be applied to determine rotational rigidity data. b. Both symmetrical and antisymmetrical loading conditions shall be employed if the actuating system is such that the frequencies for the symmetrical and antisymmetrical rotational modes differ as in the case where the left-hand and right-hand elevators are connected by a torque tube. c. Applied moments to all control surfaces and tabs shall be as large as practicable, but shall not cause structural deformations. For horizontal surfaces, the applied moment shall be at least large enough to overcome gravitational effects.
---------------------------------------	--	--

Normas de Certificación sobre no linealidades estructurales (Continuación).

<p>MIL-A-8870C (Continuación)</p>			<p>4.3.2.4 Actuator stiffness tests. Actuator stiffness shall be performed to determine the following: a. Static stiffness and freeplay of the actuator(s) before and after life cycle testing. b. Dynamic stiffness of the actuator(s) over the range of frequencies for all operating modes, including failure modes of the system. ... 4.3.2.6 Damper tests. If dampers are used, then tests shall be performed on the damper and supporting structure to assure that components will not fall under static or repeated loads, and that the dampers will operate at high temperatures. In addition, the following shall apply: a. Freeplay measurements shall be performed to substantiate that the freeplay is within the limits specified in 3.2.1.1.7c. b. Tests shall be performed to obtain the damping characteristics as a function of frequency up to at least twice the frequency range that the damper is designed to be effective. ... 4.4.2 Aeroelastic stability flight tests. Aeroelastic stability flight tests shall be performed to substantiate that all critical airplane configuration(s) are free of any aeroelastic instability, including sustained limit amplitude instabilities, throughout the prescribed design limit speed flight envelope with not less than 3 percent total (aerodynamic plus structural) damping coefficient and no predicted occurrence of an aeroelastic instability below 1.15 times design limit speed through extrapolation of flight test data. ... 4.4.5 Service life effects on control surfaces and tabs. During the flight test development and demonstration program, detailed freeplay measurement and rigidity tests as specified in 4.3.2.2 and 4.3.2.3, respectively, shall be performed on all control surfaces, tabs, wing folds, leading edge and trailing edge flaps of these flight test airplanes to define service life effects. The tests shall be performed at 0 and at 100, 300 and 600 hours \pm 25 hours of flight operations. 4.4.5.1 Maintenance instructions for control surfaces and tabs. Maintenance instructions shall be established for each control surface, tab, leading and trailing edge flap, and wingfold. </p>
<p>AC No. 25.629-1A 23/07/1998 ([FAA98])</p>	<p>Aeroelastic Stability. Substantiation of Transport Category Airplanes.</p>	<p>FAA</p>	<p>... Consideration of free play may be incorporated as a variation in stiffness to assure adequate limits are established for wear of components such as control surface actuators, hinge bearings, and engine mounts in order to maintain aeroelastic stability margins. ... Sources of stiffness variation may include the effects of skin buckling at limit load factor, air entrapment in hydraulic actuators, expected levels of in-service free play, and control system components which may include elements with nonlinear stiffness. ... Freeplay effects should be incorporated to account for any influence of in-service wear on flutter margins.</p>
<p>JSSG-2006 30/10/98 ([JSS98])</p>	<p>Joint Service Specification Guide</p>	<p>Dep. of Defence USA</p>	<p>... A.4.7 Aeroelasticity ... a. Analyses (1) Basic air vehicle flutter analyses. ... VERIFICATION RATIONALE(4.7) A comprehensive aeroelastic stability program is necessary to demonstrate compliance with the requirements of 3.7. This program should include analyses, wind tunnel flutter model tests, ground vibration tests, flight flutter tests, and other tests (such as freeplay and rigidity of control surfaces) as required... </p>

Normas de Certificación sobre no linealidades estructurales (Continuación).

<p>JSSG-2006 (Continuación)</p>		<p>VERIFICATION GUIDANCE(4.7.a(1)) These analyses are required if the air vehicle is a new air vehicle or if changes occur which affect the flutter characteristics of an existing air vehicle. The flutter analyses should be conducted for the complete air vehicle. However, component (such as wing, wing and fuselage, horizontal tail, vertical tail, etc.) flutter analyses are necessary in the preliminary design stage. Component attachment stiffness, control surface circuit stiffness and freeplay, control surface mass balance, fuel quantity, and loading conditions are some important design parameters to be evaluated. Analyses formulated to show the sensitivity of the flutter characteristics to such parameters are useful for evaluating. VERIFICATION LESSONS LEARNED(4.7.a(1)) . . . (2) Control surface, tab, and other component flutter analyses. These analyses shall be conducted for normal and failure conditions. For circuit stiffness designed control surfaces, tabs and other movable components, free play limits and maximum allowable inertial properties shall be determined and established in maintenance manuals. Techniques and procedures shall be developed for free play inspections and maintenance at field and depot levels. In addition, maintenance plans and manuals must include a process for checking and adjusting mass balance after surface repair or painting. . . . c. Laboratory Tests . . . VERIFICATION LESSONS LEARNED(4.7.c(2)) . . . (3) Control surface, tab, and actuator rigidity, free play, and wear tests. VERIFICATION RATIONALE(4.7.c(3)) . . . Rotational rigidity tests are required to support the analyses of 4.7.a(2). Free play and wear tests are required to ensure safe free play limits and inspection intervals and to satisfy the requirements of 3.7.1.1a. VERIFICATION GUIDANCE(4.7.c(3)) If circuit stiffness of control surfaces or tabs is used to prevent any aeroelastic instability, these tests are required. The rigidity and free play tests for control surfaces, tabs, and flaps should be conducted prior to or during the air vehicle ground vibration modal test of 4.7.d(1). These tests should be conducted for both normal and design failure conditions. Both clockwise and counterclockwise moments should be applied to determine the freeplay and rotational stiffness. Figure 20 shows a load-deflection hysteresis diagram and method for determination of free play and rotational stiffness. Actuator stiffness tests should be conducted to determine the static stiffness and freeplay of the actuator before and after life cycle testing. In addition, tests should be conducted to determine the dynamic stiffness of the actuator over the range of frequencies of all operating modes, including failure modes of the system. . . . (6) Damper qualification tests. . . .</p>
-------------------------------------	--	---

Normas de Certificación sobre no linealidades estructurales (Continuación).

<p>JSSG-2006 (Continuación)</p>		<p>VERIFICATION GUIDE(4.7.c(6))</p> <p>These tests are required if dampers are used to prevent aeroelastic instabilities and if the damper is a part of a new air vehicle design or a new application.</p> <p>If dampers are used, experimental verification tests should be performed on the damper and supporting structure to ensure that components will not fail under static or repeated loads, that the dampers will not lose their effectiveness under airplane service conditions including operation at high temperatures, and that proper maintenance and inspection under service conditions can be readily accomplished. In addition, free-play measurements should be performed to substantiate that the free play is within the prescribed limits.</p> <p>...</p> <p>e. Air vehicle flight tests.</p> <p>...</p> <p>(2) Flight flutter tests.</p> <p>...</p> <p>VERIFICATION GUIDANCE(4.7.e(2))</p> <p>...</p> <p>c. If detail design does not provide the recommended free play limits (for control surfaces, tabs, leading and trailing edge flaps, and wingfolds) given in 3.7.4 Guidance, then flutter flight tests should be performed with the established maximum allowable freeplay to substantiate that values of free play that exceed those listed in 3.7.4 Guidance are adequate and satisfy the required margins of safety by extrapolation (if quality of data permits).</p> <p>...</p> <p>A.3.7.1.1 Control surfaces and tabs.</p> <p>Control surface and tabs shall be designed to contain either sufficient static and dynamic mass balance, or sufficient bending, torsional and rotational rigidity, or a combination of these means, to prevent flutter or sustained limited amplitude instabilities of all critical modes under all flight conditions for normal and failure operating conditions of the actuating systems.</p> <p>a. If circuit stiffness of control surface and tabs is utilized to prevent any aeroelastic instability, safe freeplay limits and maximum allowable inertia properties shall be established which shall not be exceeded during the service life of the airframe. These free play limits shall be as specified in 3.7.4.</p> <p>b. If mass balancing of control surfaces or tabs is utilized to prevent any aeroelastic instability, mas balance design requirements shall be established. These requirements shall include balance weight installation stiffness, static and repeated design loads for the balance weight installation, and mass balance tolerance for inclusion in maintenance manuals. In addition, the damage tolerance requirements of 3.12 are applicable to the balance weight installation. The static and repeated design loads for the balance weights and the adjacent supporting structure shall be ...</p> <p>c. In the event that mass balance or rigidity criteria are impracticable, two parallel hydraulic dampers may be used to prevent any aeroelastic instability of a control surface, tab, and any other movable component which is exposed to the airstream. In addition, maximum free play limits and minimum and damper capability limits shall be established for the dampers.</p>
-------------------------------------	--	--

<p>JSSG-2006 (Continuación)</p>		<p>REQUIREMENT RATIONALE(3.7.1.1) The occurrence of flutter within the flight envelope is likely to be catastrophic and measures necessary to improve the flutter characteristics usually cannot be introduced without structural redesign. Control surfaces and tab flutter are the most prevalent type of flutter problems. This type of flutter may occur on all sizes and types of air vehicles. In many cases flutter criteria will strongly influence control surface and tab design with respect to actuator stiffness and mass distribution.</p> <p>REQUIREMENT GUIDANCE(3.7.1.1) The above requirements always apply. Mass balance is required on any control surface (including all-movable surfaces) or tabs that do not have sufficient circuit stiffness to prevent any aeroelastic instability under all flight conditions. If circuit stiffness is used to prevent any aeroelastic instability, adequate stiffness must be provided for both normal and design failure conditions. In determining the adequacy of the stiffness, the rigidity of all actuating elements, the rigidity of the structure to which these elements are attached, and the rigidity of the control surface or tab should be included. In addition, safe free play limits of the control surfaces and tabs should be established, which shall not be exceeded during the service life of the airframe. (see Guidance under 3.7.4) If balance weights are used on control surfaces or tabs,...</p> <p>...</p> <p>A.3.7.1.4 External store carriage.</p> <p>...</p> <p>REQUIREMENT GUIDANCE(3.7.1.4) ...</p> <p>As a first step in the aeroelastic analyses, characteristics of each store should be identified as follows:</p> <ol style="list-style-type: none"> (1) Mission and flight conditions. (2) Primary structure to which store is attached: lifting surface (wing) or non-lifting surface (fuselage). (3) Store attachment structure (pylon/rack) flexibility and inertial properties. (4) Store mass properties (mass, c.g. location, and mass moments of inertia) with respect to a store attachment reference point on the aircraft. (5) Store classification as rigid, flexible, or moving mass (slosh). (6) Store aerodynamics. (7) Damping or nonlinear (free-play, etc.) mechanisms in the store/pylon/rack structure. <p>...</p> <p>A.3.7.4 Free play of control surfaces and tabs. Detail design shall assure that normal wear of components, control surfaces and tabs, and actuating systems will not result in values of free play greater than those specified below throughout the service life of the air vehicle. Components having an adequately established wear life may be replaced at scheduled intervals as approved by acquisition activity. However, all replacements shall be included in the wearout replacement budget established for the overall air vehicle. The following free play limits shall apply...</p> <p>REQUIREMENT RATIONALE(A.3.7.4) Excessive free play of circuit stiffness designed control surfaces often results in a limited amplitude oscillation which, if uncorrected, may cause a fatigue failure leading to large amplitude flutter and destruction of primary structure.</p>
-------------------------------------	--	---

Normas de Certificación sobre no linealidades estructurales (Continuación).

<p>JSSG-2006 (Continuación)</p>		<p>REQUIREMENT GUIDANCE(A.3.7.4)</p> <p>If detail design does not provide the recommended free play limits (for control surfaces, tabs, leading and trailing edge flaps, and wingfolds) given below, then non-linear flutter analyses, flutter model wind tunnel tests, fatigue and wear tests, vibration tests, and as necessary, flutter flight tests should be performed to substantiate that values of free play that exceed those listed below are adequate and satisfy the required margins of safety. a. If a trailing-edge control surface extends outboard of the 75-percent-span station of the main surface, the total free play should not be greater than 0.13 degrees.</p> <p>b. If a trailing-edge control surface extends outboard of the 50-percent-span station but inboard of the 75-percent-span station of the main surface, the total freeplay should be not greater than 0.57 degrees.</p> <p>c. If a trailing-edge control surface is inboard of the 50-percent-span station of the main surface, the total free play should be not greater than 1.15 degrees.</p> <p>d. The total free play of all-movable control surfaces should be not greater than 0.034 degrees.</p> <p>e. If a tab span does not exceed 35 percent of the span of the supporting control surface, the total free play should be not greater than 1.15 degrees.</p> <p>f. If a tab span equals or exceeds 35 percent of the span of the supporting control surface, the total free play should be not greater than 0.57 degrees.</p> <p>g. For leading edge flaps, the total free play should be not greater than 0.25 degrees.</p> <p>h. For a wing fold, the total free play should be not greater than 0.25 degrees.</p> <p>i. For other movable components which are exposed to the airstream including, but not limited to, trailing edge flaps, spoilers, dive brakes, scoops, landing gear doors, weapons bay doors, and ventral fins (retractable, or jettisonable), the total free play shall not be greater than the applicable value specified above in 3.7.4.a through c.</p> <p>”Some History of Flutter Criteria.”and correspondence with Mr. Mykytow (formerly of the Air Force Flight Dynamics Laboratory), indicates that the free play limits listed above were established based primarily on a series of wind tunnel flutter model tests conducted by the Aircraft Laboratory at Wright-Patterson AFB done in the mid to late 1950’s. These model tests included a semispan wing with an unbalanced trailing edge control surface and, later, tests of several all-movable stabilizers. The primary reference for the work was not published but results were used to establish the criteria. These test results indicated that no significant degradation of flutter speed margins of the airplane would occur if these free play limits were adhered to in service. These free play values were called out in MIL-A-8870(ADG).</p> <p>REQUIREMENT LESSONS LEARNED(A.3.7.3)</p> <p>In all cases, tolerances of potential bearing concepts or choices as well as other component manufacturing tolerances and projected wear should be within the established free play limits.</p> <p>The above Guidance recommended free play limits for all-movable control surface are very to meet. Free play limits for all-movable control surfaces beyond the recommended are usually justified based on test experience, such as flutter model tests, flight tests, etc., and on analyses to some extent. For some air vehicle programs, a free play inspection/maintenance program is established for all-movable control surfaces as well as for other circuit stiffness designed control surfaces. The maximum free play for all the all-movable control horizontal tail of an air superiority fighter aircraft is three times the above recommended limit. Flutter model tests and flight testing substantiated these limits. Field and depot inspection/maintenance are performed on these aircraft to maintain these free play limits.</p>
-------------------------------------	--	---

Normas de Certificación sobre no linealidades estructurales (Continuación).

44

<p>JSSG-2006 (Continuación)</p>		<p>The free play on two early production, all-movable horizontal tails of a fighter aircraft were measured to be two to four times the above recommended limit. Probably, many more of the production aircraft horizontal tails had the same range of free play, but none (except for one out of tolerance surface tail which became unloaded for a certain flight condition) has had any known limit cycle oscillation in flight. For this fighter aircraft, the all-movable horizontal tails are preloaded about the hingeline for essentially all flight conditions. This is the usual case that all-movable horizontal tails on fighter aircraft are preloaded about the hingeline for most of all flight conditions so that the circuit stiffness is fully effective without any effective stiffness reduction due to free play or excursion into the existing free play region where problems may occur.</p> <p>An all-movable control surface on a missile fluttered with 0.6 degrees of freeplay.</p> <p>The free play limits for all-movable control surface on a tactical missile was established at 0.3 degrees peak to peak. This limit was based on results of a non-linear flutter analyses (only considered structural nonlinearity). Although there was a 28 % reduction in flutter speed between the linear (zero freeplay) and non-linear (0.3 degrees freeplay) flutter analyses, the non-linear margin of safety exceeded the required 15 percent.</p> <p>The free play limits for all-movable canards on two different demonstrator aircraft were established at 0.3 degrees and 0.286 degrees peak to peak. For one of these demonstrator aircraft, a canard free play tracking program was established with frequent periodic checks. The canards on the other aircraft had very large flutter speed margins. No canard flutter problem occurred during the flight test program although during one flight an unusual amount of canard response on one side was noted on the transmitted data which was attributed to free play effects. A ground check indicated excessive free play and a new canard pivot pin was installed to reduce the free play to within limits.</p> <p>On the other hand, the free play limit for an all-movable vane on a large bomber aircraft was recommended by the contractor to be 0.034 degrees as recommended in the Guidance above. Also, a more stringent requirement, than the above applicable recommended limit, for the free play of the large geared aft rudder segments, is being used on a large cargo aircraft. Since these full span aft rudders are larger surfaces than conventional geared tabs, it was decided to impose stringent free play requirements (0.18 degrees peak to peak instead of the above recommended 0.57 degrees). This free play limits was based based on successful experience with a similar rudder configuration on a commercial aircraft.</p> <p>A good discussion of non-linear flutter analyses method is given by Dr.Craig L.Lee in "An Iterative Procedure for Non-linear Flutter Analysis", AIAA Journal, Vol. 24, No. 5, May 1986, page 833. This method only considered structural non-linearity.</p> <p>A.4.7.4 Free play of control surfaces and tabs.</p> <p>The analyses and tests of 4.7 shall be sufficient scope to verify that airframe components, control surfaces and tabs, and actuating systems meets the free play requirements of 3.7.4.</p> <p>...</p>
<p>Defence Standard 07-85 (Part 3) 24/12/1999 (ver [Def99])</p>	<p>Ministry of Defence Design Requirements for Weapons and Associated Systems Part 3 Supporting Information</p>	<p>...</p> <p>This chapter provides further general guidance on structures. It should be read in conjunction with Part 2 Chapter 6-01 (ver [Def06b]).</p> <p>...</p> <p>35.6.1. Steady effects</p> <p>...</p> <p>a. Fluid dynamic loads</p> <p>...</p>

Normas de Certificación sobre no linealidades estructurales (Continuación).

<p>Defence Standard 07-85 (Part 3) (Continuación)</p>		<p>iii. The effect of body upwash and downwash on rear mounted wings/fins should be considered.</p> <p>iv. For bodies, fluid dynamic loadings at low incidence may be based on slender body theory. At high incidence, the effect of viscous cross-flow becomes increasingly important.</p> <p>v. For configurations where very low aspect ratio wings are attached over a substantial length of the body, the wing chordwise deformations may follow closely the body deformations and in such cases, the weapon is best treated as a whole. This may also be done using slender body theory.</p> <p>...</p> <p>b. Structural effects</p> <p>i. ... However, in general, weapon wings/fins are of low aspect ratio and consequently chordwise deformations are of importance. Hence the methods of simple beam theory are no longer adequate and it is essential to use methods based on plate type theories.</p> <p>ii. Low aspect ratio wings/fins may require attachments to the weapon body at several points, the most forward often being a shear pin. It is essential to incorporate the effects of attachment compliance adequately into the flexibility matrix. In the case of movable control fins, the influence of the actuator should also be taken into account.</p> <p>iii. Due to the complex behaviour of some wing/fin structures, particularly built up ones, and to the importance of attachment stiffness, the theoretical prediction model should be validated against experimental data for the particular form of construction used. iv. To estimate the structural deformation of weapon bodies, it is normally adequate to use an analysis based in simple beam theory. Joint flexibility may be important, particularly in the case of multi-stage weapons and slender bodied weapon configurations. The effect of internal pressure arising in the case of a rocket motor should not be overlooked. v. In some cases it may be necessary to take particular account of structural non-linearities, particularly when the limit loads are acting. Allowance should also be made for temperature effects.</p> <p>...</p> <p>35.6.2 Dynamic effects</p> <p>a. ...to assess the resultant fluid dynamic effects arising from rapidly applied loads, oscillatory derivatives as used in flutter calculations should be used.</p> <p>...</p> <p>35.8 Flutter</p> <p>...</p> <p>c. Pitching Flutter</p> <p>...</p> <p>v. All missile control surfaces will possess some stiffness and damping contributed by the actuator system. It will be found in practice that this stiffness and damping may well be sufficient to prevent pure pitching instability. For hydraulic actuators impedance matching techniques may be used and reserve margins can be based upon stiffness and/or damping in the system. In the case of pneumatic actuators the actuators impedance is very low and the best practical way to achieve freedom from flutter will be to ensure that a zero or negative impedance is required to induce a flutter condition.</p> <p>...</p> <p>35.9 Structural response to external excitation</p> <p>...</p>
---	--	---

Normas de Certificación sobre no linealidades estructurales (Continuación).

<p>Defence Standard 07-85 (Part 3) (Continuación)</p>		<p>35.9.3 Structural descriptions ... c. Special considerations i. Damping. An accurate theoretical description of the energy dissipation due to internal damping is in general difficult to achieve. In consequence a more practical approach, often used, is to estimate a damping value based on the mass or stiffness description of the structure, or in the case of a modal description, to obtain modal damping from an estimated value of damping ratio (viscous damping) or loss factor (hysteresis damping). For most aerospace structures a viscous damping ratio of 0,5 % to 2 % of critical is commonly experienced. In cases where the damping has a significant effect on the predicted response, a condition which is easily checked by varying the value used, then determination of the damping value from experiment is a convenient approach. In circumstances where high damping exists, viz: reinforced plastic structures, then the conventional damping models (viscous or hysteresis) may prove inadequate and hence a more suitable model of the internal energy dissipation may have to be formulated. ii. Linearity. The assumption of linear elastic structural behaviour is commonly employed. Although all structures are non-linear to some degree, representation by a system of linear equations is often a good approximation. Consideration of non-linear behaviour becomes important when materials are stressed well beyond the elastic limit, when materials with significantly different tension-compression properties are used, when initial joint preload and/or gaps are exceeded, when compression only load paths are present, or when large structural deformations are produced. Special purpose procedures are available that handle some non-linear effects for a limited range of structures. However, the cost of non-linear analysis is generally high. ... 35.9.5 Modal response methods - impulsive excitation ... f. Integration algorithm stability. The use of numerical integration in the solution of the system equations of motion for impulsive excitation problems is a very powerful tool. Unfortunately, as the integration algorithm is being used in a predictive role, the problem of accuracy and stability arises (a considerable number of papers have been written on the subject and it is not intended to reiterate them here). However, in general, algorithms of second order or less (such as rectangular or trapezoidal) are inherently stable and algorithms of a higher order (Simpson, Runge-Kutta) are likely to become unstable if the time step between successive integrations becomes too large. On this basis, the commonly used Newmark-Beta integration algorithm should only be considered second order (that is inherently stable) for values of beta up to one quarter (when alpha has a value of one half). The inherently stable algorithm should not be considered immune from problems, as in general, whilst a higher order algorithm becomes unstable if too great a step is used, the low order algorithms become inaccurate for the same reason. In consequence it is a wise precaution to test accuracy and/or stability by significantly reducing the size of the time step to ensure that the vibration in the predicted responses are acceptable. ... 35.10 Control stability ... 35.10.3 Weapon response at weathercock frequencies ...</p>
---	--	---

Normas de Certificación sobre no linealidades estructurales (Continuación).

<p>Defence Standard 07-85 (Part 3) (Continuación)</p>		<p>c. In determining the contribution to the aeroelastic corrections from wings, tail surfaces and control surfaces, all relevant modes of deformation should be taken into account. Special attention should be given to the effects of chordwise bending of wings and fins particularly at supersonic speeds.</p> <p>...</p> <p>35.11 Determination of dynamic structural characteristics</p> <p>...</p> <p>b. Calculation of stiffness properties</p> <p>...</p> <p>ii. The methods of calculation commonly used are simple beam, plate and finite element. The finite element method is to be preferred for complicated structures on the grounds of versatility and accuracy. However, it is important to be able to check the frequency and modal shape of the fundamental modes with a simpler method. For example, it is generally found in practice that the use of a simple beam method, taking due account of shear flexibility, yields surprisingly good results which are quite acceptable for calculating the fundamental modes of vibration of the weapon.</p> <p>iii. It is important to assess the effect of flexibility associated with joints in the weapon. Predicting flexibility generally defies rigorous theoretical analysis, because of intrinsic non-linearities, therefore it is desirable that measurements should be made on test specimens under representative conditions at a relatively early stage in the design. In the absence of this information, studies should be carried out to evaluate the sensitivity of this flexibility.</p> <p>iv. In addition to the flexibility arising from joints in the missile body, consideration should also be given to the effects of any abrupt changes in the properties. Separation joints of the kind considered above may be particularly susceptible to variations in stiffness with applied load.</p> <p>...</p> <p>d. Structural damping</p> <p>i. In the design of weapon structures damping plays a fundamental role, and the lack of detailed knowledge of the modal damping can result in significant errors in predicted structural response.</p> <p>ii. Structural damping is the sum of the effects of viscosities of the materials and of friction due to relative motion of parts of the joints. The damping due to friction at joints is the more important because it is much the larger fraction of the total, but it is not linear with amplitude and frequency. Due account should be taken of the latter effect.</p> <p>iii. The prediction of damping is difficult, and generally the problem of the determination of damping distribution has yet to be resolved... However, values have to be assumed in the design stages such as 2% critical damping for built-up structures and 1% for large masses cantilevered off structures.</p> <p>iv. In 'hard' flutter that is when aerodynamic effects are large, the effect of structural damping is small and therefore, in general, there is no need for accurate assessments. However in structural response the effect of low damping values can be large (specially in periodic or random response analysis) and therefore there is a need for an accurate assessment. There are 'soft' flutter conditions, in which the effect of structural damping can be dominant because the aerodynamic damping is low. In transient response analysis, the effect of low levels of structural damping on the maximum amplitude is small.</p>
---	--	--

<p>Defence Standard 07-85 (Part 3) (Continuación)</p>		<p>e. Degrees of freedom ... ii. The number of degrees of freedom of a structural and mechanical system is equal to the minimum number of independent co-ordinates required to define the position of the relevant parts of the system at any instant of time. Therefore, it is important to define the model to have necessary and sufficient response to the exciting force or motion. The definition of a suitable set of freedoms, which may be in the form of normal modes of freedom, must come from the experience. In the early design stage it may be expedient to reduce the problem to one or two relevant modes. For example, in loading response, it may be adequate for the model to comprise only a rigid body plus a fundamental flexible mode. iii. One approach is to find the modes of component parts viz. body, fins, wing, in isolation, and connect these together with assumed modes of attachment at the joints; this is the Branch Mode method. ... 35.11.2 Stiffness tests ... b. Test procedure - general ... ii. It is important to check the load versus deflection curves for any signs of non-linearity, hysteresis, backlash and for stiffness characteristics which show that parts of the structure have become ineffective (such as due to skin buckling). ... c. Effects of non-linearity i. In the case of structural joints and interfaces between control jacks and structure, it is essential that the deflection measurements should be obtained over the full load cycle in order to evaluate the backlash, friction and total hysteresis of the system. ii. If the measured non-linearity or hysteresis is significant a modified approach should be used. It is usual for the structure to be loaded with a system of loads representing each important load case and influence coefficients obtained from small variations about this load distribution. Over this small range the structure is assumed to be linear. For example, it would be possible to obtain data to calculate the variation of the natural frequencies with loading. iii. The effects of variations in the longitudinal loading on stiffnesses should be investigated, particularly those involving joints. ... 34.11.4 Impedance test of a power control unit ... d. Additional features that should be included in the mathematical model validation process are power control unit demands, steady output loads, alternative modes of operation, hydraulic failure conditions, stiffness of the end fittings and bearings and backlash if appropriate. 35.13 Strength and stiffness testing - general ... 35.13.3 Special considerations for 'free flight' cases ...</p>
---	--	---

Normas de Certificación sobre no linealidades estructurales (Continuación).

<p>Defence Standard 07-85 (Part 3) (Continuación)</p>			<p>...</p> <p>d. The correct measurements of the centre line deflections</p> <p>i. In a body test a simple row of dial gauges or deflection transducers along the top of the body may be sufficiently accurate, particularly if the deflections are a significant proportion of the major cross-sectional dimension such as a deflection of 10mm or more on a 500mm diameter body.</p> <p>ii. However, if deflections are much smaller than 10mm, as is likely to occur near support points, then local distortions due perhaps to aeroelastic effects may mask the centre line deflections. In these cases it may be desirable to mount transducers on top and bottom of the specimen or on each side at the centre line or even both if it is desired to obtain information on these local effects. Angular deflection can be monitored conveniently by use of scale lamps and suitable mounted mirrors or by angular transducers.</p> <p>...</p>
<p>U.S.Department of Transportation 27/09/2000 ([FAA00])</p>	<p>Information: Free-play limits and inspection procedures for flutter prevention, 25.629 and Advisory Circular (AC) 25.629-1A.</p>	<p>FAA</p>	<p>[Incluido por su interés en el apéndice A] The establishment of free-play (or backlash) limits for control surfaces, and the associated periodic inspection procedures for excessive free-play, has been a long standing certification practice for compliance with 25.629, as discussed in AC 25.629-1A.</p> <p>...</p> <p>One of the reasons for some of the recent in-service events is related to changing technology. The control of free-play is usually associated with irreversible control surfaces. These are control surfaces that are not balanced to preclude flutter but prevent flutter by having a degree of rotational stiffness with respect to forces applied to the surface. Formerly such irreversible control surfaces were mainly limited to small tabs, but since the mid-1980's manufacturers have come to rely on retained stiffness in powered actuators for the main control surfaces and they have dispensed with the mass balance weights on the elevators, rudders, and ailerons. Controlling free-play on these larger control surfaces is even more important since they have a much larger destructive potential if they should vibrate with a significant amplitude or develop divergent flutter. Trimable stabilizers are also large irreversible surfaces that can lead to severe vibration events if adequate free play limits and procedures are not prescribed for the stabilizer actuators and pivot bearings.</p> <p>...</p> <p>In summary, reliable free-play inspection procedures, suitable inspection intervals, and free-play limits for all the unbalanced control surfaces and trimable stabilizer should be established as part of the compliance determination for 25.629. The limits, intervals, and associated procedures should be evaluated and approved as part of the certification process and subsequently prescribed as maintenance limitations for the airplane.</p> <p>...</p>
<p>AC No. 23.629-1B Federal Aviation Administration FAA. 28/09/04 ([AC204])</p>	<p>Means of Compliance with Title 14 CFR, Part 23, Section 23.629, Flutter. Federal Aviation Administration FAA.</p>	<p>FAA</p>	<p>... Ground testing would normally include free play measurement of All Control Surfaces and Tabs.</p> <p>... The total freeplay of each aileron with the other aileron clamped to the wing must not exceed the specified maximum.</p> <p>... Tabs: ... all reversible tabs should be 100 percent statically balance about the hinge line. In practice, most tabs are irreversible, which means:</p> <p>(1) For any position of the control surface and tab, no appreciable deflection of the tab can be produced by means of a moment applied directly to the tab when the control surface is held in a fixed position.</p> <p>(2) The total freeplay at the tab trailing edge must be less than 2.5 percent of the tab chord aft of the hinge line, at the station where the free play is measured. However, since in service wear may increase the free play, we recommend the following tighter tolerances as a maximum from the initial design:</p>

Normas de Certificación sobre no linealidades estructurales (Continuación).

<p>AC No. 23.629-1B (Continuación)</p>			<p>(1) If the tab span does not exceed 35 percent of the span of the supporting control surface, the total free play should not exceed two percent of the distance from the tab hinge line to the trailing edge of the tab perpendicular to the tab hinge line.</p> <p>(2) If the tab span equals or exceeds 35 percent of the span of the supporting control surface, the total free play should not exceed one percent of the distance from the tab hinge line to the trailing edge of the tab perpendicular to the tab hinge line.</p> <p>...</p> <p>Spring loaded tabs are free to rotate and thus are not irreversible. Generally, these tabs will require dynamic as well as static balance. Extensive flutter analysis is always needed to define these requirements.</p> <p>... Control surfaces and tabs are mass balanced to prevent rotation about their hinges resulting from inertial response to motion of the main (primary) surface, in any flutter mode. When the flutter mode consists of motion about some axis perpendicular to the control surface hinge axis, a concentrated ballast is most efficiently used. Caution should be used to assure that its location is in a high response area of the mode, which is difficult to determine when the mode is complex. Caution...</p>
<p>Notice of Proposed Amendment (NPA) No 11/2004 NPA 25BCD-236 01/11/04 ([?])</p>	<p>Vibration, Buffet and Aeroelastic Stability</p>	<p>EASA</p>	<p>...</p> <p>Since most manufacturers will already design for both CS-25 and FAR 25 it is not expected that these changes will result in a significant change, either positive or negative, to large aeroplane design practice.</p> <p>...</p> <p>3.2.4 Failure of any single element of the structure supporting any engine, independently mounted propeller shaft, large auxiliary power unit, or large externally mounted aerodynamic body (such as an external fuel tank).</p> <p>...</p> <p>4.4 Consideration of free play be incorporated as a variation in stiffness to assure adequate limits are established for wear of components such as control surfaces actuators, hinge bearings, and engine mounts in order to maintain aeroelastic stability margins.</p> <p>...</p> <p>El siguiente párrafo demuestra que no se especifican análisis específicos para el estudio de no linealidades estructurales: ...</p> <p>5.1.2 Types of Analyses</p> <p>5.1.2.1 Oscillatory (flutter) and non-oscillatory (divergence and control reversal) aeroelastic instabilities should be analysed to show compliance with CS 25.629.</p> <p>5.1.2.2 The flutter analysis methods most extensively used involve modal analysis with unsteady aerodynamic forces derived from various two- and three-dimensional theories. These methods are generally for linear systems. Analyses involving control system characteristics should include equations describing system control laws in addition to the equations describing the structural modes.</p> <p>5.1.2.3 Aeroplane lifting surface divergence analyses should include all appropriate rigid body mode degrees-of-freedom since divergence may occur for a structural mode or the short period mode.</p> <p>5.1.2.4 Loss of control effectiveness (control reversal) due to the effects of elastic deformations should be investigated. Analyses should include the inertial, elastic, and aerodynamic forces resulting from a control surface deflection.</p> <p>...</p> <p>5.1.4 ... The analyses may be used to determine the sensitivity of the nominal aircraft design to aerodynamic, mass, and stiffness variations. Sources of stiffness variation may include the effects of skin buckling at limit load factor, air entrapment in hydraulic actuators, expected levels of in-service free play, and control system components which may include elements with non-linear stiffness.</p> <p>...</p>

Normas de Certificación sobre no linealidades estructurales (Continuación).

<p>Notice of Proposed Amendment (NPA) No 11/2004 (Continuación)</p>			<p>...</p> <p>5.1.4.1 ... Free play effects should be incorporated to account for any influence of in-service wear on flutter margins.</p> <p>...</p> <p>5.1.4.3 ... The combined free play of the damper and supporting elements between the control surface and fixed surfaces should be considered.</p> <p>...</p> <p>5.2.2 Control System Component Tests. When reliance is placed on stiffness or damping to prevent aeroelastic instability, the following control system tests should be conducted. If the tests are performed off the aeroplane the test fixtures should reflect local attachment flexibility.</p> <p>...</p> <p>...</p> <p>(ii) Flutter damper tests should be conducted to verify the impedance of damper and support structure. Satisfactory installed damper effectiveness at the potential flutter frequencies should, however, be assured. The results of these tests can be used to determine a suitable, in-service maintenance schedule and replacement life of the damper. The effects of allowable in-service free play should be measured.</p> <p>...</p> <p><i>The proposals of this NPA have been fully harmonised with the requirements of FAR 25 under the auspices of the Loads and Dynamics Harmonisation Working Group of the Aviation Rulemaking Advisory Committee (ARAC). A Notice of Proposed Rulemaking (NPRM) is being produced by the FAA that will match the requirement changes described herein. An Advisory Circular (AC 25.629-1A) is also being produced that will align with the proposed ACJ 25.629.</i></p> <p>...</p>
<p>MIL-HDBK-516B 26/09/2005 (ver [MHB05])</p>	<p>Department of Defense Handbook. Airworthiness Certification Criteria.</p>	<p>Dep. of Defense USA</p>	<p>... This document establishes the airworthiness certification criteria to be used in the determination of airworthiness of all manned and unmanned, fixed and rotary wing air vehicle systems. It is a foundational document to be used by the system program manager, chief engineer, and contractors to define their air system's airworthiness certification basis.</p> <p>This handbook is for guidance only. This handbook cannot be cited as a requirement. If it is, the contractor does not have to comply.</p> <p>...</p> <p>5.2 Structural dynamics.</p> <p>...</p> <p>5.2.3 Verify that the control surfaces and tabs contain sufficient static and dynamic mass balance, or sufficient bedding, torsional, and rotational rigidity; or a combination of these means to prevent flutter; or sustained, limited-amplitude instabilities of all critical modes under all flight conditions for normal and failure operating conditions of the actuation systems. Verify that all control surfaces and parts thereof are free from single-degree-of-freedom flutter, such as buzz. Also verify that all other air vehicle components exposed to the airstream, such as spoilers, dive brakes, scoops, landing gear doors, weapon bay doors, ventral fins, movable inlet ramps, movable fairings, and blade antennas are free from aeroelastic instability.</p> <p>...</p>

Normas de Certificación sobre no linealidades estructurales (Continuación).

MIL-HDBK-516B (Continuación)			<p>6.1.3.9 Verify safe stability and control dynamics under symmetrical and asymmetrical maneuvers, with and without stores, for.:</p> <ul style="list-style-type: none"> a. Control surface float angles. b. Control surface blow-back. c. Control surface nonlinearities. d. The vehicle control system or actuation functions to overcome actual moments. e. Establishing levels of flying qualities for the vehicle. f. Control surface hinge moment limiting.
Defence Standard 07-85 (Part 1) 13/01/2006 (ver [Def06a])	Ministry of Defence Design Requirements for Weapons and Associated Systems Part 1 Mandatory Design Requirements		<p>Se define el término <i>crutching</i> con aplicación al equipo de interface entre misil y avión: Crutching... also called "sway bracing", it is the prevention of store roll rotation about the suspension hook load reaction faces, and the elimination of free play between store and suspension unit.</p>
DEF STAN 00-970 PART 1/3 SECTION 4 (Issue 4) 27/01/06 (ver [Def07a])	Leaflet 24 Aeroelasticity Main Surface Flutter		<p>...</p> <p>1.1 This leaflet gives recommendations for the prevention of main surface flutter. Since this form of flutter can have a considerable influence in determining the configuration and the structural weight of an aeroplane it should be considered at an early stage in design. The leaflet was previously issued as Leaflet 500/2.</p> <p>...</p> <p>2.4.3 Calculation of main surface stiffness will usually give acceptable accuracy but the accuracy of fuselage calculations depends to a large extent on the influence of structural cuts-outs and access doors, such features being difficult to idealise. The calculated stiffnesses of structural joints can be overestimated by 100 % or more, and it is of particular importance to establish the variation of flutter speed for a realistic range of attachment stiffness in calculation.</p> <p>...</p> <p>4.4.4 For high speeds aeroplanes, point (b) on the flutter boundary will often lie in the flight envelope. In such cases, an adequate flutter margin may be achieved by increasing the tailplane pitch and torsional stiffnesses in combination but an increase in pitch stiffness alone is usually the economical solution. To ensure adequate pitch stiffness it is of particular importance that sufficient space exists in the design for an actuator of adequate size and with an adequate moment arm about the pivot. When defining stiffness requirements, it should be borne in mind that partial failure of the aeroplane hydraulic system will reduce actuator stiffness. If stalled, an actuator will provide less stiffness, increasing the likelihood of flutter, but it will possibly also provide more damping which will counteract the effect of the reduced stiffness. Backlash can reduce the tailplane flutter speed by reducing the effective pitch stiffness at small amplitudes. For design purposes, a limit of 0.0009 rads peak-to-peak is recommended.</p> <p>...</p>

Normas de Certificación sobre no linealidades estructurales (Continuación).

<p>DEF STAN 00-970 PART 1/3 SECTION 4 (Issue 4) 27/01/06 (ver [Def07b])</p>	<p>Leaflet 25 Aeroelasticity Flutter of Control Surfaces (Ailerons, Elevators and Rudders)</p>		<p>...</p> <p>2 PREVENTION OF CLASSICAL FLUTTER</p> <p>2.1 One of the two principal methods of preventing classical flutter of control surfaces is to arrange that the inertia couplings between the control rotation modes and the pertinent distortion nodes of the main surface have suitable values, generally near zero, by adding mass to the control surface at appropriate places. This is the classic method of prevention by massbalance. The other method is to ensure that the operating system of the control is stiff enough for the natural frequencies of the control surface rotation modes in still air to be high enough for all the flutter speeds that exist to be far enough above the limit speed of the aeroplane. Other methods of flutter prevention are available including damping the control surface rotation artificially.</p> <p>...</p> <p>4. STIFFNESS</p> <p>...</p> <p>4.7 BACKLASH</p> <p>4.7.1 The limit of permissible backlash recommended for design purposes is $\pm 0,1^\circ$ in the case of main control surfaces and $\pm 0,5^\circ$ in the case of geared and trim tabs.</p> <p>...</p> <p>9 DESIGN CONSIDERATIONS FOR BUZZ</p> <p>9.1 GENERAL</p> <p>9.1.1 Unlike classical coupled flutter, control-surface buzz is not predictable during design. However immunity from buzz can be assured by making the natural frequency of the control surface sufficiently high or by incorporating enough mechanical damping.</p> <p>9.1.2 Information regarding the bounds of the frequency and mechanical damping required is contained in Ref. 3. It appears that no buzz will occur if the product of the natural frequency in hertz and the control surface chord in meters is greater than 35. However, it is almost certain that the attainment of this value is impracticable. The designer can do little more than bear in mind features that are beneficial to the avoidance of buzz. These are:</p> <p>(i) the absence of backlash in control mechanism,</p> <p>...</p>
<p>Federal Aviation Administration Memorando ANM-05-115-019 04/09/2006 ([FAA])</p>	<p>Interim Guidelines for Certification and Continued Airworthiness of Unbalanced Control Surfaces with Freeplay and Other Nonlinear Features.</p>	<p>FAA</p>	<p>Memorando ANM-05-115-019, incluido en el apéndice A.</p> <p>This memorandum clarifies Federal Aviation Administration (FAA) interim guidelines for the design, certification, and continued airworthiness of control surfaces that rely on retention of restraint stiffness for flutter prevention. These control surfaces typically do not have added mass balance; however, these interim guidelines would apply to some control surfaces that are partially mass balanced. Specifically, this memorandum provides acceptable means of establishing and certifying freeplay limits and inspection procedures, guidance for managing freeplay over the airplane service life, and a means of finding compliance for control system designs whose failure can result in a nonlinear aeroelastic configuration and limit cycle oscillation (LCO).</p>

<p>FAA Memorando ANM-05-115-019 (Continuación)</p>		<p>...</p> <p>In-flight vibration incidents occurring during the past ten years indicate that some transport airplanes with unbalanced control surfaces have been prone to chronic vibration in service. ... Following a review of existing guidance material, the FAA concluded that supplementing AC 25.629-1A would clarify and standardize guidance for the certification of control surface configurations with freeplay and other nonlinear features. The current guidance is inadequate for validating maintenance requirements during certification, as well as for preparing instructions for continued airworthiness to manage wear and freeplay during the airplane service life.</p> <p>Accounting for the effect of control surface freeplay on airplane flutter margins has been a longstanding certification practice for compliance with 25.629, as discussed in AC 25.629-1A. In addition, it is general industry practice to manage freeplay of irreversible control surfaces in service by making periodic checks and adjustments. Troubleshooting procedures used by operators to detect and correct wear-induced freeplay have generally resolved vibration problems. When control systems and supporting structures on certain airplane models were found to be subject to persistent wear, design changes were made to improve wear qualities and reduce maintainance action. However, the procedure did not usually distinguish nuisance vibration from freeplay-induced LCO of control surfaces that could have safety implications. The LCO events on unbalanced control surfaces in transport category airplanes during normal operation are unacceptable.</p> <p>...</p> <p>...In the past, the FAA considered the freeplay limits of the military specification MIL-A-8870C adequate to provide assurance of freedom from control surface vibration and has accepted these limits for certification without further proof. The FAA has also accepted higher freeplay limits than the military limits when based on service experience or flight test. This memorandum recognizes that MIL-A-8870C limits are often conservative and provides for the use of higher freeplay limits using a demonstration of adequate service experience or a validated analytical approach.</p> <p>Advisory Circular 25.629-1A states that freeplay should be accounted for analytically by making a change in control surface restraint stiffness and calculating the effect on flutter margins in a conventional linear flutter analysis. In the same manner, the velocity-squared damping provided by hydraulic actuators has been approximated by a linear damping element and included in the flutter analysis, again assessing the effect on flutter margins. Accounting for freeplay by linear analyses, while adequate to prove freedom from divergent flutter, has been inadequate to prove freedom from LCO. Thus, in the past the stability and structural integrity of LCO has not been adequately addressed in the compliance finding for 25.629. Freedom from LCO should be established by including freeplay, velocity-squared damping, or any other non-linear element into the equations of motion and solving for the resulting motion, forces, and stability of the aeroelastic system. The FAA recognizes this deficiency in AC 25.629-1A and provides guidance in this memo for a validated nonlinear aeroelastic analysis to establish the stability and structural integrity of these configurations. .</p> <p>For new or modified control surfaces, the MIL-A-8870C limits may be too small to be practically controlled in a realistic service environment. In such cases, the applicants may provide analyses and/or flight tests to confirm the adequacy of larger freeplay limits. For these larger freeplay limits, the applicants should verify the absence of freeplay-induced vibration by flight or wind tunnel test to V_{DF}/M_{DF} (Nota: V_D/M_D es el par Velocidad/Mach de diseño para la velocidad de <i>diving</i>, mientras que V_{DF}/M_{DF} es el par Velocidad/Mach de <i>diving</i> demostrado en vuelo, que debe ser menor o igual a V_D/M_D), and/or by aeroelastic analysis to V_D/M_D using a configuration containing the proposed in-service freeplay limits. They should use a validated method of analysis, as described in section c, for verification.</p>
--	--	---

Normas de Certificación sobre no linealidades estructurales (Continuación).

<p>FAA Memorando ANM-05-115-019 (Continuación)</p>		<p>c. Aeroelastic Stability Analyses</p> <p>... Freeplay may be addressed as a variation in nominal control surface restraint stiffness in the conventional linear flutter analysis. Applicants should evaluate the effect of the variability of other nonlinear elements, such as hydraulic damping, on flutter margins in a similar manner...</p> <p>...</p> <p>In addition to conventional flutter analyses, nonlinear aeroelastic analyses may be necessary to establish the stability and oscillatory amplitude of configurations with LCO. Examples are failure cases that result in freeplay-induced vibration or failure cases where divergent flutter is prevented by devices with nonlinear characteristics, such as a hydraulic damper. Applicants should validate the analysis methodology by flight test, if it can be done safely, or by wind tunnel test. They should use a combination of ground vibration test, component test, and lab tests to establish essential nonlinear characteristics for analytical model validation.</p> <p>d. Failure Conditions For any failure condition addressed by 25.571, 25.629 or 25.671 that results in LCO, it should be determined by test or analysis at the critical flight conditions that the LCO would: (1) Result in a stable condition, and should decay to an acceptable limited amplitude once an external perturbing force is removed, (2) Not result in loads that would cause static or fatigue failure of structure, (3) Not result in repeated loads that would preclude safe flight and landing before the failure is detected, (4) Not result in a vibration condition on the flight deck that is severe enough to interfere with control of the airplane or to cause excessive fatigue to the crew.</p> <p>...</p> <p>e. Instructions for Continued Airworthiness</p> <p>The applicant should establish maintenance instructions to ensure that control surface mass balance limits or freeplay limits are not exceeded throughout the life of the airplane....</p> <p>...</p> <p>(3) Freeplay in control surfaces that rely on the retention of stiffness for flutter prevention should be certified and managed throughout the life of the airplane. The applicant should account for wear and growth in freeplay between inspection intervals so the certified freeplay limits are not exceeded. ...</p> <p>(4) The applicant should establish reliable inspection procedures during certification and validate them by engineering test, which would include a determination of load versus deflection characteristics to isolate freeplay from elastic deformation of the airframe. The applicant should assess the human factors of the inspection procedure to avoid the possibility of not measuring the freeplay accurately.</p> <p>...</p> <p>Effect of These Interim Guidelines</p> <p>These interim guidelines do not constitute a new regulation or create what the courts refer to as a "binding norm". The FAA individual or designee should follow these guidelines when applicable to the specific project. Whenever a proposed method of compliance is outside these guidelines, it must be coordinated with the Transport Standards Staff (TSS).</p> <p>The project officer and technical specialists, in coordination, will determine if an issue paper is needed, or if an item of record is more appropriate for providing consistency. Similarly, if the implementing office becomes aware of reasons that an applicant's proposal should not be approved, the office must coordinate its response with the TSS.</p> <p>Applicants should expect that the certification officials would consider this information when making findings of compliance relevant to new certificate actions. In addition, as with all advisory material, this memorandum identifies one means, but not the only means, of compliance.</p>
--	--	--

Normas de Certificación sobre no linealidades estructurales (Fin de tabla).

2.5. Métodos de Cálculo: Estado del Arte

A modo de resumen se indican a continuación los principales métodos de cálculo aeroelástico en sistemas con no linealidades estructurales:

1. Integración numérica de las Ecuaciones de estado-espacio:

Se resuelven las ecuaciones aeroelásticas (ecuaciones diferenciales ordinarias EDO de 2º orden) en el dominio del tiempo, formulándolas previamente en el estado-espacio.

La formulación de las ecuaciones aeroelásticas en la forma estado-espacio necesita desarrollar las fuerzas aerodinámicas en el dominio del tiempo. En algunas ocasiones las fuerzas aerodinámicas pueden formularse directamente en el dominio del tiempo: perfil 2D en flujo incompresible no viscoso (función 2D de Wagner/Theodorsen en [The35], [AH02] o [Blo96]), flujo incompresible 3D (vortex-lattice con desprendimiento de estela o *Boundary Element Method* de [Ell06]) o aerodinámica cuasi-estacionaria ([KSK99] estudia un perfil 2D formulando la sustentación y momento con la teoría cuasi-estacionaria de [Fun93]). Sin embargo, en otros problemas 3D con flujo compresible, las fuerzas aerodinámicas se deben calcular en el dominio de la frecuencia (típicamente mediante el método Doublet-Lattice, ref. [AR69]) y obtenerlas posteriormente en el dominio del tiempo mediante Métodos de Aproximación Racional (consultar [Dow80] o [TA88]). Los métodos de aproximación racional más conocidos son:

- a) Método de Roger & Abel ([Abe79], [BE88]): La relación entre fuerzas/desplazamientos de los puntos estructurales del modelo viene dada por:

$$\{F_u\} = q_\infty [Q_u] \{u\}$$

donde $[Q_u]$ es la denominada *Matriz de Coeficientes de Influencia Aerodinámicos* y la proporciona cualquiera de los códigos en el dominio de la frecuencia, siendo el más estándar el método Doublet-Lattice. Los desplazamientos estructurales $\{u\}$ se escriben como una combinación lineal de modos:

$$\{u\} = [\phi] \{\xi\}$$

donde $\{\xi\}$ es el vector de *Coordenadas Generalizadas* y $[\phi]$ es la matriz con el set de modos ordenados en columnas. Las *Fuerzas Aerodinámicas Generalizadas* son las fuerzas aerodinámicas sobre el sistema en la base modal, i.e.:

$$\{F_\xi\} = [\phi]^T \{F_u\} = q_\infty [\phi]^T [Q_u] [\phi] \{\xi\} = q_\infty [Q_\xi] \{\xi\}$$

donde $[Q_\xi]$ son las *Matrices Aerodinámicas Generalizadas* que depende de la frecuencia del movimiento (*frecuencia reducida* k) y del número de Mach M_∞ . Estas matrices son las que se aproximan mediante:

$$[Q_\xi(k)] = [A_1] + [A_2] (ik) + [A_3] (ik)^2 + \sum_{m=4}^{M+3} \frac{[A_m] (ik)}{(ik) + k_m}$$

donde las constantes k_m se determinan para conseguir el mejor ajuste a las matrices $[Q_\xi(k)]$ y las matrices $[A_m]$ se calculan mediante el método de mínimos cuadrados. [NM69] desarrolla un método para buscar de forma sistemática los valores k_m .

b) Método de Burkhart (3D): ver por ejemplo la referencia [Bur77], en la que se analiza la respuesta aeroelástica del estabilizador horizontal del F/A-18 en presencia de no linealidades estructurales.

c) Aproximaciones de Padé ([Vep76]):

Dada la fuerza generalizada $f(k)$, función de la frecuencia reducida k , la aproximación de Padé de orden (m, n) es la función racional $R(k)$:

$$R(k) = \frac{p_0 + p_1k + p_2k^2 + \dots + p_mk^m}{1 + q_1k + q_2k^2 + \dots + q_nk^n}$$

y se calcula ajustando $R(k)$ a $f(k)$ hasta el mayor orden posible, i.e.,

$$\begin{aligned} f(0) &= R(0) \\ f'(0) &= R'(0) \\ f''(0) &= R''(0) \\ &\dots \\ f^{m|n}(0) &= R^{m|n}(0) \end{aligned}$$

de forma que $f(k) - R(k) = o(k^{m+n})$.

d) Método de Karpel: ver por ejemplo la referencia [BL02] en la que se aproximan matrices calculadas en el dominio de la frecuencia con el método Doublet-Hybrid, [BLSL02] utiliza el método Doublet-Point para flujo bidimensional, [Kar82] aplica el método de Karpel para cálculos aeroservoelásticos (alivio de cargas de ráfaga y supresión de *flutter*), o [RLK00] que aplica la aproximación racional a cargas calculadas con códigos CFD.

Una vez calculadas las fuerzas aerodinámicas en el dominio del tiempo, las ecuaciones aeroelásticas se formulan en el estado-espacio y se integran en el tiempo. Las técnicas de integración en el dominio del tiempo son variadas, desde los conocidos métodos de Runge-Kutta de distinto orden hasta métodos más específicos para no linealidades con esquinas (tipo *freeplay* o *hysteresis*) como el método de Henon ([CVD96]). Se destacan los siguientes métodos:

- Métodos explícitos de Runge-Kutta: métodos estándar de integración de ecuaciones diferenciales que pueden encontrarse en cualquier referencia. De todas ellas es destacable la referencia [PVTF96], un compendio de métodos numéricos enfocado a aplicaciones científicas con Fortran, o la referencia [SMTU04], en la que se desarrollan métodos matemáticos (analíticos y numéricos) aplicados a la ingeniería, incluyendo solución de sistemas no lineales.
- Método implícito de Newmark ([New59] o [Aré03]): método implícito equivalente a un Runge-Kutta de 2º orden ([BGC02]).
- Método de diferencias finitas de Houbolt ([Hou50], [LD86], o [Bro98]): el más utilizado es el de 4º orden y, aunque propociona menor precisión que los métodos de Runge-Kutta, presenta la ventaja de ser menos costoso desde el punto de vista computacional. Otras aplicaciones del método de Houbolt ([Hou50]) han sido: [JL85] aplica este método para resolver la conocida ecuación no lineal de Duffing, [LL86] realiza análisis de *flutter* en

un perfil 2D con no linealidades estructurales cúbicas y [LD86] investiga perfiles 2D con no linealidades tipo *freeplay* y *bilinear*.

■ Método de Henon:

El método de Henon captura la esquina de la no linealidad tipo *freeplay* o *hysteresis* de forma exacta, de forma que el sistema de ecuaciones estado-espacio cambia de una región a otra justo en el instante de tiempo en el que la variable no lineal alcanza la esquina de la no linealidad. [Lin93] demuestra que una integración con un método de Runge-Kutta sin captura de la esquina de la no linealidad, y una integración con Runge-Kutta apoyado con un método de Henon, calculan una respuesta distinta.

Existen otros métodos que calculan la esquina (disminuyendo el intervalo de tiempo en las cercanías de la esquina, método de la bisección una vez que el sistema ha pasado a la otra región, etc...), pero la gran ventaja del método de Henon es que calcula la esquina exacta en un único paso de integración. Detalles del método pueden consultarse en [Lin93]. La siguiente tabla detalla el número de iteraciones necesarias del Método de la Bisección para tener precisión en un número determinado de cifras significativas. Como comparación, el método de Henon consigue 16 cifras significativas (la precisión del ordenador) en una única iteración.

Número de Cifras Significativas	3	5	7	9	11	13	16
Número de Iteraciones: Método de la Bisección	3.6	9.5	16.4	23.4	29.7	35.4	
Número de Iteraciones: Método de Henon							1

Esta ventaja computacional el método de Henon es especialmente importante en sistemas de tipo *caótico*, en los que es necesario miles de simulaciones para caracterizar la respuesta con métodos de tipo estadísticos ([Lin93]).

■ Métodos de Conservación de la Energía: EMM (*Energy-Momentum Method*) o SIM (*sine-based midpoint method*). Son métodos especialmente adaptados a sistemas lineales y no lineales en los que se conserva la energía u otras propiedades como el momento cinético. La referencia [BGC02] detalla estos métodos y realiza comparativa con Runge-Kutta y Newmark.

La ventaja de los métodos en el dominio del tiempo es que capturan cualquier tipo de respuesta del sistema (incluyendo movimiento caótico) y, por otro lado, la formulación estado-espacio permite el acoplamiento con las leyes de control (aeroservoelasticidad). Dentro de los análisis servoelásticos, destacan los métodos que introducen realimentación en el sistema con el objeto de controlar las oscilaciones de ciclo límite LCOs o, incluso, retrasar la velocidad de *flutter*. La universidad *Texas A&M University* (EEUU) en colaboración con la universidad de Florida (Florida, EEUU) han desarrollado metodologías validadas con experimentación para el control de sistemas no lineales, en particular no linealidades estructurales en un perfil 2D. En las referencias [BS98], [Blo96], [BG97], [KKS97a], [KSK98b], [KSK99], [KKS97b], [KKS97c] y [KSK98a] se desarrollan los principales tipos de control por realimentación: control lineal, no lineal, y no lineal adaptativo.

Sin embargo, la formulación estado-espacio presenta también los siguientes inconvenientes:

- Mayor tiempo de computación: es necesario integrar el sistema estado-espacio para distintos valores de parámetros, condiciones iniciales, etc... Para reducir tiempos de cálculo se suele completar los métodos de integración puros (Runge-Kutta, método de Henon,...) con algoritmos como el *root locus* o lugar de las raíces.
- Complejidad del procedimiento de análisis (post-proceso).
- Dificultad de interpretación física.

2. *Time-marching methods*: acoplamiento de un código estructural (CSM) con un código aerodinámico (CFD) en el dominio del tiempo.

Un código CFD (Euler, Navier-Stokes,...) se acopla en el dominio del tiempo con el modelo estructural (rígido o flexible): en cada instante de tiempo se transmiten al modelo estructural las fuerzas aerodinámicas que determina el código CFD. El modelo estructural se deforma y esto induce un cambio en las fuerzas aerodinámicas que debe recalcularse el CFD. Puede verse un ejemplo de este método aplicado a un perfil 2D en la referencia [KBHB07].

En problemas más complejos al 2D, este método tiene el inconveniente de ser muy costoso desde el punto de vista computacional, y se complementa con metodologías como la *reducción del modelo aerodinámico* (o *Reduced Order Model ROM*) que permite formular las ecuaciones en la formulación estado-espacio.

3. Estudio basado en el sistema lineal: estudio en el dominio de la frecuencia de la sensibilidad del sistema lineal al parámetro no lineal.

Este método se aplica con bastante profusión en la Industria Aeronáutica ya que permite tener una estimación de los efectos de la no linealidad en etapas muy preliminares del diseño de una forma sencilla. Su aplicación fundamental es a holguras en las superficies de control.

El procedimiento es el siguiente ([DTH01]):

- a) La no linealidad tipo *freeplay* o *hysteresis* en una superficie de control se traduce en un sistema cuya rigidez depende de la amplitud del movimiento o, lo que es lo mismo, un modo de rotación de superficie de control que varía desde 0 [Hz] hasta la frecuencia nominal del sistema lineal.
- b) Se calcula la frecuencia del mecanismo de *flutter* lineal y la velocidad de *flutter* para distintas rigideces (o frecuencias ω_{rot}) de la superficie de control, desde 0 [Hz] hasta la frecuencia nominal de rotación de la superficie de control. Se obtendrán curvas del tipo: $\omega_{flutter} = f(\omega_{rot})$ y $U_{flutter} = f(\omega_{rot})$
- c) Por otro lado, y asociado al tipo de no linealidad, se tiene una curva que determina la rigidez (o frecuencia de rotación) en función de la amplitud del movimiento, es decir: $\omega_{rot} = f(\beta)$. En este punto se está asumiendo implícitamente que la respuesta es senoidal a una frecuencia característica. Esta metodología se denomina en la literatura como el método *Harmonic Balance Approach* con un único armónico de aproximación.
- d) Resultado de los dos puntos anteriores se obtienen las dos curvas siguientes:

- Amplitud del movimiento en función de la velocidad de vuelo a la que aparece la oscilación de ciclo límite no amortiguada (LCO), que es la velocidad de *flutter* lineal que corresponde a la rigidez asociada a esta amplitud de movimiento.
- Frecuencia del movimiento en función de la velocidad de vuelo a la que aparece el LCO, que es la velocidad de *flutter* lineal que corresponde a la amplitud del movimiento mencionada en la gráfica anterior.

Este método se ha aplicado con éxito en distintas referencias ([CV97] y [TDV98]) que comparan resultados teóricos con experimentales a bajos números de Mach.

4. Métodos de Continuación: análisis cualitativo de las ecuaciones de estado-espacio.

Los Métodos de Continuación se utilizan en la construcción de los Diagramas de Bifurcación² asociados a sistemas de ecuaciones diferenciales EDO $d\vec{x}/dt = \mathbf{f}(\vec{x}, \lambda)$ ³, y proporcionan resultados más de tipo cualitativo que cuantitativo. Se trata de obtener información de las soluciones del sistema sin tener que integrar numéricamente las ecuaciones diferenciales.

En primer lugar se asume que el sistema de ecuaciones $d\vec{x}/dt = \mathbf{f}(\vec{x}, \lambda)$ admite soluciones periódicas con período T en un rango de valores del parámetro λ . El tiempo puede ser adimensionalizado con el período T , i.e., $\tau = t/T$, por lo que las ecuaciones diferenciales pueden escribirse:

$$\frac{d\vec{x}}{d\tau} = T\mathbf{f}(\vec{x}, \lambda) \quad (2.1)$$

con la condición de contorno $\vec{x}(0) = \vec{x}(1)$. El período T pasa a ser otro parámetro del problema.

La base de la *continuación numérica* es formular este sistema de ecuaciones diferenciales como un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales de la forma $\mathbf{F}(\vec{x}(\tau), \lambda) = \mathbf{0}$. Este cambio se logra mediante un método de integración numérica (método de diferencias finitas), integrando las ecuaciones anteriores durante un período T . Una vez realizado este cambio, y dado un valor inicial de $\vec{x}_i(t)$ para un valor particular de λ , un valor más preciso de $\vec{x}_i = \vec{x}_i + \Delta\vec{x}$ se obtiene resolviendo el siguiente sistema de Newton:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \vec{x}} \right|_{\vec{x}_i(\tau), \lambda} \Delta\vec{x}(\tau) = -\mathbf{F}(\vec{x}_i(\tau), \lambda) \quad (2.2)$$

donde $\Delta\vec{x}$ es la mejora en la solución para el parámetro λ . La solución inicial \vec{x}_i es de hecho una solución de la ecuación $d\vec{x}/d\tau = T\mathbf{f}(\vec{x}, \lambda)$ para un valor del parámetro $\lambda - \Delta\lambda$. El sistema de Newton se aplica un número determinado de veces hasta que $\Delta\vec{x}$ converge a un valor pequeño. Esto se consigue requiriendo que $\Delta\vec{x}^T \Delta\vec{x} < c$, donde $0 < c \ll 1$ es un criterio de convergencia. Para asegurar que $\Delta\vec{x}$ es un mínimo, una condición en la fase se emplea habitualmente ([Dim07]):

$$\Delta\vec{x}(0)^T \cdot \frac{d\vec{x}_i}{d\tau}(0) = 0 \quad (2.3)$$

Por otro lado, los *métodos de continuación* también se aplican en la búsqueda de soluciones de la ecuación algebraica $\vec{f}(\vec{x}, \lambda) = \vec{0}$, que es equivalente a $d\vec{x}/dt = 0$, i.e., buscar las soluciones

²Los Diagramas de Bifurcación en sistemas de ecuaciones diferenciales $d\vec{x}/dt = \mathbf{f}(\vec{x}, \lambda)$ son curvas que representan las soluciones de equilibrio ($d\vec{x}/dt = \mathbf{f}(\vec{x}, \lambda) = 0$) en función del parámetro (o parámetros) λ .

³La letra negrita indica una función vectorial.

de equilibrio o puntos estacionarios del sistema $d\vec{x}/dt = \mathbf{f}(\vec{x}, \lambda)$. Cuando el valor del parámetro varía, las soluciones de equilibrio puede ir variando, pasando de existir sólo una (movimiento amortiguado), a dos o más (LCO armónico o caos). La transición de amortiguado a LCO es lo que se denomina *bifurcación de Hopf*.

En este contexto de cálculo de las soluciones de equilibrio o puntos estacionarios ($d\vec{x}/dt = 0$), las dos principales tareas en los *métodos de continuación* son ([Cum04]):

- a) Calcular las soluciones de equilibrio.
- b) Determinar la estabilidad de las soluciones de equilibrio.

Si el sistema de ecuaciones es de la forma $d\vec{x}/dt = \mathbf{f}(\vec{x})$, las soluciones de equilibrio satisfacen el sistema no lineal de ecuaciones algebraicas $\mathbf{f}(\vec{x}) = 0$. Una vez encontradas las soluciones de equilibrio, determinar la estabilidad es directo aplicando un conocido resultado de Lyapunov: las soluciones de equilibrio del sistema de ecuaciones diferenciales $d\vec{x}/dt = \mathbf{f}(\vec{x})$ son estables si todos los autovalores del jacobiano de \mathbf{f} (evaluado en la solución de equilibrio) tienen parte real negativa. Determinar la estabilidad es relativamente fácil, la tarea más complicada suele ser calcular las soluciones de equilibrio.

Si el sistema incluye un parámetro λ , i.e, $d\vec{x}/dt = \mathbf{f}(\vec{x}, \lambda)$, las soluciones de equilibrio se obtienen como solución del sistema de ecuaciones algebraicas $\mathbf{f}(\vec{x}, \lambda) = 0$. Las soluciones estacionarias ahora dependen del parámetro λ , por lo que se deben encontrar las soluciones $\vec{x}(\lambda)$ tal que $\mathbf{f}(\vec{x}(\lambda), \lambda) = 0$. Las curvas $\vec{x}(\lambda)$ se conocen como Diagramas de Bifurcación y caracterizan de forma cualitativa la dinámica implícita al sistema de ecuaciones diferenciales $d\vec{x}/dt = \mathbf{f}(\vec{x}, \lambda)$ (ver figura 2.1).

La obtención de los Diagramas de Bifurcación puede no ser fácil, el sistema de ecuaciones algebraicas $f(\vec{x}, \lambda) = 0$ no siempre es posible resolverlo algebraicamente, y por ello se han desarrollado técnicas numéricas para construir las curvas $\vec{x} = \vec{x}(\lambda)$. Estas técnicas dan lugar a las siguientes variaciones de los *métodos de continuación* ([Cum04]):

- Embedding Methods.
- Polynomial Continuation.
- Parameter Continuation:
 - Natural Parameter Continuation.
 - Artificial Parameter Continuation.
- Branch Switching and Bifurcation Detection.

Existen en la actualidad diversos códigos comerciales que incluyen herramientas de continuación y detección de bifurcaciones en sistemas de ecuaciones diferenciales. De todos ellos, se destacan el código **AUTO** ([DGKR03]) desarrollado en Fortran por las Universidades de Concordia (Montreal, Canadá) y el Instituto Tecnológico de California CALTECH y **MatCont** ([DK86] o [DPC⁺01]) desarrollado en el entorno Matlab por las Universidades de Gent (Bélgica) y Utrecht (Holanda).

Estos métodos resultan especialmente útiles ya que proporcionan, con un coste computacional bajo, un estudio cualitativo de las posibles respuestas del sistema. Por ejemplo, en estructuras aeronáuticas, la detección de una bifurcación de Hopf indica que la respuesta deja de ser

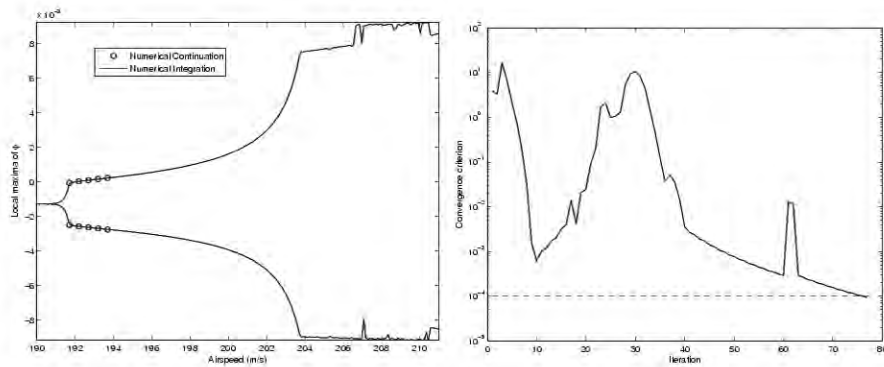


Figura 2.1: Diagrama de bifurcación de la respuesta (extraída de referencia [Dim07]).

estacionaria y pasa a ser oscilatoria, un cambio cualitativo importante que indica la aparición de movimiento no amortiguado afectando a fatiga del material, cualidades de vuelo, etc... Sin embargo, uno de los inconvenientes es la escasa precisión en el cálculo de las frecuencias características de la respuesta, algo que es importante en estructuras para la determinación del daño a fatiga y/o la posible interferencia con las leyes de vuelo (en el caso de LCO de baja frecuencia, i.e., menos de 5 [Hz] aprox.).

Por otro lado, algunos inconvenientes de los *métodos de continuación* son:

- La referencia [RGLJ05] apunta que los métodos clásicos de continuación numérica se aplican sobre ecuaciones diferenciales basadas en funciones con derivada continua. Esto no ocurre en presencia de no linealidades tipo *freeplay* o *hysteresis*, por lo que es necesario aproximar la no linealidad con funciones derivables.
- La referencia [Dim07] demuestra que los métodos clásicos de *continuación numérica* no funcionan en caso de respuestas aperiódicas. Esta misma referencia propone una modificación del método para aplicarlo a sistemas con respuesta no periódica.
- La convergencia de estos métodos depende del valor del parámetro λ , y existen valores para los cuales puede que no se tenga convergencia. La referencia [Dim07] desarrolla un *método de continuación aproximado* que mejora la convergencia y es aplicable a respuestas aperiódicas (ver figura 2.2).

La combinación de los Métodos de Continuación (análisis cualitativo) con la integración en el dominio del tiempo en algunas condiciones (análisis cuantitativo) puede que sea el procedimiento a seguir en la industria Aeronáutica, en la que el sistema es complejo (típicamente más de 200 grados de libertad) con un elevado número de condiciones de cálculo (envuelta de vuelo altura vs. velocidad combinada con todos los posibles tipos de no linealidad).

5. *Point Transformation Method*⁴ en sistemas lineales a trozos (*Piecewise Linear Systems*):

Los sistemas con no linealidades de tipo *freeplay* o *hysteresis* pueden considerarse como sistemas lineales a trozos, ya que en cada uno de los tramos de la no linealidad el sistema es lineal. Por

⁴También denominado *Boundary Identification Method* en la referencia [RJD⁺01].

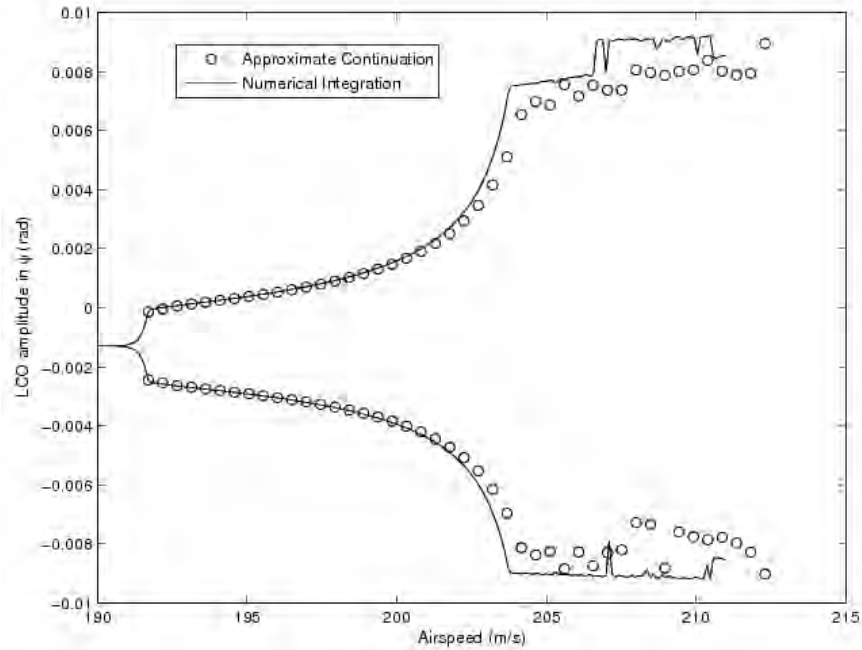


Figura 2.2: Diagrama de bifurcación (extraído de referencia [Dim07]) obtenido con un método *Numerical Continuation* aplicable a cualquier tipo de respuesta, incluida respuestas aperiódicas.

otro lado, las ecuaciones de estado-espacio de sistemas aeroelásticos se formulan como ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{x}}{dt} &= [A] \vec{x} + [B] \vec{u} \\ \vec{x}(t_0) &= \vec{x}_0\end{aligned}$$

donde $[A]$ y $[B]$ con matrices constantes en cada uno de los tramos de la no linealidad. Estas ecuaciones ODE de coeficientes constantes admiten solución analítica $\vec{x}(t)$ a través de la denominada matriz de transición $\Phi(t, t_0)$ (ver [DCSJ01], [UE01], [FPEN94], [Fai00], [Oga98], [LY99] o [AP92]):

$$\vec{x}(t) = \Phi(t, t_0) \cdot \vec{x}_0 + \Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau) \cdot [B] \cdot \vec{u}(\tau) d\tau$$

donde :

$$\Phi(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t [A] d\tau} = e^{[A] \cdot (t-t_0)}$$

El método *Point Transformation Method* resuelve el sistema no lineal mediante integración analítica de los sistemas lineales los que se divide el sistema en el caso de las no linealidades de tipo *freeplay* e *hysteresis*. En cada una de las regiones lineales, el sistema se resuelve mediante la matriz de transición y, cuando se alcanza una de las esquinas de la no linealidad, la integración se detiene, se determina a que zona irá el sistema, y se formula el sistema lineal en la región entrante tomando como condiciones iniciales el valor del vector de estado-espacio \vec{x} en la esquina que se ha alcanzado.

Este método es exacto en caso de sistemas con un número finito de grados de libertad. Sin embargo, en sistemas continuos con un número infinito de modos (coordenadas generalizadas),

la formulación modal puede introducir la siguiente limitación: cuando se pasa de una región a otra, el sistema cambia de matrices $[A]$ y $[B]$ y por tanto de coordenadas generalizadas. Puede ocurrir que el set de modos de la región entrante no sea linealmente dependiente del set de modos de la región saliente, lo que equivale a que la condición de contorno y la transferencia de condiciones iniciales no puede realizarse. Este problema puede ser resuelto si se utiliza una única base modal válida para todas las regiones de la no linealidad. La elección de esta base modal única no es trivial y depende mucho del sistema que se está analizando, la localización de la no linealidad, la existencia de modos de sólido rígido, etc...

Existen códigos comerciales que implementan módulos para resolver sistemas lineales a trozos. Por ejemplo, PWLTOOL ([HJ99]) basado en Matlab resuelve este tipo de sistemas, analizando además condiciones de estabilidad mediante funciones de Lyapunov.

6. *Describing Function* o *Harmonic Balance Method*⁵: linealización del sistema no lineal.

Es uno de los métodos más conocidos y usados extensamente en teorías de estabilidad y control ([Gre53], [Koc50], [Tru55], o [She59]), y es una versión simplificada del método de Kryloff y Bogoliuboff ([KB47]). En el campo aeroelástico se aplicó por primera vez en el área de control (aeroservoelasticidad). La principal hipótesis de esta metodología es que el sistema admite una solución periódica dominada por su armónico fundamental y la amplitud de la respuesta varía lentamente ([Bro98]). Por tanto, los efectos de armónicos más altos son considerados despreciables, algo que ocurre precisamente a velocidades cercanas a la velocidad de *flutter* en la que la frecuencia característica de la respuesta es la frecuencia del mecanismo de *flutter*. [PAL94b] demuestran que el método *Describing Function* es capaz de predecir la velocidad de entrada en *flutter*.

Una vez que la respuesta se asume armónica, se determina una *rigidez efectiva* que sustituye a la rigidez no lineal; esta *rigidez efectiva* se calcula de la siguiente forma ([Ell07]):

- a) Se asume desplazamiento/rotación senoidal en el grado de libertad no lineal.
- b) Para este desplazamiento/rotación no lineal se calcula la fuerza/momento que aparece en el grado de libertad no lineal; en una superficie de control sería el momento de charnela. Esta fuerza/momento dependerá de la amplitud del desplazamiento/giro.
- c) Se calcula el desarrollo en serie de Fourier de la fuerza/momento no lineal y se retiene el armónico fundamental.

Se pueden encontrar más detalles de este método en [Bro98], [LT80], [GVV86] o [Coo94], siendo éste último de gran interés ya que desarrolla la formulación para varios tipos de no linealidad (*freeplay*, *hysteresis*, de tipo polinómico, etc.), calculando la *rigidez efectiva* para cada uno de ellos. El método *Describing Function* se complica cuando la no linealidad está descentrada o existe precarga ([Bro98]).

La figura 2.3 (de [KL96]) representa la *Describing Function* δ para una no linealidad de tipo *freeplay* en el muelle de rotación en cabeceo (ángulo α) de un perfil 2D. La fuerza del muelle

⁵El método *Describing Function* es más conocido en el campo de vibraciones mecánicas como *Harmonic Balance Method* ([Mag65]).

nolineal se sustituye por la siguiente expresión linealizada:

$$F(A) = \delta \cdot K_\alpha \cdot A$$

donde K_α es la rigidez del muelle fuera de la zona muerta (o *deadband*), A es la amplitud del movimiento senoidal, y s es la semiamplitud de la zona muerta. La función analítica de la *Describing Function* es:

$$\delta = \begin{cases} 0 & \text{si } A \leq s \\ \frac{1}{\pi} (\pi - 2a - 2 \cdot \sin 2a) & \text{si } A \geq s \end{cases}$$

siendo $a = \sin^{-1}(s/A)$.

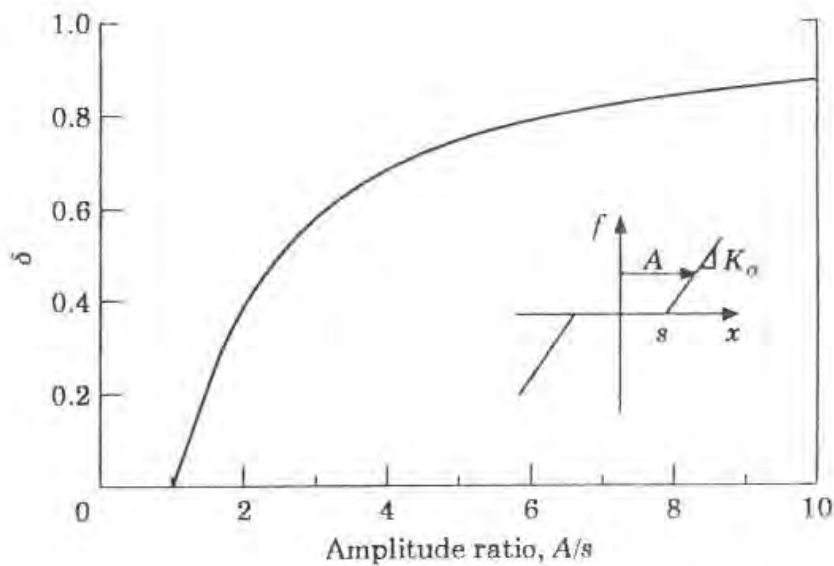


Figura 2.3: *Describing Function* para una no linealidad de tipo *freeplay*.

De esta forma, la no linealidad se sustituye por una ganancia que depende de la amplitud de la entrada. La precisión del método *Describing Function* mejora cuando la amplitud de la respuesta aumenta con respecto al tamaño característico de la no linealidad ([Bro98]), ya que los efectos no lineales son menores y la respuesta es más senoidal. Diversas aplicaciones de este métodos pueden encontrarse en [Mil72] (diseño de superficies de control de un misil), [LT51] (*freeplay*), [Bre78] (describe el método *Harmonic Balance* de primer orden), [MRR81] (correlación de ensayos en túnel de viento), [LD86] (perfil 2D con no linealidad tipo histéresis en el modo de cabeceo), [LT89] (no linealidad *freeplay* y *bilinear* en el eje de charnela del ala del CF-18) o [HBC95] (no linealidades estructurales en trimado y timón de profundidad en un modelo de estabilizador horizontal, con resultados experimentales de túnel aerodinámico)

Las respuestas armónicas LCO con un número significativo de frecuencias características o la respuesta de tipo caótico no pueden ser capturadas con un análisis en el dominio de la frecuencia ([BL02]). [TDV98] y [LD05] demuestran, en un modelo de perfil-flap con no linealidad de

tipo *freeplay*, que el método *Harmonic Balance* de primer orden no pueden reproducir algunas respuestas encontradas con simulaciones numéricas en el dominio del tiempo o resultados experimentales. En el caso de tener más de una superficie de control con no linealidades, el método *Describing Function* puede no proporcionar resultados correctos ya que asume una misma amplitud de giro/desplazamiento en todos los grados de libertad no lineales y esto no tiene por qué ocurrir (ver [Ell07]).

Por último, mencionar que el *Harmonic Balance Method* se está aplicando también en la actualidad a problemas de no linealidad aerodinámica ([KTDH02]), i.e., transónico, desprendimiento de corriente por alto número de Mach o elevado ángulo de ataque, etc... La referencia [Soc84] incluye formulaciones alternativas al *Describing Function Method* descrito en los párrafos anteriores, que esta referencia denomina *Conventional Describing Function Method*. Las formulaciones son:

- a) *Conventional Describing Function Method*, el método descrito hasta ahora.
- b) *Corrected-Conventional Describing Function Method*.
- c) *New RMS (or Unconventional RMS)*.
- d) *Minimum Average Error*.
- e) *Equivalent Gain*.

Las ventajas/inconvenientes de cada uno pueden consultarse en la referencia [Soc84], pero básicamente lo que se busca es mejorar el *Conventional Describing Function Method* mediante formulaciones que incluyan la respuesta del sistema en armónicos superiores.

El método *Describing Function Method* se utiliza en la industria aeronáutica por diversos motivos:

- a) Los métodos tradicionales de cálculo de estabilidad aeroelástica están basados en el dominio de la frecuencia: método pK, método K, etc., por lo parte del software desarrollado para el cálculo de la aeroelasticidad lineal puede reutilizarse en la estabilidad de sistemas no lineales en el dominio de la frecuencia.
- b) El cálculo computacional es independiente del tamaño del modelo; por ejemplo, el criterio de Nyquist no es más difícil de implementar en un sistema de 200 grados de libertad que en uno de cuarto orden.
- c) Las fuerzas aerodinámicas se deben conocer en el dominio de la frecuencia, evitando la formulación de las mismas en el dominio del tiempo con las aproximaciones de Roger o Karpel. La transformación del dominio de la frecuencia al dominio del tiempo (o Laplace) no es directa, dependiendo los resultados de varios parámetros como el modelo, las condiciones de vuelo (M_∞), el set de frecuencias reducidas k para el que se tienen las fuerzas generalizadas, etc. Esta tarea requiere por tanto un analista con experiencia y especial cuidado en pasadas masivas en toda la envuelta del avión con cambios en M_∞ y altura de vuelo.

Sin embargo, presenta los siguientes inconvenientes, alguno de ellos ya mencionado anteriormente:

- En no linealidades del tipo *freeplay* o *hysteresis*, la derivada segunda de la solución en las esquinas de la no linealidad no es continua (ver por ejemplo [CCL07]). Sin embargo, la aproximación con el método *Harmonic Balance* hace que esta derivada segunda sea continua a lo largo de toda la integración.
- No es posible reproducir respuestas armónicas complejas con un gran número de frecuencias características, entre ellas la respuesta de tipo caótico. De hecho, la mayoría de las aplicaciones del método asumen respuesta puramente armónica con una frecuencia característica. En la actualidad, esta restricción está siendo levantada por diversos autores que estudian la aplicación de este método a respuestas con un mayor número de frecuencias características ([DP07]).
- La estabilidad de un sistema lineal no asegura la estabilidad del sistema no lineal del que deriva ([DP07]). Estudiar la estabilidad de un sistema en distintos puntos de vuelo y condiciones de la no linealidad en los que se ha linealizado (estabilidad local), no asegura que la denominada *estabilidad global* se cumpla. En la referencia [DP07] pueden encontrarse más detalles de esta proposición y una propuesta alternativa para el estudio de la estabilidad de sistemas no lineales, el denominado *criterio de Popov*.
- En superficies de control de aeronaves, la sustitución de un actuador no lineal por uno lineal (*Describing Function Method*) produce buenos resultados en términos de rotación de la superficie de control y respuesta general de la aeronave. Sin embargo, las cargas locales en la zona del actuador y, en concreto, la carga del actuador, necesitan de armónicos hasta tercer o quinto orden para ser reproducidas. La referencia [DP07] aplica lo que denomina el *Multiple Harmonics Method* para el cálculo de la carga en un actuador con una no linealidad del tipo *freeplay*, comprobando el efecto de la precarga de la no linealidad, y concluyendo que dependiendo de la precarga la aparición de armónicos en la respuesta puede ser relevante.

Estos inconvenientes hacen que estos métodos basados en la aproximación lineal deban ser complementados con simulaciones numéricas en el dominio del tiempo.

7. Métodos de Análisis de Estabilidad en el Dominio de Laplace (modificación del método p-k de *flutter* lineal):

[Ell07] detalla un ejemplo de análisis de estabilidad de sistemas no lineales en el dominio de Laplace. Asumiendo movimiento armónico $\{u\} = \{u_0\}e^{pt}$ las ecuaciones del sistema se escriben:

$$([M_{uu}]p^2 + [K_{uu}]) \{u_0\}e^{pt} = \{F_u\}(t, p, \{u_0\}, \dots)$$

con $p = \sigma + i\omega$, donde σ es el amortiguamiento constante y ω la frecuencia en [rad/s] de la oscilación. Teniendo en cuenta que $\{u\} = [\phi]\{\xi\}$ en formulación modal:

$$\left([\tilde{M}_{hh}]p^2 + [\tilde{K}_{hh}] - q_\infty [Q_{hh}(\omega)] \right) \{\xi_0\} = \{0\}$$

donde las matrices $[\tilde{M}_{hh}]$ y $[\tilde{K}_{hh}]$ ya tienen en cuenta la contribución de los términos no lineales en inercia o rigidez que proviene del *Harmonic Balance Method* (ver [Ell07] para más detalle). La matriz compleja de fuerzas aerodinámicas generalizadas $[Q_{hh}(\omega)]$ se obtiene para movimiento puramente armónico, y q_∞ es la presión dinámica. La ecuación anterior es una ecuación no lineal

(la matrix $[Q_{hh}(\omega)]$ depende de $\omega = \Im(p)$ de forma no lineal) de autovalores p y autovectores $\{\xi_0\}$ complejos. Estrictamente hablando, la aproximación $[Q_{hh}(p)] \approx [[Q_{hh}(\omega)]$ sólo es válida para sistemas débilmente amortiguados/divergentes, es decir, en el punto de *flutter*.

Este problema de autovalores/autovectores se resuelve utilizando el método $p-k$ (ver por ejemplo [BR97]). En el caso no lineal, la solución depende de la amplitud del movimiento armónico (se aplica el método *Harmonic Balance* a la fuerza/momento no lineal) y el procedimiento que se realiza es el siguiente:

- Se resuelve el problema de autovalores/autovectores para un rango de amplitudes del movimiento.
- Se representa la velocidad de *flutter* menor (correspondiente a la menor presión dinámica q_∞ para la que $\Re(p) = 0$) en función de la amplitud.

Este método es interesante en la industria aeronáutica por tres motivos: primero, se siguen utilizando las fuerzas aerodinámicas en el dominio de la frecuencia y por lo tanto se puede seguir utilizando códigos robustos como el Doublet-Lattice; segundo, no representa esfuerzo desde el punto de vista computacional y, tercero, es susceptible de introducir no linealidades de fricción, rigidez y/o inerciales.

8. Método *Center Manifold Method*.

El método *Center Manifold Method* es una técnica utilizada para reducir el orden del sistema de ecuaciones de estado-espacio. Una descripción detallada del método puede consultarse en la referencia [Wig96], y una aplicación del mismo a un sistema aeroelástico en [VC05] o [WLL01].

Sea la ecuación de estado-espacio escrita de la forma:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = [A]\mathbf{x} + [B]\mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (2.4)$$

e indicando con letra negrita las variables que son vectores por facilidad de notación. El término $[A]\mathbf{x}$ es la parte lineal y $[B]\mathbf{g}(\mathbf{x})$ es la parte no lineal del sistema. Mediante una transformación lineal

$$\mathbf{x} = [Q]\mathbf{z} \quad (2.5)$$

el sistema anterior de ecuaciones puede transformarse en:

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = [J]\mathbf{z} + [Q]^{-1}[B]\mathbf{g}(\mathbf{z}) \quad (2.6)$$

siendo $[J] = [Q]^{-1}[A][Q]$ la forma canónica de Jordan de la matrix $[A]$:

$$[J] = \begin{bmatrix} [J_1] & [0] \\ [0] & [J_2] \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

La matrix de cambio de base $[Q]$ está formada por los autovectores de la matrix $[A]$ ordenando primero los autovectores $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$ correspondientes a los autovalores de parte real nula, y después los autovectores $\mathbf{q}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+2}, \dots, \mathbf{q}_{2m}$ correspondientes a los autovalores con parte real no nula (menor que cero ya que estamos en el rango de velocidades con respuesta no divergente).

El sistema matricial anterior puede dividirse en dos:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{u}}{dt} &= [J_1]\mathbf{u} + \mathbf{f}_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= [J_2]\mathbf{v} + \mathbf{f}_2(\mathbf{u}, \mathbf{v})\end{aligned}\tag{2.8}$$

donde la primera ecuación matricial es la combinación crítica de formas modales con autovalores de parte real nula, i.e., no amortiguados. El principal resultado del *Center Manifold Theorem* es que las coordenadas generalizadas asociadas a los autovalores de parte real menor que cero se pueden escribir como combinación no lineal de las coordenadas generalizadas asociadas a autovalores con parte real nula.

Si se encuentra una función $\mathbf{v} = \mathbf{h}(\mathbf{u})$ que cumpla la segunda ecuación matricial, i.e.:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = D_{\mathbf{u}}\mathbf{h}(\mathbf{u})\frac{d\mathbf{u}}{dt} = D_{\mathbf{u}}\mathbf{h}(\mathbf{u})[[J_1]\mathbf{u} + \mathbf{f}_1(\mathbf{u}, \mathbf{h}(\mathbf{u}))] = [J_2]\mathbf{h}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}_2(\mathbf{u}, \mathbf{h}(\mathbf{u}))\tag{2.9}$$

entonces el problema queda reducido a resolver la ecuación diferencial en \mathbf{u} . La función vectorial $\mathbf{v} = \mathbf{h}(\mathbf{u})$ suele ser una aproximación del vector \mathbf{v} hasta términos en orden 2 ó 3 en las componentes de \mathbf{u} , y se formula en términos de unos coeficientes indeterminados multiplicados por las componentes de \mathbf{u} . Los coeficientes indeterminados se calculan mediante la ecuación 2.9. El desarrollo según una forma cuadrática ó cúbica de $\mathbf{h}(\mathbf{u})$ implica la existencia de no linealidades continuas y derivables, algo que no se cumple en las del tipo *freeplay* o *hysteresis*.

La función \mathbf{h} es la denominada *center manifold* y es una superficie curvada de dimensión n tangente al subespacio formado por los primeros n autovectores de $[A]$, i.e., los vectores $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$ de la matriz de cambio de base $[Q] = [\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \dots \mathbf{q}_n \mathbf{q}_{n+1} \dots \mathbf{q}_{2m}]$.

9. Método *Normal Form Theory*.

La *Normal Form Theory* es una técnica que resuelve las ecuaciones de estado-espacio mediante un cambio de variable que simplifica las no linealidades ([Wig96]). Es necesario que la no linealidad sea *suave*, al menos que tenga una expresión continua y derivable ([VC05]), por lo que no es un método directamente aplicable a no linealidades del tipo *freeplay* o *hysteresis*. Sin embargo, la referencia [VC05] aplica la *Normal Form Theory* a una no linealidad de tipo *bilineal* mediante un ajuste previo de esta no linealidad a una expresión polinómica.

En muchos trabajos, el método *Normal Form Theory* viene precedido de una reducción del orden del sistema mediante *Center Manifold Method* ([VC05]).

10. Método *Asymptotic Expansion Methods* (ver por ejemplo [HLG], [SM72] o [MB99]):

Algunos autores utilizan los denominados *Singular Perturbation Methods* para estudiar analíticamente la estabilidad de sistemas del tipo:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = [A(\lambda)]\vec{x} + \vec{f}(\vec{x}, \lambda)\tag{2.10}$$

en el entorno del valor crítico del parámetro $\lambda = \lambda_0$ para el que ocurre la bifurcación de tipo *Hopf*, i.e., para $\lambda < \lambda_0$ el sistema es estable y para $\lambda > \lambda_0$ el sistema es inestable. El término $\vec{f}(\vec{x}, \lambda)$ incluye las no linealidades, que deben ser algebraicas y derivables. La solución del sistema

de ecuaciones diferenciales se obtiene en forma de expansión asintótica (*asymptotic expansion method*) mediante el ya mencionado *singular perturbation method*.

En un sistema aeroelástico, el parámetro λ corresponde a la velocidad de vuelo U_∞ , y su valor crítico λ_0 es la velocidad de *flutter*. Toda la metodología considera que para λ_0 se alcanza una bifurcación de tipo *Hopf* en el sentido de que un par (y sólo uno) de autovalores complejos conjugados cruza el eje imaginario. El resto de autovalores tiene parte real negativa.

Estos métodos son interesantes ya que permiten el cálculo analítico de la solución en el punto de *flutter*, una solución que puede utilizarse para comprobar la obtenida mediante cualquier otro método numérico alternativo. Por otro lado, destacan por su elegancia matemática, característica de todos los métodos de perturbación en sistemas no lineales. Sin embargo, presentan los siguientes inconvenientes:

- a) Sólo caracterizan el sistema en el entorno de la bifurcación de *Hopf*, es decir, en un pequeño intervalo de velocidades centrado en la velocidad de *flutter*.
- b) En el valor crítico del parámetro de estudio λ_0 , debe existir un único par de autovalores complejos conjugados con parte real nula y el resto debe tener parte real negativa (estables).
- c) Las no linealidades deben poder expresarse de forma analítica, algo que no ocurre en no linealidades de tipo *freeplay* o *hysteresis* que presentan esquinas en la que no son derivables. Sin embargo, recientemente se ha aplicado el método denominado *Perturbation-Incremental Method* ([CCL07]) al estudio de las bifurcaciones aeroelásticas en un perfil 2D con una no linealidad del tipo *freeplay* en el modo de cabeceo. Este método extiende los métodos de pequeñas perturbaciones a no linealidades que no son desarrollables analíticamente.

11. *Reduced Order Models* ROM (consultar [KTDH02] o [RC07]).

Estos métodos se aplican sobre todo cuando las no linealidades estructurales se combinan con no linealidades aerodinámicas. En el caso de no linealidades aerodinámicas (desprendimiento, transónico, etc.) es necesario acoplar un código no lineal CFD con un código estructural. Este acoplamiento es costoso desde el punto de vista computacional, por lo que se acude a una reducción del modelo aerodinámico reteniendo los estados aerodinámicos estrictamente imprescindibles. Existen varias técnicas para identificar el modelo ROM de un sistema particular, aunque todas ellas se basan en procesar la respuesta del sistema (en el tiempo o dominio de la frecuencia) a excitaciones específicas usando resultados experimentales o resultados numéricos resolviendo las ecuaciones de Euler o Navier-Stokes. La respuesta del sistema se procesa mediante distintas metodologías como la Teoría de Volterra, la formulación de autovalores/autovectores, la denominada *Proper Orthogonal Decomposition* POD, redes neuronales o algoritmos genéticos.

Una vez simplificada la aerodinámica de un sistema mediante la obtención del *Reduced Order Model* ROM, se obtiene la formulación estado-espacio del sistema en el que se puede introducir las no linealidades estructurales. Como ejemplo, la referencia [RC07] aplica el método ERA (Eigensystem Realization Algorithm) para convertir la aerodinámica del modelo ROM en un sistema de ecuaciones estado-espacio, acoplando no linealidades estructurales asociadas a grietas o delaminaciones en materiales compuestos.

12. *Fictitious Mass Method* (ver [KL96] o [GK08]).

La base modal que resuelve el problema no lineal debe ser capaz de reproducir los movimientos de la estructura en todas las zonas de la no linealidad. En ciertas estructuras, la existencia de no linealidades da lugar a deformaciones locales que no son tenidas en cuenta en la base modal nominal. Esto ocurre por ejemplo en superficies de control con holguras de tipo *freeplay*. Cuando la rotación pasa por la zona muerta o *deadband*, aparece un modo de deformación de sólido rígido correspondiente a la rotación de la superficie de control. Este modo puro de rotación no aparece en caso de estructura intacta con la rigidez nominal del actuador. El método *Fictitious Mass Method* desarrollado por M. Karpel resuelve este problema creando una base modal única que tiene en cuenta las deformaciones locales no lineales. Los detalles del método pueden verse en la referencia [GK08], aunque básicamente consiste en añadir una masa considerable (del orden de la masa de la aeronave) en la zona de la no linealidad para producir deformaciones locales y conseguir el modo de rotación de la superficie de control.

En esta tesis se realiza una aproximación parecida al método de las masas ficticias, y consiste en completar la base modal nominal con el modo de rotación pura (ver sección 5.3). Este modo de rotación, que el método de las masas ficticias consigue mediante la introducción en el modelo de una masa local, en este caso se extrae de la base modal de la estructura con rigidez local nula.

Una vez elegida la base modal, se plantea el problema aeroelástico en el dominio de la frecuencia o en formulación estado-espacio.

Una vez analizados los distintos métodos de solución de las ecuaciones aeroelásticas en presencia de no linealidades estructurales, se concluye que la formulación estado-espacio es la más versátil por tres motivos fundamentales: se puede incluir cualquier tipo de no linealidad, puede predecir cualquier tipo de respuesta, incluyendo caos, y permite el acoplamiento con sistemas de control (aeroservoelasticidad). La solución de las ecuaciones en el dominio del tiempo es la aproximación utilizada en esta tesis.

2.6. Consideraciones Finales

En este capítulo se ha revisado el estado del arte de las metodologías existentes para el tratamiento de las no linealidades estructurales desde el punto de vista aeroelástico. De todas ellas, el análisis de las ecuaciones de estado-espacio en el dominio del tiempo es el único que permite obtener todos los posibles tipos de respuesta de un sistema no lineal, incluyendo respuesta de tipo caótico. Esta ventaja, junto con otras como la posibilidad de acoplamiento con módulos de control (aeroservoelasticidad), hace que este método sea el elegido en esta tesis. El código **FHSWB** calcula las ecuaciones aeroelásticas de la configuración esbelta cuerpo/ala en la formulación de estado-espacio y todas las herramientas de integración y postproceso están orientadas a caracterizar la respuesta del sistema en el dominio del tiempo.

Por otro lado, en este mismo capítulo se han incluido el estado actual de las normas de aeronavegabilidad (civiles y militares) con respecto al tema de la tesis, i.e., el efecto aeroelástico de las no linealidades estructurales. El conocimiento de las normas es fundamental si se pretende desarrollar una herramienta útil que sirva de base para futuros procesos de justificación estructural o certificación

de una aeronave. En general, las dos principales conclusiones extraídas después del análisis de las normas son:

1. Las normas proponen tolerancias en las holguras (nolinealidad típica del tipo *freeplay* o *hysteresis*) demasiado conservativas y difíciles de mantener con el uso de la aeronave, lo que impacta en complicados y periódicos procesos de mantenimiento.
2. Las normas sugieren métodos lineales para una primera caracterización del efecto aeroelástico de la nolinealidad. Sin embargo, estos métodos lineales no pueden reproducir las respuestas del sistema no lineal (LCOs, respuesta caótica, etc.), por lo que no permiten anticipar posibles problemas en la etapa del diseño de la aeronave, como daño a fatiga, empeoramiento del pilotaje de la aeronave, etc.

Este capítulo y el anterior han perfilado el tipo de herramienta que puede ser necesaria para la caracterización aeroelástica en presencia de nolinealidades estructurales: código integrador de las ecuaciones aeroelásticas de estado-espacio con módulos de post-proceso para la caracterización de la respuesta en términos de frecuencia, amplitud, tipo de respuesta (amortiguada, armónica, caótica o divergente), etc. Este es el objetivo de la tesis.

En los dos capítulos siguientes se desarrollan las ecuaciones aeroelásticas en formulación estado-espacio de configuraciones cuerpo/ala esbeltas. Estas ecuaciones estado-espacio son las que se utilizarán para el desarrollo y prueba de las herramientas de integración y post-proceso mencionadas anteriormente.

Capítulo 3

CONFIGURACIÓN CUERPO/ALA: ECUACIONES DE LA DINÁMICA

3.1. Introducción

Como ya se ha comentado en las secciones 1.3 y 1.4, una de las principales contribuciones de esta tesis doctoral es el desarrollo de un código autocontenido para el estudio aeroelástico lineal y no lineal de configuraciones cuerpo/ala esbeltas (tanques de combustible, misiles, pods de reabastecimiento en vuelo, etc.). Este capítulo y el siguiente (dedicado al cálculo de las fuerzas aerodinámicas) desarrollan la formulación teórica que sustenta este código.

En las distintas secciones de este capítulo se desarrolla la formulación de las ecuaciones aeroelásticas de configuraciones cuerpo/ala esbeltas, analizando los siguientes puntos:

1. *Hipótesis* simplificadoras en la obtención de las ecuaciones aeroelásticas (sección 3.2).
2. Desarrollo de la *formulación modal*: modos de deformación de distintos modelos estructurales (sección 3.3) y coordenadas generalizadas (sección 3.4).
3. Desarrollo de cada uno de los términos que intervienen en las ecuaciones:
 - a) Fuerzas inerciales: energía cinética de la configuración (sección 3.5).
 - b) Fuerzas generalizadas potenciales: energía de deformación elástica de la estructura (sección 3.6), incluyendo en esta sección la modelización de soportes y actuadores lineales y no lineales.
 - c) Fuerzas generalizadas aerodinámicas: formulación genérica de las fuerzas aerodinámicas no estacionarias (sección 3.7), aunque el desarrollo exhaustivo de estos términos se hará en el capítulo 4.
4. Planteamiento de las ecuaciones aeroelásticas o ecuaciones de Lagrange (secciones 3.8 a 3.10), incluyendo la formulación estado-espacio (sección 3.11).
5. Revisión de los distintos métodos clásicos de solución en el dominio de la frecuencia (sección 3.12).

6. Estudio de la inestabilidad aeroelástica estática de *divergencia* (sección 3.13).
7. Solución de las ecuaciones de estado-espacio: comparación entre la solución analítica de sistemas de coeficientes constantes y la solución numérica (sección 3.14).

3.2. Hipótesis simplificatorias en la obtención de las ecuaciones

3.2.1. Teoría Linealizada de Pequeñas Perturbaciones

Se asumen pequeños desplazamientos respecto a una condición inicial de vuelo estacionario. En esta condición inicial de vuelo, las aletas del misil podrán tener una deflexión dependiendo del tipo de maniobra que realice: vuelo del misil anclado al vehículo portador, vuelo equilibrado en solitario a $1g$, viraje a unos determinados g 's, etc. . . Asumiendo teoría lineal, el problema estacionario queda desacoplado del problema no estacionario, de forma que éste último se puede plantear como pequeñas perturbaciones respecto de una deformación nula.

3.2.2. Geometría

La geometría de la configuración del vehículo debe cumplir los siguientes puntos:

1. El misil debe cumplir la condición de *configuración esbelta*, es decir, la dimensión del vehículo medida en dirección de la velocidad de vuelo debe ser mucho mayor que la dimensión del vehículo transversal a la dirección del vuelo.
2. Se consideran misiles cuyos fuselajes sean cuerpos de revolución. La mayoría de los misiles cumplen esta condición, por lo que no es una hipótesis demasiado restrictiva.
3. Como se detalla en capítulos posteriores, las fuerzas aerodinámicas se calcularán utilizando transformaciones conformes sobre las secciones transversales de la configuración. Estas transformaciones conformes quedan directas para el caso de misiles con:
 - a) Cuerpo de revolución con dos aletas situadas en el plano xy , manteniendo la configuración simetría respecto al plano xz .
 - b) Cuerpo de revolución con aletas en configuración cruciforme, es decir, dos de aletas en el plano xy y otras dos en el plano xz . La configuración debe seguir siendo simétrica respecto a los planos xz y xy , aunque las aletas situadas en el plano xy no tienen por qué ser iguales a las del plano xz .
4. Los resultados son aplicables a vuelo subsónico, transónico y supersónico; este último con la restricción de que la configuración cuerpo-ala debe quedar dentro del cono de Mach (ver [Jon46] y [Spr50]).

J.R. Spreiter [Spr50] puntualiza que, en el caso de flujo *transónico*, la condición de configuración esbelta puede relajarse (En la referencia [Spr50] se incluye una figura que explica gráficamente este punto). Sin embargo, esto es cierto en el caso estacionario, en el que se puede despreciar el término $(1 - M_\infty^2) \Omega_{\tilde{x}\tilde{x}}$ en vuelo transónico ($M_\infty \simeq 1$) a pesar de que la segunda derivada del potencial $\Omega_{\tilde{x}\tilde{x}}$ no sea despreciable frente a las otras derivadas parciales $\Omega_{\tilde{y}\tilde{y}}$ o $\Omega_{\tilde{z}\tilde{z}}$. En la

formulación no estacionaria aparecen términos del orden de $\Omega_{\tilde{x}\tilde{t}}/U_\infty$, por lo que se debe exigir que las derivadas parciales respecto la dimensión principal \tilde{x} sean despreciables frente a las derivadas del potencial respecto a las dimensiones transversales \tilde{y} y \tilde{z} .

5. En los siguientes apartados se explicará el modelo aerodinámico, estructural e inercial con los que se aproxima el comportamiento real del misil. Una de las primeras hipótesis es la *linealización* del problema que, en el modelo aerodinámico, implica que las velocidades de perturbación inducidas por la presencia del misil son pequeñas frente a la velocidad principal de vuelo.

Esta condición de *velocidades de perturbación pequeñas* en todo el campo fluido impone restricciones en la forma del vehículo, especialmente en la forma de la punta y la sección más retrasada del cuerpo. Milton D. Van Dyke ([VD58]) especifica las siguientes condiciones:

- La derivada primera y segunda del radio del cuerpo respecto a la dirección longitudinal (dR/dx y d^2R/dx^2) deben ser pequeñas y continuas.
- En flujo supersónico, la nariz del cuerpo debe ser al menos *afilada* (dR/dx pequeña) y la forma en la zona trasera debe cumplir $dR/dx = 0$ (*cúspide*).
- En flujo subsónico, tanto la nariz como la forma en la zona trasera deben cumplir $dR/dx = 0$ (*cúspide*).

Sin embargo, G.N. Ward ([War55]) apunta restricciones menos severas: permite discontinuidades en la curvatura del cuerpo (i.e., en la derivada segunda d^2R/dx^2) y zonas traseras de fuselaje afiladas en subsónico con $dR/dx \neq 0$. El resultado de relajar las condiciones es la aparición de presiones infinitas de tipo logarítmico.

Estas condiciones apuntan principalmente al estudio del *flujo axilsimétrico* que, en nuestro caso, carece de importancia porque no contribuye a las fuerzas aerodinámicas generalizadas. En el estudio del flujo cruzado (de nuestro interés), es obvio que en el entorno de la punta y fin del cuerpo el flujo dejará de ser bidimensional, y los resultados no serán precisos en esas zonas aunque, por otro lado, es esperable que su contribución al total de las fuerzas generalizadas sea pequeña, cambiando poco la solución modal del flutter no lineal.

Milton V. Van Dyke [VD58] demuestra que, al igual que en la teoría linealizada de alas de pequeño espesor, las condiciones de linealización en la primera aproximación de la teoría de cuerpos esbeltos puede ser violadas localmente sin cometer error en el cálculo de magnitudes globales (fuerzas aerodinámicas generalizadas). Por tanto, se pueden permitir discontinuidades en curvatura e incluso en la pendiente dR/dx y, en subsónico, forma de la nariz y zona trasera del fuselaje pueden ser apuntadas ($dR/dx \neq 0$) o incluso romas ($dR/dx = \infty$). La solución obtenida puede corregirse localmente con diversas teorías desarrolladas ad hoc, por ejemplo:

- Discontinuidades en dR/dx en flujo supersónico: M.J. Lighthill [Lig02]
- Discontinuidades en dR/dx en flujo subsónico: L.E. Fraenkel [Fra22]
- Forma del fuselaje trasero en subsónico: M.D. Van Dyke [VD54]

Sin embargo, en la aproximación de 2º orden de la teoría de cuerpos esbeltos (al igual que en la teoría de alas de pequeño espesor) las restricciones son más severas, las soluciones más

complejas, y no siempre es demostrable que la solución global es correcta excepto localmente. Estas dificultades son mayores en flujo subsónico donde las restricciones son mayores: la no existencia de punto de remanso obliga a evitar cuerpos de punta roma o incluso afilados (dR/dx finita y distinta de 0), mientras que en flujo supersónico la punta afilada es permitida al no forzar la existencia de punto de remanso.

3.2.3. Modelo Aerodinámico: Potencial de Velocidades

En la obtención de las fuerzas aerodinámicas se asumen las siguientes hipótesis:

1. *No viscosidad*
2. *Configuración esbelta*, siendo la longitud característica del misil en la dirección de vuelo (eje x) de un orden mayor que las longitudes transversales. De esta forma, las derivadas del potencial de velocidades respecto la dirección de vuelo x son despreciables frente a derivadas respecto a los ejes transversales y o z .

Por otro lado, la hipótesis de *esbeltez* en la geometría del misil hace que los términos dependientes del número de Mach M_∞ sean despreciables en las ecuaciones que determinan el potencial de velocidades no estacionario, por lo que los resultados obtenidos son válidos para cualquier número de Mach M_∞ , ya sea vuelo *subsónico*, *transónico* o *supersónico*.

Estas simplificaciones en las ecuaciones de la Mecánica de Fluidos da lugar a la conocida Teoría de Cuerpos Esbeltos o *Slender Body Theory*, cuya validez para configuraciones tipo misil ya ha sido demostrada por varios autores, entre ellos [AP51] en *estacionario*, o [Aré98b] y [Aré98a] en *no estacionario*.

J.R. Spreiter [Spr50] puntualiza además que la configuración cuerpo-ala debe permanecer dentro del cono de Mach en el caso de flujo supersónico.

3.2.4. Desplazamientos

Los desplazamientos deben cumplir las siguientes hipótesis:

1. Los desplazamientos totales son el resultado de movimientos como sólido rígido y deformación elástica (modos flexibles).
2. Se asumen pequeños desplazamientos (rígidos + flexibles) respecto de una posición de equilibrio de fuerzas y momentos. Esta posición de equilibrio puede estar asociada a:
 - Vuelo con sujeción a otro vehículo, típicamente un avión. Esta sujeción se denominará *soportado S01*.
 - Un vuelo libre del vehículo con equilibrio de fuerzas inerciales y aerodinámicas. Este vuelo puede ser equilibrado a 1g o una maniobra del vehículo con unos determinados niveles de aceleración. Esta condición de vuelo libre se denotará *soportado S02*.

Restringir los movimientos a pequeños desplazamientos respecto de una posición de equilibrio permite simplificar la formulación de las fuerzas aerodinámicas y elásticas de deformación, i.e.:

- Si las fuerzas aerodinámicas se calculan bajo esta hipótesis de pequeñas deformaciones, resultan en fuerzas generalizadas *linealmente dependientes* de las coordenadas, velocidades y aceleraciones generalizadas. Esto no ocurre, por ejemplo, en el cálculo del vuelo estacionario equilibrado en el que la aerodinámica usualmente es no lineal debido a las maniobras exigidas de este tipo de vehículos (altas aceleraciones normales a la trayectoria con elevados ángulos de ataque y velocidades de giro), la velocidad elevada en el caso de que se considere su vuelo libre, etc...
- Las fuerzas elásticas de deformación tienen expresiones linealmente dependientes de magnitudes de deformación.

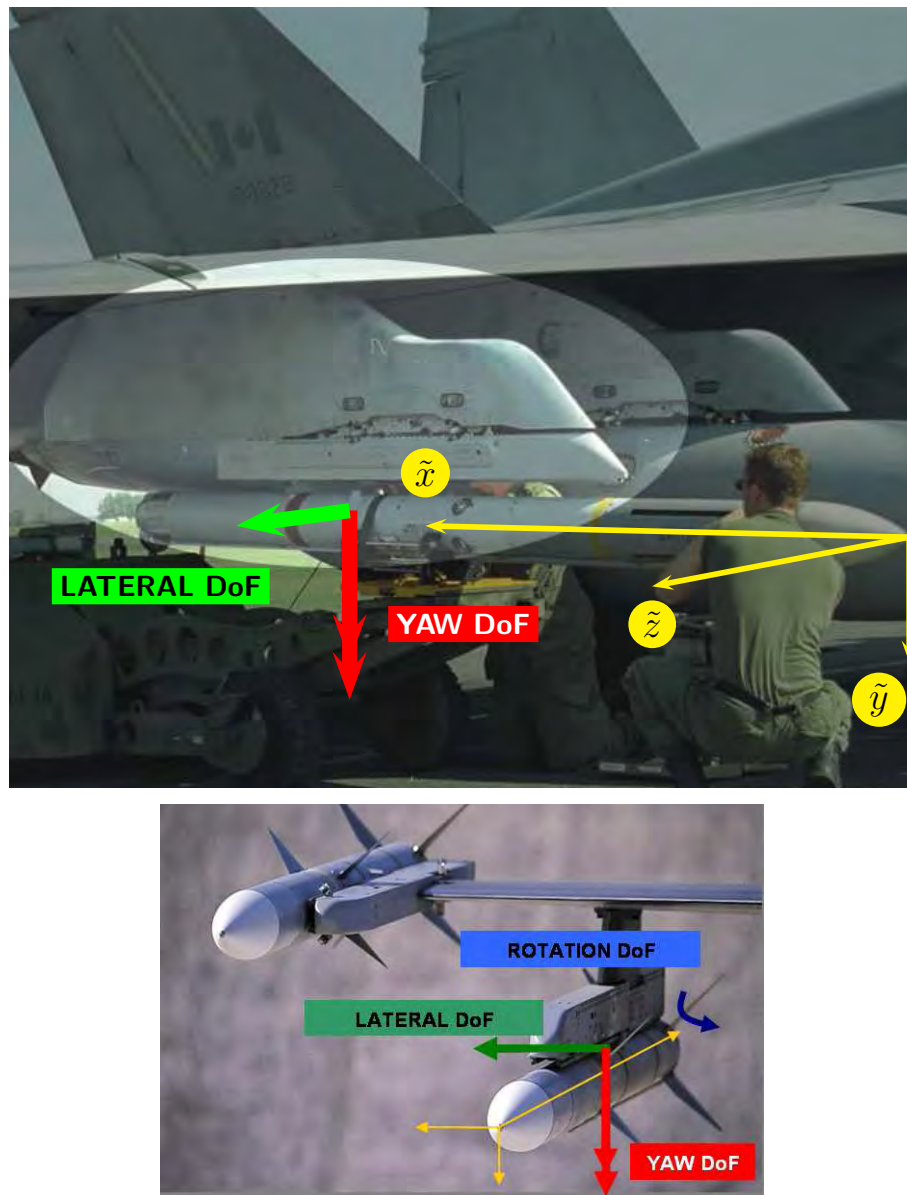


Figura 3.1: Grados de libertad de la configuración rígida **RIG**: **LATERAL** (desplazamiento en flexión lateral del conjunto pilón+misil), **YAW** (guiñada del conjunto pilón+misil) y **ROTATION** (rotación de las aletas respecto su eje de charnela o *hinge line*).

3. La rigidez a torsión del cuerpo es suficientemente alta como para considerar despreciables los giros relativos entre las distintas secciones del cuerpo respecto al eje del mismo. De esta forma, los modos de deformación elástica se pueden agrupar en (ver figura 3.1):

- Modos flexibles con desplazamientos laterales, i.e., simétricos respecto al plano xz .
- Modos flexibles con desplazamientos verticales, i.e., simétricos respecto al plano xy .

4. Las ecuaciones de la dinámica se desacoplan en dos sistemas de ecuaciones: uno con desplazamientos *laterales* y otro sistema con los *verticales*. En los siguientes capítulos se desarrollará la formulación del problema *lateral* con modos *laterales*, siendo los modos de deformación elástica dependientes sólo de la coordenada x . Las mismas ecuaciones se aplicarían al problema *longitudinal* con modos *verticales*. Por último, destacar que estos dos sistemas de ecuaciones coinciden si la configuración tiene doble plano de simetría xz y xy , algo típico en misiles convencionales.

J.R. Spreiter [Spr50] llega a esta misma conclusión en el análisis de configuraciones esbeltas de tipo cruciforme. La sustentación y el momento de cabeceo son independientes del ángulo de guiñada, mientras que la fuerza lateral y el momento de guiñada son independientes del ángulo de ataque. En el caso de aletas vertical y horizontal idénticas, el momento de balance es nulo para todos los ángulos de ataque y guiñada.

Aunque en la sección 7.2 se explica el problema físico correspondiente a la configuración de la tesis, es conveniente adelantar algunas ideas generales. Dependiendo del soportado, el problema que se considera es:

- Soportado **S01**: modos laterales de un misil instalado en un avión, i.e., modo de flexión lateral, modo de guiñada y rotación simétrica de aletas del misil.
- Soportado **S02**: misil en vuelo libre, de forma que las ecuaciones aeroelásticas resuelven tanto el problema longitudinal como el lateral.

5. Como resultado de los apartados anteriores, se consideran desplazamientos simétricos respecto al plano xz (modos *laterales*, ver figura 3.1). Esta hipótesis no resta generalidad al estudio ya que, como se ha mencionado en el apartado anterior, el sistema de ecuaciones que determina los desplazamientos antisimétricos se calcularía de la misma forma.

Por otro lado, se consideran *positivos* los desplazamientos en sentido contrario al eje z .

6. No se formula la ecuación de equilibrio de fuerzas en dirección del eje x , asumiendo que la velocidad del misil permanece constante e igual a la que tenía en el momento de equilibrio estático inicial.

Por tanto, las perturbaciones respecto la posición de equilibrio se restringen a desplazamientos verticales según el eje z , i.e., $\mathbf{w}(\mathbf{x};\mathbf{t})$.

7. Se considera la flexibilidad del cuerpo del misil pero asumiendo secciones transversales rígidas e indeformables. Por lo tanto, la deformación del cuerpo será la debida fundamentalmente a la flexión.

Las aletas del misil se consideran indeformables en dirección de la envergadura (alas de poca

envergadura), aunque se considera su deformación según la cuerda. La deformación según la cuerda en aletas de poca envergadura es la deformación predominante, tal y como determina la propia norma [Def99]:

35.6.1.b.i ... However, in general, weapon wing/fins are of low aspect ratio and consequently chordwise deformations are of importance. Hence the methods of simple beam theory are no longer adequate and it is essential to use methods based on plate type theories.

35.6.1.b.ii For configurations where very low aspect ratio wings are attached over a substantial length of the body, the wing chordwise deformations may follow closely the body deformations and in such cases, the weapon is best treated as a whole. This may also be done using slender body theory

El resultado final de estas hipótesis es que los desplazamientos del misil se podrán escribir como:

$$w(x; t) = \sum_{i=1}^m \psi_i(x) \xi_i(t) \quad (3.1)$$

donde $\psi_i(x)$ es un modo de deformación (rígido o flexible), $\xi_i(t)$ es la *coordenadas generalizada* asociada a ese modo y m es el número de modos que se considera.

Los modos $\psi_i(x)$ podrán haber sido obtenidos mediante un modelo de elementos finitos, ensayos GVT (del inglés **Ground Vibration Test**) e incluso podrán ser modos asumidos teniendo en cuenta la experiencia previa. Un ejemplo de modos asumidos es considerar modos desacoplados de cuerpo y aleta, una hipótesis que es más cierta cuanto mayor es la masa del cuerpo comparada con la de las aletas. La norma [Def99] define claramente los grados de libertad a considerar en configuraciones tipo misil:

35.11.e(ii) The number of degrees of freedom of a structural and mechanical system is equal to the minimum number of independent co-ordinates required to define the position of the relevant parts of the system at any instant of time. Therefore, it is important to define the model to have necessary and sufficient response to the exciting force or motion. The definition of a suitable set of freedoms, which may be in the form of normal modes of freedom, must come from the experience. In the early design stage it may be expedient to reduce the problem to one or two relevant modes. For example, in loading response, it may be adequate to comprise only a rigid body plus a fundamental flexible mode.

ii. One approach is to find the modes of component parts viz. body, fins, wing, in isolation, and connect these together with assumed modes of attachment at the joints; this is the Branch Mode method.

En cualquier caso, y de cara a una más clara formulación posterior, el modo $\psi_i(x)$ se puede dividir en:

1. $\psi_{i,b}(x)$: desplazamientos del modo $\psi_i(x)$ aplicables al cuerpo del misil. Para identificarlos se ha completado la descripción del modo con el subíndice **b** (del inglés **body**).
2. $\psi_{i,w}(x)$: desplazamientos del modo $\psi_i(x)$ aplicables a la aleta del misil. Para identificarlos se ha completado la descripción del modo con el subíndice **w** (del inglés **wing**).

De esta forma, los desplazamientos del cuerpo serán:

$$w_b(x; t) = \sum_{i=1}^m \psi_{i,b}(x) \xi_i(t) \quad (3.2)$$

mientras que los de la aleta vendrán dados por:

$$w_w(x; t) = \sum_{i=1}^m \psi_{i,w}(x) \xi_i(t) \quad (3.3)$$

siendo m el número total de modos.

3.2.5. Tipo y Localización de la Nolinealidad Estructural Concentrada

La nolinealidad estructural concentrada cumple las dos características siguientes.

Tipo:

Las nolinealidades concentradas que suelen ser más críticas son las que se han modelizado para este análisis:

- *Freeplay*: holgura en algún soporte del misil al avión plataforma o en el mecanismo del actuador que controla el giro de las superficies de control del misil. La nolinealidad puede tener o no una determinada precarga.
- *Hysteresis*: holgura con histéresis en algún soporte del misil al avión plataforma o en el mecanismo del actuador que controla el giro de las superficies de control del misil.

Localización:

Puede estar localizada en:

1. Misiles

- Unión del misil al vehículo portador. Aunque por generalidad se ha considerado esta nolinealidad en la formulación de las ecuaciones, es difícil que aparezca debido al alto par de apriete que tiene este tipo de sujeciones. Sin embargo, podría aparecer en caso de fallo en vuelo. La norma [MAC93] lo menciona:

3.2.1.3 Fail-safe aeroelastic stability criteria: The stability design requirements of 3.1.1 shall be met after each of the adverse conditions listed below:

...

3. Failure of any single element in the supporting structure of any pylon, rack, or external store.

...

- Actuadores de las aletas del misil. Esta localización es la más típica para la aparición de este tipo de nolinealidades y puede ser debido tanto a un fallo en vuelo, desgaste por fatiga o tolerancias en la fabricación del mecanismo del actuador.

2. Pods subalares

- Desapriete de las sujecciones pod/pilón o pilón/ala.
- Rotura en vuelo de algún bulón del pilón o de alguna sujección del pod al pilón.
- Cumplir las normas de aeronavegabilidad: en caso de pérdida de rigidez de las sujecciones o fallo de alguna de ellas se debe asegurar la integridad de la aeronave (ver norma [MAC93])

3. Aeronaves convencionales

Superficies de control como alerones, timón de profundidad o timón de dirección. En el caso de los alerones y timones de profundidad es menos frecuente que aparezcan problemas de oscilación debido a que, aunque tengan holguras, el alto grado de carga aerodinámica hace que tanto los alerones como los timones de profundidad estén en zonas de precarga y fuera de la zona muerta de la no linealidad. Esto no ocurre con el timón de dirección en el caso de vuelo equilibrado sin resbalamiento, es decir, en vuelo de crucero.

3.2.6. Ecuaciones de Estado-Espacio

Las ecuaciones de la Dinámica se plantean en la formulación estándar de estado-espacio, es decir, dos ecuaciones matriciales con las siguientes características:

1. Ecuación matricial diferencial de primer orden con las ecuaciones de la dinámica del sistema:

$$\frac{d\{x\}}{dt} = [A] \{x\} + [B] \{u\}$$

2. Ecuación matricial con las variables elegidas como salida del sistema:

$$\{y\} = [C] \{x\} + [D] \{u\}$$

Las ecuaciones del sistema se establecen en *lazo abierto*, es decir, no existe realimentación. El objetivo fundamental de esta tesis es determinar las respuestas del sistema, catalogarlas, evaluar su criticidad, etc. Una vez caracterizado el sistema y obtenido un mapa de las respuestas del mismo, se podrán establecer sistemas de control con realimentación (*lazo cerrado*) que consigan minimizar los efectos de la no linealidad reduciendo la respuesta del sistema. Este segundo objetivo de reducir la respuesta del sistema con sistemas en *lazo cerrado* queda fuera del ámbito de esta tesis.

La referencia [SKTK00] utiliza una realimentación en *lazo cerrado* para reducir los LCOs inherentes a un sistema con una no linealidad del tipo *freeplay*. La principal conclusión de esta referencia es que la realimentación debe ser de tipo *adaptativo no lineal* con el objeto de cubrir variaciones de los parámetros (velocidad de vuelo, condiciones iniciales, etc.) e incertidumbres de la no linealidad.

3.3. Modos de Deformación

Los modos de deformación de cualquier vehículo se suelen obtener en el siguiente proceso de cálculo:

1. En primer lugar se define un modelo estructural teórico del vehículo. En la actualidad, este modelo teórico suele ser un Modelo de Elementos Finitos (FEM) y existen varios códigos comerciales orientados al cálculo de elementos finitos como MSC.NASTRAN, ANSYS, etc.

Si el vehículo tiene una geometría sencilla (como es el caso de un misil), existen otras alternativas a los Modelos de Elementos Finitos que proporcionan buenos resultados. A partir de ahora, lo denominaremos *modelo estructural teórico*, y puede ser FEM o no.

2. Este modelo estructural teórico se valida con un test denominado GVT (del inglés **G**round **V**ibration **T**est). Se excita la estructura en una serie de puntos y se miden deformaciones. Fundamentalmente se comparan los modos teóricos y los experimentales, tanto las formas modales como las frecuencias propias. Las diferencias entre teoría y experimento dan lugar a cambios en el modelo estructural (ya sea FEM u otra modelización): ajuste de rigidez en actuadores, ajuste de rigidez en componentes estructurales, etc. . .

3. Una vez ajustado el modelo estructural teórico al GVT, se obtiene la siguiente información:

- Matriz de Masas Generalizada $[M_{hh}]$
- Matriz de Rigidez Generalizada $[K_{hh}]$
- Formas Modales $\psi_i(x)$, con $i = 1, 2, \dots, m$

Todo este proceso requiere un conocimiento en detalle del vehículo y no es abordable en etapas de diseño preliminar. Además requiere un intercambio de información importante entre distintos departamentos (dpto. de Masas, dpto. de Modelos Estructurales, dpto. de Sistemas de Control, dpto. de Ensayos en Tierra responsable del ensayo GVT, . . .), de forma que el analista aeroelástico debería esperar un buen tiempo hasta tener información válida para sus cálculos.

El trabajo presentado en esta tesis pretende ser una herramienta de diseño preliminar para configuraciones tipo misil, de forma que no sea necesario tener un modelo estructural ajustado a GVT para obtener algunos resultados aeroelásticos preliminares. Por supuesto que si el modelo estructural está ajustado a GVT y con las rigideces de actuadores correctas los resultados serán más ajustados a la realidad, pero la idea es tener unos primeros resultados que luego serán actualizados en siguientes fases de diseño. En este sentido, y para un vehículo con la configuración tipo misil, se pueden considerar los siguientes modelos estructurales simplificados.

3.3.1. Modelos Teóricos Estructurales en casos particulares

- Inercia del cuerpo grande comparada con la de la aleta.

Es posible separar el misil en dos modelos estructurales: por un lado el cuerpo y por otro la aleta. Los modos de deformación del cuerpo no se ven afectados por la presencia de la aleta y lo mismo ocurre con los modos de deformación de la aleta. La norma militar DEF STAN 07-85 PART 3/1 ([Def99]) considera válida esta hipótesis:

35.11.1.e(iii) One approach is to find the modes of component parts viz. body, fins, wing, in isolation, and connect these together with assumed modes of attachment at the joints; this is the Branch Mode method.

- Caso anterior y aleta indeformable.

Como en el caso anterior, los modos de deformación de la aleta no se ven afectados por el cuerpo y viceversa. Además, como se trata de aleta rígida, su deformación viene dada por la suma de las dos siguientes contribuciones:

1. Movimiento de arrastre con el cuerpo del misil $w_w^{(1)}(x; t)$:

$$w_w^{(1)}(x; t) = w_b(x_h; t) + (x - x_h)\theta_h(t) \quad (3.4)$$

donde $\theta_h(t)$ es el giro en la sección del cuerpo (de abscisa x_h) donde se sitúa el eje de giro de la aleta. Este giro $\theta_h(t)$ se puede escribir en función de las coordenadas generalizadas derivando respecto a x los desplazamientos del cuerpo dados por la ecuación (3.2):

$$\begin{aligned} w_w^{(1)}(x; t) &= w_b(x_h; t) + (x - x_h)\frac{\partial w_b}{\partial x}(x_h; t) = \\ &= \sum_{i=1}^m \psi_{i,b}(x_h)\xi_i(t) + (x - x_h)\sum_{i=1}^m \frac{d\psi_{i,b}}{dx}(x_h)\xi_i(t) = \\ &= \sum_{i=1}^m \left[\psi_{i,b}(x_h) + (x - x_h)\frac{d\psi_{i,b}}{dx}(x_h) \right] \xi_i(t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

2. Movimiento de la aleta (o superficie de control) respecto al misil $w_w^{(2)}(x; t)$:

$$w_w^{(2)}(x; t) = (x - x_h)\beta(t) \quad (3.6)$$

donde $\beta(t)$ es el giro de la aleta mediante el actuador que la mueve, y x_h la coordenada x del eje de giro de la aleta (el subíndice h proviene del término inglés *hinge line*).

De esta forma, los desplazamientos de la aleta se escriben como:

$$\begin{aligned} w_w(x; t) &= w_w^{(1)}(x; t) + w_w^{(2)}(x; t) = \\ &= \sum_{i=1}^m \left[\psi_{i,b}(x_h) + (x - x_h)\frac{d\psi_{i,b}}{dx}(x_h) \right] \xi_i(t) + (x - x_h)\beta(t) = \\ &= \sum_{i=1}^m \psi_{i,w}(x)\xi_i(t) + (x - x_h)\beta(t) \end{aligned} \quad (3.7)$$

siendo $\beta(t)$ la coordenada generalizada asociada al modo $\psi(x) = x - x_h$. El resto de las coordenadas generalizadas tendrán como modos propios (ver ecuación anterior 3.7)

$$\psi_{i,w}(x) = \psi_{i,b}(x_h) + (x - x_h)\frac{d\psi_{i,b}}{dx}(x_h) \quad (3.8)$$

Como puede observarse, la ecuación (3.8) demuestra que los modos de deformación de la aleta vienen dados por los modos de deformación del cuerpo $\psi_{i,b}(x)$ y un modo adicional de giro respecto su eje de charnela asociado a la variable $\beta(t)$.

Los modos de deformación en el cuerpo $\psi_{i,b}(x)$ pueden ser calculados de forma aproximada considerando cuerpo aislado sin aleta, bajo la hipótesis de que la inercia de la aleta es despreciable frente a la del cuerpo¹.

¹Inercia pequeña comparada con la del cuerpo incluye también momento de inercia de la aleta respecto de su charnela despreciable. Si no es así, el momento de inercia de la aleta respecto de su charnela puede introducir momentos concentrados (a través del actuador) que varían los modos del cuerpo

La norma militar DEF STAN 07-85 ([Def99]), en el párrafo 35.11.1.e(ii) especifica lo siguiente:

35.11.1.e(ii) . . . In the early design stage it may be expedient to reduce the problem to one or two relevant modes. For example, in loading response, it may be adequate for the model to comprise only a rigid body plus a fundamental flexible mode.

- Caso anterior y considerando sólo modos de sólido rígido.

Este es el caso más sencillo ya que no es necesario tener modelo estructural, sólo es necesario formular la cinemática del sistema en función de los modos de sólido rígido. Se puede considerar como la primera aproximación al problema, al que se añadirá la flexibilidad en fases de diseño más avanzadas.

3.4. Coordenadas Generalizadas

Como ya se ha explicado en la sección 3.2.4, los desplazamientos del misil respecto de una posición de equilibrio cumplen los siguientes requisitos:

- Simétricos respecto el plano xy ó xz . Esta hipótesis, como se explicó en la sección 3.2.4 no resta generalidad al problema.
- Se considera la flexibilidad del cuerpo pero asumiendo secciones transversales rígidas, de forma que los desplazamientos a lo largo del cuerpo se pueden escribir como:

$$w_b(x; t) = \sum_{i=1}^m \psi_{i,b}(x) \xi_i(t) \quad (3.9)$$

donde m es el número de modos (de sólido rígido y flexibles), $\psi_{i,b}(x)$ la forma modal del modo $\psi_i(x)$ en los puntos del cuerpo (subíndice b de $\psi_{i,b}$), y ξ_i la coordenada generalizada i .

- Las aletas del misil se consideran indeformables en dirección de la envergadura, por lo que su posición viene determinada por:

$$w_w(x; t) = \sum_{i=1}^m \psi_{i,w}(x) \xi_i(t) \quad (3.10)$$

donde m es el número de modos (de sólido rígido y flexibles), $\psi_{i,w}(x)$ la forma modal del modo i en los puntos de la aleta (subíndice w de $\psi_{i,w}$), y ξ_i la coordenada generalizada i .

Otra forma de escribir los desplazamientos de la aleta es la siguiente:

$$\begin{aligned} w_w(x; t) &= \sum_{i=1}^m \psi_{i,b}(x) \xi_i(t) + \sum_{i=1}^m [\psi_{i,w}(x) - \psi_{i,b}(x)] \xi_i(t) = \\ &= \sum_{i=1}^m \psi_{i,b}(x) \xi_i(t) + \sum_{i=1}^m \psi_{i,wb}(x) \xi_i(t) \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde, para cada modo i , el primer término $\psi_{i,b}(x) \xi_i(t)$ se puede considerar como un *desplazamiento de arrastre* de la aleta por el cuerpo, y el segundo sumando $\psi_{i,wb}(x) \xi_i(t)$ añade el *desplazamiento relativo* de la aleta respecto al cuerpo.

Esta segunda forma de escribir los desplazamientos presenta una doble ventaja frente a la formulación dada en la ecuación (3.10):

- Facilita la formulación de las fuerzas aerodinámicas: A la hora de calcular las fuerzas aerodinámicas es preferible separar los modos con movimiento conjunto cuerpo-aleta de los de movimiento de la aleta respecto al cuerpo.
- Facilita la formulación de la acción del actuador, que sólo ejerce momento cuando existe un movimiento diferencial entre cuerpo-aleta, es decir, cuando aparece alguno de los modos con movimiento relativo cuerpo-ala.

Las dos ecuaciones anteriores (3.9) y (3.11) demuestran que la posición del sistema queda determinada por las variables $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$, que son las que elegiremos como **coordenadas generalizadas**.

3.5. Energía Cinética

Una vez formulados los desplazamientos de cuerpo y aleta en función de las coordenadas generalizadas (ver sección anterior 3.4), estamos en disposición de desarrollar las expresiones de la energía cinética del sistema.

Teniendo en cuenta que los desplazamientos tanto de cuerpo como de aleta sólo dependen de la coordenada axial x , se pueden plantear la energía cinética total como integral *unidimensional* de la energía cinética por unidad de longitud, i.e.

$$T = T_b + T_w = \int_0^L \frac{dT_b}{dx} dx + \int_{x_0}^{x_f} \frac{dT_w}{dx} dx \quad (3.12)$$

siendo dT_b/dx y dT_w/dx la energía cinética por unidad de longitud de cuerpo y aleta respectivamente, L la longitud total del cuerpo, x_0 la coordenada x donde empieza la aleta y x_f la coordenada x en la que termina la aleta. El límite inferior de la integral asociada al cuerpo es cero ya que se considera, sin pérdida de generalidad, que el sistema de referencia está centrado en la punta del cuerpo.

En función de los desplazamientos del cuerpo, la energía cinética por unidad de longitud queda:

$$\frac{dT_b}{dt}(x; t) = \frac{1}{2} m_b(x) \left[\frac{dw_b}{dt}(x; t) \right]^2 = \frac{1}{2} m_b(x) \dot{w}_b^2(x; t) \quad (3.13)$$

siendo $m_b(x)$ la masa por unidad de longitud del cuerpo. La velocidad $\dot{w}_b(x; t)$ se puede expresar en función de las derivadas de las coordenadas generalizadas utilizando la expresión (3.9):

$$\dot{w}_b = \frac{dw_b}{dt}(x; t) = \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^m \psi_{i,b}(x) \xi_i(t) \right] = \sum_{i=1}^m \psi_{i,b}(x) \frac{d\xi_i}{dt}(t) = \sum_{i=1}^m \psi_{i,b}(x) \dot{\xi}_i(t) \quad (3.14)$$

y sustituyendo en la ecuación (3.13)

$$\begin{aligned} \frac{dT_b}{dt}(x; t) &= \frac{1}{2} m_b(x) \left[\sum_{i=1}^m \psi_{i,b}(x) \dot{\xi}_i(t) \right]^2 = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left[\frac{1}{2} m_b(x) \psi_{i,b}(x) \psi_{j,b}(x) \right] \dot{\xi}_i(t) \dot{\xi}_j(t) \end{aligned} \quad (3.15)$$

por lo que la contribución del cuerpo a la energía cinética del sistema (ecuación 3.12) queda:

$$\begin{aligned} T_b &= \int_0^L \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left[\frac{1}{2} m_b(x) \psi_{i,b}(x) \psi_{j,b}(x) \right] \dot{\xi}_i(t) \dot{\xi}_j(t) dx = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left[\int_0^L m_b(x) \psi_{i,b}(x) \psi_{j,b}(x) dx \right] \dot{\xi}_i(t) \dot{\xi}_j(t) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Por otro lado, utilizando la ecuación (3.11), la energía cinética de la aleta por unidad de longitud se puede escribir:

$$\begin{aligned}
 \frac{dT_w}{dt}(x; t) &= \frac{1}{2}m_w(x) \left[\sum_{i=1}^m \psi_{i,b}(x)\dot{\xi}_i(t) + \sum_{i=1}^m \psi_{i,wb}(x)\dot{\xi}_i(t) \right]^2 = \\
 &= \frac{1}{2}m_w(x) \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \psi_{i,b}(x)\psi_{j,b}(x)\dot{\xi}_i(t)\dot{\xi}_j(t) + \\
 &\quad + \frac{1}{2}m_w(x) \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \psi_{i,wb}(x)\psi_{j,wb}(x)\dot{\xi}_i(t)\dot{\xi}_j(t) + \\
 &\quad + \frac{1}{2}m_w(x) \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m [\psi_{i,b}(x)\psi_{j,wb}(x) + \psi_{i,wb}(x)\psi_{j,b}(x)] \dot{\xi}_i(t)\dot{\xi}_j(t)
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Integrando en la coordenada axial x para calcular la energía cinética total asociada a la aleta se obtiene:

$$\begin{aligned}
 T_w &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left[\int_{x_0}^{x_f} m_w(x)\psi_{i,b}(x)\psi_{j,b}(x)dx \right] \dot{\xi}_i(t)\dot{\xi}_j(t) + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left[\int_{x_0}^{x_f} m_w(x)\psi_{i,wb}(x)\psi_{j,wb}(x)dx \right] \dot{\xi}_i(t)\dot{\xi}_j(t) + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left\{ \int_{x_0}^{x_f} m_w(x) [\psi_{i,b}(x)\psi_{j,wb}(x) + \psi_{i,wb}(x)\psi_{j,b}(x)] dx \right\} \dot{\xi}_i(t)\dot{\xi}_j(t)
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Sumando las dos ecuaciones (3.16) y (3.18) se obtiene la energía cinética total del sistema:

$$\begin{aligned}
 T = T_b + T_w &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left[\int_0^L m(x)\psi_{i,b}(x)\psi_{j,b}(x)dx \right] \dot{\xi}_i(t)\dot{\xi}_j(t) + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left\{ \int_{x_0}^{x_f} m_w(x) [\psi_{i,b}(x)\psi_{j,wb}(x) + \psi_{i,wb}(x)\psi_{j,b}(x)] dx \right\} \dot{\xi}_i(t)\dot{\xi}_j(t) + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left[\int_{x_0}^{x_f} m_w(x)\psi_{i,wb}(x)\psi_{j,wb}(x)dx \right] \dot{\xi}_i(t)\dot{\xi}_j(t)
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

donde $m(x)$ es la masa por unidad de longitud del misil, es decir, cuerpo junto con aleta, definida como:

$$m(x) = m_b(x) + m_w(x) \tag{3.20}$$

siendo la masa por unidad de longitud de la aleta $m_w(x)$ una función nula fuera del intervalo $[x_0, x_f]$ en el que se encuentra la aleta. De esta forma, la masa total por unidad de longitud $m(x)$ se define a trozos como:

$$m(x) = \begin{cases} m_b(x) & \text{si } x \notin [x_0, x_f] \\ m_b(x) + m_w(x) & \text{si } x \in [x_0, x_f] \end{cases}$$

Con el objetivo de escribir las ecuaciones de la dinámica de forma compacta, es conveniente expresar la ecuación de la energía cinética (3.19) en formulación matricial, i.e.:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 & \dot{\xi}_2 & \cdots & \dot{\xi}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1m} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{m1} & M_{m2} & \cdots & M_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_m \end{Bmatrix} = \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 & \dot{\xi}_2 & \cdots & \dot{\xi}_m \end{bmatrix} [M_{hh}] \begin{Bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_m \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

donde $[M_{hh}]$ es la matriz de masas en coordenadas generalizadas o *matriz de masas modal*, cuyos elementos valen:

$$\begin{aligned}
 M_{ij} &= \int_0^L m(x) \psi_{i,b}(x) \psi_{j,b}(x) dx + \\
 &+ \int_{x_0}^{x_f} m_w(x) [\psi_{i,b}(x) \psi_{j,wb}(x) + \psi_{i,wb}(x) \psi_{j,b}(x)] dx + \\
 &+ \int_{x_0}^{x_f} m_w(x) \psi_{i,wb}(x) \psi_{j,wb}(x) dx
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

3.6. Fuerzas Generalizadas Potenciales: Energía Potencial

3.6.1. Energía de Deformación

Todo cuerpo elástico sometido a un sistema de fuerzas externas se deforma almacenando una energía potencial denominada *energía de deformación*. La configuración cuerpo/ala que se analiza en este estudio tiene las dos siguientes particularidades que afectan de forma directa al cálculo de su energía de deformación:

1. Cuerpo esbelto: las dimensiones características de las secciones transversales del cuerpo son pequeñas frente a la longitud del cuerpo. Esta condición geométrica posibilita la aplicación de la *teoría de vigas* a las deformaciones del cuerpo.
2. Aletas: las aletas se utilizan como elementos estabilizadores o superficies de control, y su principal función es ejercer una fuerza normal a su superficie. Su principal restricción de diseño será tener un área determinada para producir dicha fuerza normal y, al mismo tiempo, un conjunto de condiciones aplicables a cualquier producto aeronáutico: mínimo peso, mínimo coste de producción y máxima eficiencia aerodinámica (mínima resistencia). Estos factores dan lugar a aletas con el mínimo espesor posible, aquel necesario para evitar deformaciones por aeroelasticidad estática que provoquen pérdida de eficiencia aerodinámica, aunque siempre teniendo en cuenta espesores razonables para los estándares de fabricación y evitar costes adicionales.

Esta condición de espesor pequeño frente al resto de dimensiones de la aleta hace que sea aplicable la *teoría de placas* al estado de deformación de las aletas. De hecho, el párrafo 35.6.1.b(i) de la norma de aeronavegabilidad militar DEF STAN 07-85 Part 3 ([Def99]) especifica lo siguiente:

... However, in general, weapon wings/fins are of low aspect ratio and consequently chordwise deformations are of importance. Hence the methods of simple beam theory are no longer adequate and it is essential to use methods based on plate type theories.

Sin embargo, las deformaciones según la cuerda son importantes desde el punto de vista de *inversión de mando y/o divergencia*, es decir, las inestabilidades aeroelásticas estáticas. En el caso de *flutter*, la frecuencia propia de los modos de deformación de las aletas son típicamente muy superiores a las frecuencias características de deformación del cuerpo y de rotación de las aletas como sólido rígido respecto a sus ejes de charnela. Por tanto, es previsible que los más críticos mecanismos de *flutter* de baja frecuencia puedan captursarse de forma exacta considerando aletas rígidas.

Por todo lo anterior, y de cara a un diseño preliminar del misil, no es necesario considerar las deformaciones de las aletas, y eso es lo que se hará en esta tesis.

Cuerpo Deformable

Si las diferentes secciones transversales del cuerpo están sometidas a la actuación conjunta de todas las sollicitaciones posibles, es decir, de fuerza normal N , momentos flector M_y y M_z , fuerzas cortantes T_y y T_z y momento torsor M_t , la energía de deformación de la viga será igual a la suma de las energías de deformación correspondientes a cada una de las sollicitaciones actuando por separado, es decir²:

$$U_b = \int_L \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} ds + \int_L \frac{1}{2} \frac{M_y^2}{EI_y} ds + \int_L \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{EI_z} ds + \int_L \frac{1}{2} \chi_y \frac{T_y^2}{GA} ds + \int_L \frac{1}{2} \chi_z \frac{T_z^2}{GA} ds + \int_L \frac{1}{2} \frac{M_t^2}{GI_t} ds \quad (3.23)$$

donde:

E = Módulo de elasticidad longitudinal o, simplemente, módulo de elasticidad.

G = Módulo de elasticidad transversal.

A = Área de la sección transversal.

$I_y = \int_A z^2 dA$ = Momento de inercia de la sección transversal respecto al eje y .

$I_z = \int_A y^2 dA$ = Momento de inercia de la sección transversal respecto al eje z .

I_t = Momento de inercia equivalente.

χ_y, χ_z = Factores de cortadura (dependen de la forma de la sección).

y utilizando el subíndice b en la energía de deformación U_b para referirse al cuerpo (del inglés **body**). Existen muchas referencias de Resistencia de Materiales en las que el lector podrá encontrar esta formulación correspondiente a la *teoría de vigas*. Entre todas ellas se ha elegido la notación de [Váz99].

Todos los términos en la expresión anterior no tienen el mismo orden de magnitud. Para la mayoría de las vigas sollicitadas a flexión o a torsión las energías de deformación debidas a la fuerza normal y a la fuerza cortante son despreciables frente a las de flexión y torsión.

²Se asume que los ejes y y z de la sección transversal son ejes principales, por lo que el momento de inercia cruzado $I_{yz} = 0$

En el caso que nos ocupa, las solicitaciones son simétricas respecto al plano de simetría xz , por lo que $M_z = T_y = M_t = 0$. Además, la solicitación axial N es despreciable ya que estamos asumiendo velocidad de vuelo constante, por lo que no se desarrollan factores de inercia axiales N_x y el efecto de la resistencia aerodinámica, que también podría introducir fuerzas axiales, es despreciable en este tipo de vehículos. Por tanto, el cuerpo se puede considerar como una viga sometida a una fuerza cortante T_z y momento flector M_y , lo que en la literatura de Resistencia de Materiales se denomina *viga sometida a flexión simple*. La energía de deformación se escribe:

$$U_b \simeq \int_L \frac{1}{2} \frac{M_y^2}{EI_y} ds + \int_L \frac{1}{2} \chi_z \frac{T_z^2}{GA} ds \quad (3.24)$$

La expresión anterior conviene expresarla en función de las deformaciones del eje neutro. Esta deformación será combinación lineal de la debida al momento flector M_y y la fuerza cortante T_y , i.e.:

1. Deformaciones por momento flector M_y :

Consideremos una viga solicitada por un momento flector M_y de magnitud variable, dirigido según el eje principal y de cada sección transversal. La elástica será una curva plana de ecuación w_{BM} (subíndice BM del inglés *bending moment* o, en castellano, *momento flector*), cuya curvatura es (ver [Váz99] o [OB94]):

$$\kappa = \frac{M_y}{EI_y} = \frac{\frac{d^2 w_{BM}}{ds^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw_{BM}}{ds} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad (3.25)$$

La integración de esta ecuación diferencial no lineal presenta grandes dificultades. Sin embargo, en la mayoría de las vigas las deformaciones son pequeñas y ello permite despreciar $(dw_{BM}/ds)^2$ frente a la unidad. La ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{d^2 w_{BM}}{ds^2} = \frac{M_y}{EI_y} \quad (3.26)$$

una ecuación diferencial que define la deformada debida a un momento flector M_y .

2. Deformaciones por fuerza cortante T_z :

La energía de deformación asociada a una sección elemental de longitud ds y a la fuerza cortante T_z se escribe:

$$dU_{b,SF} = \frac{1}{2} \chi_z \frac{T_z^2}{GA} ds \quad (3.27)$$

donde el subíndice SF es un acrónimo del término inglés *shear force* o, en castellano, *fuerza cortante*. Aplicando el Teorema de Castigliano (ver [OB94]), el desplazamiento relativo en esa sección diferencial es:

$$dw_{SF} = \frac{\partial (dU_{b,SF})}{\partial T_z} = \chi_z \frac{T_z}{GA} ds \quad (3.28)$$

y, por tanto, la ecuación diferencial que define la deformada es:

$$\frac{dw_{SF}}{ds} = \chi_z \frac{T_z}{GA} \quad (3.29)$$

En la mayoría de los casos se puede considerar despreciable la deformación debida a la fuerza cortante T_z frente a la deformación asociada al momento flector M_y , es decir:

$$w_b = w_{SF} + w_{BM} \simeq w_{BM} \quad (3.30)$$

y, por tanto, la energía de deformación se puede simplificar también de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} U_b &\simeq \int_L \frac{1}{2} \frac{M_y^2}{EI_y} ds + \int_L \frac{1}{2} \chi_z \frac{T_z^2}{GA} ds \simeq \int_L \frac{1}{2} \frac{M_y^2}{EI_y} ds = \\ &= \int_L \frac{1}{2} \frac{\left[EI_y \frac{d^2 w_b}{ds^2} \right]^2}{EI_y} ds = \frac{1}{2} \int_L EI_y \left[\frac{d^2 w_b}{ds^2} \right]^2 ds \end{aligned} \quad (3.31)$$

Teniendo en cuenta que la línea elástica no deformada coincide con el eje x , el diferencial ds coincide con dx , y la expresión finalmente queda:

$$U_b = \frac{1}{2} \int_L EI_y(x) \left[\frac{\partial^2 w_b(x;t)}{\partial x^2} \right]^2 dx \quad (3.32)$$

Sustituyendo la expresión de la deformada del cuerpo en función de los modos de deformación $\psi_i(x)$, i.e.:

$$w_b(x;t) = \sum_{i=1}^m \psi_{i,b}(x) \xi_i(t) \quad (3.33)$$

se obtiene la siguiente expresión para la energía de deformación:

$$\begin{aligned} U_b &= \int_L \frac{1}{2} EI_y \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \psi''_{i,b}(x) \psi''_{j,b}(x) \xi_i(t) \xi_j(t) \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left[\int_L EI_y(x) \psi''_{i,b}(x) \psi''_{j,b}(x) dx \right] \xi_i(t) \xi_j(t) \end{aligned} \quad (3.34)$$

o, en forma matricial:

$$\begin{aligned} U_b &= \frac{1}{2} \left[\begin{array}{cccc} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_m \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} K_{11}^B & K_{12}^B & \cdots & K_{1m}^B \\ K_{21}^B & K_{22}^B & \cdots & K_{2m}^B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{m1}^B & K_{m2}^B & \cdots & K_{mm}^B \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_m \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\begin{array}{cccc} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_m \end{array} \right] [K_{hh}^B] \left\{ \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_m \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \{\xi\}^T [K_{hh}^B] \{\xi\} \end{aligned} \quad (3.35)$$

donde $[K_{hh}^B]$ es la matriz de rigidez en coordenadas generalizadas o *matriz de rigidez modal*, cuyos elementos valen:

$$K_{ij}^B = \int_L EI_y(x) \psi''_{i,b}(x) \psi''_{j,b}(x) dx \quad (3.36)$$

Aletas No Deformables

En un diseño preliminar del misil, las aletas pueden considerarse rígidas, i.e., no deformables. La norma militar DEF STAN 07-85, en el párrafo 35.11.1.e(ii) especifica:

35.11.1.e(ii) ... In the early design stage it may be expedient to reduce the problem to one or two relevant modes. For example, in loading response, it may be adequate for the model to comprise only a rigid body plus a fundamental flexible mode.

3.6.2. Modelización de Soportes y Actuadores

Modelización de Soportes Lineales en Desplazamiento y Rotación

En el caso de que el misil esté volando sujeto a una estructura (ensayos en túnel, instalado en el pilón de una aeronave, etc...), éste contactará con la estructura que lo soporta en una serie de puntos a lo largo del cuerpo del misil. Estos puntos de contacto o *soportes* se modelizan mediante unos muelles cuyas rigideces simulan las características del soportado. En este apartado se desarrolla la formulación de la energía potencial en el caso de soportes *lineales*, es decir, aquellos cuya fuerza de reacción es directamente proporcional a la elongación o rotación, dependiendo de que el soporte trabaje en desplazamiento o rotación respectivamente.

La energía potencial asociada a estos soportes se escribe:

$$U_{LS} = \sum_{k=1}^{nLD} \frac{1}{2} K_k^{LD} [w(x_k^{LD}; t)]^2 + \sum_{k=1}^{nLR} \frac{1}{2} K_k^{LR} \left[\frac{\partial w}{\partial x}(x_k^{LR}; t) \right]^2 \quad (3.37)$$

donde:

- U_{LS} = Energía potencial asociada a los soportes lineales (en desplazamiento y/o rotación) del misil. El subíndice LS es acrónimo del término inglés *Linear Supports*.
- nLD = Número de muelles lineales en desplazamiento. Se deforman con el desplazamiento $w(x; t)$.
- nLR = Número de muelles lineales en rotación. Se deforman con la derivada $\partial w(x; t)/\partial x$.
- k = Subíndice que recorre el número de muelles.
- x_k^{LD} = Posición del muelle lineal en desplazamiento (LD) número k .
- x_k^{LR} = Posición del muelle lineal en rotación (LR) número k .
- $w(x_k^{LD}; t)$ = Deformación elástica del cuerpo en la posición del muelle lineal en desplazamiento k .
- $\frac{\partial w}{\partial x}(x_k^{LR}; t)$ = Rotación local de la sección del cuerpo localizada en la posición del muelle lineal en rotación k .
- K_k^{LD} = Rigidez del muelle lineal en desplazamiento número k .
- K_k^{LR} = Rigidez del muelle lineal en rotación número k .

Utilizando la formulación modal para expresar los desplazamientos $w(x_k^{LD}; t)$ y las rotaciones

$\partial w(x_k^{LR}; t)/\partial x$:

$$\begin{aligned} w(x_k^{LD}; t) &= \sum_{i=1}^m \psi_{i,b}(x_k^{LD}) \xi_i(t) = \sum_{i=1}^m \psi_{i,kLD} \cdot \xi_i(t) \\ \frac{\partial w}{\partial x}(x_k^{LR}; t) &= \sum_{i=1}^m \psi'_{i,b}(x_k^{LR}) \xi_i(t) = \sum_{i=1}^m \psi'_{i,kLR} \cdot \xi_i(t) \end{aligned} \quad (3.38)$$

donde:

$$\begin{aligned} \psi_{i,kLD} &= \psi_{i,b}(x_k^{LD}) \\ \psi'_{i,kLR} &= \psi'_{i,b}(x_k^{LR}) \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación del potencial U_{LS} (ecuación 3.37):

$$\begin{aligned} U_{LS} &= \sum_{k=1}^{nLD} \frac{1}{2} K_k^{LD} \left[\sum_{i=1}^m \psi_{i,kLD} \cdot \xi_i(t) \right]^2 + \sum_{k=1}^{nLR} \frac{1}{2} K_k^{LR} \left[\sum_{i=1}^m \psi'_{i,kLR} \cdot \xi_i(t) \right]^2 = \\ &= \sum_{k=1}^{nLD} \frac{1}{2} K_k^{LD} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \psi_{i,kLD} \psi_{j,kLD} \xi_i(t) \xi_j(t) + \sum_{k=1}^{nLR} \frac{1}{2} K_k^{LR} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \psi'_{i,kLR} \psi'_{j,kLR} \xi_i(t) \xi_j(t) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Agrupando términos en coordenadas generalizadas $\xi_i \xi_j$:

$$U_{LS} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left[\sum_{k=1}^{nLD} K_k^{LD} \psi_{i,kLD} \psi_{j,kLD} + \sum_{k=1}^{nLR} K_k^{LR} \psi'_{i,kLR} \psi'_{j,kLR} \right] \xi_i(t) \xi_j(t) \quad (3.40)$$

Utilizando una notación simplificada:

$$U_{LS} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m K_{ij}^{LDR} \xi_i(t) \xi_j(t) \quad (3.41)$$

donde:

$$K_{ij}^{LDR} = \sum_{k=1}^{nLD} K_k^{LD} \psi_{i,kLD} \psi_{j,kLD} + \sum_{k=1}^{nLR} K_k^{LR} \psi'_{i,kLR} \psi'_{j,kLR}$$

es la rigidez introducida por los soportes lineales en desplazamiento y rotación (superíndice LDR del inglés *Linear Displacement and Rotation*).

Como siempre es conveniente utilizar la notación matricial:

$$\begin{aligned} U_{LS} &= \frac{1}{2} \left[\begin{array}{ccc} \xi_1 & \xi_2 & \cdots \xi_m \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} K_{11}^{LDR} & K_{12}^{LDR} & \cdots & K_{1m}^{LDR} \\ K_{21}^{LDR} & K_{22}^{LDR} & \cdots & K_{2m}^{LDR} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{m1}^{LDR} & K_{m2}^{LDR} & \cdots & K_{mm}^{LDR} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_m \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\begin{array}{ccc} \xi_1 & \xi_2 & \cdots \xi_m \end{array} \right] [K_{hh}^{LDR}] \left\{ \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_m \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \{\xi\}^T [K_{hh}^{LDR}] \{\xi\} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Modelización de un Soporte No Lineal (Histéresis) en Desplazamiento.

En el caso de tener un soporte no lineal con histéresis (*freeplay* es un caso particular) se consideran las siguientes zonas (figura 3.2):

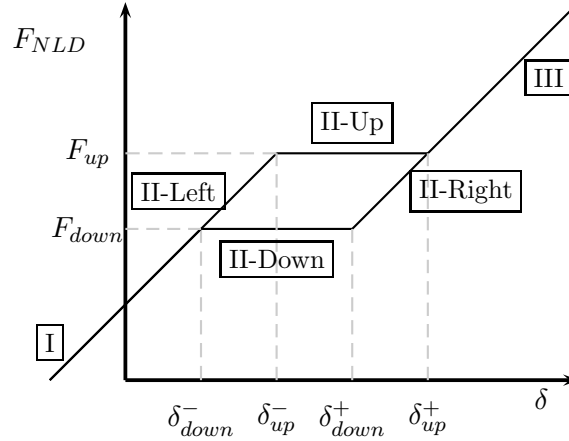


Figura 3.2: Nolinealidad del tipo *hysteresis*.

Las fuerzas que desarrolla este muelle no lineal quedan resumidas en la siguiente tabla en función de la zona del ciclo de histéresis en la que se encuentra el sistema:

ZONA	FUERZA NO LINEAL
I y II-Left	$F_{NLD} = F_{up} + K^{NLD} (\delta - \delta_{up}^-)$
II-Right y III	$F_{NLD} = F_{down} + K^{NLD} (\delta - \delta_{down}^+)$
II-Down	$F_{NLD} = F_{down}$
II-Up	$F_{NLD} = F_{up}$

y, por tanto, la energía potencial depende de la zona del ciclo de histéresis en la que se encuentra el sistema, i.e.:

Zona I/II-Left

En esta zona, el diferencial del potencial se escribe:

$$dU_{NLD} = -F_{NLD}dw = -[-F_{up} - K^{NLD}(w_{NLD}(t) - \delta_{up}^-)]dw$$

e integrando en el tiempo:

$$U_{NLD} = \int_0^t dU_{NLD}S = (F_{up} - K^{NLD}\delta_{up}^-)w_{NLD}(t) + \frac{1}{2}K^{NLD}w_{NLD}^2(t)$$

Zona II-Right/III

Procediendo de la misma forma que en la zona anterior:

$$U_{NLD} = (F_{down} - K^{NLD}\delta_{down}^+)w_{NLD}(t) + \frac{1}{2}K^{NLD}w_{NLD}^2(t)$$

Zona II-Up

$$U_{NLD} = F_{up}w_{NLD}(t)$$

Zona II-Down

$$U_{NLD} = F_{down}w_{NLD}(t)$$

donde $w_{NLD}(t)$ es el desplazamiento en función del tiempo en la coordenada axial en la que se sitúa el muelle no lineal, i.e., $w_{NLD}(t) = w(x^{NLD}; t)$. Las expresiones anteriores se pueden escribir de forma compacta en la siguiente expresión:

$$U_{NLD} = \frac{1}{2}K^{NLD}w_{NLD}^2(t) + F_0^{NLD} \cdot w_{NLD}(t) - DSI \cdot \frac{1}{2}K^{NLD}w_{NLD}^2(t) \quad (3.43)$$

donde F_0^{NLD} es un valor de fuerza que tiene un significado físico y es el corte de la línea Fuerza-Desplazamiento con el eje $x = 0$ (de ahí el subíndice 0) y DSI es un coeficiente adimensional que será 1 si el sistema está dentro de las zonas planas (Zonas II-Down o II-Up) y 0 si está fuera de estas zonas.³

ZONA	F_0^{NLD}	DSI
No Existe	0	+1
Soporte Lineal	0	0
I y II-Left	$F_{up} - K^{NLD}\delta_{up}^-$	0
II-Right y III	$F_{down} - K^{NLD}\delta_{down}^+$	0
II-Down	F_{down}	+1
II-Up	F_{up}	+1

El primer término $1/2 \cdot K^{NLD}w_{NLD}^2(t)$ se adjunta al potencial de los soportes lineales U_{LS} que se ha desarrollado en el punto anterior.

Introduciendo la formulación modal en la expresión de $w_{NLD}(t)$ se obtiene:

$$w_{NLD}(t) = w(x^{NLD}; t) = \sum_{i=1}^m \psi_{i,b}(x^{NLD})\xi_i(t) = \sum_{i=1}^m \psi_{i,NLD}\xi_i(t) \quad (3.44)$$

donde se ha utilizado la notación simplificada $\psi_{i,NLD} = \psi_{i,b}(x^{NLD})$. Sustituyendo en la expresión del potencial no lineal U_{NLD} :

$$\begin{aligned} U_{NLD} &= \frac{1}{2}K^{NLD} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \psi_{i,NLD}\psi_{j,NLD}\xi_i\xi_j + F_0^{NLD} \sum_{i=1}^m \psi_{i,NLD}\xi_i - \\ &\quad - DSI \cdot \frac{1}{2}K^{NLD} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \psi_{i,NLD}\psi_{j,NLD}\xi_i\xi_j = \\ &= \frac{1}{2} \{\xi\}^T [K_{hh}^{NLD}] \{\xi\} + F_0^{NLD} \{\psi_{NLD}\}^T \{\xi\} - DSI \cdot \frac{1}{2} \{\xi\}^T [K_{hh}^{NLD}] \{\xi\} = \\ &= (1 - DSI) \frac{1}{2} \{\xi\}^T [K_{hh}^{NLD}] \{\xi\} + F_0^{NLD} \{\psi_{NLD}\}^T \{\xi\} \end{aligned} \quad (3.45)$$

siendo:

$$\begin{aligned} K_{ij}^{NLD} &= K^{NLD} \psi_{i,NLD}\psi_{j,NLD} \\ \{\psi_{NLD}\} &= [\psi_{1,NLD} \quad \psi_{2,NLD} \quad \cdots \quad \psi_{m,NLD}]^T \end{aligned}$$

³DSI es acrónimo del término inglés *Deadband Switch Indicator*.

Modelización de un Soporte No Lineal (Histéresis) en Rotación.

La figura 3.3 representa el momento de un soporte no lineal en función de la rotación local.

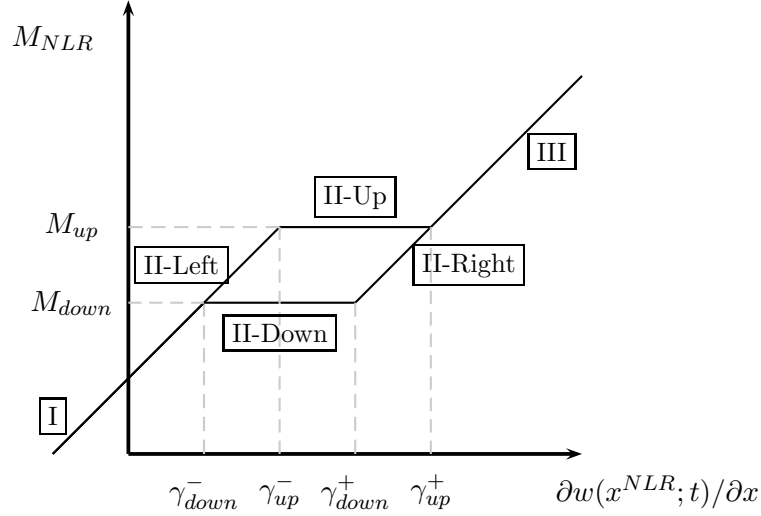


Figura 3.3: Nolinealidad del tipo *hysteresis*.

El momento que proporciona este actuador no lineal en función de la zona de histéresis en la que se encuentre el sistema es:

ZONA	MOMENTO NO LINEAL
I y II-Left	$M_{NLR} = M_{up} + K^{NLR} (\gamma - \gamma_{up}^-)$
II-Right y III	$M_{NLR} = M_{down} + K^{NLR} (\gamma - \gamma_{down}^+)$
II-Down	$M_{NLR} = M_{down}$
II-Up	$M_{NLR} = M_{up}$

donde $\gamma = \partial w / \partial x(x^{NLR}; t)$ es la rotación local en el soporte no lineal en rotación. La energía potencial depende de la zona del ciclo de histéresis en la que se encuentra el sistema, i.e.:

Zona I/II-Left En esta zona, el diferencial del potencial se escribe:

$$dU_{NLR} = -M_{NLR}d\gamma = -[-M_{up} - K^{NLR}(\gamma - \gamma_{up}^-)]d\gamma$$

e integrando en el tiempo:

$$U_{NLR} = \int_0^t dU_{NLR} = (M_{up} - K^{NLR}\gamma_{up}^-)\gamma + \frac{1}{2}K^{NLR}\gamma^2$$

Zona II-Right/III Procediendo de la misma forma que en la zona anterior:

$$U_{NLR} = (M_{down} - K^{NLR}\gamma_{down}^+)\gamma + \frac{1}{2}K^{NLR}\gamma^2$$

Zona II-Up $U_{NLR} = M_{up}\gamma$

Zona II-Down $U_{NLR} = M_{down}\gamma$

en forma más compacta:

$$U_{NLR} = \frac{1}{2}K^{NLR}\gamma^2 + M_0^{NLR}\gamma - DSI \cdot \frac{1}{2}K^{NLR}\gamma^2 \quad (3.46)$$

donde M_0^{NLR} es un valor de fuerza que tiene un significado físico y es el corte de la línea Momento-Desplazamiento con el eje $x = 0$ (de ahí el subíndice 0) y DSI es un coeficiente adimensional que será 1 si el sistema está dentro de las zonas planas (Zonas II-Down o II-Up) y 0 si está fuera de estas zonas.⁴

ZONA	M_0^{NLR}	DSI
No Existe	0	+1
Soporte Lineal	0	0
I y II-Left	$M_{up} - K^{NLR}\gamma_{up}^-$	0
II-Right y III	$M_{down} - K^{NLR}\gamma_{down}^+$	0
II-Down	M_{down}	+1
II-Up	M_{up}	+1

Introduciendo la formulación modal para la expresión de $\gamma = \partial w / \partial x(x^{NLR}; t)$:

$$\gamma = \frac{\partial w}{\partial x}(x^{NLR}; t) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \psi_{i,b}}{\partial x}(x^{NLR}) \xi_i(t) = \sum_{i=1}^m \psi'_{i,NLR} \xi_i(t) \quad (3.47)$$

donde se ha utilizado la notación simplificada $\psi'_{i,NLR} = \partial \psi_{i,b}(x^{NLR}; t) / \partial x$. Sustituyendo en la ecuación del potencial:

$$\begin{aligned} U_{NLR} &= \frac{1}{2}K^{NLR} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \psi'_{i,NLR} \psi'_{j,NLR} \xi_i \xi_j + M_0^{NLR} \sum_{i=1}^m \psi'_{i,NLR} \xi_i - \\ &\quad - DSI \cdot \frac{1}{2}K^{NLR} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \psi'_{i,NLR} \psi'_{j,NLR} \xi_i \xi_j = \\ &= \frac{1}{2} \{\xi\}^T [K_{hh}^{NLR}] \{\xi\} + M_0^{NLR} \{\psi'_{NLR}\}^T \{\xi\} - DSI \cdot \frac{1}{2} \{\xi\}^T [K_{hh}^{NLR}] \{\xi\} = \\ &= (1 - DSI) \frac{1}{2} \{\xi\}^T [K_{hh}^{NLR}] \{\xi\} + M_0^{NLR} \{\psi'_{NLR}\}^T \{\xi\} \end{aligned} \quad (3.48)$$

siendo:

$$\begin{aligned} K_{ij}^{NLR} &= K^{NLR} \psi'_{i,NLR} \psi'_{j,NLR} \\ \{\psi_{NLR}\} &= [\psi'_{1,NLR} \quad \psi'_{2,NLR} \quad \cdots \quad \psi'_{m,NLR}]^T \end{aligned}$$

Modelización de Actuadores de Aletas

El modelo de actuador típico en estudios aeroelásticos es un muelle lineal, con la rigidez apropiada para sintonizar el modo de rotación de superficie obtenido del ensayo de vibración en tierra GVT⁵. En esta tesis se incluye la posibilidad de tener una no linealidad en el actuador, por lo que se tienen dos posibles modelos de actuador:

⁴DSI es acrónimo del término inglés *Deadband Switch Indicator*.

⁵GVT es acrónimo de *Ground Vibration Test*.

1. Actuadores Lineales:

Los actuadores de las aletas se pueden considerar como muelles que impiden la rotación relativa de las aletas respecto al cuerpo. Esta rotación relativa viene dada por los modos $\psi_{i,wb}(x)$, i.e.⁶:

$$\beta_A = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \psi_{i,wb}}{\partial x}(x_h) \xi_i(t) \quad (3.49)$$

siendo β_A la rotación de las aletas respecto al cuerpo y x_h la coordenada axial del eje de giro de las aletas (h es un acrónimo del término inglés *hing line*). La energía potencial asociada a los actuadores es:

$$\begin{aligned} U_{LA} &= \frac{1}{2} K^A \beta_A^2 = \frac{1}{2} K^A \left[\sum_{i=1}^m \psi'_{i,wb}(x_h) \xi_i(t) \right]^2 = \\ &= \frac{1}{2} K^A \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \psi'_{i,wb}(x_h) \psi'_{j,wb}(x_h) \xi_i(t) \xi_j(t) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m K^A \psi'_{i,wb}(x_h) \psi'_{j,wb}(x_h) \xi_i \xi_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m K_{ij}^A \xi_i \xi_j \end{aligned} \quad (3.50)$$

donde:

$$K_{ij}^A = K^A \psi'_{i,wb}(x_h) \psi'_{j,wb}(x_h)$$

En formulación matricial:

$$\begin{aligned} U_{LA} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11}^A & K_{12}^A & \cdots & K_{1m}^A \\ K_{21}^A & K_{22}^A & \cdots & K_{2m}^A \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{m1}^A & K_{m2}^A & \cdots & K_{mm}^A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_m \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_m \end{bmatrix} [K_{hh}^A] \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_m \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \{\xi\}^T [K_{hh}^A] \{\xi\} \end{aligned} \quad (3.51)$$

2. Actuadores No Lineales:

⁶Recuérdese que el modo de movimiento relativo $\psi_{i,wb}(x)$ viene dado por $\psi_{i,wb}(x) = \psi_{i,w}(x) - \psi_{i,b}(x)$.

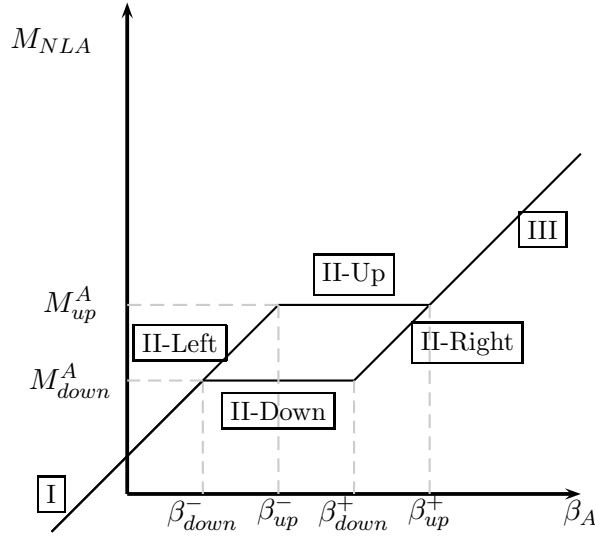


Figura 3.4: Momento no lineal de un actuador en función de la rotación de las aletas.

El momento que proporciona este actuador no lineal en función de la zona de histéresis en la que se encuentre el sistema es (ver figura 3.4):

ZONA	MOMENTO NO LINEAL EN ACTUADORES
I y II-Left	$M_{NLA} = -M_{up} - K^A [\beta_A - \beta_{up}^-]$
II-Right y III	$M_{NLA} = -M_{down} - K^A [\beta_A - \beta_{down}^+]$
II-Down	$M_{NLA} = -M_{down}$
II-Up	$M_{NLA} = -M_{up}$

donde $\beta_A = \partial w_{wb}(x_h; t) / \partial x$, siendo $w_{wb}(x; t)$ el desplazamiento de las aletas *relativo al cuerpo del misil*. Este giro relativo β_A se expresa en formulación modal:

$$\beta_A = \frac{\partial w_{wb}(x_h; t)}{\partial x} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \psi_{i,wb}(x_h)}{\partial x} \xi_i(t) \quad (3.52)$$

De forma similar a un muelle no lineal en desplazamiento o rotación, la energía potencial se formula dependiendo de la zona del ciclo de histéresis:

Zona I y II-Left: $dU_{NLA} = -M_{NLA} d\beta_A = \{M_{up} + K^A [\beta_A - \beta_{up}^-]\} d\beta_A$

e integrando en el ángulo de rotación:

$$U_{NLA} = \int_0^{\beta_A} \{M_{up} + K^A [\beta - \beta_{up}^-]\} d\beta \text{ y, por tanto:}$$

$$U_{NLA} = (M_{up} - K^A \beta_{up}^-) \beta_A + \frac{1}{2} K^A \beta_A^2$$

Zona II-Right y III: Calculando la energía potencial de la misma forma, i.e.,

$$U_{NLA} = - \int_0^{\beta_A} M_{NLA} d\beta, \text{ la energía potencial queda:}$$

$$U_{NLA} = (M_{down} - K^A \beta_{down}^+) \beta_A + \frac{1}{2} K^A \beta_A^2$$

Zona II-Down: $U_{NLA} = M_{down} \beta_A$

Zona II-Up: $M_{NLA} = M_{up} \beta_A$

Escribiendo la energía potencial de forma compacta:

$$U_{NLA} = \frac{1}{2}K^A\beta_A^2 + M_0^{NLA}\beta_A - DSI \cdot \frac{1}{2}K^A\beta_A^2 \quad (3.53)$$

El momento M_0^{NLA} tiene significado físico y es el corte de la recta Momento-Giro con el eje $x = 0$ (de ahí el subíndice 0) y DSI es un coeficiente adimensional que será 1 si el sistema está dentro de las zonas planas (Zonas II-Down o II-Up) y 0 si está fuera de estas zonas.⁷

ZONA	M_0^{NLD}	DSI
No Existe	0	+1
Soporte Lineal	0	0
I y II-Left	$M_{up} - K^A\beta_{up}^-$	0
II-Right y III	$M_{down} - K^A\beta_{down}^+$	0
II-Down	M_{down}	+1
II-Up	M_{up}	+1

Utilizando la formulación modal para expresar el giro de la aleta β_A , i.e.:

$$\beta_A = \sum_{i=1}^m \partial\psi_{i,wb}(x_h)/\partial x \cdot \xi_i(t) = \sum_{i=1}^m \psi'_{i,wb}(x_h) \cdot \xi_i \quad (3.54)$$

la energía potencial se puede expresar como:

$$\begin{aligned} U_{NLA} &= \frac{1}{2}K^A \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \psi'_{i,wb}(x_h)\psi'_{j,wb}(x_h)\xi_i\xi_j + M_0^{NLA} \sum_{i=1}^m \psi'_{i,wb}(x_h)\xi_i - \\ &\quad - DSI \cdot \frac{1}{2}K^A \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \psi'_{i,wb}(x_h)\psi'_{j,wb}(x_h)\xi_i\xi_j = \\ &= \frac{1}{2}\{\xi\}^T [K_{hh}^A] \{\xi\} + M_0^{NLA}\{\psi'_{h,wb}(x_h)\}^T \{\xi\} - DSI \cdot \frac{1}{2}\{\xi\}^T [K_{hh}^A] \{\xi\} = \\ &= (1 - DSI) \frac{1}{2}\{\xi\}^T [K_{hh}^A] \{\xi\} + M_0^{NLA}\{\psi'_{h,wb}(x_h)\}^T \{\xi\} \end{aligned} \quad (3.55)$$

donde:

$$K_{ij}^A = K^A\psi'_{i,wb}(x_h)\psi'_{j,wb}(x_h) \quad (3.56)$$

3.7. Fuerzas Generalizadas No Potenciales: Aerodinámica No Estacionaria

Las fuerzas aerodinámicas generalizadas asociadas al modo i se pueden escribir como:

$$\tilde{Q}_i = q_\infty \iint_S (-C_p dS \vec{n}) \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_i} \quad (3.57)$$

siendo S la superficie mojada del misil, \vec{n} la normal exterior y \vec{r} un vector que recorre dicha superficie. Debido a los diferentes límites de integración en la integral de superficie anterior, es conveniente separar

⁷DSI es acrónimo del término inglés *Deadband Switch Indicator*.

la contribución de cuerpo y aleta a las fuerzas generalizadas, de forma que:

$$\tilde{Q}_i = \tilde{Q}_{i,b} + \tilde{Q}_{i,w} = q_\infty \iint_{S_b} (-C_p dS \vec{n}) \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_i} + q_\infty \iint_{S_w} (-C_p dS \vec{n}) \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_i} \quad (3.58)$$

3.7.1. Formulación de las Fuerzas Aerodinámicas Generalizadas en el Cuerpo

La superficie del cuerpo viene dada por el siguiente vector⁸:

$$\vec{r} = x\vec{i} + R(x) \cos \theta \vec{j} + \left[R(x) \sin \theta - \sum_{i=1}^m \psi_{i,b}(x) \xi_i(t) \right] \vec{k} \quad (3.59)$$

y los desplazamientos del cuerpo asociados a la coordenada generalizada ξ_i se escribirán como:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_i} = -\psi_{i,b}(x) \vec{k} \quad (3.60)$$

Por otro lado, la normal al cuerpo se puede escribir:

$$\vec{n} = (-\sin \gamma, \cos \gamma \cos \theta, \cos \gamma \sin \theta) \quad (3.61)$$

siendo θ la coordenada azimutal en ejes cuerpo y γ el ángulo especificado en la figura 3.5 (ver apéndice C).

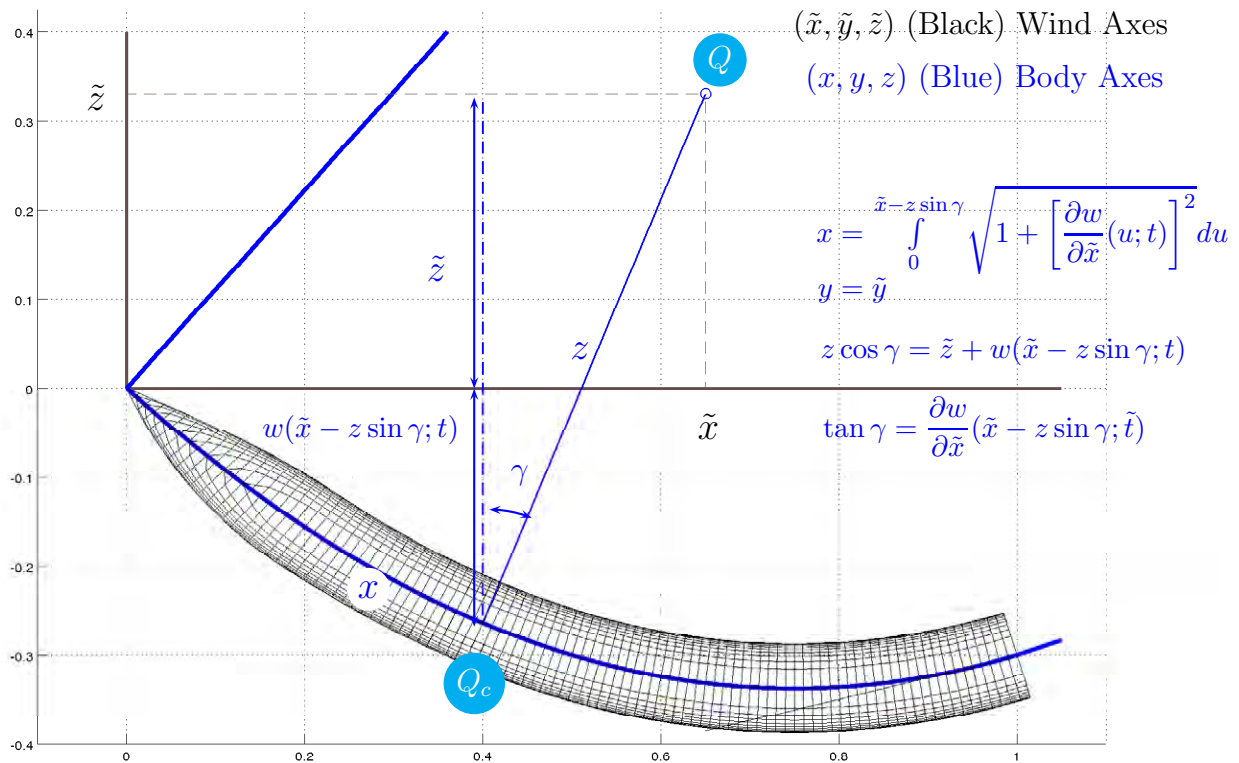


Figura 3.5: Figura 2D (plano xz) de la configuración cuerpo/ala deformada

⁸ Asumiendo cuerpo axilimétrico y tomando coordenadas cilíndricas de eje x .

Teniendo en cuenta la hipótesis de esbeltez del cuerpo y que:

$$\tan \gamma = \frac{dR}{dx}(x) \approx \frac{\epsilon}{L} \approx \epsilon \quad (3.62)$$

el resto de términos que intervienen en la normal se escriben:

$$\sin \gamma = \frac{\tan \gamma}{\sqrt{1 + \tan^2 \gamma}} = \tan \gamma + o(\epsilon) \approx \tan \gamma = \frac{dR}{dx}(x) \quad (3.63)$$

$$\cos \gamma = 1 + o(\epsilon) \quad (3.64)$$

y sustituyendo en (3.61) queda:

$$\vec{n} \simeq \left(-\frac{dR}{dx}(x), \cos \theta, \sin \theta \right) \quad (3.65)$$

Por último, llevando las expresiones (3.60) y (3.65) a la expresión para la fuerza generalizadas (3.58):

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{i,b} &= q_\infty \iint_{S_b} C_p(x, \theta) R(x) \psi_{i,b}(x) \sin \theta d\theta dx = \\ &= q_\infty \int_0^L \left[\int_0^{2\pi} C_p(x, \theta) \sin \theta d\theta \right] R(x) \psi_{i,b}(x) dx \end{aligned} \quad (3.66)$$

donde se ha tenido en cuenta que $dS_b \simeq R(x) dx d\theta$.

3.7.2. Formulación de las Fuerzas Aerodinámicas Generalizadas en la Aleta

La superficie de las aletas viene dada por el siguiente vector⁹:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} - \left[\sum_{i=1}^m \psi_{i,w}(x) \xi_i(t) \right] \vec{k} \quad (3.67)$$

por lo que su variación con respecto a la coordenada generalizada ξ_i queda:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_i} = -\psi_{i,w}(x) \vec{k} \quad (3.68)$$

Como en todas las superficies sustentadoras, la integración de las presiones es conveniente separarla en intradós $S_w^{(+)}$ y extradós $S_w^{(-)}$. Utilizando la expresión (3.58):

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{i,w} &= q_\infty \iint_{S_w^{(+)}} C_{p,w}^{(+)}(x, y) \psi_{i,w}(x) dS \left[\vec{n}^{(+)} \cdot \vec{k} \right] + \\ &+ q_\infty \iint_{S_w^{(-)}} C_{p,w}^{(-)}(x, y) \psi_{i,w}(x) dS \left[\vec{n}^{(-)} \cdot \vec{k} \right] = \\ &= q_\infty \iint_{S_w^{(+)}} C_{p,w}^{(+)}(x, y) \psi_{i,w}(x) dS - q_\infty \iint_{S_w^{(-)}} C_{p,w}^{(-)}(x, y) \psi_{i,w}(x) dS \end{aligned} \quad (3.69)$$

donde se ha tenido en cuenta que:

$$\vec{n}^{(+)} \simeq +\vec{k} \quad (3.70)$$

$$\vec{n}^{(-)} \simeq -\vec{k} \quad (3.71)$$

⁹Se estudia el movimiento simétrico respecto al plano $y = 0$.

Simplificando las dos integrales de la ecuación (3.69) en una sola queda:

$$\tilde{Q}_{i,w} = q_\infty \iint_{S_w} [C_{p,w}^{(+)}(x,y) - C_{p,w}^{(-)}(x,y)] \psi_{i,w}(x) dS = q_\infty \iint_{S_w} \Delta C_{p,w}(x,y) \psi_{i,w}(x) dS \quad (3.72)$$

donde $\Delta C_{p,w}$ es la diferencia de presión de intradós menos extradós:

$$\Delta C_{p,w}(x,y) = C_{p,w}^{(+)}(x,y) - C_{p,w}^{(-)}(x,y) \quad (3.73)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta la simetría de la configuración y que los modos estudiados son simétricos, la integral anterior se puede extender a una semialeta:

$$\tilde{Q}_{i,w} = 2 q_\infty \iint_{S_w/2} \Delta C_{p,w}(x,y) \psi_{i,w}(x) dS \quad (3.74)$$

3.8. Formulación matricial de las Ecuaciones de Lagrange

Existen muchas referencias en las que el lector puede encontrar el desarrollo de las ecuaciones de Lagrange (ver por ejemplo [Gan03]). La formulación genérica Lagrangiana establece que las ecuaciones de la Mecánica del sistema se obtienen a partir de las siguientes expresiones:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \xi_i} = GF_i \quad (3.75)$$

siendo T la energía cinética del sistema, ξ_i las coordenadas generalizadas, $\dot{\xi}_i$ las velocidades generalizadas y GF_i las fuerzas generalizadas. En este caso, las fuerzas generalizadas se pueden expresar como la suma de los siguientes dos términos:

$$GF_i = PGF_i + AGF_i = -\frac{\partial U}{\partial \xi_i} + AGF_i \quad (3.76)$$

donde PGF_i son las *Fuerzas Generalizadas que derivan de un Potencial*, y que se expresan como $PGF_i = -\partial U / \partial \xi_i$, mientras que el término AGF_i consideras las *Fuerzas Generalizadas Aerodinámicas (Aerodinámica No Estacionaria)*, fuerzas aerodinámicas que no derivan de un potencial ya que dependen de las velocidades generalizadas (ver página 65 en [Gan03]). Las fuerzas generalizadas que derivan de un potencial PGF_i provienen de una o varias de las siguientes contribuciones:

1. Deformación elástica del cuerpo, cuyo potencial asociado se ha expresado como U_b .
2. Deformación de soportes lineales en desplazamiento y rotación, cuyo potencial asociado se ha expresado como U_{LDR} .
3. Deformación de un soporte no lineal en desplazamiento, cuyo potencial asociado se ha expresado como U_{NLD} .
4. Deformación de un soporte no lineal en rotación, cuyo potencial asociado se ha expresado como U_{NLR} .
5. Deformación de los actuadores (lineales o no lineales), cuyo potencial asociado se ha expresado como U_A .

Como resultado de lo anterior, las ecuaciones de Lagrange se formulan de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \xi_i} + \frac{\partial U_b}{\partial \xi_i} + \frac{\partial U_{LDR}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial U_{NLD}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial U_{NLR}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial U_A}{\partial \xi_i} = AGF_i \quad (3.77)$$

y, teniendo en cuenta que la energía cinética depende de las *velocidades generalizadas* $\dot{\xi}_i$ y no de las *coordenadas generalizadas* ξ_i , i.e., $\partial T/\partial \xi_i = 0$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_i} \right) + \frac{\partial U_b}{\partial \xi_i} + \frac{\partial U_{LDR}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial U_{NLD}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial U_{NLR}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial U_A}{\partial \xi_i} = AGF_i \quad (3.78)$$

A continuación se analiza cada uno de los términos que intervienen en la ecuación anterior:

1. Derivada de la energía cinética $d(\partial T/\partial \dot{\xi}_i)/dt$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_i} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\xi}_i} \left(\frac{1}{2} \{\dot{\xi}\}^T [M_{hh}] \{\dot{\xi}\} \right) = \\ &= \frac{M_{1i} + M_{i1}}{2} \dot{\xi}_1 + \frac{M_{2i} + M_{i2}}{2} \dot{\xi}_2 + \cdots + M_{ii} \dot{\xi}_i + \cdots + \frac{M_{mi} + M_{im}}{2} \dot{\xi}_m = \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{M_{ji} + M_{ij}}{2} \dot{\xi}_j \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_i} \right) = \sum_{j=1}^m \frac{M_{ji} + M_{ij}}{2} \ddot{\xi}_j = \sum_{j=1}^m M_{ij} \ddot{\xi}_j \quad (3.80)$$

donde se ha sustituido la expresión de simetría en la masa generalizada, i.e., $M_{ji} = M_{ij}$.

2. Derivada del potencial U_b :

$$\frac{\partial U_b}{\partial \xi_i} = \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{1}{2} \{\xi\}^T [K_{hh}^B] \{\xi\} \right) = \sum_{j=1}^m \frac{K_{ji}^B + K_{ij}^B}{2} \xi_j \quad (3.81)$$

y, teniendo en cuenta la expresión de un término de rigidez generalizada K_{ij} :

$$K_{ij}^B = \int_L EI_y(x) \psi_{i,b}''(x) \psi_{j,b}''(x) dx$$

se puede comprobar que $K_{ij}^B = K_{ji}^B$, por lo que la expresión de la derivada $\partial U_b/\partial \xi_i$ queda:

$$\frac{\partial U_b}{\partial \xi_i} = \sum_{j=1}^m K_{ij}^B \xi_j \quad (3.82)$$

3. Derivada del potencial U_{LDR} : De la misma forma que en el apartado anterior, la derivada se expresa como:

$$\frac{\partial U_{LDR}}{\partial \xi_i} = \sum_{j=1}^m \frac{K_{ji}^{LDR} + K_{ij}^{LDR}}{2} \xi_j = \sum_{j=1}^m K_{ij}^{LDR} \xi_j \quad (3.83)$$

En la última expresión ya se ha tenido en cuenta que $K_{ij}^{LDR} = K_{ji}^{LDR}$, ya que la expresión de un término genérico K_{ij}^{LDR} es:

$$K_{ij}^{LDR} = \sum_{k=1}^m K_k^{LD} \psi_{i,kLD} \psi_{j,kLD} + \sum_{k=1}^m K_k^{LR} \psi'_{i,kLR} \psi'_{j,kLR} = K_{ji}^{NDR}$$

4. Derivada del potencial U_{NLD} :

$$\frac{\partial U_{NLD}}{\partial \xi_i} = (1 - DSI_D) \sum_{j=1}^m K_{ij}^{NLD} \xi_j + F_0^{NLD} \psi_{i,NLD} \quad (3.84)$$

donde DSI_D es el denominado *Deadband Switch Indicator* asociado al soporte no lineal en desplazamiento (subíndice D).

5. Derivada del potencial U_{NLR} :

$$\frac{\partial U_{NLR}}{\partial \xi_i} = (1 - DSI_R) \sum_{j=1}^m K_{ij}^{NLR} \xi_j + M_0^{NLR} \psi'_{i,NLR} \quad (3.85)$$

donde DSI_R es el denominado *Deadband Switch Indicator* asociado al soporte no lineal en rotación (subíndice R).

6. Derivada del potencial U_A :

$$\frac{\partial U_A}{\partial \xi_i} = (1 - DSI_A) \sum_{j=1}^m K_{ij}^A \xi_j + M_0^{NLA} \psi'_{i,wb}(x_h) \quad (3.86)$$

donde DSI_A es el denominado *Deadband Switch Indicator* asociado a los actuadores no lineales (subíndice A).

Sustituyendo los términos anteriores en la ecuación de Lagrange:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m M_{ij} \ddot{\xi}_j + \sum_{j=1}^m [K_{ij}^B + K_{ij}^{LDR} + \\ (1 - DSI_D) K_{ij}^{NLD} + (1 - DSI_R) K_{ij}^{NLR} + (1 - DSI_A) K_{ij}^A] \xi_j = \\ = -F_0^{NLD} \psi_{i,NLD} - M_0^{NLR} \psi'_{i,NLR} - M_0^{NLA} \psi'_{i,wb}(x_h) + AGF_i \end{aligned} \quad (3.87)$$

y agrupando los términos de rigidez:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m M_{ij} \ddot{\xi}_j + \sum_{j=1}^m K_{ij} \xi_j = \\ = -F_0^{NLD} \psi_{i,NLD} - M_0^{NLR} \psi'_{i,NLR} - M_0^{NLA} \psi'_{i,wb}(x_h) + AGF_i \end{aligned} \quad (3.88)$$

donde la rigidez total del sistema K_{ij} se expresa:

$$K_{ij} = K_{ij}^B + K_{ij}^{LDR} + (1 - DSI_D) K_{ij}^{NLD} + (1 - DSI_R) K_{ij}^{NLR} + (1 - DSI_A) K_{ij}^A$$

Puede observarse que no existen términos de amortiguación estructurales (proporcionales a la derivada $\dot{\xi}_i$), aunque sí aparecerá un amortiguamiento aerodinámico que en la ecuación anterior está incluida en el término AGF_i . La no inclusión del amortiguamiento estructural es conservativo, por lo que no implica restricción alguna al menos en la etapa de diseño de la aeronave. En etapas de diseño más detallado se podrá considerar un amortiguamiento estructural obtenido en el ensayo de vibración en tierra o GVT (acrónimo del término inglés *Ground Vibration Test*).

3.9. Formulaci3n adimensional de las ecuaciones de Lagrange

Las ecuaciones de Lagrange desarrolladas en la secci3n anterior se pueden adimensionalizar de la siguiente forma:

- Adimensionalizaci3n de las formas modales:

La deformaci3n se adimensionaliza con la longitud del veh3culo L , de forma que los desplazamientos del cuerpo (sub3ndice b) y de las aletas (sub3ndice alternativo w) se escriben:

$$w_{b(w)}(x; t) = \sum_{i=1}^m \psi_{i,b(w)} \xi_i(t) = \sum_{i=1}^m \psi_{i,b(w)} L \frac{\xi_i(t)}{L} = L \sum_{i=1}^m \psi_{i,b(w)} \hat{\xi}_i(t) \quad (3.89)$$

- T3rmino inercial en las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_i} \right) = \sum_{j=1}^m M_{ij} \frac{d^2 \xi_j}{dt^2}$$

donde M_{ij} se escribe:

$$M_{ij} = \int_0^L m \cdot \psi_{i,b} \psi_{j,b} dx + \int_{x_0}^{x_f} m_w \cdot [\psi_{i,b} \psi_{j,wb} + \psi_{i,wb} \psi_{j,b}] dx + \int_{x_0}^{x_f} m_w \cdot \psi_{i,wb} \psi_{j,wb} dx$$

Adimensionalizando con $m_0 U_0^2$, donde m_0 es una masa por unidad de longitud de referencia y U_0 es una velocidad de vuelo de referencia:

$$\frac{1}{m_0 U_0^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_i} \right) = \sum_{j=1}^m \hat{M}_{ij} \frac{d^2 \hat{\xi}_j}{d\hat{t}^2}$$

donde el t3rmino \hat{M}_{ij} es:

$$\hat{M}_{ij} = \int_0^1 \hat{m} \cdot \psi_{i,b} \psi_{j,b} d\hat{x} + \int_{\hat{x}_0}^{\hat{x}_f} \hat{m}_w \cdot [\psi_{i,b} \psi_{j,wb} + \psi_{i,wb} \psi_{j,b}] d\hat{x} + \int_{\hat{x}_0}^{\hat{x}_f} \hat{m}_w \cdot \psi_{i,wb} \psi_{j,wb} d\hat{x}$$

siendo $\hat{m} = m/m_0$, $\hat{m}_w = m_w/m_0$, $\hat{x}_0 = x_0/L$, $\hat{x}_f = x_f/L$, $\hat{x} = x/L$ y L es la longitud del veh3culo.

- T3rmino asociado a la deformaci3n el3stica del cuerpo:

$$\frac{\partial U_b}{\partial \xi_i} = \sum_{j=1}^m K_{ij}^B \xi_j$$

donde

$$K_{ij}^B = \int_0^L EI_y \cdot \psi_{i,b}'' \psi_{j,b}'' dx = \frac{(EI_y)_0}{L^3} \int_0^1 \frac{EI_y}{(EI_y)_0} \frac{d\psi_{i,b}}{d\hat{x}^2} \frac{d\psi_{j,b}}{d\hat{x}^2} d\hat{x} = \frac{(EI_y)_0}{L^3} \hat{K}_{ij}^B$$

Adimensionalizando con $m_0 U_0^2$:

$$\frac{1}{m_0 U_0^2} \frac{\partial U_b}{\partial \xi_i} = \frac{1}{m_0 U_0^2} \sum_{j=1}^m K_{ij}^B \xi_j = \frac{1}{128} \frac{\tau^4 E_0}{\mu q_0} \sum_{j=1}^m \hat{K}_{ij}^B \hat{\xi}_j$$

donde:

$$\tau = \varnothing_{max}/L = \text{Diámetro máximo del cuerpo adimensionalizado con } L.$$

$$\mu = \frac{m_0}{\pi\rho_0 L^2} = \text{Coeficiente másico adimensional.}$$

$$q_0 = \frac{1}{2}\rho_0 U_0^2 = \text{Presión dinámica de referencia.}$$

$$(EI_y)_0 = E_0 (I_y)_0 = E_0 \frac{\pi}{4} r_{max}^4 = E_0 \frac{\pi}{64} \varnothing_{max}^4$$

donde $(I_y)_0 = \pi \cdot \varnothing_{max}^4/64$ es el momento de área de la sección circular del cuerpo en la que éste alcanza el máximo radio \varnothing_{max} .

- Soportes lineales en desplazamiento y rotación:

La energía potencial asociada a los soportes lineales en desplazamiento y/o rotación se escribe:

$$U_{LDR} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m K_{ij}^{LDR} \xi_i \xi_j$$

donde la rigidez K_{ij}^{LDR} es:

$$K_{ij}^{LDR} = \sum_{k=1}^{nLD} K_k^{LD} \psi_{i,kLD} \psi_{j,kLD} + \sum_{k=1}^{nLR} K_k^{LR} \psi'_{i,kLR} \psi'_{j,kLR}$$

La fuerza generalizada adimensionalizada por $m_0 U_0^2$ es:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_0 U_0^2} \frac{\partial U_{LDR}}{\partial \xi_i} &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^{nLD} \frac{K_k^{LD}}{(m_0 U_0^2)/L} \psi_{i,kLD} \psi_{j,kLD} + \sum_{k=1}^{nLR} \frac{K_k^{LR}}{m_0 U_0^2 L} \frac{d\psi_{i,kLR}}{d\hat{x}} \frac{d\psi_{j,kLR}}{d\hat{x}} \right) \hat{\xi}_j = \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^{nLD} \hat{K}_k^{LD} \psi_{i,kLD} \psi_{j,kLD} + \sum_{k=1}^{nLR} \hat{K}_k^{LR} \frac{d\psi_{i,kLR}}{d\hat{x}} \frac{d\psi_{j,kLR}}{d\hat{x}} \right) \hat{\xi}_j = \\ &= \sum_{j=1}^m \hat{K}_{ij}^{LDR} \hat{\xi}_j \end{aligned}$$

donde las rigideces adimensionales \hat{K}_k^{LD} y \hat{K}_k^{LR} se pueden formular en función de variables con sentido físico:

$$\begin{aligned} \hat{K}_k^{LD} &= \frac{K_k^{LD}}{(m_0 U_0^2)/L} = \frac{M \omega_{kLD}^2}{(m_0 U_0^2)/L} = \frac{M}{m_0 L} \left(\frac{\omega_{kLD} L}{U_0} \right)^2 = \hat{M} \hat{\omega}_{kLD}^2 \\ \hat{K}_k^{LR} &= \frac{K_k^{LR}}{m_0 U_0^2 L} = \frac{I_G \omega_{kLR}^2}{m_0 U_0^2 L} = \frac{I_G}{m_0 L^3} \left(\frac{\omega_{kLR} L}{U_0} \right)^2 = \hat{I}_G \hat{\omega}_{kLR}^2 \end{aligned}$$

donde $\omega_{k,LD}$ es la frecuencia característica del movimiento vertical del vehículo en caso de ser soportado en su centro de gravedad únicamente por el soporte lineal en desplazamiento k , mientras que $\omega_{k,LR}$ es la frecuencia característica de rotación del vehículo (como sólido rígido) en caso de ser soportado en su centro de gravedad únicamente por el muelle en rotación k . Por otro lado, las constantes \hat{M} e \hat{I}_G son la masa y momento de inercia adimensionales respectivamente.

- Soporte no lineal en desplazamiento:

La energía potencial U_{NLD} asociada a un soporte no lineal en desplazamiento se escribe:

$$U_{NLD} = F_0^{NLD} \sum_{i=1}^m \psi_{i,NLD} \xi_i + (1 - DSI_D) \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m K^{NLD} \psi_{i,NLD} \psi_{j,NLD} \xi_i \xi_j$$

y la fuerza generalizada adimensional es:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_0 U_0^2} \frac{\partial U_{NLD}}{\partial \xi_j} &= \frac{F_0^{NLD}}{m_0 U_0^2} \psi_{i,NLD} + (1 - DSI_D) \frac{K^{NLD}}{(m_0 U_0^2)/L} \psi_{i,NLD} \sum_{j=1}^m \psi_{j,NLD} \xi_j = \\ &= \hat{F}_0^{NLD} \psi_{i,NLD} + (1 - DSI_D) \hat{K}^{NLD} \psi_{i,NLD} \sum_{j=1}^m \psi_{j,NLD} \hat{\xi}_j \end{aligned}$$

La rigidez adimensional \hat{K}^{NLD} se puede formular en función de la frecuencia característica del soporte como:

$$\hat{K}^{NLD} = \frac{K^{NLD}}{(m_0 U_0^2)/L} = \frac{M \omega_{NLD}^2}{(m_0 U_0^2)/L} = \frac{M}{m_0 L} \left(\frac{\omega_{NLD} L}{U_0} \right)^2 = \hat{M} \hat{\omega}_{NLD}^2$$

siendo M la masa total del vehículo y ω_{NLD} la frecuencia característica del movimiento en caso de ser soportado únicamente con este muelle no lineal.

- Soporte no lineal en rotación:

La energía potencial U_{NLR} asociada a un soporte no lineal en rotación se escribe:

$$U_{NLR} = M_0^{NLR} \sum_{i=1}^m \psi'_{i,NLR} \xi_i + (1 - DSI_R) \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m K^{NLR} \psi'_{i,NLR} \psi'_{j,NLR} \xi_i \xi_j$$

y la fuerza generalizada adimensional queda:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_0 U_0^2} \frac{\partial U_{NLR}}{\partial \xi_i} &= \frac{M_0^{NLR}}{m_0 U_0^2 L} \frac{d\psi_{i,NLR}}{d\hat{x}} + (1 - DSI_R) \frac{K^{NLR}}{m_0 U_0^2 L} \frac{d\psi_{i,NLR}}{d\hat{x}} \sum_{j=1}^m \frac{d\psi_{j,NLR}}{d\hat{x}} \xi_j = \\ &= \hat{M}_0^{NLR} \frac{d\psi_{i,NLR}}{d\hat{x}} + (1 - DSI_R) \hat{K}^{NLR} \frac{d\psi_{i,NLR}}{d\hat{x}} \sum_{j=1}^m \frac{d\psi_{j,NLR}}{d\hat{x}} \xi_j \end{aligned}$$

La rigidez adimensional \hat{K}^{NLR} se puede formular en función de la frecuencia característica del soporte en rotación como:

$$\hat{K}^{NLR} = \frac{K^{NLR}}{m_0 U_0^2 L} = \frac{I_G \omega_{NLR}^2}{m_0 U_0^2 L} = \frac{I_G}{m_0 L^3} \left(\frac{\omega_{NLR} L}{U_0} \right)^2 = \hat{I}_G \hat{\omega}_{NLR}^2$$

donde ω_{NLR} es la frecuencia característica de rotación en caso de vehículo soportado en su centro de gravedad únicamente por el muelle no lineal en rotación, e \hat{I}_G es el momento de inercia del vehículo adimensionalizado con $m_0 L^3$.

- Actuadores:

La energía potencial U_A asociada a la rotación de los actuadores se escribe:

$$U_A = M_0^{NLA} \sum_{j=1}^m \psi'_{i,wb}(x_h) \xi_j + (1 - DSI_A) \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m K^A \psi'_{i,wb}(x_h) \psi'_{j,wb}(x_h) \xi_i \xi_j$$

La fuerza generalizada $\partial U_{NLA}/\partial \xi_i$, adimensionalizada con $m_0 U_0^2$ se escribe:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_0 U_0^2} \frac{\partial U_{NLA}}{\partial \xi_i} &= \frac{M_0^{NLA}}{m_0 U_0^2 L} \frac{d\psi_{i,wb}}{d\hat{x}}(x_h) + (1 - DSI_A) \frac{K^A}{m_0 U_0^2} \frac{d\psi_{i,wb}}{d\hat{x}}(x_h) \sum_{j=1}^m \frac{d\psi_{j,wb}}{d\hat{x}}(x_h) \xi_j = \\ &= \hat{M}_0^{NLS} \frac{d\psi_{i,wb}}{d\hat{x}}(x_h) + (1 - DSI_A) \hat{K}^A \frac{d\psi_{i,wb}}{d\hat{x}}(x_h) \sum_{j=1}^m \frac{d\psi_{j,wb}}{d\hat{x}}(x_h) \xi_j \end{aligned}$$

La rigidez adimensional \hat{K}^A puede escribirse en función de variables con significado físico:

$$\hat{K}^A = \frac{K^A}{m_0 U_0^2 L} = \frac{I_w}{m_0 L^3} \left(\frac{\omega_A L}{U_0} \right)^2 = \hat{I}_w \hat{\omega}_A^2$$

donde I_w es el momento de inercia de las aletas (izquierda y derecha conjuntamente) respecto al eje de charnela, y ω_A es la frecuencia del modo de rotación de aletas como sólido rígido.

- Fuerzas aerodinámicas generalizadas:

Las fuerzas aerodinámicas generalizadas en la coordenada generalizada ξ_i se escriben:

$$AGF_i = q_\infty L^2 \left(q_{\xi_i \xi_j} \hat{\xi}_i + \frac{1}{\hat{U}_\infty} q_{\xi_i \dot{\xi}_j} \frac{d\hat{\xi}_i}{d\hat{t}} + \frac{1}{\hat{U}_\infty^2} q_{\xi_i \ddot{\xi}_j} \frac{d^2 \hat{\xi}_i}{d\hat{t}^2} \right)$$

Adimensionalizando por $m_0 U_0^2$:

$$\frac{AGF_i}{m_0 U_0^2} = \frac{\hat{\rho}_\infty \hat{U}_\infty^2}{2\pi\mu} \left(q_{\xi_i \xi_j} \hat{\xi}_i + \frac{1}{\hat{U}_\infty} q_{\xi_i \dot{\xi}_j} \frac{d\hat{\xi}_i}{d\hat{t}} + \frac{1}{\hat{U}_\infty^2} q_{\xi_i \ddot{\xi}_j} \frac{d^2 \hat{\xi}_i}{d\hat{t}^2} \right)$$

donde $\mu = m_0/(\pi\rho_0 L^2)$ es el ya denominado previamente *coeficiente másico adimensional*, $\hat{\rho}_\infty$ es la densidad a la altura de vuelo adimensionalizada con una densidad de referencia ρ_0 y U_∞ es la velocidad de vuelo adimensionalizada con una de referencia U_0 .

3.10. Simulación de Otras Nolinealidades

Aunque la formulación anterior se aplica a nolinealidades del tipo *freeplay* o *histéresis*, existen otro tipo de nolinealidades que se pueden modelizar con las mismas ecuaciones. Una nolinealidad de otro tipo se puede reproducir introduciendo una dependencia de los factores DSI_D , DSI_R o DSI_A con el desplazamiento o rotación local del soporte o actuador, i.e.:

$$\begin{aligned} DSI_D &= f(w(x^{NLD}; t)) \\ DSI_R &= f\left(\frac{\partial w}{\partial x}(x^{NLR}; t)\right) \\ DSI_A &= f\left(\frac{\partial w_{wb}}{\partial x}(x_h; t)\right) \end{aligned}$$

Otras simulaciones que pueden reproducirse con estas ecuaciones son:

- Degradación de los soportes o actuadores: los factores DSI_D , DSI_R o DSI_A toman un valor comprendido entre 0 y 1.
- Respuesta transitoria después de una degradación o rotura de los soportes o actuadores: para un valor de tiempo determinado, los factores DSI_D , DSI_R o DSI_A pasan de valer 0 (problema lineal) a un valor en el intervalo $]0, 1]$ (degradación) o directamente 1 (rotura completa).
- Soportes no lineales de contacto/no contacto: los factores DSI_D , DSI_R o DSI_A alcanzan un valor de 0 (lineal) en una dirección de elongación o giro, y valen 1 en la dirección contraria en la que no trabajan.
- Bloqueo de soporte o actuadores (el denominado *jamming* de actuador): en este caso el soporte o actuador se bloquea dando lugar a una conexión *casi rígida* que se puede simular con factores DSI_D , DSI_R o DSI_A tendiendo a menos infinito.

3.11. Formulación Matricial Estado-Espacio

En la sección anterior se han desarrollado uno a uno los términos que intervienen en las ecuaciones de la dinámica del sistema. Sustituyendo los términos anteriores en la expresión de las ecuaciones de Lagrange se obtendrá el conjunto de ecuaciones diferenciales de segundo orden que gobiernan la dinámica del sistema. En la página siguiente se detallan las ecuaciones de la dinámica en forma matricial y, al mismo tiempo, se desarrolla la formulación Estado-Espacio que es especialmente útil para expresar de una forma estándar las ecuaciones diferenciales de un sistema.

FORMULACIÓN DE LAS ECUACIONES DE LA DINÁMICA

- Primera ecuación de Estado-Espacio $\{dx/dt\} = [A] \{x\} + [B] \{u\}$:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \hat{M}_{ij} \frac{d^2 \hat{\xi}_i}{dt^2} + \sum_{j=1}^m \frac{1}{128} \frac{\tau^4 E_0}{\mu q_0} \hat{K}_{ij}^B \hat{\xi}_j + \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^{nLD} \hat{M} \hat{\omega}_{kLD}^2 \psi_{i,kLD} \psi_{j,kLD} + \sum_{k=1}^{nLR} \hat{I}_G \hat{\omega}_{kLR}^2 \frac{d\psi_{i,kLR}}{d\hat{x}} \frac{d\psi_{j,kLR}}{d\hat{x}} \right) \hat{\xi}_j + \\ & + (1 - DSI_D) \sum_{j=1}^m \hat{M} \hat{\omega}_{NLD}^2 \psi_{i,NLD} \psi_{j,NLD} \hat{\xi}_j + (1 - DSI_R) \sum_{j=1}^m \hat{I}_G \hat{\omega}_{NLR}^2 \frac{d\psi_{i,NLR}}{d\hat{x}} \frac{d\psi_{j,NLR}}{d\hat{x}} \hat{\xi}_j + (1 - DSI_A) \sum_{j=1}^m \hat{I}_w \hat{\omega}_A^2 \frac{d\psi_{i,wb}}{d\hat{x}}(x_h) \frac{d\psi_{j,wb}}{d\hat{x}}(x_h) \hat{\xi}_j = \\ & = -\hat{F}_0^{NLD} \psi_{i,NLD} - \hat{M}_0^{NLR} \frac{d\psi_{i,NLR}}{d\hat{x}} - \hat{M}_0^{NLA} \frac{d\psi_{i,wb}}{d\hat{x}}(x_h) + \sum_{j=1}^m \frac{\hat{\rho}_\infty}{2\pi\mu} \left(\hat{U}_\infty^2 q_{\xi_i \xi_j} \cdot \hat{\xi}_j + \hat{U}_\infty q_{\xi_i \dot{\xi}_j} \cdot \frac{d\hat{\xi}_j}{dt} + q_{\xi_i \ddot{\xi}_j} \cdot \frac{d^2 \hat{\xi}_j}{dt^2} \right) \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} \hat{K}_{ij} = & \frac{1}{128} \frac{\tau^4 E_0}{\mu q_0} \hat{K}_{ij}^B + \sum_{k=1}^{nLD} \hat{M} \hat{\omega}_{kLD}^2 \psi_{i,kLD} \psi_{j,kLD} + \sum_{k=1}^{nLR} \hat{I}_G \hat{\omega}_{kLR}^2 \frac{d\psi_{i,kLR}}{d\hat{x}} \frac{d\psi_{j,kLR}}{d\hat{x}} + \\ & + (1 - DSI_D) \hat{M} \hat{\omega}_{NLD}^2 \psi_{i,NLD} \psi_{j,NLD} + (1 - DSI_R) \hat{I}_G \hat{\omega}_{NLR}^2 \frac{d\psi_{i,NLR}}{d\hat{x}} \frac{d\psi_{j,NLR}}{d\hat{x}} + (1 - DSI_A) \hat{I}_w \hat{\omega}_A^2 \frac{d\psi_{i,wb}}{d\hat{x}}(x_h) \frac{d\psi_{j,wb}}{d\hat{x}}(x_h) \end{aligned}$$

Agrupando términos de rigidez proporcionales a la coordenada generalizada $\hat{\xi}_i$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \hat{M}_{ij} \frac{d^2 \hat{\xi}_i}{dt^2} + \sum_{j=1}^m \hat{K}_{ij} \hat{\xi}_j = & -\hat{F}_0^{NLD} \psi_{i,NLD} - \hat{M}_0^{NLR} \frac{d\psi_{i,NLR}}{d\hat{x}} - \hat{M}_0^{NLA} \frac{d\psi_{i,wb}}{d\hat{x}}(x_h) + \sum_{j=1}^m \frac{\hat{\rho}_\infty}{2\pi\mu} \left(\hat{U}_\infty^2 q_{\xi_i \xi_j} \cdot \hat{\xi}_j + \hat{U}_\infty q_{\xi_i \dot{\xi}_j} \cdot \frac{d\hat{\xi}_j}{dt} + q_{\xi_i \ddot{\xi}_j} \cdot \frac{d^2 \hat{\xi}_j}{dt^2} \right) \\ \sum_{j=1}^m \left(\hat{M}_{ij} - \frac{\hat{\rho}_\infty}{2\pi\mu} q_{\xi_i \xi_j} \right) \frac{d^2 \hat{\xi}_i}{dt^2} + \sum_{j=1}^m -\frac{\hat{\rho}_\infty \hat{U}_\infty}{2\pi\mu} q_{\xi_i \dot{\xi}_j} \frac{d\hat{\xi}_j}{dt} + \sum_{j=1}^m \left(\hat{K}_{ij} - \frac{\hat{\rho}_\infty \hat{U}_\infty^2}{2\pi\mu} q_{\xi_i \xi_j} \right) \hat{\xi}_j = & -\hat{F}_0^{NLD} \psi_{i,NLD} - \hat{M}_0^{NLR} \frac{d\psi_{i,NLR}}{d\hat{x}} - \hat{M}_0^{NLA} \frac{d\psi_{i,wb}}{d\hat{x}}(x_h) \end{aligned}$$

En formulación matricial:

$$\begin{aligned} \left([\hat{M}_{ij}] - \frac{\hat{\rho}_\infty}{2\pi\mu} [q_{\xi_i \xi_j}] \right) \left\{ \frac{d^2 \hat{\xi}_i}{dt^2} \right\} - \frac{\hat{\rho}_\infty \hat{U}_\infty}{2\pi\mu} [q_{\xi_i \dot{\xi}_j}] \left\{ \frac{d\hat{\xi}_i}{dt} \right\} + \left([\hat{K}_{ij}] - \frac{\hat{\rho}_\infty \hat{U}_\infty^2}{2\pi\mu} [q_{\xi_i \xi_j}] \right) \left\{ \hat{\xi}_i \right\} = \\ = -\hat{F}_0^{NLD} \{ \psi_{i,NLD} \} - \hat{M}_0^{NLR} \left\{ \frac{d\psi_{i,NLR}}{d\hat{x}} \right\} - \hat{M}_0^{NLA} \left\{ \frac{d\psi_{i,wb}}{d\hat{x}}(x_h) \right\} \end{aligned}$$

Puede observarse que el único término de amortiguamiento (proporcional a la derivada de la coordenada generalizada $\dot{\xi}_j$) proviene de las fuerzas aerodinámicas generalizadas, y no existe amortiguamiento estructural. Normalmente esta es la aproximación que se realiza en la etapa de diseño de una aeronave, es decir, en primera instancia no se considera amortiguamiento estructural y una vez realizados ensayos en tierra (GVT, acrónimo del inglés *Ground Vibration Tests*) o ensayos en vuelo (FVT, acrónimo del inglés *Flight Vibration Tests*) se actualiza el modelo para obtener resultados más realistas que se utilizarán en el proceso de certificación.

Para desarrollar las ecuaciones de forma más genérica, se introduce a continuación un término $[\hat{B}_{ij}]\{\dot{\xi}_i\}$ que representaría la amortiguación estructural:

$$\begin{aligned} & \left([\hat{M}_{ij}] - \frac{\hat{\rho}_\infty}{2\pi\mu} [q_{\xi_i\xi_j}] \right) \left\{ \frac{d^2\hat{\xi}_i}{dt^2} \right\} + \left([\hat{B}_{ij}] - \frac{\hat{\rho}_\infty\hat{U}_\infty}{2\pi\mu} [q_{\xi_i\dot{\xi}_j}] \right) \left\{ \frac{d\hat{\xi}_i}{dt} \right\} + \left([\hat{K}_{ij}] - \frac{\hat{\rho}_\infty\hat{U}_\infty^2}{2\pi\mu} [q_{\xi_i\xi_j}] \right) \left\{ \hat{\xi}_i \right\} = \\ & = -\hat{F}_0^{NLD} \{ \psi_{i,NLD} \} - \hat{M}_0^{NLR} \left\{ \frac{d\psi_{i,NLR}}{d\hat{x}} \right\} - \hat{M}_0^{NLA} \left\{ \frac{d\psi_{i,wb}(x_h)}{d\hat{x}} \right\} \end{aligned}$$

Estas ecuaciones pueden formularse en la siguiente forma matricial, obteniéndose la denominada 1ª **ecuación de Estado-Espacio**, que se completará con la 2ª **ecuación** que relaciona salida-entrada del sistema y que será formulada posteriormente.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [I]_{mxm} & [0]_{mxm} \\ [0]_{mxm} & [\hat{M}_{ij}] - \frac{\hat{\rho}_\infty}{2\pi\mu} [q_{\xi_i\xi_j}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d\hat{\xi}_i}{dt} \\ \frac{d^2\hat{\xi}_i}{dt^2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [0]_{mxm} & -[I]_{mxm} \\ [\hat{K}_{ij}] - \frac{\hat{\rho}_\infty\hat{U}_\infty^2}{2\pi\mu} [q_{\xi_i\xi_j}] & [\hat{B}_{ij}] - \frac{\hat{\rho}_\infty\hat{U}_\infty}{2\pi\mu} [q_{\xi_i\dot{\xi}_j}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\xi}_i \\ \frac{d\hat{\xi}_i}{dt} \end{Bmatrix} = \\ & = -\hat{F}_0^{NLD} \begin{Bmatrix} [0]_{mx1} \\ \{ \psi_{i,NLD} \} \end{Bmatrix} - \hat{M}_0^{NLD} \begin{Bmatrix} [0]_{mx1} \\ \left\{ \frac{d\psi_{i,NLR}}{d\hat{x}} \right\} \end{Bmatrix} - \hat{M}_0^{NLA} \begin{Bmatrix} [0]_{mx1} \\ \left\{ \frac{d\psi_{i,wb}(x_h)}{d\hat{x}} \right\} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Introduciendo la denominada *variable de estado del sistema* $x(\hat{t})$:

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} \left\{ \hat{\xi}_i \right\} \\ \left\{ \frac{d\hat{\xi}_i}{dt} \right\} \end{Bmatrix}$$

la ecuación matricial anterior se puede escribir de la forma:

$$\frac{d\{x\}}{dt} = [A]\{x\} + [B]\{u\}$$

donde las matrices $[A]$ y $[B]$, y el vector $\{u\}$ son:

$$[A] = - \begin{bmatrix} [I]_{m \times m} & [0]_{m \times m} \\ [0]_{m \times m} & [\hat{M}_{ij}] - \frac{\hat{\rho}_\infty}{2\pi\mu} [q_{\xi_i \xi_j}] \end{bmatrix}^{(-1)} \cdot \begin{bmatrix} [\hat{K}_{ij}] - \frac{[\hat{\rho}_\infty \hat{U}_\infty^2]}{2\pi\mu} [q_{\xi_i \xi_j}] & -[I]_{m \times m} \\ [\hat{B}_{ij}] - \frac{\hat{\rho}_\infty \hat{U}_\infty}{2\pi\mu} [q_{\xi_i \xi_j}] & \end{bmatrix}$$

$$[B] = - \begin{bmatrix} [I]_{m \times m} & [0]_{m \times m} \\ [0]_{m \times m} & [\hat{M}_{ij}] - \frac{\hat{\rho}_\infty}{2\pi\mu} [q_{\xi_i \xi_j}] \end{bmatrix}^{(-1)} \cdot \begin{bmatrix} [0]_{m \times m} & [0]_{m \times m} & [0]_{m \times m} \\ \begin{bmatrix} \diagdown & 0 \\ \psi_{i,NLD} & \diagdown \\ 0 & \diagdown \end{bmatrix}_{m \times m} & \begin{bmatrix} \diagdown & 0 \\ \frac{d\psi_{i,NLR}}{d\hat{x}} & \diagdown \\ 0 & \diagdown \end{bmatrix}_{m \times m} & \begin{bmatrix} \diagdown & 0 \\ \frac{d\psi_{i,wb}}{d\hat{x}}(x_h) & \diagdown \\ 0 & \diagdown \end{bmatrix}_{m \times m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{m \times 3} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{m \times 3} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{m \times 3} \end{bmatrix}$$

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} \hat{F}_0^{NLD} \\ \hat{M}_0^{NLR} \\ \hat{M}_0^{NLA} \end{Bmatrix}$$

- Segunda ecuación de Estado-Espacio $\{y\} = [C] \{x\} + [D] \{u\}$:

Esta ecuación proporciona un vector con variables del sistema que se desean conocer (vector $\{y\}$) en función del vector de Estado-Espacio (vector $\{x\}$) y el vector de realimentación $\{u\}$. Las siguientes variables forman un conjunto típico de salidas del sistema que se monitorizan para caracterizar la respuesta del mismo:

1. Coordenadas generalizadas $\hat{\xi}_i$ y velocidades generalizadas $d\hat{\xi}_i/d\hat{t}$

$$\{y_1\} = [I_{2mx2m}] \cdot \{x\} + [0_{2mx3}] \cdot \{u\} = [C_1] \cdot \{x\} + [D_1] \cdot \{u\}$$

2. Desplazamiento adimensional \hat{w}_b y velocidad adimensional $d\hat{w}_b/d\hat{t}$ en p secciones del cuerpo¹⁰:

$$\{y_2\} = \begin{bmatrix} \psi_{1,b}(\hat{x}_1) & \psi_{2,b}(\hat{x}_1) & \dots & \psi_{m,b}(\hat{x}_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \psi_{1,b}(\hat{x}_2) & \psi_{2,b}(\hat{x}_2) & \dots & \psi_{m,b}(\hat{x}_2) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \psi_{1,b}(\hat{x}_p) & \psi_{2,b}(\hat{x}_p) & \dots & \psi_{m,b}(\hat{x}_p) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \psi_{1,b}(\hat{x}_1) & \psi_{2,b}(\hat{x}_1) & \dots & \psi_{m,b}(\hat{x}_1) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \psi_{1,b}(\hat{x}_2) & \psi_{2,b}(\hat{x}_2) & \dots & \psi_{m,b}(\hat{x}_2) \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \psi_{1,b}(\hat{x}_p) & \psi_{2,b}(\hat{x}_p) & \dots & \psi_{m,b}(\hat{x}_p) \end{bmatrix} \cdot \{x\} + [0_{2px3}] \cdot \{u\} = [C_2] \cdot \{x\} + [D_2] \cdot \{u\}$$

¹⁰ $\hat{w}_b = w_b/L$ y $d\hat{w}_b/d\hat{t} = (1/U_0) \cdot dw_b/dt$, donde w_b y dw_b/dt son desplazamientos y velocidades con dimensiones [L] y [L/T] respectivamente.

3. Rotación $d\hat{w}_b/d\hat{x}$ y velocidad de rotación adimensional $d(d\hat{w}_b/d\hat{x})/d\hat{t}$ en q secciones del cuerpo¹¹:

$$\{y_3\} = \begin{bmatrix} \psi'_{1,b}(\hat{x}_{p+1}) & \psi'_{2,b}(\hat{x}_{p+1}) & \dots & \psi'_{m,b}(\hat{x}_{p+1}) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \psi'_{1,b}(\hat{x}_{p+2}) & \psi'_{2,b}(\hat{x}_{p+2}) & \dots & \psi'_{m,b}(\hat{x}_{p+2}) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \psi'_{1,b}(\hat{x}_{p+q}) & \psi'_{2,b}(\hat{x}_{p+q}) & \dots & \psi'_{m,b}(\hat{x}_{p+q}) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \psi'_{1,b}(\hat{x}_{p+1}) & \psi'_{2,b}(\hat{x}_{p+1}) & \dots & \psi'_{m,b}(\hat{x}_{p+1}) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \psi'_{1,b}(\hat{x}_{p+2}) & \psi'_{2,b}(\hat{x}_{p+2}) & \dots & \psi'_{m,b}(\hat{x}_{p+2}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \psi'_{1,b}(\hat{x}_{p+q}) & \psi'_{2,b}(\hat{x}_{p+q}) & \dots & \psi'_{m,b}(\hat{x}_{p+q}) \end{bmatrix} \cdot \{x\} + [0_{2qx3}] \cdot \{u\} = [C_3] \cdot \{x\} + [D_3] \cdot \{u\}$$

4. Desplazamiento y velocidad (adimensionales) en distintas secciones del ala: El desarrollo de este punto queda igual que el punto 1 pero cambiando los modos $\psi_{i,b}$ por los modos de ala $\psi_{i,w}$. En formulación matricial:

$$\{y_4\} = [C_4] \cdot \{x\} + [D_4] \cdot \{u\}$$

5. Rotación y velocidad de rotación (adimensionales) en distintas secciones del ala: El desarrollo de este punto queda igual que el punto 2 pero cambiando los modos $\psi_{i,b}$ por los modos de ala $\psi_{i,w}$. En formulación matricial:

$$\{y_5\} = [C_5] \cdot \{x\} + [D_5] \cdot \{u\}$$

6. Desplazamiento y velocidad (adimensionales) *relativas al cuerpo* en distintas secciones del ala: El desarrollo de este punto queda igual que el punto 1 pero cambiando los modos $\psi_{i,b}$ por los modos de ala $\psi_{i,wb}$. En formulación matricial:

$$\{y_6\} = [C_6] \cdot \{x\} + [D_6] \cdot \{u\}$$

7. Rotación y velocidad de rotación (adimensionales) *relativas al cuerpo* en distintas secciones del ala: El desarrollo de este punto queda igual que el punto 2 pero cambiando los modos $\psi_{i,b}$ por los modos de ala $\psi_{i,wb}$. En formulación matricial:

$$\{y_7\} = [C_7] \cdot \{x\} + [D_7] \cdot \{u\}$$

¹¹ $d\hat{w}_b/d\hat{x} = dw_b/dx$ y $d(d\hat{w}_b/d\hat{x})/d\hat{t} = (L/U_0)d(dw_b/dx)/dt$, donde dw_b/dx y $d(dw_b/dx)/dt$ son giro y velocidad de giro en [rad] y [rad/T] respectivamente.

8. Desplazamiento y velocidad (adimensionales) en soportes LINEALES en DESPLAZAMIENTO:

$$\{y_8\} = \begin{bmatrix} \psi_{1,1LD} & \psi_{2,1LD} & \dots & \psi_{m,1LD} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \psi_{1,2LD} & \psi_{2,2LD} & \dots & \psi_{m,2LD} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \psi_{1,nLD} & \psi_{2,nLD} & \dots & \psi_{m,nLD} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \psi_{1,1LD} & \psi_{2,1LD} & \dots & \psi_{m,1LD} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \psi_{1,2LD} & \psi_{2,2LD} & \dots & \psi_{m,2LD} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \psi_{1,nLD} & \psi_{2,nLD} & \dots & \psi_{m,nLD} \end{bmatrix} \cdot \{x\} + [0_{2nLDx3}] \cdot \{u\} = [C_8] \cdot \{x\} + [D_8] \cdot \{u\}$$

9. Rotación y velocidad de rotación (adimensionales) en soportes LINEALES en ROTACIÓN:

$$\{y_9\} = \begin{bmatrix} \psi'_{1,1LR} & \psi'_{2,1LR} & \dots & \psi'_{m,1LR} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \psi'_{1,2LR} & \psi'_{2,2LR} & \dots & \psi'_{m,2LR} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \psi'_{1,nLR} & \psi'_{2,nLR} & \dots & \psi'_{m,nLR} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \psi'_{1,1LR} & \psi'_{2,1LR} & \dots & \psi'_{m,1LR} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \psi'_{1,2LR} & \psi'_{2,2LR} & \dots & \psi'_{m,2LR} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \psi'_{1,nLR} & \psi'_{2,nLR} & \dots & \psi'_{m,nLR} \end{bmatrix} \cdot \{x\} + [0_{2nLRx3}] \cdot \{u\} = [C_9] \cdot \{x\} + [D_9] \cdot \{u\}$$

10. Desplazamiento y velocidad (adimensionales) en soporte NO LINEAL en DESPLAZAMIENTO:

$$\{y_{10}\} = \begin{bmatrix} \psi_{1,NLD} & \psi_{2,NLD} & \dots & \psi_{m,NLD} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \psi_{1,NLD} & \psi_{2,NLD} & \dots & \psi_{m,NLD} \end{bmatrix} \cdot \{x\} + [0_{2x3}] \{u\} = [C_{10}] \cdot \{x\} + [D_{10}] \cdot \{u\}$$

11. Rotación y velocidad de rotación (adimensionales) en soporte NO LINEAL en ROTACIÓN:

$$\{y_{11}\} = \begin{bmatrix} \psi'_{1,NLR} & \psi'_{2,NLR} & \cdots & \psi'_{m,NLR} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \psi'_{1,NLR} & \psi'_{2,NLR} & \cdots & \psi'_{m,NLR} \end{bmatrix} \cdot \{x\} + [0_{2 \times 3}] \{u\} = [C_{11}] \cdot \{x\} + [D_{11}] \cdot \{u\}$$

12. Rotación y velocidad de rotación (adimensionales) en ACTUADOR (LINEAL o NO LINEAL):

$$\{y_{12}\} = \begin{bmatrix} \frac{d\psi_{1,wb}}{d\hat{x}}(\hat{x}_h) & \frac{d\psi_{2,wb}}{d\hat{x}}(\hat{x}_h) & \cdots & \frac{d\psi_{m,wb}}{d\hat{x}}(\hat{x}_h) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{d\psi_{1,wb}}{d\hat{x}}(\hat{x}_h) & \frac{d\psi_{2,wb}}{d\hat{x}}(\hat{x}_h) & \cdots & \frac{d\psi_{m,wb}}{d\hat{x}}(\hat{x}_h) \end{bmatrix} \cdot \{x\} + [0_{2 \times 3}] \cdot \{u\} = [C_{12}] \cdot \{x\} + [D_{12}] \cdot \{u\}$$

13. Fuerza/Momento (adimensionales) en soportes NO LINEALES:

$$\{y_{13}\} = \begin{bmatrix} (1 - DSI_D) \hat{M} \hat{\omega}_{NLD}^2 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - DSI_R) \hat{I}_G \hat{\omega}_{NLR}^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - DSI_A) \hat{I}_w \hat{\omega}_A^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi_{1,NLD} & \cdots & \psi_{m,NLD} & 0 & \cdots & 0 \\ \psi'_{1,NLR} & \cdots & \psi'_{m,NLR} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{d\psi_{1,wb}}{d\hat{x}}(\hat{x}_h) & \cdots & \frac{d\psi_{m,wb}}{d\hat{x}}(\hat{x}_h) & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \{x\} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \hat{F}_0^{NLD} \\ \hat{M}_0^{NLR} \\ \hat{M}_0^{NLA} \end{Bmatrix} = [C_{13}] \cdot \{x\} + [D_{13}] \cdot \{u\}$$

Las matrices anteriores se ensamblan dando lugar a la *segunda ecuación de Estado-Espacio*:

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} \{y_1\} \\ \cdots \\ \{y_{13}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [C_1] \\ \cdots \\ [C_{13}] \end{bmatrix} \cdot \{x\} + \begin{bmatrix} [D_1] \\ \cdots \\ [D_{13}] \end{bmatrix} \cdot \{u\} = [C] \cdot \{x\} + [D] \cdot \{u\}$$

3.12. Flutter Lineal: distintos métodos de solución.

En el caso de sistema lineal es posible el cálculo de la velocidad de *flutter* resolviendo las ecuaciones de Lagrange en el dominio de Laplace o el dominio de la frecuencia. A continuación se desarrolla la formulación para obtener *flutter* del sistema lineal.

Solución en el dominio de Laplace: método p

El método más lógico de calcular la estabilidad del sistema es mediante la transformada de Laplace. En este caso es posible porque las fuerzas aerodinámicas se pueden expresar en el dominio del tiempo y, por tanto, en el plano de Laplace. Las derivadas primera y segunda respecto al tiempo del vector de coordenadas generalizadas se expresan:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{d\hat{\xi}_i}{dt}\right\} &= \frac{sL}{U_0}\mathcal{L}\left\{\hat{\xi}_i\right\} = \frac{sL}{U_\infty}\frac{U_\infty}{U_0}\mathcal{L}\left\{\hat{\xi}_i\right\} = p\hat{U}_\infty\mathcal{L}\left\{\hat{\xi}_i\right\} \\ \mathcal{L}\left\{\frac{d^2\hat{\xi}_i}{dt^2}\right\} &= \left(\frac{sL}{U_0}\right)^2\mathcal{L}\left\{\hat{\xi}_i\right\} - \frac{sL}{U_0}\left\{\hat{\xi}_i(0)\right\} - \left\{\frac{d\hat{\xi}_i}{dt}(0)\right\} = p^2\hat{U}_\infty^2\mathcal{L}\left\{\hat{\xi}_i\right\} - p\hat{U}_\infty\left\{\hat{\xi}_i(0)\right\} - \left\{\frac{d\hat{\xi}_i}{dt}(0)\right\}\end{aligned}$$

donde $p = sL/U_\infty = k(\gamma + i)$, y siendo ω la frecuencia armónica oscilatoria del movimiento resultante, $k = \omega L/U_\infty$ es la frecuencia reducida, y γ el denominado *transient decay rate coefficient*. El amortiguamiento estructural es el doble de γ , i.e., $g = 2\gamma$.

Partiendo de la ecuación en el dominio del tiempo:

$$\left[\hat{M}_{ij}\right]\left\{\frac{d^2\hat{\xi}_i}{dt^2}\right\} + \left[\hat{K}_{ij}\right]\left\{\hat{\xi}_j\right\} = \frac{\hat{\rho}_\infty}{2\pi\mu}\left(\hat{U}_\infty^2[q_{\xi_i\xi_j}]\left\{\hat{\xi}_j\right\} + \hat{U}_\infty[q_{\xi_i\dot{\xi}_j}]\left\{\frac{d\hat{\xi}_j}{dt}\right\} + [q_{\xi_i\ddot{\xi}_j}]\left\{\frac{d^2\hat{\xi}_j}{dt^2}\right\}\right)$$

la transformada de Laplace queda¹²:

$$\left[\hat{U}_\infty^2 p^2 [\hat{M}_{ij}] + [\hat{K}_{ij}] - \frac{\hat{\rho}_\infty \hat{U}_\infty^2}{2\pi\mu} \left([q_{\xi_i\xi_j}] + p [q_{\xi_i\dot{\xi}_j}] + p^2 [q_{\xi_i\ddot{\xi}_j}]\right)\right] \mathcal{L}\left\{\hat{\xi}_i\right\} = \{0\}$$

La existencia de soluciones distinta de la trivial exige que el determinante de la matriz que multiplica a las coordenadas generalizadas sea nulo, i.e.:

$$\left|\hat{U}_\infty^2 p^2 [\hat{M}_{ij}] + [\hat{K}_{ij}] - \frac{\hat{\rho}_\infty \hat{U}_\infty^2}{2\pi\mu} \left([q_{\xi_i\xi_j}] + p [q_{\xi_i\dot{\xi}_j}] + p^2 [q_{\xi_i\ddot{\xi}_j}]\right)\right| = 0$$

Para calcular la velocidad de *flutter* del sistema anterior se procede de la siguiente forma:

1. Se fija una altura de vuelo o, lo que es lo mismo, la densidad $\hat{\rho}_\infty$.
2. Empezando por $\hat{U}_\infty = 0$ se va resolviendo el determinante anterior para distintas velocidades crecientes hasta encontrar la velocidad a la que alguna de las raíces p deja de tener parte real negativa. La velocidad a la que la parte real de una raíz cambia de signo es la velocidad de *flutter*.

¹²Al aplicar la transformada de Laplace aparecen los valores de las coordenadas generalizadas en $t = 0$, que no se incluyen en el análisis ya que la estabilidad de los sistemas lineales es independiente de la condición inicial y se puede por tanto elegir $\{\hat{\xi}_i\}(t = 0) = \{0\}$ y $\{d\hat{\xi}_i/dt\}(t = 0) = \{0\}$

La ventaja de este método p es que proporciona el amortiguamiento real del sistema aeroelástico. La desventaja es que es necesario expresar las fuerzas aerodinámicas en el dominio de Laplace, y esto no siempre es posible. De hecho, este inconveniente es el principal motivo por el que este método no está muy extendido en la industria aeronáutica¹³, y se utilizan los métodos de solución en el dominio de la frecuencia que se describen en las siguientes secciones.

Antes de continuar con los métodos en el dominio de la frecuencia, conviene destacar algunas formas alternativas de resolver el determinante asociado al método p . En lugar de resolver la ecuación compleja es conveniente pasar a un problema de autovalores-autovectores utilizando la formulación estado-espacio de las ecuaciones. De la ecuación en el dominio del tiempo:

$$\left[\hat{M}_{ij} \right] \left\{ \frac{d^2 \hat{\xi}_i}{dt^2} \right\} + \left[\hat{K}_{ij} \right] \left\{ \hat{\xi}_j \right\} = \frac{\hat{\rho}_\infty}{2\pi\mu} \left(\hat{U}_\infty^2 [q_{\xi_i \xi_j}] \left\{ \hat{\xi}_j \right\} + \hat{U}_\infty [q_{\xi_i \dot{\xi}_j}] \left\{ \frac{d \hat{\xi}_j}{dt} \right\} + [q_{\xi_i \ddot{\xi}_j}] \left\{ \frac{d^2 \hat{\xi}_j}{dt^2} \right\} \right)$$

e introduciendo la variable $\{\dot{\hat{\xi}}_j\} = \{d\hat{\xi}_j/dt\}$:

$$\left[\hat{M}_{ij} \right] \left\{ \frac{d \dot{\hat{\xi}}_i}{dt} \right\} + \left[\hat{K}_{ij} \right] \left\{ \hat{\xi}_j \right\} = \frac{\hat{\rho}_\infty}{2\pi\mu} \left(\hat{U}_\infty^2 [q_{\xi_i \xi_j}] \left\{ \hat{\xi}_j \right\} + \hat{U}_\infty [q_{\xi_i \dot{\xi}_j}] \left\{ \dot{\hat{\xi}}_j \right\} + [q_{\xi_i \ddot{\xi}_j}] \left\{ \frac{d \dot{\hat{\xi}}_j}{dt} \right\} \right)$$

Aplicando la transformada de Laplace:

$$\left[\hat{M}_{ij} \right] p \hat{U}_\infty \left\{ \dot{\hat{\xi}}_j \right\} + \left[\hat{K}_{ij} \right] \left\{ \hat{\xi}_j \right\} = \frac{\hat{\rho}_\infty}{2\pi\mu} \left(\hat{U}_\infty^2 [q_{\xi_i \xi_j}] \left\{ \hat{\xi}_j \right\} + \hat{U}_\infty [q_{\xi_i \dot{\xi}_j}] \left\{ \dot{\hat{\xi}}_j \right\} + [q_{\xi_i \ddot{\xi}_j}] p \hat{U}_\infty \left\{ \dot{\hat{\xi}}_j \right\} \right)$$

y agrupando los distintos términos:

$$p \hat{U}_\infty \left(\left[\hat{M}_{ij} \right] - \frac{\hat{\rho}_\infty}{2\pi\mu} [q_{\xi_i \ddot{\xi}_j}] \right) \left\{ \dot{\hat{\xi}}_j \right\} - \frac{\hat{\rho}_\infty \hat{U}_\infty}{2\pi\mu} [q_{\xi_i \dot{\xi}_j}] \left\{ \dot{\hat{\xi}}_j \right\} + \left(\left[\hat{K}_{ij} \right] - \frac{\hat{\rho}_\infty \hat{U}_\infty^2}{2\pi\mu} [q_{\xi_i \xi_j}] \right) \left\{ \hat{\xi}_j \right\} = \{0\}$$

que, junto con la ecuación:

$$\frac{1}{\hat{U}_\infty} [I] \left\{ \dot{\hat{\xi}}_j \right\} = p [I] \left\{ \hat{\xi}_j \right\}$$

dan lugar al problema de autovalores-autovectores que se detalla en la siguiente página.

¹³En la industria aeronáutica se utiliza el método Doublet-Lattice para el cálculo de las fuerzas aerodinámicas, y este cálculo se realiza en el dominio de la frecuencia. Por ello no es posible utilizar de forma directa el método p .

REDUCCIÓN DEL MÉTODO p AL CÁLCULO DE UN PROBLEMA DE AUTOVALORES-AUTOVECTORES

Una vez planteadas las ecuaciones de Lagrange en la formulación espacio-estado, el cálculo de la estabilidad del sistema mediante el método p puede reducirse al siguiente problema de autovalores-autovectores:

$$\left([A] - p \begin{bmatrix} [I]_{m \times m} & [0]_{m \times m} \\ [0]_{m \times m} & [I]_{m \times m} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{Bmatrix} \{\hat{\xi}_j\} \\ \{\dot{\xi}_j\} \end{Bmatrix} = \{0\}_{2m \times 1}$$

donde la matriz $[A]$ es:

$$[A] = \frac{1}{\hat{U}_\infty} \begin{bmatrix} [0]_{m \times m} & [I]_{m \times m} \\ - \left([\hat{M}_{ij}] - \frac{\hat{\rho}_\infty}{2\pi\mu} [q_{\xi_i \xi_j}] \right)^{-1} \left([\hat{K}_{ij}] - \frac{\hat{\rho}_\infty \hat{U}_\infty^2}{2\pi\mu} [q_{\xi_i \xi_j}] \right) & \left([\hat{M}_{ij}] - \frac{\hat{\rho}_\infty}{2\pi\mu} [q_{\xi_i \xi_j}] \right)^{-1} \frac{\rho_\infty \hat{U}_\infty}{2\pi\mu} [q_{\xi_i \xi_j}] \end{bmatrix}$$

El procedimiento de cálculo de la velocidad de *flutter* quedaría de la siguiente forma:

119

- Se fija una altura de vuelo, i.e., la densidad ρ_∞ .
- Se fija una velocidad de vuelo \hat{U}_∞ y se calculan los autovalores p de la matriz anterior $[A]$. Si todos tienen parte real negativa, el sistema es estable, por lo que la velocidad de flutter es mayor. Se aumenta la velocidad \hat{U}_∞ y se vuelven a calcular los autovalores. Así sucesivamente hasta que algunos de los autovalores pasa a tener parte real positiva, lo que indica que la solución es divergente y se ha sobrepasado la velocidad de *flutter*.

Recuérdese que cada autovalor se puede expresar de la siguiente forma:

$$p = \gamma k + ik = k(\gamma + i)$$

donde γ es el denominado *transient decay rate coefficient*.

- Se itera entre la velocidad que ha proporcionado un autovalor con parte real positiva (velocidad por encima de la de *flutter*) y la velocidad anterior en la que el sistema era estable (velocidad por debajo de la de *flutter*). La velocidad para la que el autovalor anterior tiene parte real nula es la velocidad de *flutter* del sistema.

Solución en el dominio de la frecuencia: método k, método V-g ó método *americano*.

El método k, también conocido como método V-g o método *americano*, es uno de los más empleados de solución de *flutter* en el dominio de la frecuencia. Se utiliza con profusión en la industria aeronáutica, ya que el cálculo de *flutter* de configuraciones complejas tipo avión implica el uso del Doublet-Lattice para el cálculo de las fuerzas aerodinámicas, un código que calcula las matrices de fuerzas aerodinámicas en el dominio de la frecuencia ($p = i \cdot k$).

Asumiendo sistema lineal, las ecuaciones en el dominio del tiempo quedan:

$$\left[\hat{M}_{ij} \right] \left\{ \frac{d^2 \hat{\xi}_i}{dt^2} \right\} + \left[\hat{K}_{ij} \right] \left\{ \hat{\xi}_j \right\} = \frac{\hat{\rho}_\infty}{2\pi\mu} \left(\hat{U}_\infty^2 [q_{\xi_i \xi_j}] \left\{ \hat{\xi}_j \right\} + \hat{U}_\infty [q_{\xi_i \dot{\xi}_j}] \left\{ \frac{d\hat{\xi}_j}{dt} \right\} + [q_{\xi_i \ddot{\xi}_j}] \left\{ \frac{d^2 \hat{\xi}_j}{dt^2} \right\} \right)$$

donde la matriz de rigidez estructural es lineal y viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \hat{K}_{ij} = & \frac{1}{128} \frac{\tau^4 E_0}{\mu q_0} \hat{K}_{ij}^B + \sum_{k=1}^{nLD} \hat{M} \hat{\omega}_{kLD}^2 \psi_{i,kLD} \psi_{j,kLD} + \sum_{k=1}^{nLR} \hat{I}_G \hat{\omega}_{kLR}^2 \frac{d\psi_{i,kLR}}{d\hat{x}} \frac{d\psi_{j,kLR}}{d\hat{x}} + \\ & + \hat{M} \hat{\omega}_{NLD}^2 \psi_{i,NLD} \psi_{j,NLD} + \hat{I}_G \hat{\omega}_{NLR}^2 \frac{d\psi_{i,NLR}}{d\hat{x}} \frac{d\psi_{j,NLR}}{d\hat{x}} + \hat{I}_w \hat{\omega}_A^2 \frac{d\psi_{i,wb}}{d\hat{x}}(x_h) \frac{d\psi_{j,wb}}{d\hat{x}}(x_h) \end{aligned}$$

La solución de la ecuación diferencial de segundo orden anterior es una respuesta amortiguada, armónica no amortiguada o divergente. Se introduce a continuación un término de *amortiguamiento artificial* $g/\hat{\omega} [K_{ij}] \{d\hat{\xi}_i/dt\}$ cuyo significado físico es el *amortiguamiento que es necesario añadir al sistema para que la solución sea del tipo armónico no amortiguado*. Una vez introducido el término de amortiguamiento artificial, la solución es de tipo armónico no amortiguado, por lo que las coordenadas generalizadas se podrán escribir como:

$$\left\{ \hat{\xi}_i \right\} = \left\{ \hat{\xi}_i \right\}_0 \cdot e^{i \cdot \omega t} = \left\{ \hat{\xi}_i \right\}_0 \cdot e^{i \cdot \frac{\omega L}{U_0} \frac{t U_0}{L}} = \left\{ \hat{\xi}_i \right\}_0 \cdot e^{i \cdot \hat{\omega} t}$$

donde $\hat{\omega} = \omega L/U_0$ es la frecuencia del mecanismo de *flutter* adimensionalizada con una frecuencia característica $\omega_0 = U_0/L$. Sustituyendo en la ecuación matricial esta expresión de las coordenadas generalizadas:

$$-\hat{\omega}^2 \left[\hat{M}_{ij} \right] \left\{ \hat{\xi}_i \right\}_0 + (1 + ig) \left[\hat{K}_{ij} \right] \left\{ \hat{\xi}_i \right\}_0 = \frac{\hat{\rho}_\infty}{2\pi\mu} \left(\hat{U}_\infty^2 [q_{\xi_i \xi_j}] \left\{ \hat{\xi}_i \right\}_0 + i \cdot \hat{\omega} \hat{U}_\infty [q_{\xi_i \dot{\xi}_j}] \left\{ \hat{\xi}_i \right\}_0 - \hat{\omega}^2 [q_{\xi_i \ddot{\xi}_j}] \left\{ \hat{\xi}_i \right\}_0 \right)$$

Esta ecuación se formula en el método V-g de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \left(\left[\hat{M}_{ij} \right] + \frac{\hat{\rho}_\infty}{2\pi\mu k^2} \left([q_{\xi_i \xi_j}] + i \cdot k [q_{\xi_i \dot{\xi}_j}] - k^2 [q_{\xi_i \ddot{\xi}_j}] \right) - \frac{1 + ig}{\hat{\omega}^2} \left[\hat{K}_{ij} \right] \right) \left\{ \hat{\xi}_i \right\}_0 = \\ & = \left(\left[\hat{M}_{ij} \right] + \frac{\hat{\rho}_\infty}{2\pi\mu k^2} [q_{ij}] - \frac{1 + ig}{\hat{\omega}^2} \left[\hat{K}_{ij} \right] \right) \left\{ \hat{\xi}_i \right\}_0 = \{0\} \end{aligned}$$

donde aparece la denominada *frecuencia reducida* $k = \omega L/U_\infty$.

La condición de existencia de solución no trivial exige que el determinante de la matriz que multiplica a $\left\{ \hat{\xi}_i \right\}_0$ sea nulo, es decir:

$$\left| \left[\hat{K}_{ij} \right]^{-1} \left(\left[\hat{M}_{ij} \right] + \frac{\hat{\rho}_\infty}{2\pi\mu k^2} [q_{ij}] \right) - \frac{1 + ig}{\hat{\omega}^2} [I] \right| = 0$$

o, de otra forma,

$$\left| \left(\left[\hat{M}_{ij} \right] + \frac{\hat{\rho}_\infty}{2\pi\mu k^2} [q_{ij}] \right)^{-1} \left[\hat{K}_{ij} \right] - \frac{\hat{\omega}^2}{1 + ig} [I] \right| = 0$$

Puede observarse que, introduciendo la matriz inversa de $[\hat{K}_{ij}]$ o $[\hat{M}_{ij}] + \hat{\rho}_\infty/(2\pi\mu k^2)[q_{ij}]$, el problema se convierte en encontrar los autovalores complejos ($\lambda = (1+ig)/\hat{\omega}^2$ o $\lambda = \hat{\omega}^2/(1+ig)$ respectivamente) de una matriz compleja. Sin embargo, en dicha matriz compleja aparece implícitamente la dependencia con la frecuencia de oscilación a través de la frecuencia reducida k , por lo que se deberá realizar un proceso iterativo que puede resumirse en:

1. Se fija una altura de vuelo, lo que proporciona una densidad adimensional $\hat{\rho}_\infty$.
2. Para cada densidad adimensional $\hat{\rho}_\infty$, se establece un set de frecuencias reducidas k_i ($i = 1, n$) y para cada una de ellas se calculan los autovalores del sistema λ_{ij} ($j = 1, m$). Cada autovalor proporciona los siguientes valores (asumiendo autovalores del tipo $\lambda = (1+ig)/\hat{\omega}^2$):

a) Frecuencia del modo j , i.e., $\hat{\omega}_{ij} = \frac{1}{\sqrt{Re(\lambda)}} \Rightarrow \omega_{ij} = \hat{\omega}_{ij} \cdot \omega_0 = \hat{\omega}_{ij} \cdot \frac{U_0}{L}$ [rad/s].

b) Amortiguamiento del modo j , i.e., $g_{ij} = \hat{\omega}^2 Im(\lambda_{ij}) = \frac{Im(\lambda_{ij})}{Re(\lambda_{ij})}$.

c) La velocidad $U_{ij} = \frac{\omega_{ij}L}{k} = \frac{1}{k}\hat{\omega}_{ij} \cdot U_0$

3. Si para alguna frecuencia reducida k_i , el amortiguamiento en alguno de los modos g_{ij} , con $g_{ij} = Im(\lambda_{ij})/Re(\lambda_{ij})$, deja de ser negativo y vale 0 o positivo, entonces existe una inestabilidad ya que el amortiguamiento que es necesario añadir al sistema para obtener un movimiento armónico es 0 (amortiguamiento g_{ij} nulo) o positivo (amortiguamiento $g_{ij} > 0$). El caso de $g_{ij} = 0$ ocurre cuando la inestabilidad (flutter) aparece a la frecuencia reducida k_i , mientras que $g_{ij} > 0$ indica que la velocidad de flutter está dada por una frecuencia intermedia entre k_{i-1} y k_i .

De las dos posibles formas de plantear el problema, es decir, invirtiendo $[\hat{K}_{ij}]$ o $[\hat{M}_{ij}] + \hat{\rho}_\infty/(2\pi\mu k^2)[q_{ij}]$, suele ser conveniente invertir la matriz de rigidez siempre y cuando sea posible, ya que esta inversión se realizaría una vez en todo el proceso de iteración. En caso de tener que invertir $[\hat{M}_{ij}] + \hat{\rho}_\infty/(2\pi\mu k^2)[q_{ij}]$, sería necesario hacerlo para cada valor de la frecuencia reducida durante el proceso de iteración. Sin embargo, en caso de tener modos de sólido rígido, la matriz $[\hat{K}_{ij}]$ no es invertible y es conveniente formular el problema con autovalores del tipo $\lambda = \hat{\omega}^2/(1+ig)$ e invertir la matriz $[\hat{M}_{ij}] + \hat{\rho}_\infty/(2\pi\mu k^2)[q_{ij}]$. Esta última aproximación es la que realiza el software comercial MSC.NASTRAN que es ampliamente utilizado en la industria aeronáutica.

Por último, sólo destacar que el método k presenta los siguientes inconvenientes:

- Exceptuando las soluciones en las que el amortiguamiento es cero, los autovalores complejos no representan el amortiguamiento o frecuencia real de los modos estructurales. Recuérdese que el amortiguamiento que se introduce es un *amortiguamiento artificial* $g/\hat{\omega}[\hat{K}_{ij}]\{d\hat{\xi}_j/d\hat{t}\}$.
- Si las fuerzas aerodinámicas dependen del Mach de vuelo M_∞ , la velocidad encontrada como flutter U_F puede no ajustarse este Mach, i.e., $M_\infty \neq U_F/a_\infty$ siendo a_∞ la velocidad del sonido a la altura de cálculo que se establece como predeterminada nada más empezar el cálculo. Este *desajuste* entre la velocidad de flutter y el Mach de vuelo es el motivo por el que la solución se denomina *unmatched*. El cálculo de la velocidad real de flutter (*solución matched*) requiere sucesivas iteraciones, calculando la velocidad de flutter a distintas alturas hasta que se cumpla la condición $M_\infty = U_F/a_\infty$.

En el caso que nos ocupa, las fuerzas aerodinámicas no dependen del Mach M_∞ , por lo que la solución es *matched* sin necesidad de iterar.

- El término $1/(2\pi\mu k^2)[\hat{q}_{ij}]$ con la frecuencia reducida k invertida al cuadrado, implica que el método k no puede dar la solución de *flutter* a frecuencia cero. Este es uno de los motivos por los que es necesario excluir los modos de sólido rígido. Por otro lado, el fallo a $k = 0$ también implica que el método k no puede predecir la velocidad de *divergencia*.
- Como ya se ha comentado anteriormente, la matriz de rigidez $[\hat{K}_{ij}]$ no será invertible en caso de tener modos de sólido rígido. Sin embargo, este inconveniente puede solventarse como se detalla en el siguiente apartado.

Método k modificado para incluir modos de sólido rígido

Partiendo de la siguiente ecuación detallada en el apartado anterior:

$$\left([\hat{M}_{ij}] + \frac{\hat{\rho}_\infty}{2\pi\mu k^2} \left([q_{\xi_i \xi_j}] + i \cdot k [q_{\xi_i \dot{\xi}_j}] - k^2 [q_{\xi_i \ddot{\xi}_j}] \right) - \frac{1+ig}{\hat{\omega}^2} [\hat{K}_{ij}] \right) \{\hat{\xi}_i\}_0 = \{0\}$$

y denominando la fuerza aerodinámica:

$$[q_{ij}] = [q_{\xi_i \xi_j}] + i \cdot k [q_{\xi_i \dot{\xi}_j}] - k^2 [q_{\xi_i \ddot{\xi}_j}]$$

se puede escribir:

$$\left([\hat{M}_{ij}] + \frac{\hat{\rho}_\infty}{2\pi\mu k^2} [q_{ij}] - \frac{1+ig}{\hat{\omega}^2} [\hat{K}_{ij}] \right) \{\hat{\xi}_i\}_0 = \{0\}$$

A continuación particionamos las matrices en modos de sólido rígido y flexibles:

$$\left(\begin{bmatrix} \hat{M}_{RR} & \hat{M}_{RF} \\ \hat{M}_{FR} & \hat{M}_{FF} \end{bmatrix} + \frac{\hat{\rho}_\infty}{2\pi\mu k^2} \begin{bmatrix} \hat{q}_{RR} & \hat{q}_{RF} \\ \hat{q}_{FR} & \hat{q}_{FF} \end{bmatrix} - \frac{1+ig}{\hat{\omega}^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{K}_{FF} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \hat{\xi}_R \\ \hat{\xi}_F \end{Bmatrix}_0 = \{0\}$$

Considerando las primeras filas asociadas a los modos de sólido rígido, se puede establecer la siguiente ecuación que proporciona las coordenadas generalizadas de los modos de sólido rígido en función de los modos flexibles:

$$[\hat{M}_{RR}] \{\hat{\xi}_R\}_0 + [\hat{M}_{RF}] \{\hat{\xi}_F\}_0 + \frac{1}{2\pi\mu k^2} [q_{RR}] \{\hat{\xi}_R\}_0 + \frac{1}{2\pi\mu k^2} [q_{RF}] \{\hat{\xi}_F\}_0 = \{0\}$$

Agrupando términos en $\{\hat{\xi}_R\}$ y $\{\hat{\xi}_F\}$:

$$\left([\hat{M}_{RR}] + \frac{1}{2\pi\mu k^2} [q_{RR}] \right) \{\hat{\xi}_R\}_0 = - \left([\hat{M}_{RF}] + \frac{1}{2\pi\mu k^2} [q_{RF}] \right) \{\hat{\xi}_F\}_0$$

y despejando los modos de sólido rígido $\{\hat{\xi}_R\}$:

$$\{\hat{\xi}_R\}_0 = - \left([\hat{M}_{RR}] + \frac{1}{2\pi\mu k^2} [q_{RR}] \right)^{-1} \left([\hat{M}_{RF}] + \frac{1}{2\pi\mu k^2} [q_{RF}] \right) \{\hat{\xi}_F\}_0$$

Por otro lado, acudiendo a las particiones de las matrices asociadas a los modos de sólido rígido:

$$[\hat{M}_{FR}] \{\hat{\xi}_R\}_0 + [\hat{M}_{FF}] \{\hat{\xi}_F\}_0 + \frac{1}{2\pi\mu k^2} [q_{FR}] \{\hat{\xi}_R\}_0 + \frac{1}{2\pi\mu k^2} [q_{FF}] \{\hat{\xi}_F\}_0 - \frac{1+ig}{\hat{\omega}^2} [\hat{K}_{FF}] \{\hat{\xi}_F\}_0 = \{0\}$$

y, sustituyendo la expresión de las coordenadas de sólido rígido en función de las coordenadas de los modos flexibles:

$$\left\{ \left[\hat{M}_{FF} \right] + \frac{1}{2\pi\mu k^2} [q_{FF}] - \left(\left[\hat{M}_{FR} \right] + \frac{1}{2\pi\mu k^2} [q_{FR}] \right) \left(\left[\hat{M}_{RR} \right] + \frac{1}{2\pi\mu k^2} [q_{RR}] \right)^{-1} \left(\left[\hat{M}_{RF} \right] + \frac{1}{2\pi\mu k^2} [q_{RF}] \right) - \frac{1+ig}{\hat{\omega}^2} \left[\hat{K}_{FF} \right] \right\} \left\{ \hat{\xi}_F \right\}_0 = \{0\}$$

La matriz de rigidez de los modos flexibles se puede invertir, de forma que la ecuación se puede expresar como el siguiente problema de autovalores:

$$\left| \left[\hat{K}_{FF} \right]^{-1} \left\{ \left[\hat{M}_{FF} \right] + \frac{1}{2\pi\mu k^2} [q_{FF}] - \left(\left[\hat{M}_{FR} \right] + \frac{1}{2\pi\mu k^2} [q_{FR}] \right) \left(\left[\hat{M}_{RR} \right] + \frac{1}{2\pi\mu k^2} [q_{RR}] \right)^{-1} \left(\left[\hat{M}_{RF} \right] + \frac{1}{2\pi\mu k^2} [q_{RF}] \right) \right\} - \frac{1+ig}{\hat{\omega}^2} [I] \right| = 0$$

La solución de esta ecuación de autovalores seguiría los mismos pasos que ya se detallaron en la sección anterior.

Otros métodos de solución en el dominio de la frecuencia.

Otros métodos de solución de la ecuación de *flutter* en el dominio de la frecuencia son:

1. Método KE.

El método KE es una evolución del método k para ganar eficiencia en el cálculo de la solución de *flutter*. Tiene algunas limitaciones ya que no proporciona autovectores y el amortiguamiento del sistema B_{hh} debe ser nulo, aunque es posible incluir un amortiguamiento estructural artificial $g/\hat{\omega}[K_{ij}]\{d\hat{\xi}_j/d\hat{t}\}$. Este método no permite tratar sistemas con leyes de control en las cuales el amortiguamiento es esencial.

2. Método pk o método *británico*.

El método *pk* es una combinación del método *p* y el método *k*. Recuérdese que las ecuaciones de Lagrange una vez aplicado el método *p* quedaban:

$$\left(p^2 \hat{U}_\infty^2 \left[\hat{M}_{ij} \right] + p \hat{U}_\infty \left[\hat{B}_{ij} \right] + \left[\hat{K}_{ij} \right] - \frac{\hat{\rho}_\infty \hat{U}_\infty^2}{2\pi\mu} \left(\left[q_{\xi_i \xi_j} \right] + p \left[q_{\xi_i \dot{\xi}_j} \right] + p^2 \left[q_{\dot{\xi}_i \dot{\xi}_j} \right] \right) \right) \left\{ \hat{\xi}_j \right\} = \{0\}$$

En el método *pk* las fuerzas aerodinámicas se aproximan en $p = i \cdot k$ (dominio de la frecuencia). Es una formulación inconsistente ya que el autovalor *p* incluye un movimiento amortiguado, mientras que las fuerzas aerodinámicas están basadas en un movimiento armónico no amortiguado. Sin embargo, esta aproximación proporciona resultados próximos al método *p* que sería el método matemáticamente correcto.

Esta aproximación provoca que el autovalor *p* sea más correcto cuanto menor sea su parte real, es decir, cuanto más pequeño sea el amortiguamiento, lo que indica que este método *pk* proporciona valores razonables del amortiguamiento siempre y cuando éste sea pequeño.

Las fuerzas aerodinámicas quedarían:

$$\begin{aligned} [q_{ij}] &= [q_{\xi_i \xi_j}] + p [q_{\xi_i \dot{\xi}_j}] + p^2 [q_{\xi_i \ddot{\xi}_j}] \simeq [q_{\xi_i \xi_j}] + ik [q_{\xi_i \dot{\xi}_j}] - k^2 [q_{\xi_i \ddot{\xi}_j}] = [q_{ij}(ik)] = \\ &= \text{Re} [q_{ij}(ik)] + i \cdot \text{Im} [q_{ij}(ik)] \end{aligned}$$

y las ecuaciones del método pk quedarían:

$$\left(p^2 \hat{U}_\infty^2 [\hat{M}_{ij}] + p \hat{U}_\infty [\hat{B}_{ij}] + [\hat{K}_{ij}] - \frac{\hat{\rho}_\infty \hat{U}_\infty^2}{2\pi\mu} [q_{ij}(ik)] \right) \{\hat{\xi}_j\} = \{0\}$$

Rodden ([RHB79]) modificó el método pk multiplicando el término imaginario de las fuerzas aerodinámicas por la fracción p/k :

$$\left(p^2 \hat{U}_\infty^2 [\hat{M}_{ij}] + p \hat{U}_\infty [\hat{B}_{ij}] + [\hat{K}_{ij}] - \frac{\hat{\rho}_\infty \hat{U}_\infty^2}{2\pi\mu} \text{Re} [q_{ij}(ik)] - \frac{\hat{\rho}_\infty \hat{U}_\infty^2}{2\pi\mu} \text{Im} [q_{ij}(ik)] \frac{p}{k} \right) \{\hat{\xi}_j\} = \{0\}$$

donde $p = g + ik = \gamma k + ik$. Teniendo en cuenta que $\{\dot{\xi}_j\} = p \hat{U}_\infty \{\hat{\xi}_j\}$, la ecuación anterior se puede escribir:

$$\left([\hat{B}_{ij}] - \frac{\hat{\rho}_\infty \hat{U}_\infty}{2\pi\mu} \frac{\text{Im} [q_{ij}]}{k} \right) \{\dot{\xi}_j\} + \left([\hat{K}_{ij}] - \frac{\hat{\rho}_\infty \hat{U}_\infty^2}{2\pi\mu} \text{Re} [q_{ij}] \right) \{\hat{\xi}_j\} + p \hat{U}_\infty [\hat{M}_{ij}] \{\hat{\xi}_j\} = \{0\}$$

Las dos ecuaciones anteriores pueden plantearse en la formulación estado-espacio mediante la ecuación siguiente:

$$\left([A] - p \begin{bmatrix} [I]_{m \times m} & [0]_{m \times m} \\ [0]_{m \times m} & [I]_{m \times m} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{\hat{\xi}_j\} \\ \{\dot{\xi}_j\} \end{Bmatrix} = \{0\}_{2m \times 1}$$

donde:

$$[A] = \frac{1}{\hat{U}_\infty} \begin{bmatrix} [0]_{m \times m} & [I]_{m \times m} \\ -[\hat{M}_{ij}]^{-1} \left([\hat{K}_{ij}] - \frac{\hat{\rho}_\infty \hat{U}_\infty^2}{2\pi\mu} \text{Re} [q_{ij}] \right) & -[\hat{M}_{ij}]^{-1} \left([\hat{B}_{ij}] - \frac{\hat{\rho}_\infty \hat{U}_\infty}{2\pi\mu} \frac{\text{Im} [q_{ij}]}{k} \right) \end{bmatrix}$$

3. Método g .

Por último, el método g es una evolución del método pk con el objetivo de proporcionar valores más exactos del amortiguamiento modal g en todo el rango de velocidades de vuelo. Recuérdese que el método pk sólo proporcionaba valores realistas del amortiguamiento en el entorno de $g = 0$, es decir, en el rango de velocidades cercanas a la inestabilidad de *flutter*.

El método g ha sido desarrollado por Chen ([Che00]) y está implementado en el software comercial ZAERO de la empresa ZONA Technology. Debido a su corto tiempo de desarrollo, no es un método muy extendido en la industria aeronáutica. El lector puede encontrar detalles interesantes en el manual teórico del software ZAERO ([ZAE04]).

3.13. Solución estacionaria: *Divergencia*

Una de las aplicaciones directas de las ecuaciones anteriores es el cálculo de la velocidad de *divergencia*. La divergencia es una inestabilidad aeroelástica estática que ocurre cuando la velocidad de vuelo \hat{U}_∞ provoca deformaciones modales infinitas. Teniendo en cuenta que la *divergencia* es estática, i.e., $d\hat{\xi}_i/d\hat{t} = d^2\hat{\xi}_i/d\hat{t}^2 = 0$, las ecuaciones de la dinámica del sistema se escriben:

$$\left[\hat{K}_{ij} \right] \left\{ \hat{\xi}_i \right\} = \frac{\hat{\rho}_\infty \hat{U}_\infty^2}{2\pi\mu} \left[q_{\xi_i \xi_j} \right] \left\{ \hat{\xi}_i \right\}$$

Agrupando los dos términos en $\{\hat{\xi}_i\}$:

$$\left(\left[\hat{K}_{ij} \right]^{-1} \left[q_{\xi_i \xi_j} \right] - \lambda [I] \right) \left\{ \hat{\xi}_i \right\} = \{0\}$$

donde el parámetro λ es igual a :

$$\lambda = \frac{2\pi\mu}{\hat{\rho}_\infty \hat{U}_\infty^2} = \frac{\pi\mu}{\hat{q}_\infty}$$

Una solución distinta de la trivial implica que el determinante de la matriz anterior sea nulo, i.e.:

$$\left| \left[\hat{K}_{ij} \right]^{-1} \left[q_{\xi_i \xi_j} \right] - \lambda_{div} [I] \right| = 0$$

por lo que el problema del cálculo de la velocidad de divergencia se reduce a encontrar los autovalores λ_{div} , y una vez calculados se puede obtener la presión dinámica de divergencia:

$$\hat{q}_\infty|_{div} = \frac{\pi\mu}{max(\lambda_{div})}$$

donde $max(\lambda_{div})$ es el mayor de todos los autovalores obtenidos que proporciona la menor presión dinámica de divergencia a la que ocurre esta inestabilidad.

3.14. Estado-Espacio: Solución Analítica vs Solución Numérica

3.14.1. Solución Analítica de Sistemas Lineales

Existen muchas referencias que detallan cómo resolver la ecuación matricial de Estado-Espacio, incluso en el caso más general en el que las matrices dependen del tiempo, i.e.:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}(t) \vec{x} + \mathbf{B}(t) \vec{u} \quad (3.90)$$

con la condición inicial $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$.

La solución de esta ecuación se plantea, a semejanza con ecuaciones diferenciales usuales, en dos fases: resolución de la ecuación homogénea ($\vec{u} = \vec{0}$) y resolución de la ecuación completa.

En la ecuación *homogénea* se supone que la entrada \vec{u} es nula, por lo que la ecuación a resolver es:

$$\frac{d\vec{x}_h}{dt} = \mathbf{A}(t) \vec{x}_h \quad (3.91)$$

con condiciones iniciales $\vec{x}_h(t_0) = \vec{x}_0$. Se comprueba (ver [DCSJ01]) que la solución \vec{x}_h se puede escribir como:

$$\vec{x}_h = \Phi(t, t_0) \vec{x}_0 \quad (3.92)$$

donde $\Phi(t, t_0)$ es la denominada *matriz de transición*, cuya expresión es:

$$\begin{aligned} \Phi(t, t_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} & \left[\mathbf{I} + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) \int_{t_0}^{\tau} \mathbf{A}(\tau_1) d\tau_1 d\tau + \dots + \right. \\ & \left. + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) \int_{t_0}^{\tau} \mathbf{A}(\tau_1) \dots \int_{t_0}^{\tau_{k-1}} \mathbf{A}(\tau_k) d\tau_k \dots d\tau_1 d\tau \right] \end{aligned} \quad (3.93)$$

Para la solución de la ecuación completa se utiliza el método de variación de constantes, según el cual se supone que existe una $\vec{z}(t)$ tal que la solución de la ecuación completa se puede expresar de la forma:

$$\vec{x}(t) = \Phi(t, t_0)\vec{z}(t) \quad (3.94)$$

hipótesis que se verificará a continuación, calculando la $\vec{z}(t)$ que lo verifica.

Si la hipótesis formulada es correcta, entonces esta expresión de $\vec{x}(t)$ debe verificar la ecuación completa, por lo que sustituyendo en la ecuación 3.90 queda:

$$\dot{\Phi}(t, t_0)\vec{z}(t) + \Phi(t, t_0)\dot{\vec{z}}(t) = \mathbf{A}(t)\Phi(t, t_0)\vec{z}(t) + \mathbf{B}(t)\vec{u}(t) \quad (3.95)$$

$$\Phi(t, t_0)\dot{\vec{z}}(t) + \underbrace{\left[\dot{\Phi}(t, t_0) - \mathbf{A}(t)\Phi(t, t_0) \right]}_0 \vec{z}(t) = \mathbf{B}(t)\vec{u}(t) \quad (3.96)$$

donde el término entre corchetes se anula por propiedades de la matriz de transición $\Phi(t, t_0)$ (ver [DCSJ01]) y, como $\Phi(t, t_0)$ es no singular se puede despejar $\dot{\vec{z}}(t)$ como:

$$\dot{\vec{z}}(t) = \Phi^{-1}(t, t_0)\mathbf{B}(t)\vec{u}(t) \quad (3.97)$$

que mediante integración se resuelve, demostrando que existe $\vec{z}(t)$ que cumple con la hipótesis formulada al principio de esta sección:

$$\vec{z}(t) = \vec{z}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau, t_0)\mathbf{B}(\tau)\vec{u}(\tau) d\tau \quad (3.98)$$

donde al aplicar la propiedad de inversión de tiempos a la matriz $\Phi(t, t_0)$ (consultar [DCSJ01]), y teniendo en cuenta que $\vec{z}(t_0) = \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ a partir de la ecuación 3.98 se obtiene:

$$\vec{z}(t) = \vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau)\mathbf{B}(\tau)\vec{u}(\tau) d\tau \quad (3.99)$$

Si se sustituye esta expresión en la ecuación 3.94 se obtiene:

$$\vec{x}(t) = \Phi(t, t_0)\vec{x}_0 + \Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau)\mathbf{B}(\tau)\vec{u}(\tau) d\tau \quad (3.100)$$

y, aplicando de nuevo propiedades de las matrices de transición, se puede expresar como:

$$\vec{x}(t) = \Phi(t, t_0)\vec{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\vec{u}(\tau) d\tau \quad (3.101)$$

Se observa que la solución completa de la ecuación de estado es la suma de dos términos:

- El primero, i.e., $\Phi(t, t_0)\vec{x}_0$, representa la evolución libre del sistema propiciada por la situación inicial de las variables de estado, o dicho de otro modo debida a las condiciones iniciales cuando la entrada $\vec{u}(t)$ es nula. Como puede verse este término existe si y sólo si existen condiciones iniciales no nulas.
- El segundo término debido a la entrada introducida en el sistema, que representa la evolución del sistema provocada por la acción exterior $\vec{u}(t)$.

3.14.2. Solución Analítica: Cálculo de la Matriz de Transición

La referencia [DCSJ01] demuestra que el cálculo de la matriz de transición $\Phi(t, t_0)$ es equivalente al cálculo de la exponencial de una matriz:

$$\Phi(t, t_0) = \exp\left\{\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau)d\tau\right\} \quad (3.102)$$

En la actualidad se utilizan los siguientes tres métodos para obtener el resultado de la expresión 3.102:

1. Método de Cayley-Hamilton ([Oga98] o [DCSJ01]):

Se utiliza si la matriz $\mathbf{A}(t)$ se le puede extraer como factor común de todos sus términos una función del tiempo, de forma que se puede expresar como una matriz invariante por dicha función, i.e.:

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{M}\alpha(t) \quad (3.103)$$

donde \mathbf{M} es una matriz invariante y $\alpha(t)$ es un escalar.

2. Métodos para sistemas de coeficientes constantes, i.e., matriz \mathbf{A} invariante en el tiempo:

En el caso de que la matriz \mathbf{A} no dependa del tiempo, la matriz de transición se puede escribir como:

$$\Phi(t, t_0) = \exp\left\{\int_{t_0}^t \mathbf{A}d\tau\right\} = \exp\left\{\mathbf{A} \int_{t_0}^t d\tau\right\} = \exp\{\mathbf{A}(t - t_0)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k (t - t_0)^k}{k!} \quad (3.104)$$

y en la actualidad estos son los principales métodos que se utilizan para el cálculo de la expresión exponencial anterior:

- Método de Jordan ([DCSJ01], [Oga98] o [UE01]):

El método de Jordan se basa en los siguientes pasos:

- Cálculo de los autovalores/autovectores de la matriz \mathbf{A} . La matriz formada por los autovectores dispuestos en columnas se denominará \mathbf{T} .
- Se realiza un cambio de sistema de referencia $\vec{x} = \mathbf{T}\tilde{\vec{x}}$, de forma que la matriz de Estado-Espacio $\tilde{\mathbf{A}}$ en este nuevo sistema de referencia es:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \quad (3.105)$$

- La matriz de Estado-Espacio $\tilde{\mathbf{A}}$ en la variable de estado $\tilde{\mathbf{x}}$ es una matrix diagonal por cajas, la denominada *matrix diagonal por cajas de Jordan*, y es sencillo obtener la matriz de transición $\tilde{\Phi}(t, t_0)$ del sistema en este nuevo sistema de referencia.
- Una vez calculada la matriz de transición $\tilde{\Phi}(t, t_0)$, se vuelve a la matriz de transición del sistema original mediante el cambio:

$$\Phi(t, t_0) = \mathbf{T}\tilde{\Phi}(t, t_0)\mathbf{T}^{-1} \quad (3.106)$$

- Método de Sylvester (consultar detalles en [Oga98] o [AP92]).
- Transformada Inversa de Laplace (consultar [DCSJ01], [Oga98] o [FPEN94]):
Se comprueba (consultar detalles en [DCSJ01]) que la matriz de transición $\Phi(t, t_0)$ se puede calcular como la transformada inversa de Laplace de $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, i.e.:

$$\Phi(t, t_0) = \mathcal{L}^{-1} [(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \quad (3.107)$$

3.14.3. Solución Analítica de Sistemas Lineales a Trozos

Los sistemas con no linealidades de tipo *freeplay* o *hysteresis* se pueden considerar como sistemas *lineales a trozos* (en la literatura anglosajona *piecewise linear systems*). En cada una de las zonas de la no linealidad, el sistema tiene una matriz \mathbf{A} independiente del tiempo, por lo que las matrices de transición se pueden calcular mediante alguno de los métodos descritos en la sección anterior para matrices de Estado-Espacio invariantes: método de Jordan, método de Sylvester o transformada inversa de Laplace.

El sistema se integra por zonas con la precaución de cambiar las matrices de transición cuando se pasa de una zona a otra, por lo que es importante capturar el tiempo de paso por las esquinas de la no linealidad.

3.14.4. Solución Analítica vs Numérica

En esta sección se ha podido comprobar que es posible formular una solución analítica para sistemas Estado-Espacio con no linealidades de tipo *freeplay* o *hysteresis*. Respecto a una solución numérica (Runge-Kutta, método de Houbolt, método de Newmark, etc.) de las ecuaciones Estado-Espacio, la solución analítica presenta las siguientes ventajas e inconvenientes.

1. Ventajas de la solución analítica:

- En sistemas con pocos grados de libertad (2 ó 3), la solución analítica es directa y evita la utilización de integradores.

2. Ventajas de la solución numérica frente a la solución analítica:

- En sistemas con un número elevado de grados de libertad, los métodos de cálculo de la matriz de transición en la solución analítica necesitan apoyarse en códigos de cálculo, ya sea tipo Matlab o códigos basados en Fortran, C, etc. Matlab es una herramienta muy útil y robusta pero presenta el inconveniente de un elevado tiempo de cálculo frente, por ejemplo, a programas ejecutables en Fortran.

- La solución numérica es más versátil que la solución analítica, permitiendo la introducción de cualquier otro tipo de no linealidad, cambio de las condiciones de vuelo, etc.
- La integración en el dominio del tiempo con la formulación estado-espacio de la solución numérica es la que se utiliza en el acoplamiento de las ecuaciones aeroelásticas con las leyes de control.
- La integración en el dominio del tiempo es un problema ya resuelto y tratado en diversas publicaciones. Existen multitud de métodos de integración disponibles y ya codificados en distintos lenguajes de programación (Fortran, C, etc.), por lo que no será difícil encontrar alguno para el problema particular que nos ocupe, en caso de que se tengan matrices mal condicionadas, etc.

En esta Tesis se ha seleccionado el método de integración numérica de $d\vec{x}/dt = \mathbf{A}\vec{x} + \mathbf{B}\vec{u}$ en el dominio del tiempo dadas las ventajas anteriormente descritas.

3.15. Consideraciones Finales

En este capítulo se han formulado las ecuaciones aeroelásticas de configuraciones cuerpo/ala esbeltas, típicamente pods subalares, misiles, tanques de combustible, etc. Se han analizado las distintas condiciones de contorno (lo que se ha denominado *soportado*) que pueden tener este tipo de vehículos y se han introducido las posibles localizaciones de las no linealidades estructurales del tipo *freeplay* o *hysteresis*. Con esta capacidad de formulación de las ecuaciones aeroelásticas, y el módulo de integración de las ecuaciones, el código **FHSWB** es un código autocontenido para el estudio aeroelástico lineal y no lineal de este tipo de configuraciones.

Se han analizado los distintos métodos de solución de las ecuaciones aeroelásticas: métodos clásicos en el dominio de la frecuencia en caso de sistema lineal, solución analítica con *Point Transformation Method* a través de la matriz de transición en caso de no linealidad *freeplay* o *hysteresis*, o directamente solución numérica integrando las ecuaciones estado-espacio. De todos ellos, el método más versátil es la integración directa ya que permite introducir otros tipos de no linealidad diferentes al *freeplay* o *hysteresis*, permite ser acoplado con módulos de control (aeroservoelasticidad) debido a la estandarización en la ingeniería de los modelos estado-espacio, etc. Este es el método elegido para esta tesis, la integración directa en el dominio del tiempo. Las particularidades del módulo integrador serán detalladas en el capítulo 5.

Las ecuaciones desarrolladas en este capítulo no formulan las fuerzas aerodinámicas de forma explícita, éste es un ejercicio que se ha dejado para el capítulo siguiente.

Capítulo 4

FUERZAS AERODINÁMICAS GENERALIZADAS

4.1. Introducción

En el capítulo anterior se han formulado las ecuaciones aeroelásticas, aunque el término correspondiente a las fuerzas aerodinámicas no se desarrolló de forma explícita. Es en este capítulo donde se desarrollan estas fuerzas aerodinámicas no estacionarias sobre configuraciones cuerpo/ala esbeltas, analizando los siguientes puntos:

1. Revisión de la *teoría aerodinámica de cuerpos esbeltos*, estacionaria y no estacionaria (sección 4.2).
2. Formulación de las ecuaciones diferenciales en el potencial de velocidades (secciones 4.3 a 4.5), junto con la expresión de la condición de contorno (sección 4.6) y del coeficiente de presiones (sección 4.7).
3. Simplificación de las ecuaciones en caso de configuraciones esbeltas (sección 4.8), incluyendo la expresión de las fuerzas aerodinámicas generalizadas en la formulación modal y, para cada forma modal ψ_i , sus dos contribuciones:
 - Contribución de la deformación conjunta de cuerpo y ala, i.e., $\psi_{i,b}$ (modos \mathbf{WjB}).
 - Contribución de la deformación de aletas relativa al cuerpo, i.e., $\psi_{i,wb} = \psi_{i,w} - \psi_{i,b}$ (modos \mathbf{WrB}).

Con este capítulo se considera terminada la descripción del módulo del código **FHSWB** que calcula las ecuaciones aeroelásticas de configuraciones cuerpo/ala esbeltas.

4.2. Revisión de la *Teoría Aerodinámica de Cuerpos Esbeltos*

Los principios de la actual teoría aerodinámica de cuerpos esbeltos fueron expuestos por primera vez en 1924 por Max M. Munk ([Mun24]), que formuló la ecuación de la fuerza transversal sobre un dirigible debida a un ángulo de guiñada. En 1946, R.T. Jones ([Jon46]) extendió los cálculos de Munk sobre cuerpos esbeltos a alas esbeltas, con lo que se sentaban las bases para el cálculo de fuerzas

aerodinámicas sobre configuraciones esbeltas cuerpo/ala. Las conclusiones más importantes de estos estudios fueron:

1. El campo de velocidades deriva de un potencial, de forma que el problema queda reducido a resolver una única ecuación en derivadas parciales de dicho potencial con las condiciones de contorno de impermeabilidad en el cuerpo y flujo no perturbado en el infinito aguas arriba.
2. Una vez linealizada la ecuación del potencial de velocidades, el problema puede separarse en dos problemas desacoplados:
 - Problema de flujo axial ϕ_0 (según la velocidad de vuelo): ángulo de ataque nulo y configuración cuerpo/ala no deformada.
 - Problema de flujo transversal ϕ (perpendicular a la velocidad de vuelo): flujo generado por movimiento y/o deformación transversal.

El problema de flujo axial ha sido resuelto de forma analítica por distintos autores. De entre ellos, destaca M. van Dyke ([VD58]), que desarrolla varias soluciones de la ecuación del flujo axial ϕ_0 , es decir $(1 - M_\infty)\phi_{0xx} + \phi_{0rr} + \phi_{0r}/r = 0$. En el caso de configuraciones suficientemente esbeltas, el término dependiente del número de Mach M_∞ puede despreciarse frente a los otros dos, y la solución es más fácil y directa. Este último caso es el que se considera en esta tesis.

Por otro lado, los métodos matemáticos fueron evolucionando y diversos autores encontraron soluciones analíticas para el flujo transversal utilizando transformación conforme en el plano complejo: las referencias [Spr50] y [LB51] calculan fuerzas aerodinámicas sobre distintas configuraciones cuerpo/ala, mientras que las referencias [AD52] y [DK54] calculan las fuerzas incrementales causadas por las deflexiones de las superficies de control.

Como resumen de todo lo anterior, puede consultarse la referencia [Nie60], un excelente compendio sobre cálculo aerodinámico en configuraciones tipo misil, o las dos referencias más generales [AL65] y [Kra85].

La *Teoría de Cuerpos Esbeltos* sigue aplicándose en la ingeniería aeronáutica para el diseño de configuraciones esbeltas tipo misil, cohete, etc., y prueba de ello es la ESDU 83010 revisada en 1992 ([Soc92]) o el programa DATCOM ([Bla98] y [BK05]) desarrollado por el *U.S. Air Force Research Laboratory*. Por otro lado, los métodos de paneles tipo *Doublet-Lattice* que se utilizan en el diseño aeroelástico de configuraciones tipo avión (no esbeltas), tienen incluido de forma implícita un método basado en la teoría de Cuerpos Esbeltos para el cálculo de las fuerzas aerodinámicas sobre los cuerpos fuselados: fuselaje, góndolas de motores, pods externos, etc. El autor de esta tesis, en las referencias [Aré98b] y [Aré98a], ha demostrado que si la *relación de esbeltez*¹ no supera el valor de 0.3, la Teoría de Cuerpos Esbeltos es aplicable.

Excepto la ESDU 83010 ([Soc92]), que contiene fuerzas aerodinámicas no estacionarias (oscilatorias) sobre cuerpos axilsimétricos, el resto de referencias anteriores sólo desarrollan las fuerzas aerodinámicas *estacionarias* en configuraciones axilsimétricas tipo cuerpo o cuerpo/ala rígidas. A continuación se desarrolla la formulación no estacionaria en configuraciones cuerpo/ala axilsimétricas flexibles.

¹Recuérdese que se denomina *relación de esbeltez* a la relación entre la máxima dimensión transversal del cuerpo (i.e., perpendicular a la dirección del movimiento) y la dimensión longitudinal del mismo (i.e., según la dirección de vuelo).

4.3. Sistemas de Referencia: Ejes Viento y Ejes Cuerpo

Se consideran los siguientes sistemas de referencia:

1. Sistema de referencia inercial *ejes viento* con:

Eje \tilde{x} : Siguiendo la dirección y sentido de la velocidad de vuelo U_∞ .

Eje \tilde{z} : Intersección de un plano perpendicular al eje \tilde{x} definido anteriormente con un plano de simetría de la configuración cuerpo/ala.

Eje \tilde{y} : Formando un triedro a derechas con los dos anteriores.

2. Sistema curvilíneo ortogonal de *ejes cuerpo*. Desde un punto P con coordenadas en ejes viento $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ se traza una perpendicular al eje elástico del cuerpo, de forma que las coordenadas del punto en *ejes cuerpo* quedan:

Coordenada z : Distancia desde el punto $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ al eje elástico del cuerpo medida sobre la perpendicular al eje elástico trazada desde el mismo punto $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$.

Coordenada x : Longitud de la curva formada por el eje elástico desde el origen (punta del cuerpo) hasta el punto intersección del eje elástico con la perpendicular al mismo trazada desde $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$.

Coordenada y : Misma que en *ejes viento*, i.e., $y = \tilde{y}$.

En el apéndice C se demuestra que este sistema de coordenadas *ejes cuerpo* es ortogonal.

De las definiciones anteriores, la relación exacta entre las coordenadas de un punto definidas en *ejes viento* $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ y las coordenadas en *ejes cuerpo* (x, y, z) es la siguiente:

$$\begin{aligned} x &= \int_0^{\tilde{x} - z \sin \gamma} \sqrt{1 + \left[\frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(u, \tilde{t}) \right]^2} du \\ y &= \tilde{y} \\ z \cos \gamma &= \tilde{z} + w(\tilde{x} - z \sin \gamma, \tilde{t}) \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde γ es el ángulo indicado en la figura 4.2 y $w(\tilde{x}, \tilde{t})$ representa el desplazamiento en z del eje de revolución del cuerpo, considerado positivo en sentido contrario al eje z . Las relaciones (4.1) se pueden simplificar reteniendo los primeros órdenes de magnitud en la perturbación $w(x; t)$, teniendo en cuenta que tanto los desplazamientos $w(x; t)$ como su derivada $\partial w(x; t)/\partial x$ son del mismo orden. En primer lugar, el ángulo γ y sus relaciones trigonométricas se pueden aproximar por:

$$\gamma \simeq \sin \gamma \simeq \tan \gamma = \frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x} - z \sin \gamma, \tilde{t}) \simeq \frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{t}) + o\left(\frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}\right) \quad (4.2)$$

$$\cos \gamma \simeq 1 \quad (4.3)$$

que, sustituyendo en (4.1):

$$\begin{aligned}
 x &\simeq \int_0^{\tilde{x} - \frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(u, \tilde{t})z} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(u, \tilde{t}) \right]^2 + o \left(\left[\frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(u, \tilde{t}) \right]^2 \right) \right\} du \simeq \\
 &\simeq \tilde{x} - \frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{t})z + o \left(\frac{\partial w}{\partial \tilde{x}} \right) \simeq \tilde{x} - \frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{t})z \\
 y &= \tilde{y} \\
 z &\simeq \tilde{z} + w(\tilde{x} - z \sin \gamma, \tilde{t})
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Por otro lado, la deformada $w(\tilde{x} - z \sin \gamma, \tilde{t})$ evaluada en la abscisa $\tilde{x} - z \sin \gamma$ se puede aproximar por:

$$w(\tilde{x} - z \sin \gamma, \tilde{t}) = w(\tilde{x}) - \frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{t})z \sin \gamma + \dots = w(\tilde{x}) + o \left(\frac{\partial w}{\partial \tilde{x}} \right) \simeq w(\tilde{x}) \tag{4.5}$$

De esta forma, sustituyendo (4.2) a (4.5) en las relaciones (4.1) quedan

$$\begin{aligned}
 x &\simeq \tilde{x} - \frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{t})z \\
 y &= \tilde{y} \\
 z &\simeq \tilde{z} + w(\tilde{x}, \tilde{t})
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Una última operación permite expresar las coordenadas en *ejes cuerpo* (x, y, z) en función de coordenadas en *ejes viento* $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$. Introduciendo la expresión de z en la ecuación de x de las relaciones (4.6):

$$x \simeq \tilde{x} - \frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{t})(\tilde{z} + w(\tilde{x}, \tilde{t})) \simeq \tilde{x} - \frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{t})\tilde{z} \tag{4.7}$$

Como resultado, estas son las ecuaciones que relacionan los dos sistemas de referencia:

$$\begin{aligned}
 x &\simeq \tilde{x} - \frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{t})\tilde{z} \\
 y &= \tilde{y} \\
 z &\simeq \tilde{z} + w(\tilde{x}, \tilde{t})
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Se pueden formular ecuaciones similares para relacionar *ejes viento* $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ con las coordenadas en *ejes cuerpo* (x, y, z) . Para ello, se debe expresar la $\partial w / \partial \tilde{x}$ en función de coordenadas en *ejes cuerpo*:

$$\frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} \Big|_{(\tilde{x}, \tilde{t})} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \tilde{x}} \Big|_{(\tilde{x}, \tilde{t})} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \tilde{x}} \Big|_{(\tilde{x}, \tilde{t})} \tag{4.9}$$

que, haciendo uso de las relaciones (4.8):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{t}) &\simeq \frac{\partial w}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{t}) \left[1 + \frac{\partial^2 w}{\partial \tilde{x}^2}(\tilde{x}, \tilde{t})\tilde{z} \right] + \frac{\partial w}{\partial z}(\tilde{x}, \tilde{t}) \frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{t}) \simeq \frac{\partial w}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{t}) \simeq \\
 &\simeq \frac{\partial w}{\partial x}(x + \frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{t})\tilde{z}, \tilde{t}) \simeq \frac{\partial w}{\partial x}(x, \tilde{t})
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Sustituyendo (4.10) en (4.8) y reteniendo primeros órdenes de magnitud:

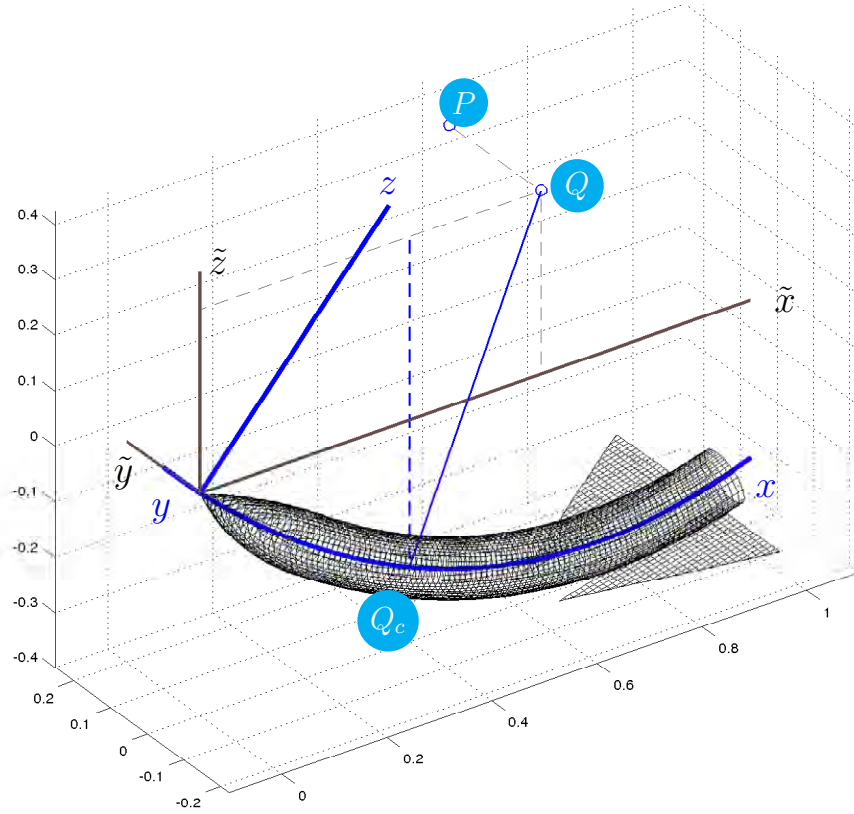


Figura 4.1: Figura 3D de la configuración cuerpo/ala deformada.

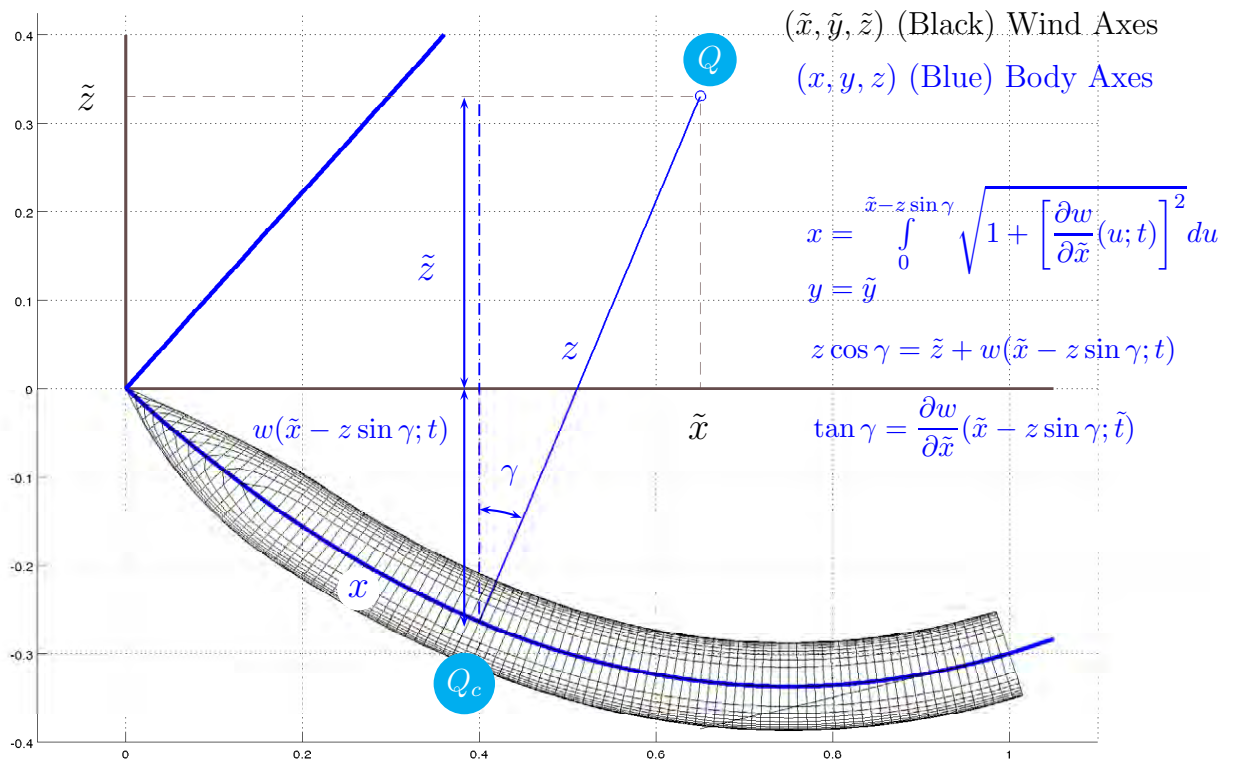


Figura 4.2: Figura 2D (plano xz) de la configuración cuerpo/ala deformada

$$\begin{aligned}
 x &\simeq \tilde{x} - \frac{\partial w}{\partial x}(x, \tilde{t}) [z - w(\tilde{x}, \tilde{t})] \simeq \tilde{x} - \frac{\partial w}{\partial x}(x, \tilde{t})z \\
 y &= \tilde{y} \\
 z &\simeq \tilde{z} + w(\tilde{x}, \tilde{t}) \simeq \tilde{z} + w(x + \frac{\partial w}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{t})\tilde{z}, \tilde{t}) \simeq \tilde{z} + w(x, \tilde{t})
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

y despejando las coordenadas en *ejes viento* $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ en función de *ejes cuerpo* (x, y, z) :

$$\begin{aligned}
 \tilde{x} &\simeq x + \frac{\partial w}{\partial x}(x, \tilde{t})z \\
 \tilde{y} &= y \\
 \tilde{z} &\simeq z - w(x, \tilde{t})
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

4.4. Potencial de Velocidades. Condiciones de Contorno

Introduciendo las hipótesis de flujo irrotacional (ver apéndice B), el campo de velocidades del flujo alrededor del vehículo deriva de un potencial que denotaremos con la letra mayúscula griega *omega* Ω , i.e.:

$$\vec{V} = \nabla\Omega(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t) \tag{4.13}$$

siendo \tilde{x} , \tilde{y} y \tilde{z} las coordenadas en *ejes viento* del punto donde se calcula la velocidad del fluido y t el instante de cálculo.

La ecuación a resolver para determinar el campo de velocidades a través del potencial es la siguiente:

$$a^2 \Delta\Omega = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} \Big|_w + \frac{\partial (\nabla\Omega)^2}{\partial t} \Big|_w + \frac{1}{2} (\nabla\Omega \cdot \nabla) (\nabla\Omega)^2 \tag{4.14}$$

donde a es la velocidad local del sonido dada por:

$$a^2 = a_\infty^2 - (\gamma - 1) \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial t} \Big|_w + \frac{1}{2} [(\nabla\Omega)^2 - Q_\infty^2] \right\} \tag{4.15}$$

siendo $\vec{Q}_\infty = (U_\infty, 0, 0)$ la velocidad total del fluido en el infinito no perturbado por la presencia del cuerpo y a_∞ la velocidad del sonido también en el infinito.

Estas ecuaciones están formuladas en el sistema *inercial* de *ejes viento*. En secciones posteriores se formularán en el sistema *no inercial* de *ejes cuerpo* y para ello será necesario desarrollar las expresiones de las derivadas respecto al tiempo $\partial/\partial t|_w$ (formuladas en el sistema inercial) y demostrar que el resto de los términos con los operadores diferenciales *gradiente* y *laplaciana* permanecen invariantes.

4.4.1. Condiciones de Contorno

El potencial total de velocidades Ω debe cumplir las siguientes condiciones de contorno:

1. Condición de contorno de *flujo no perturbado* en el infinito aguas arriba:

$$\nabla\Omega|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \rightarrow \infty} \rightarrow \vec{Q}_\infty \tag{4.16}$$

2. Condición de contorno de superficie impermeable:

Sea $S(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t) = 0$ la ecuación que define la superficie del misil. Bajo la hipótesis de impermeabilidad, dicha superficie es tangente al campo de velocidades fluido, de forma que constituye una superficie de corriente que el fluido nunca puede atravesar. Recuérdese que se considera flujo potencial, resultado de imponer varias simplificaciones a las ecuaciones completas de la Mecánica de Fluidos, entre ellas la condición de no viscosidad, de forma que no existe capa límite que haga tender la velocidad exterior a la de la superficie del vehículo. Por este motivo, el fluido en contacto la superficie del vehículo puede tener una velocidad relativa al mismo, pero siempre tangente cumpliendo la condición de *flujo nulo* normal a la superficie (impermeabilidad).

Si una partícula fluida se encuentra en contacto con la superficie del cuerpo, seguirá sobre la misma, debido a que el campo fluido que determina su velocidad es en todo instante tangente a la superficie.

De forma matemática, esta condición de permanencia a la superficie significa que la magnitud $S(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t)$ en una partícula permanece constante e igual a cero, por lo se cumple ²:

$$S(\tilde{z} + \tilde{x}, \tilde{y} + d\tilde{y}, \tilde{z} + d\tilde{z}, t + dt) - S(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t) = 0 \quad (4.17)$$

En el límite cuando $dt \rightarrow 0$, se obtiene:

$$\left[\frac{\partial S}{\partial t} \Big|_w + \frac{\partial S}{\partial \tilde{x}} \frac{d\tilde{x}}{dt} + \frac{\partial S}{\partial \tilde{y}} \frac{d\tilde{y}}{dt} + \frac{\partial S}{\partial \tilde{z}} \frac{d\tilde{z}}{dt} \right]_{S(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t)=0} = 0 \quad (4.18)$$

siendo $\partial S/\partial t|_w$ la derivada parcial respecto al tiempo en el sistema de *ejes viento*, es decir, manteniendo las coordenadas \tilde{x} , \tilde{y} y \tilde{z} constantes³. Teniendo en cuenta que la derivada de la posición de la partícula fluída respecto al tiempo es la velocidad del campo fluido en ese punto:

$$\nabla\Omega(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t) = \left(\frac{d\tilde{x}}{dt}, \frac{d\tilde{y}}{dt}, \frac{d\tilde{z}}{dt} \right) \quad (4.19)$$

y sustituyendo en (4.18):

$$\left[\frac{\partial S}{\partial t} \Big|_w + \nabla\Omega \cdot \nabla S \right]_{S(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t)=0} = \left[\frac{DS}{Dt} \Big|_w \right]_{S(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t)=0} = 0 \quad (4.20)$$

siendo $DS/Dt|_w$ la denominada *derivada sustancial* de la función $S(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t})$.

Otra forma de llegar a la conclusión anterior (4.20) es considerar que, dentro de la formulación Lagrangiana de Mecánica de Fluidos, la variación de cualquier magnitud en una partícula viene dada por su derivada sustancial. Teniendo en cuenta que la magnitud $S(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t)$ en las partículas en contacto con la superficie permanece constante e igual a cero:

$$\left[\frac{DS}{Dt} \Big|_w \right]_{S(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t)=0} = 0 \quad (4.21)$$

²En el caso de no considerar viscosidad, las partículas en contacto con el vehículo tienen velocidades tangentes a la superficie del mismo. Si se tiene en cuenta la viscosidad, las partículas en contacto con la superficie del vehículo se mueven a su misma velocidad que él, de forma que no sólo permanecen en todo momento en contacto con la superficie sino que se mantienen en la misma posición relativa, por lo que la condición $S(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t) = 0$ se sigue cumpliendo

³Se introduce el subíndice w para distinguir esta derivada parcial de la derivada parcial respecto al tiempo manteniendo \tilde{x} , \tilde{y} y \tilde{z} constantes.

4.4.2. Método de Pequeñas Perturbaciones

El *método de pequeñas perturbaciones* se puede aplicar siempre y cuando la *velocidad del fluido* sufre pequeños cambios en dirección y magnitud respecto a la velocidad aguas arriba en el infinito $\vec{Q}_\infty (U_\infty, V_\infty, W_\infty)$.

El siguiente texto, extraído de [Nie60] describe de una forma clara y precisa lo que significa *método de pequeñas perturbaciones*:

With the possible exception of limited regions as stagnation regions, our first assumption is that the perturbation velocities are small compared to Q_∞ so that:

$$\frac{u}{Q_\infty}, \frac{v}{Q_\infty}, \frac{w}{Q_\infty} = O(\epsilon) \ll 1$$

In this equation the symbol $O(\epsilon)$ stands for "of the order of magnitude of ϵ ". In contrast to its more precise mathematical meaning, the symbol has the approximate physical meaning in the present connection that the velocity ratios have numerical values of a magnitude ϵ much less than unity. In the neighbourhoods where the perturbation velocities are large, the solutions of the linear equation for small perturbation velocities cannot be accurate, but, if these regions are limited in extent and number, it can be hoped that the solutions will be representative of the flow in the large.

De esta forma, la velocidad en cualquier punto del campo fluido se podrá expresar como:

$$\vec{V} = \vec{Q}_\infty + (u, v, w) = (U_\infty + u, V_\infty + v, W_\infty + w) \quad (4.22)$$

siendo u , v y w mucho menores que el módulo de la velocidad en el infinito Q_∞ .

La condición de contorno de impermeabilidad (ecuación (4.20)) aplicada a vehículos aeronáuticos, formados por superficies sustentadoras de bajo espesor en dirección de la corriente, cuerpos esbeltos (fuselaje, misiles, tanques de combustible, ...) y velocidad principal de vuelo según el *eje viento x*, da lugar a la aplicación del *método de pequeñas perturbaciones* que permite *linealizar* la formulación. A continuación se demuestran las condiciones de aplicación de método de pequeñas perturbaciones, analizando las condiciones de contorno en aletas y cuerpo, así como las componentes de la velocidad del fluido incidente en el infinito \vec{Q}_∞ :

1. Condición de contorno en aleta horizontal

Bajo la consideración de pequeño espesor de la aleta y la hipótesis de pequeños desplazamientos respecto a una condición de vuelo estacionaria, la aleta horizontal permanecerá próxima al plano $\tilde{z} = 0$. Distinguiendo entre extradós e intradós, la ecuación de la superficie $S(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t) = 0$ queda:

$$\begin{aligned} S_{ext} &\equiv \tilde{z} - z_{ext}(\tilde{x}, \tilde{y}, t) = 0 \text{ en el extradós} \\ S_{int} &\equiv \tilde{z} - z_{int}(\tilde{x}, \tilde{y}, t) = 0 \text{ en el intradós} \end{aligned} \quad (4.23)$$

ecuaciones que se deben cumplir desde el borde de ataque $\tilde{x} = \tilde{x}_{le}(\tilde{y})$ al borde de salida $\tilde{x} = \tilde{x}_{te}(\tilde{y})$. Planteando la condición de contorno $DS/Dt = 0$:

$$\begin{aligned}
 W_{ext} &= \left. \frac{\partial z_{ext}}{\partial t} \right|_w + U_{ext} \frac{\partial z_{ext}}{\partial \tilde{x}} + V_{ext} \frac{\partial z_{ext}}{\partial \tilde{y}}, \text{ en } \tilde{z} = z_{ext}(\tilde{x}, \tilde{y}, t) \\
 W_{int} &= \left. \frac{\partial z_{int}}{\partial t} \right|_w + U_{int} \frac{\partial z_{int}}{\partial \tilde{x}} + V_{int} \frac{\partial z_{int}}{\partial \tilde{y}}, \text{ en } \tilde{z} = z_{int}(\tilde{x}, \tilde{y}, t)
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Las ecuaciones anteriores son *exactas* en el sentido de que no se han introducido ninguna simplificación por las características específicas de la aleta. Sin embargo, la geometría de la alas y en particular la de las aletas de los misiles, cumplen las dos siguientes premisas, tanto para intradós como extradós:

- a) Geometría: En cada instante de tiempo t , las derivadas laterales $\partial z_{ext(int)}/\partial \tilde{x}$ y $\partial z_{ext(int)}/\partial \tilde{y}$ determinan la posición del plano tangente a la superficie en el punto $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$. De hecho, la normal a la superficie sigue la dirección del gradiente de la superficie en este punto:

$$\nabla S = \left(1, -\frac{\partial z_{ext(int)}}{\partial \tilde{x}}, -\frac{\partial z_{ext(int)}}{\partial \tilde{y}} \right)$$

En alas convencionales, estas derivadas son pequeñas:

$$\frac{\partial z_{ext(int)}}{\partial \tilde{x}} \sim \frac{\partial z_{ext(int)}}{\partial \tilde{y}} \ll 1$$

lo que implica que la normal a la superficie se *separa poco* del *eje viento* \tilde{z} y el plano tangente se *separa poco* del plano $\tilde{z} = 0$.

- b) Movimiento: La aleta presenta desplazamientos como sólido rígido o deformaciones como componente flexible pequeños, es decir, $\partial z_{ext(int)}/\partial t \ll L/T \sim Q_\infty$, siendo L una longitud característica en dirección \tilde{x} , T un tiempo característico y Q_∞ el módulo de la velocidad de vuelo $\vec{Q}_\infty = (U_\infty, V_\infty, W_\infty)$.

Introduciendo las dos premisas anteriores en las ecuaciones (4.24) y teniendo en cuenta que $U_{int} \sim U_{ext} \sim U_\infty \sim Q_\infty$ y $V_{int} \sim V_{ext} \sim V_\infty \sim Q_\infty$, se desprende que las componentes verticales de la velocidad en el extradós e intradós de la aleta horizontal son pequeñas frente a Q_∞ :

$$W_{ext} \sim W_{int} \ll Q_\infty$$

y teniendo en cuenta que la velocidad en el extradós W_{ext} e intradós W_{int} se puede expresar como la velocidad vertical en el infinito más la velocidad de perturbación por la presencia del vehículo:

$$\begin{aligned}
 W_{ext} &= W_\infty + w_{ext} \ll Q_\infty \text{ en el extradós} \\
 W_{int} &= W_\infty + w_{int} \ll Q_\infty \text{ en el intradós}
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Si la velocidad del fluido en el infinito W_∞ es pequeña frente a Q_∞ , entonces las velocidades de perturbación w_{ext} y w_{int} en dirección de *ejes viento* \tilde{z} son también pequeñas frente a Q_∞ y se cumple la *teoría de pequeñas perturbaciones*.

Por tanto, el cumplimiento de la *teoría de pequeñas perturbaciones* con la condición de contorno sobre la aleta horizontal obliga a tener velocidades incidentes $W_\infty \ll Q_\infty$, o lo que es lo mismo, *ángulos de ataque* α pequeños.

2. Condición de contorno en aleta vertical

De forma similar al apartado anterior (aleta horizontal), se demuestra que la condición de *pequeñas perturbaciones* en el potencial de velocidades determina que la velocidad lateral V_∞ sea pequeña o, lo que es igual, que el *ángulo de resbalamiento* β sea pequeño.

3. Condición de contorno en fuselaje (cuerpo esbelto)

El cuerpo del misil es esbelto en dirección del *eje viento* \tilde{x} , es decir, la dimensión característica L del cuerpo en \tilde{x} es mucho mayor que la dimensión característica transversal, que será del orden del diámetro del cuerpo en una sección $\tilde{x} = \text{cte}$ característica. Normalmente se toma como sección característica para medir el diámetro del cuerpo aquella en la que el diámetro es máximo, obteniendo el siguiente parámetro de esbeltez:

$$\tau = \frac{2 \cdot R_{max}}{L} \quad (4.26)$$

siendo τ la denominada *relación de esbeltez*. La condición de vuelo para que el cuerpo esté actuando como esbelto es que la velocidad incidente según el *eje viento* \tilde{x} sea mucho mayor que las velocidades transversales, es decir, $V_\infty \sim W_\infty \ll U_\infty$. Bajo esta condición de vuelo, demostraremos que la presencia del cuerpo perturba la velocidad incidente del fluido según la *teoría de pequeñas perturbaciones*, es decir, cambia poco en dirección y magnitud a la velocidad del fluido en el infinito aguas arriba \vec{Q}_∞ .

La ecuación de la superficie $S(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = 0$ del cuerpo puede expresarse en coordenadas cilíndricas como:

$$S \equiv r - R(\tilde{x}, \tilde{\theta}, t) = 0 \quad (4.27)$$

siendo R el radio del cuerpo. Para plantear la ecuación de condición de contorno $DS/Dt = 0$ es necesario calcular el gradiente de la superficie $S \equiv 0$ que conviene expresarse en coordenadas cilíndricas, i.e.:

$$\nabla S = \frac{\partial S}{\partial \tilde{x}} \vec{i} + \frac{\partial S}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \tilde{\theta}} \vec{e}_\theta \quad (4.28)$$

de forma que la condición de contorno queda:

$$\frac{DS}{Dt} \equiv \frac{\partial R}{\partial t} - V_r - \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial \tilde{\theta}} V_\theta - \frac{\partial R}{\partial \tilde{x}} U = 0 \quad (4.29)$$

siendo $\vec{V} = (U, V_r, V_\theta)$ las componentes de la velocidad el fluido en coordenadas cilíndricas. De nuevo, es necesario hacer dos consideraciones:

- a) Geometría: La superficie del cuerpo se diseña con el objeto de evitar desprendimientos de corriente o gradientes de presión importantes, lo que normalmente se denomina cuerpo *fuselado*. Esto implica que las derivadas parciales $\partial R/\partial \tilde{x}$ y $\partial R/\partial \tilde{\theta}$ son pequeñas y por lo tanto las velocidades inducidas por la presencia del cuerpo en dirección \tilde{x} y θ son pequeñas, es decir:

$$\begin{aligned} U &= U_\infty + u, \text{ donde } u \ll U_\infty \\ V_\theta &= V_{\theta,\infty} + v_\theta = -V_\infty \cos \theta - W_\infty \sin \theta + v_\theta, \text{ donde } v_\theta \ll V_{\theta,\infty} \end{aligned} \quad (4.30)$$

donde $V_{\theta,\infty} = -V_\infty \cos \theta - W_\infty \sin \theta$ es la velocidad azimutal en el fluido no perturbado por la presencia del vehículo.

b) Movimiento: El cuerpo presenta pequeños desplazamientos como sólido rígido o pequeñas deformaciones en sus modos flexibles, de forma que la derivada parcial $\partial R/\partial t \ll L/T \sim Q_\infty$, siendo L la longitud característica del vehículo en dirección del eje \tilde{x} y T un tiempo característico. De la ecuación (4.29) se desprende que:

$$V_r = V_{r,\infty} + v_r = \frac{\partial R}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial \tilde{\theta}} V_\theta - \frac{\partial R}{\partial \tilde{x}} U \ll Q_\infty \quad (4.31)$$

donde $V_{r,\infty} = -V_\infty \sin \theta + W_\infty \cos \theta$ es la velocidad radial del fluido no perturbado por la presencia del vehículo. Teniendo en cuenta que la condición de vuelo como cuerpo esbelto impone que $V_\infty \sim W_\infty \ll U_\infty \sim Q_\infty$, la velocidad de perturbación radial v_r sera también pequeña frente a Q_∞ , i.e.,

$$v_r \ll Q_\infty$$

Por el mismo motivo explicado en la condición de contorno sobre las aletas, la teoría de pequeñas perturbaciones exige pequeños cambios en dirección y magnitud sobre la velocidad del fluido incidente no perturbado. Teniendo en cuenta que, por la presencia de las aletas horizontal y vertical, se cumple $V_\infty \sim W_\infty \ll U_\infty$, entonces:

$$\text{de (4.30): } u \ll U_\infty$$

$$v_\theta \ll V_{\theta,\infty} = -V_\infty \cos \theta - W_\infty \sin \theta \ll U_\infty \quad (4.32)$$

$$\text{de (4.31): } v_r \ll V_{r,\infty} = -V_\infty \sin \theta + W_\infty \cos \theta \ll U_\infty$$

La ecuación anterior (4.14) se linealiza utilizando teoría de pequeñas perturbaciones en el potencial de velocidades. Dependiendo del sistema de referencia (*ejes viento* o *ejes cuerpo*), esta linealización resulta en diferentes ecuaciones que se desarrollan en los apartados siguientes.

4.5. Linealización de la Ecuación Diferencial del Potencial

4.5.1. Formulación en el Sistema de Ejes Viento

En el sistema de *ejes viento* el potencial total Ω se escribe como:

$$\Omega(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}; t) = U_\infty \tilde{x} + \Phi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}; t) \quad (4.33)$$

donde $\Phi_\infty(\tilde{x}) = U_\infty \tilde{x}$ es el potencial de velocidades del *flujo no perturbado* en el infinito y $\Phi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t)$ es el potencial de perturbación. La velocidad del fluido en un punto es el gradiente del potencial de velocidades, es decir, $\vec{V} = \nabla \Omega$:

$$\vec{V} = \nabla \Omega = \left(U_\infty + \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{x}}, \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{y}}, \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{z}} \right) \quad (4.34)$$

donde, por la teoría de pequeñas perturbaciones, se cumple las siguientes relaciones de órdenes de magnitud:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{x}}, \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{y}}, \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{z}} \ll U_\infty$$

Coordenadas Cartesianas

Sustituyendo la expresión del potencial $\Omega = U_\infty \tilde{x} + \Phi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ en la expresión de la velocidad el sonido (4.15) y la ecuación diferencial del potencial de velocidades (4.14):

$$a^2 = a_\infty^2 - (\gamma - 1) \left[\Phi'_t|_w + U_\infty \Phi'_x + \frac{1}{2} \left(\Phi'^2_x + \Phi'^2_y + \Phi'^2_z \right) \right] \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} a^2 (\Phi''_{\tilde{x}\tilde{x}} + \Phi''_{\tilde{y}\tilde{y}} + \Phi''_{\tilde{z}\tilde{z}}) &= \Phi''_{tt}|_w + 2U_\infty \Phi''_{xt}|_w + 2\Phi'_x \Phi''_{xt}|_w + 2\Phi'_y \Phi''_{yt}|_w + 2\Phi'_z \Phi''_{zt}|_w + \\ &+ (U_\infty + \Phi'_x)^2 \Phi''_{\tilde{x}\tilde{x}} + \Phi'^2_y \Phi''_{\tilde{y}\tilde{y}} + \Phi'^2_z \Phi''_{\tilde{z}\tilde{z}} + \\ &+ 2(U_\infty + \Phi'_x) \Phi'_y \Phi''_{\tilde{x}\tilde{y}} + 2(U_\infty + \Phi'_x) \Phi'_z \Phi''_{\tilde{x}\tilde{z}} + 2\Phi'_y \Phi'_z \Phi''_{\tilde{y}\tilde{z}} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Estas ecuaciones son no lineales, aunque pueden se pueden linealizar teniendo en cuenta los órdenes de magnitud de los diferentes términos que las componen y que se analizan a continuación.

Las velocidades de perturbación Φ'_x , Φ'_y y Φ'_z son del orden de τQ_∞ , donde τ es la relación de esbeltez del vehículo. Asumiendo que la presencia del vehículo perturba la corriente en un entorno de dimensión característica L , las derivadas parciales segundas son del orden de:

$$\Phi''_{\tilde{x}\tilde{x}}, \Phi''_{\tilde{x}\tilde{y}}, \Phi''_{\tilde{x}\tilde{z}}, \Phi''_{\tilde{y}\tilde{y}}, \Phi''_{\tilde{y}\tilde{z}}, \Phi''_{\tilde{z}\tilde{z}} = O\left(\frac{\tau Q_\infty}{L}\right) \quad (4.37)$$

Por último, las derivadas parciales que incluyen derivación respecto al tiempo serán del orden de:

$$\begin{aligned} \Phi'_t &= O\left(\frac{\tau Q_\infty L}{1/f}\right) = O(\tau Q_\infty L f) = O(\tau \chi Q_\infty^2) \\ \Phi''_{tt} &= O(\tau \chi Q_\infty^2 f) = O\left(\frac{\tau \chi^2 Q_\infty^3}{L}\right) \\ \Phi''_{\tilde{x}t}, \Phi''_{\tilde{y}t}, \Phi''_{\tilde{z}t} &= O(\tau Q_\infty f) = O\left(\frac{\tau \chi Q_\infty^2}{L}\right) \end{aligned} \quad (4.38)$$

siendo f una frecuencia característica de vibración del vehículo (ciclos por segundo) y $\chi = fL/Q_\infty$ un parámetro adimensional cuya interpretación física es el *número de ciclos de oscilación que ocurren en el tiempo en el que el vehículo vuela una distancia igual a su longitud L* . Sustituyendo (4.35) en (4.36) y reteniendo términos lineales teniendo en cuenta la valoración anterior de los órdenes de magnitud:

$$a_\infty^2 (\Phi''_{\tilde{x}\tilde{x}} + \Phi''_{\tilde{y}\tilde{y}} + \Phi''_{\tilde{z}\tilde{z}}) = \Phi''_{tt}|_w + 2U_\infty \Phi''_{xt}|_w + U_\infty^2 \Phi''_{\tilde{x}\tilde{x}} \quad (4.39)$$

Dividiendo por U_∞^2 y reordenando términos:

$$(1 - M_\infty^2) \Phi''_{\tilde{x}\tilde{x}} + \Phi''_{\tilde{y}\tilde{y}} + \Phi''_{\tilde{z}\tilde{z}} - \frac{1}{U_\infty^2} \Phi''_{tt}|_w - \frac{2}{U_\infty} \Phi''_{xt}|_w = 0 \quad (4.40)$$

que es la denominada *ecuación linealizada del potencial de velocidades* formulada en *ejes viento*.

Una vez linealizada la ecuación diferencial, el potencial total de perturbación $\Phi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t)$ se suele separar en la contribución del problema de espesor $\phi_0(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ (configuración rígida cuerpo/ala a ángulo de ataque y resbalamiento nulos) y la contribución $\phi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t)$ asociada a las pequeñas perturbaciones $w(x; t)$ respecto a la condición anterior, i.e.:

$$\Phi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t) = \phi_0(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) + \phi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t) \quad (4.41)$$

Sustituyendo la expresión (4.41) en la *ecuación linealizada del potencial total*, ecuación (4.40), y separando los términos ϕ_0 y ϕ , se obtienen las dos ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} (1 - M_\infty^2) \phi''_{0\tilde{x}\tilde{x}} + \phi''_{0\tilde{y}\tilde{y}} + \phi''_{0\tilde{z}\tilde{z}} &= 0 \\ (1 - M_\infty^2) \phi''_{\tilde{x}\tilde{x}} + \phi''_{\tilde{y}\tilde{y}} + \phi''_{\tilde{z}\tilde{z}} - \frac{1}{U_\infty^2} \phi''_{tt}|_w - \frac{2}{U_\infty} \phi''_{\tilde{x}t}|_w &= 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

Coordenadas Cilíndricas

En coordenadas cilíndricas y ejes viento, el potencial total Ω se escribe como:

$$\Omega(\tilde{x}, \tilde{r}, \tilde{\theta}; t) = U_\infty \tilde{x} + \Phi(\tilde{x}, \tilde{r}, \tilde{\theta}; t) \quad (4.43)$$

y los términos que intervienen en la expresión de la velocidad el sonido (4.15) y la ecuación diferencial del potencial de velocidades (4.14), calculados en estas coordenadas cilíndricas son:

1. Expresión del potencial de velocidades $\nabla\Omega$ y cuadrado del mismo $(\nabla\Omega)^2$:

$$\begin{aligned} \nabla\Omega &= \left(U_\infty + \frac{\partial\Phi}{\partial\tilde{x}}, \frac{\partial\Phi}{\partial\tilde{r}}, \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial\Phi}{\partial\tilde{\theta}} \right) \\ (\nabla\Omega)^2 &= U_\infty^2 + 2U_\infty \Phi'_{\tilde{x}} + \Phi'^2_{\tilde{x}} + \Phi'^2_{\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \Phi'^2_{\tilde{\theta}} \end{aligned} \quad (4.44)$$

2. Derivada segunda respecto al tiempo $(\partial^2\Omega/\partial t^2)|_w$:

$$\left. \frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2} \right|_w = \Phi''_{tt} \quad (4.45)$$

3. Término $\frac{1}{2}(\nabla\Omega \cdot \nabla)(\nabla\Omega)^2$:

$$\begin{aligned} \nabla\Omega \cdot \nabla &= (U_\infty + \Phi'_{\tilde{x}}) \frac{\partial}{\partial\tilde{x}} + \Phi'_{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \Phi'_{\tilde{\theta}} \frac{\partial}{\partial\tilde{\theta}} \\ \frac{1}{2}(\nabla\Omega \cdot \nabla)(\nabla\Omega)^2 &= \frac{1}{2} \left[(U_\infty + \Phi'_{\tilde{x}}) \left(2U_\infty \Phi''_{\tilde{x}\tilde{x}} + 2\Phi'_{\tilde{x}} \Phi''_{\tilde{x}\tilde{x}} + 2\Phi'_{\tilde{r}} \Phi''_{\tilde{x}\tilde{r}} + \frac{2}{\tilde{r}^2} \Phi'_{\tilde{\theta}} \Phi''_{\tilde{x}\tilde{\theta}} \right) + \right. \\ &\quad \Phi'_{\tilde{r}} \left(2U_\infty \Phi''_{\tilde{x}\tilde{r}} + 2\Phi'_{\tilde{x}} \Phi''_{\tilde{x}\tilde{r}} + 2\Phi'_{\tilde{r}} \Phi''_{\tilde{r}\tilde{r}} - \frac{2}{\tilde{r}^3} \Phi'^2_{\tilde{\theta}} + \frac{2}{\tilde{r}^2} \Phi'_{\tilde{\theta}} \Phi''_{\tilde{\theta}\tilde{r}} \right) + \\ &\quad \left. + \frac{1}{\tilde{r}^2} \Phi'_{\tilde{\theta}} \left(2U_\infty \Phi''_{\tilde{x}\tilde{\theta}} + 2\Phi'_{\tilde{x}} \Phi''_{\tilde{x}\tilde{\theta}} + 2\Phi'_{\tilde{r}} \Phi''_{\tilde{r}\tilde{\theta}} + \frac{2}{\tilde{r}^2} \Phi'_{\tilde{\theta}} \Phi''_{\tilde{\theta}\tilde{\theta}} \right) \right] \simeq U_\infty^2 \Phi''_{\tilde{x}\tilde{x}} \end{aligned} \quad (4.46)$$

donde se han retenido únicamente los términos lineales en el potencial de perturbación Φ .

4. Laplaciana del potencial $\Delta\Omega$:

$$\begin{aligned} \Delta\Omega &= \frac{1}{\tilde{r}} \left[\frac{\partial}{\partial\tilde{x}} \left(\tilde{r} \frac{\partial\Omega}{\partial\tilde{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial\tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial\Omega}{\partial\tilde{r}} \right) + \frac{\partial}{\partial\tilde{\theta}} \left(\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial\Omega}{\partial\tilde{\theta}} \right) \right] = \\ &= \Phi''_{\tilde{x}\tilde{x}} + \frac{1}{\tilde{r}} \Phi'_{\tilde{r}} + \Phi''_{\tilde{r}\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \Phi''_{\tilde{\theta}\tilde{\theta}} \end{aligned} \quad (4.47)$$

Por último, sustituyendo en la expresión del potencial y reteniendo únicamente términos lineales en el potencial de perturbación se obtiene la siguiente ecuación diferencial para el potencial Φ :

$$(1 - M_\infty^2) \Phi''_{\tilde{x}\tilde{x}} + \Phi''_{\tilde{\theta}\tilde{\theta}} + \Phi''_{\tilde{r}\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \Phi'_{\tilde{r}} - \frac{2}{U_\infty} \Phi''_{\tilde{x}t} \Big|_w - \frac{1}{U_\infty^2} \Phi''_{tt} \Big|_w = 0 \quad (4.48)$$

4.5.2. Formulación en el Sistema de Ejes Cuerpo

La formulación de la ecuación diferencial en *ejes cuerpo* presenta las siguientes ventajas:

1. La condición de contorno tiene una expresión más simple que en la formulación en *ejes viento*.
2. La condición de contorno se impone en la superficie exacta, mientras que en la formulación de *ejes viento* la condición de contorno se cumple en la superficie rígida no deformada $\hat{r} = R(\tilde{x})$

La ecuación diferencial determina el potencial de velocidades Ω es:

$$a^2 \Delta \Omega = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} \Big|_w + \frac{\partial (\nabla \Omega)^2}{\partial t} \Big|_w + \frac{1}{2} (\nabla \Omega \cdot \nabla) (\nabla \Omega)^2$$

donde el cuadrado de la velocidad del sonido a^2 se expresa como:

$$a^2 = a_\infty^2 - (\gamma - 1) \left[\frac{\partial \Omega}{\partial t} \Big|_w + \frac{(\nabla \Omega) \cdot U_\infty^2}{2} \right]$$

Estas ecuaciones se han desarrollado en un sistema de referencia *inercial* de *ejes viento*. Para expresarlas en otro sistema de referencia, en particular en el sistema de referencia *no inercial* de *ejes cuerpo*, es necesario determinar cómo se modifican los distintos términos:

- El gradiente del potencial $\nabla \Omega$ es la velocidad local del fluido. Dependiendo del sistema de referencia, sus coordenadas serán diferentes, pero el valor absoluto será el mismo. Por tanto, el término $(\nabla \Omega)^2$ es un *invariante* en un cambio de sistema de referencia, y será suficiente expresar este vector $\nabla \Omega$ en el sistema de referencia *ejes cuerpo* y calcular su valor absoluto al cuadrado.
- De la misma forma, el gradiente del campo escalar $(\nabla \Omega)^2$ multiplicado escalarmente por la velocidad $\nabla \Omega$ será independiente del sistema de coordenadas en el que se proyectan los vectores implicados. Por tanto, el término $\frac{1}{2} (\nabla \Omega \cdot \nabla) (\nabla \Omega)^2$ es otra magnitud *invariante* en un cambio de sistema de referencia, y será suficiente expresar estos vectores en el sistema de referencia de *ejes cuerpo* y realizar el producto escalar.
- Las derivadas respecto al tiempo en el *sistema inercial* de *ejes viento* (véase el subíndice w en la derivación $\partial/\partial t|_w$) requiere una derivación adicional para expresarlas en función de derivadas en el sistema de *ejes cuerpo*. Utilizando la *regla de la cadena* para la derivación de funciones compuestas se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_w = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_b + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_b + \left[\frac{\partial}{\partial (x, y, z)} \right] \cdot \left[\frac{\partial (x, y, z)}{\partial t} \right]$$

- Por último, se demuestra que el operador *laplaciana* es otro *invariante* acudiendo a su interpretación física. Según la ecuación de continuidad⁴:

$$\Delta \Omega = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \Omega \cdot \nabla \rho \right) = \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}$$

El término en el lado derecho de la ecuación anterior $\frac{1}{\rho} D\rho/Dt$ contiene la derivada sustancial de la densidad local ρ , es decir, la variación de la densidad en un volumen de control infinitesimal

⁴La igualdad $\frac{D\rho}{Dt} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \Omega \cdot \nabla \rho \right)$ es únicamente cierta con coordenadas cartesianas rectangulares.

que evoluciona con las *partículas fluidas*. Es obvio que esta magnitud instantánea no depende del sistema de referencia, por lo que la *laplaciana* del potencial resulta ser otro *invariante* y será independiente del sistema de referencia en el que se calcule.

Como resumen, los operadores diferenciales sobre el potencial de velocidades Ω representan términos *invariantes* ante cambios del sistema de referencia. Sin embargo, la derivada respecto al tiempo en el sistema de referencial *inercial* no permanece *invariante*.

Coordenadas cartesianas

Se linealizan las ecuaciones teniendo en cuenta que el potencial total Ω se puede escribir de la siguiente forma:

$$\Omega(x, y, z; t) = U_\infty \tilde{x} + \Phi(x, y, z; t) \quad (4.49)$$

siendo $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ coordenadas en *ejes viento* y (x, y, z) coordenadas en *ejes cuerpo*.

Las relaciones entre los sistemas de *ejes viento* y *ejes cuerpo* expresadas en las ecuaciones (4.12) pueden utilizarse para expresar el potencial total anterior (4.49) en función de coordenadas en *ejes cuerpo*:

$$\Omega(x, y, z, t) = U_\infty \left[x + z \frac{\partial w}{\partial x}(x, t) \right] + \Phi(x, y, z, t) \quad (4.50)$$

La expresión (4.50) se sustituye en la ecuación del potencial:

$$a^2 \Delta \Omega = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} \Big|_w + \frac{\partial (\nabla \Omega)^2}{\partial t} \Big|_w + \frac{1}{2} (\nabla \Omega \cdot \nabla) (\nabla \Omega)^2 \quad (4.51)$$

donde a es la velocidad local del sonido dada por:

$$a^2 = a_\infty^2 - (\gamma - 1) \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial t} \Big|_w + \frac{1}{2} [(\nabla \Omega)^2 - Q_\infty^2] \right\} \quad (4.52)$$

siendo $\vec{Q}_\infty = (U_\infty, 0, 0)$ la velocidad total del fluido en el infinito no perturbado por la presencia del cuerpo en *ejes viento* y a_∞ la velocidad del sonido también en el infinito. La velocidad en el infinito se escribe $\vec{Q}_\infty = (U_\infty, 0, 0)$ al elegir el eje x del sistema de *ejes viento* en la misma dirección y sentido que la corriente incidente.

Las expresiones del operador *gradiente* y el operador *laplaciana* en ejes cuerpo, $\nabla \Omega$ y $\Delta \Omega$ respectivamente, se obtiene mediante:

$$\begin{aligned} \nabla \Omega &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \Omega}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \Omega}{\partial z} \vec{e}_z \\ \Delta \Omega &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.53)$$

donde:

$$\begin{aligned} h_1^2 &= \left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} \right)^2 \\ h_2^2 &= \left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial y} \right)^2 \\ h_3^2 &= \left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{y}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.54)$$

son los denominados *factores de escala*. Sustituyendo las expresiones (4.12) de las coordenadas *ejes viento* $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ en función de coordenadas en *ejes cuerpo*, estos *factores de escala* quedan:

$$\begin{aligned} h_1^2 &= \left(1 + z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \simeq 1 + 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Rightarrow h_1 \simeq 1 + z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 1 + zw''_{xx} \\ h_2 &\simeq 1 \\ h_3^2 &= 1 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \Rightarrow h_3 \simeq 1 \end{aligned} \quad (4.55)$$

por lo que el gradiente del potencial total $\nabla\Omega$ en *ejes cuerpo* queda:

$$\begin{aligned} \nabla\Omega &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial\Omega}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{1}{h_2} \frac{\partial\Omega}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{1}{h_3} \frac{\partial\Omega}{\partial z} \vec{e}_z = \\ &= \frac{1}{1 + zw''_{xx}} \frac{\partial\Omega}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial\Omega}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial\Omega}{\partial z} \vec{e}_z \simeq (1 - zw''_{xx}) \frac{\partial\Omega}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial\Omega}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial\Omega}{\partial z} \vec{e}_z \end{aligned} \quad (4.56)$$

Sustituyendo la expresión del potencial total $\Omega = U_\infty (x + zw'_x) + \Phi$:

$$\begin{aligned} \nabla\Omega &\simeq (1 - zw''_{xx}) [U_\infty (1 + zw''_{xx}) + \Phi'_x] \vec{e}_x + \Phi'_y \vec{e}_y + (U_\infty w'_x + \Phi'_z) \vec{e}_z \simeq \\ &\simeq [U_\infty + (1 - zw''_{xx}) \Phi'_x] \vec{e}_x + \Phi'_y \vec{e}_y + (U_\infty w'_x + \Phi'_z) \vec{e}_z \end{aligned} \quad (4.57)$$

Otro término que es necesario calcular es el cuadrado del gradiente del potencial $(\nabla\Omega)^2$:

$$\begin{aligned} (\nabla\Omega)^2 &= U_\infty^2 + (1 - zw''_{xx})^2 \Phi_x'^2 + 2U_\infty (1 - zw''_{xx}) \Phi'_x + \Phi_y'^2 + U_\infty^2 w_x'^2 + \\ &\quad + \Phi_z'^2 + 2U_\infty w'_x \Phi'_z \simeq \\ &\simeq U_\infty^2 + 2U_\infty (1 - zw''_{xx}) \Phi'_x + 2U_\infty w'_x \Phi'_z \end{aligned} \quad (4.58)$$

Los otros términos se derivan de las expresiones anteriores, i.e.:

1. Término $\frac{1}{2} (\nabla\Omega \cdot \nabla) (\nabla\Omega)^2$

$$\begin{aligned} \nabla &= (1 - zw''_{xx}) \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \\ \nabla\Omega \cdot \nabla &= (1 - zw''_{xx}) [U_\infty + (1 - zw''_{xx}) \Phi'_x] \frac{\partial}{\partial x} + \Phi'_y \frac{\partial}{\partial y} + (U_\infty w'_x + \Phi'_z) \frac{\partial}{\partial z} \simeq \\ &\simeq [U_\infty (1 - zw''_{xx}) + (1 - 2zw''_{xx}) \Phi'_x] \frac{\partial}{\partial x} + \Phi'_y \frac{\partial}{\partial y} + (U_\infty w'_x + \Phi'_z) \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial (\nabla\Omega)^2}{\partial x} = -2U_\infty zw'''_{xxx} \Phi'_x + 2U_\infty (1 - zw''_{xx}) \Phi''_{xx} + 2U_\infty w''_{xx} \Phi'_z + 2U_\infty w'_x \Phi''_{xz}$$

$$\frac{\partial (\nabla\Omega)^2}{\partial y} = 2U_\infty (1 - zw''_{xx}) \Phi''_{xy} + 2U_\infty w'_x \Phi''_{yz}$$

$$\frac{\partial (\nabla\Omega)^2}{\partial z} = -2U_\infty w''_{xx} \Phi'_x + 2U_\infty (1 - zw''_{xx}) \Phi''_{xz} + 2U_\infty w'_x \Phi''_{zz}$$

por tanto

$$(\nabla\Omega \cdot \nabla) (\nabla\Omega)^2 \simeq -2U_\infty^2 zw'''_{xxx} \Phi'_x + 2U_\infty^2 (1 - 2zw''_{xx}) \Phi''_{xx} + 2U_\infty^2 w''_{xx} \Phi'_z + 2U_\infty^2 w'_x \Phi''_{xz} + 2U_\infty^2 w'_x \Phi''_{xz}$$

$$\frac{1}{2} (\nabla\Omega \cdot \nabla) (\nabla\Omega)^2 \simeq U_\infty^2 \Phi''_{xx} + 2U_\infty^2 w'_x \Phi''_{xz} + U_\infty^2 w''_{xx} (\Phi'_z - 2z\Phi''_{xx}) - U_\infty^2 zw'''_{xxx} \Phi'_x$$

2. Término $\left. \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} \right|_w$

La derivada respecto al tiempo del potencial en *ejes viento* se escribe:

$$\left. \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right|_w = \left. \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right|_b + \left[\frac{\partial \Omega}{\partial (x, y, z)} \right] \cdot \left[\frac{\partial (x, y, z)}{\partial t} \right]_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})=cte}$$

$$\begin{aligned} \Omega'_t|_b &= U_\infty z w''_{xt} + \Phi'_t \\ \Omega'_x &= U_\infty (1 + z w''_{xx}) + \Phi'_x & \left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})=cte} &= -z w'_{xt} \\ \Omega'_y &= \Phi'_y & \left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})=cte} &= 0 \\ \Omega'_z &= U_\infty w'_x + \Phi'_z & \left. \frac{\partial z}{\partial t} \right|_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})=cte} &= w'_t \end{aligned}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores se obtiene:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right|_w &= U_\infty z w''_{xt} + \Phi'_t - z w''_{xt} [U_\infty (1 + z w''_{xx}) + \Phi'_x] + w'_t (U_\infty w'_x + \Phi'_z) \simeq \\ &\simeq -z w'_{xt} \Phi'_x + w'_t \Phi'_z + \Phi'_t \end{aligned}$$

En el cálculo de la derivada segunda $\left. \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} \right|_w$ intervienen los siguientes términos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left. \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right|_w \right) &= -z w'''_{xxt} \Phi'_x + w''_{xt} \Phi'_z - z w''_{xt} \Phi''_{xx} + w'_t \Phi''_{xz} + \Phi''_{xt} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\left. \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right|_w \right) &= -w''_{xt} \Phi'_x - z w''_{xt} \Phi''_{xz} + w'_t \Phi''_{zz} + \Phi''_{zt} \\ \left. \frac{\partial}{\partial t} \left(\left. \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right|_w \right) \right|_b &= -z w'''_{xtt} \Phi'_x + w''_{tt} \Phi'_z - z w''_{xt} \Phi''_{xt} + w'_t \Phi''_{zt} + \Phi''_{tt} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\left. \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} \right|_w = -z w'''_{xtt} \Phi'_x + w''_{tt} \Phi'_z - 2z w''_{xt} \Phi''_{xt} + 2w'_t \Phi''_{zt} + \Phi''_{tt}$$

3. Término $\left. \frac{\partial (\nabla \Omega)^2}{\partial t} \right|_w$

$$\left. \frac{\partial (\nabla \Omega)^2}{\partial t} \right|_w = \left. \frac{\partial (\nabla \Omega)^2}{\partial t} \right|_b + \left[\frac{\partial (\nabla \Omega)^2}{\partial (x, y, z)} \right] \cdot \left[\frac{\partial (x, y, z)}{\partial t} \right]_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})=cte}$$

Teniendo en cuenta que:

$$(\nabla \Omega)^2 = U_\infty^2 + 2U_\infty (1 - z w''_{xx}) \Phi'_x + 2U_\infty w'_x \Phi'_z$$

los términos que interviene en la expresión anterior son:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial (\nabla \Omega)^2}{\partial t} \right|_b &= -2U_\infty z w'''_{xxt} \Phi'_x + 2U_\infty w''_{xt} \Phi'_z + 2U_\infty (1 - z w''_{xx}) \Phi''_{xt} + 2U_\infty w'_x \Phi''_{xz} \\ \frac{\partial (\nabla \Omega)^2}{\partial x} &= -2U_\infty z w'''_{xxx} \Phi'_x + 2U_\infty w''_{xx} \Phi'_z + 2U_\infty (1 - z w''_{xx}) \Phi''_{xx} + 2U_\infty w'_x \Phi''_{xz} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial (\nabla\Omega)^2}{\partial z} = -2U_\infty w''_{xx} \Phi'_x + 2U_\infty (1 - zw''_{xx}) \Phi''_{xz} + 2U_\infty w'_x \Phi''_{zz}$$

De esta forma, la derivada del cuadrado del gradiente $\partial (\nabla\Omega)^2 / \partial t \Big|_w$ queda:

$$\begin{aligned} \left. \frac{(\nabla\Omega)^2}{\partial t} \right|_w &= -2U_\infty zw'''_{xxt} \Phi'_x + 2U_\infty w'_{xt} \Phi'_z - 2U_\infty zw''_{xt} \Phi''_{xx} + 2U_\infty w'_t \Phi''_{xz} + \\ &+ 2U_\infty (1 - zw''_{xx}) \Phi''_{xt} + 2U_\infty w'_x \Phi''_{zt} \end{aligned}$$

4. Término $a^2 \Delta\Omega$:

$$\begin{aligned} \Delta\Omega &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial\Omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial\Omega}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial\Omega}{\partial z} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{1 + zw''_{xx}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{1 + zw''_{xx}} \frac{\partial\Omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((1 + zw''_{xx}) \frac{\partial\Omega}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left((1 + zw''_{xx}) \frac{\partial\Omega}{\partial z} \right) \right] \simeq \\ &\simeq (1 - 2zw''_{xx}) \Omega''_{xx} - zw'''_{xxx} \Omega'_x + \Omega''_{yy} + w''_{xx} \Omega'_z + \Omega''_{zz} \end{aligned}$$

Sustituyendo las derivadas parciales del potencial total Ω :

$$\begin{aligned} \Omega'_x &= U_\infty (1 + zw''_{xx}) + \Phi'_x \\ \Omega''_{xx} &= U_\infty zw'''_{xxx} + \Phi''_{xx} \\ \Omega''_{yy} &= \Phi''_{yy} \\ \Omega''_{zz} &= \Phi''_{zz} \end{aligned}$$

la laplaciana del potencial total $\Delta\Omega$ queda:

$$\begin{aligned} \Delta\Omega &\simeq U_\infty zw'''_{xxx} + \Phi''_{xx} - 2zw''_{xx} \Phi''_{xx} - zw'''_{xxx} (U_\infty + \Phi'_x) + w''_{xx} \Phi'_z + \\ &+ (1 + zw''_{xx}) \Phi''_{yy} + (1 + w''_{xx}) \Phi''_{zz} \simeq \\ &\simeq (1 - 2zw''_{xx}) \Phi''_{xx} + \Phi''_{yy} + \Phi''_{zz} + w''_{xx} \Phi'_z - zw'''_{xxx} \Phi'_x \end{aligned}$$

Por otro lado, la velocidad del sonido se puede escribir:

$$a^2 = a_\infty^2 + (\gamma - 1) \left\{ \left. \frac{\partial\Omega}{\partial t} \right|_w + \frac{1}{2} [(\nabla\Omega)^2 - Q_\infty^2] \right\}$$

donde

$$\begin{aligned} Q_\infty &= U_\infty \\ \frac{1}{2} [(\nabla\Omega)^2 - U_\infty^2] &= U_\infty (1 - zw''_{xx}) \Phi'_x + U_\infty w'_x \Phi'_z \\ \left. \frac{\partial\Omega}{\partial t} \right|_w &= \Phi'_t - zw''_{xt} \Phi'_x + w'_t \Phi'_z \end{aligned}$$

y, sustituyendo en la expresión anterior, se obtiene:

$$a^2 = a_\infty^2 - (\gamma - 1) \{ \Phi'_t + [U_\infty (1 - zw''_{xx}) - zw''_{xt}] \Phi'_x + (U_\infty w'_x + w'_t) \Phi'_z \}$$

de forma que el término $a^2 \Delta\Omega$ queda:

$$a^2 \Delta\Omega = a_\infty^2 \{ (1 - 2zw''_{xx}) \Phi''_{xx} + (1 + zw''_{xx}) \Phi''_{yy} + (1 + zw''_{xx}) \Phi''_{zz} + w''_{xx} \Phi'_z - zw'''_{xxx} \Phi'_x \}$$

Por tanto, los términos de la ecuación del potencial se escriben:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} \right|_w &= -zw'''_{xtt} \Phi'_x + w''_{tt} \Phi'_z - 2zw''_{xt} \Phi''_{xt} + 2w'_t \Phi''_{zt} + \Phi''_{tt} \\
 \left. \frac{\partial (\nabla \Omega)^2}{\partial t} \right|_w &= -2U_\infty zw'''_{xxt} \Phi'_x + 2U_\infty w''_{xt} \Phi'_z - 2U_\infty zw''_{xt} \Phi''_{xx} + 2U_\infty w'_t \Phi''_{xz} + \\
 &\quad + 2U_\infty (1 - zw''_{xx}) \Phi''_{xt} + 2U_\infty w'_x \Phi''_{zt} \\
 \frac{1}{2} (\nabla \Omega \cdot \nabla) (\nabla \Omega)^2 &= -U_\infty^2 zw'''_{xxx} \Phi'_x + U_\infty^2 w''_{xx} \Phi'_z + U_\infty^2 (1 - 2zw''_{xx}) \Phi''_{xx} + 2U_\infty^2 w'_x \Phi''_{xz} \\
 a^2 \Delta \Omega &= a_\infty^2 [-zw'''_{xxx} \Phi'_x + w''_{xx} \Phi'_z + (1 - 2zw''_{xx}) \Phi''_{xx} + \Phi''_{yy} + \Phi''_{zz}]
 \end{aligned}$$

de forma que la ecuación $a^2 \Delta \Omega = \left. \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} \right|_w + \left. \frac{\partial (\nabla \Omega)^2}{\partial t} \right|_w + \frac{1}{2} (\nabla \Omega \cdot \nabla) (\nabla \Omega)^2$ se puede formular en función del potencial de perturbación $\Phi(x, y, z; t)$:

$$(a_\infty^2 - U_\infty^2) \Phi''_{xx} + a_\infty^2 \Phi''_{yy} + a_\infty^2 \Phi''_{zz} - 2U_\infty \Phi''_{xt} - \Phi''_{tt} = G(x, y, z, w(x; t), \Phi(x, y, z; t), U_\infty, a_\infty)$$

donde:

$$\begin{aligned}
 G(x, y, z, w, \Phi, U_\infty, a_\infty) &= -z [w'''_{xtt} + 2U_\infty w'''_{xxt} + (U_\infty^2 - a_\infty^2) w'''_{xxx}] \Phi'_x + \\
 &\quad + [w''_{tt} + 2U_\infty w''_{xt} + (U_\infty^2 - a_\infty^2) w''_{xx}] \Phi'_z - \\
 &\quad - 2z [U_\infty w''_{xt} + (U_\infty^2 - a_\infty^2) w''_{xx}] \Phi''_{xx} + \\
 &\quad + 2U_\infty (w'_t + U_\infty w'_x) \Phi''_{xz} - \\
 &\quad - 2z (w''_{xt} + U_\infty w''_{xx}) \Phi''_{xt} + \\
 &\quad + 2 (w'_t + U_\infty w'_x) \Phi''_{zt}
 \end{aligned}$$

Coordenadas Cilíndricas

El sistema de *ejes viento* y las coordenadas cilíndricas en *ejes cuerpo* se relacionan a través de las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 \tilde{x} &= x + z = x + r \sin \theta \frac{\partial w}{\partial x}(x; t) \\
 \tilde{y} &= y = r \cos \theta \\
 \tilde{z} &= z - w(x; t) = r \sin \theta + w(x; t)
 \end{aligned}$$

Los factores de escala h_1 , h_2 y h_3 son:

$$\begin{aligned}
 h_1^2 &= \left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} \right)^2 = (1 + r \sin \theta w''_{xx})^2 + w_x'^2 \simeq 1 + 2r \sin \theta w''_{xx} \Rightarrow h_1 \simeq 1 + r \sin \theta w''_{xx} \\
 h_2^2 &= \left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{y}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial r} \right)^2 = \sin^2 \theta w_x'^2 + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \simeq 1 \Rightarrow h_2 \simeq 1 \\
 h_3^2 &= \left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial \theta} \right)^2 = r^2 \cos^2 \theta w_x'^2 + r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta \simeq r^2 \Rightarrow h_3 \simeq r
 \end{aligned}$$

El potencial total $\Omega(x, r, \theta; t)$ se escribe:

$$\Omega = U_\infty \tilde{x} + \Phi(x, r, \theta; t) = U_\infty \left(x + z \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \Phi(x, r, \theta; t) = U_\infty (x + r \sin \theta w'_x) + \Phi(x, r, \theta; t)$$

de forma que el gradiente $\nabla \Omega$ queda:

$$\begin{aligned} \nabla \Omega &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \vec{e}_\theta = \\ &= \frac{1}{1 + r \sin \theta w''_{xx}} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \Omega}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \simeq (1 - r \sin \theta w''_{xx}) \frac{\partial \Omega}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \Omega}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

Sustituyendo las expresiones de las derivadas del potencial total Ω en función del potencial de perturbación Φ , i.e.,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial x} &= U_\infty (1 + r \sin \theta w''_{xx}) + \Phi'_x \\ \frac{\partial \Omega}{\partial r} &= U_\infty \sin \theta w'_x + \Phi'_r \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} &= U_\infty r \cos \theta w'_x + \Phi'_\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \Omega &= (1 - r \sin \theta w''_{xx}) [U_\infty (1 + r \sin \theta w''_{xx}) + \Phi'_x] \vec{e}_x + (U_\infty \sin \theta w'_x + \Phi'_r) \vec{e}_r + \\ &+ \frac{1}{r} (U_\infty r \cos \theta w'_x + \Phi'_\theta) \vec{e}_\theta = \\ &= [U_\infty + (1 - r \sin \theta w''_{xx}) \Phi'_x] \vec{e}_x + (U_\infty \sin \theta w'_x + \Phi'_r) \vec{e}_r + \left(U_\infty \cos \theta w'_x + \frac{\Phi'_\theta}{r} \right) \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

El cuadrado del potencial $(\nabla \Omega)^2$, despreciando términos de segundo orden en la perturbación $w(x; t)$ y reteniendo términos lineales en Φ , queda:

$$(\nabla \Omega)^2 \simeq U_\infty^2 + 2U_\infty (1 - r \sin \theta w''_{xx}) \Phi'_x + 2U_\infty \sin \theta w'_x \Phi'_r + 2U_\infty \cos \theta w'_x \frac{\Phi'_\theta}{r}$$

1. Término $\frac{1}{2} (\nabla \Omega \cdot \nabla) (\nabla \Omega)^2$

$$\begin{aligned} \nabla &= (1 - r \sin \theta w''_{xx}) \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \\ \nabla \Omega \cdot \nabla &= (1 - r \sin \theta w''_{xx}) [U_\infty + (1 - r \sin \theta w''_{xx}) \Phi'_x] \frac{\partial}{\partial x} + (U_\infty \sin \theta w'_x + \Phi'_r) \frac{\partial}{\partial r} + \\ &+ \frac{1}{r} \left(U_\infty \cos \theta w'_x + \frac{\Phi'_\theta}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \simeq \\ &\simeq [U_\infty (1 - r \sin \theta w''_{xx}) + (1 - 2r \sin \theta w''_{xx}) \Phi'_x] \frac{\partial}{\partial x} (U_\infty \sin \theta w'_x + \Phi'_r) \frac{\partial}{\partial r} + \\ &+ \frac{1}{r} \left(U_\infty \cos \theta w'_x + \frac{\Phi'_\theta}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\nabla \Omega)^2}{\partial x} &= -2U_\infty r \sin \theta w'''_{xxx} \Phi'_x + 2U_\infty (1 - r \sin \theta w''_{xx}) \Phi''_{xx} + 2U_\infty \sin \theta w''_{xx} \Phi'_r + \\ &+ 2U_\infty \sin \theta w'_x \Phi''_{xr} + 2U_\infty \cos \theta w''_{xx} \frac{\Phi'_\theta}{r} + 2U_\infty \cos \theta w'_x \frac{\Phi''_{x\theta}}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial (\nabla\Omega)^2}{\partial r} &= -2U_\infty \sin\theta w''_{xx} \Phi'_x + 2U_\infty (1 - r \sin\theta w''_{xx}) \Phi''_{xr} + 2U_\infty \sin\theta w'_x \Phi''_{rr} - \\ &\quad - 2U_\infty \cos\theta w'_x \frac{\Phi'_\theta}{r^2} + 2U_\infty \cos\theta w'_x \frac{\Phi''_{r\theta}}{r}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial (\nabla\Omega)^2}{\partial \theta} &= -2U_\infty r \cos\theta w''_{xx} \Phi'_x + 2U_\infty (1 - r \sin\theta w''_{xx}) \Phi''_{x\theta} + 2U_\infty \cos\theta w'_x \Phi'_r + \\ &\quad + 2U_\infty \sin\theta w'_x \Phi''_{r\theta} - 2U_\infty \sin\theta w'_x \frac{\Phi'_\theta}{r} + 2U_\infty \cos\theta w'_x \frac{\Phi''_{\theta\theta}}{r}\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} (\nabla\Omega \cdot \nabla) (\nabla\Omega)^2 &= U_\infty^2 \Phi''_{xx} + 2U_\infty^2 w'_x \left(\sin\theta \Phi''_{xr} + \cos\theta \frac{\Phi''_{x\theta}}{r} \right) + \\ &\quad + U_\infty^2 w''_{xx} \left(\sin\theta \Phi'_r + \cos\theta \frac{\Phi'_\theta}{r} - 2r \sin\theta \Phi''_{xx} \right) - U_\infty^2 r \sin\theta w'''_{xxx} \Phi'_x\end{aligned}$$

2. Término $\left. \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} \right|_w$

La derivada primera respecto al tiempo en el sistema de *ejes viento* (sistema de referencia inercial) se escribe:

$$\left. \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right|_w = \left. \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right|_b + \left[\frac{\partial \Omega}{\partial (x, y, z)} \right] \cdot \left[\frac{\partial (x, y, z)}{\partial t} \right]_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= x + r \sin\theta w'_x \\ \tilde{y} &= r \cos\theta \\ \tilde{z} &= r \sin\theta - w\end{aligned}$$

las derivadas parciales de las coordenadas r y θ respecto al tiempo manteniendo las coordenadas en *ejes viento* $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ constantes se obtienen de las siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} \right|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} &= \frac{\partial r}{\partial t} \cos\theta - r \frac{\partial \theta}{\partial t} \sin\theta = 0 \\ \left. \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} \right|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} &= \frac{\partial r}{\partial t} \sin\theta + r \frac{\partial \theta}{\partial t} \cos\theta - w'_t = 0\end{aligned}$$

Despejando $\partial r/\partial t$ y $\partial \theta/\partial t$:

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial r}{\partial t} \right|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} &= \sin\theta w'_t \\ \left. \frac{\partial \theta}{\partial t} \right|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} &= \frac{1}{r} \cos\theta w'_t\end{aligned}$$

La derivada respecto al tiempo de la coordenada x se obtiene derivando la primera ecuación $\tilde{x} = x + r \sin\theta w'_x$:

$$\left. \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} \right|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} = \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial t} \sin\theta w'_x + r \frac{\partial \theta}{\partial t} \cos\theta w'_x + r \sin\theta w''_{xt} = 0$$

Sustituyendo $\partial r/\partial t$ y $\partial \theta/\partial t$ por sus expresiones y deprecando términos de orden superior a la deformación $w(x; t)$:

$$\left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \simeq -r \sin \theta w''_{xt}$$

Por otro lado, las derivadas del potencial total $\Omega(x, r, \theta; t) = U_\infty(x + r \sin \theta w'_x) + \Phi(x, r, \theta; t)$ respecto al tiempo y las coordenadas (x, y, z) en *ejes cuerpo* son:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right|_b &= U_\infty r \sin \theta w''_{xt} + \Phi'_t \\ \frac{\partial \Omega}{\partial x} &= U_\infty (1 + r \sin \theta w''_{xx}) + \Phi'_x \\ \frac{\partial \Omega}{\partial y} &= U_\infty \sin \theta w'_x + \Phi'_r \\ \frac{\partial \Omega}{\partial z} &= U_\infty r \cos \theta w'_x + \Phi'_\theta \end{aligned}$$

Sustituyendo todas las expresiones anteriores, la derivada respecto al tiempo del potencial total en el sistema inercial de *ejes viento* queda:

$$\left. \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right|_w = -r \sin \theta w''_{xt} \Phi'_x + w'_t \left(\sin \theta \Phi'_r + \cos \theta \frac{\Phi'_\theta}{r} \right) + \Phi'_t$$

La derivada segunda se calculará a partir de:

$$\left. \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} \right|_w = \left. \frac{\partial}{\partial t} \left(\left. \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right|_w \right) \right|_b + \left[\frac{\partial \left(\left. \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right|_w \right)}{\partial (x, r, \theta)} \right] \cdot \left[\frac{\partial (x, r, \theta)}{\partial t} \right]_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})=cte}$$

Las derivadas respecto a las coordenadas (x, r, θ) y el tiempo (en *ejes cuerpo*) son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left. \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right|_w \right) &= -r \sin \theta w'''_{xxt} \Phi'_x + w''_{xt} \left(\sin \theta \Phi'_r + \cos \theta \frac{\Phi'_\theta}{r} \right) - r \sin \theta w''_{xt} \Phi''_{xx} + \\ &\quad + w'_t \left(\sin \theta \Phi''_{xr} + \cos \theta \frac{\Phi''_{x\theta}}{r} \right) + \Phi''_{xt} \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\left. \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right|_w \right) &= -w'_t \cos \theta \frac{\Phi'_\theta}{r^2} - r \sin \theta w''_{xt} \Phi''_{xr} + w'_t \left(\sin \theta \Phi''_{rr} + \cos \theta \frac{\Phi''_{r\theta}}{r} \right) + \Phi''_{rt} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\left. \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right|_w \right) &= -r \cos \theta w''_{xt} \Phi'_x + w'_t \left(\cos \theta \Phi'_r - \sin \theta \frac{\Phi'_\theta}{r} \right) - r \sin \theta w''_{xt} \Phi''_{x\theta} + \\ &\quad + w'_t \left(\sin \theta \Phi''_{r\theta} + \cos \theta \frac{\Phi''_{\theta\theta}}{r} \right) + \Phi''_{\theta t} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\left. \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right|_w \right)_b &= -r \sin \theta w'''_{xtt} \Phi'_x - r \sin \theta w''_{xt} \Phi''_{xt} + w''_{tt} \left(\sin \theta \Phi'_r + \cos \theta \frac{\Phi'_\theta}{r} \right) + \\ &\quad + w'_t \left(\sin \theta \Phi''_{rt} + \cos \theta \frac{\Phi''_{\theta t}}{r} \right) + \Phi''_{tt} \end{aligned}$$

Las derivadas de las coordenadas (x, r, θ) respecto al tiempo son:

$$\left[\frac{\partial (x, r, \theta)}{\partial t} \right]_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})=cte} = \left\{ \begin{array}{l} -r \sin \theta w''_{xt} \\ \sin \theta w'_t \\ \cos \theta \frac{w'_t}{r} \end{array} \right\}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores se obtiene la derivada segunda del potencial total Ω :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} \right|_w &= -r \sin \theta w'''_{xtt} \Phi'_x + w''_{tt} \left(\sin \theta \Phi'_r + \cos \theta \frac{\Phi'_\theta}{r} \right) - 2r \sin \theta w''_{xt} \Phi''_{xt} + \\ &+ 2w'_t \left(\sin \theta \Phi''_{rt} + \cos \theta \frac{\Phi''_{\theta t}}{r} \right) + \Phi''_{tt} \end{aligned}$$

3. Término $\left. \frac{\partial (\nabla \Omega)^2}{\partial t} \right|_w$

La derivada del cuadrado del gradiente del potencial en *ejes viento* se puede escribir:

$$\left. \frac{\partial (\nabla \Omega)^2}{\partial t} \right|_w = \left. \frac{\partial (\nabla \Omega)^2}{\partial t} \right|_b + \left[\frac{\partial (\nabla \Omega)^2}{\partial (x, r, \theta)} \right] \cdot \left[\frac{\partial (x, r, \theta)}{\partial t} \right]_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte}$$

Las distintas derivadas parciales que intervienen en la expresión anterior se desarrollan a continuación:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial (\nabla \Omega)^2}{\partial t} \right|_b &= -2U_\infty r \sin \theta w'''_{xxt} \Phi'_x + 2U_\infty (1 - r \sin \theta w''_{xx}) \Phi''_{xt} + \\ &+ 2U_\infty w''_{xt} \left(\sin \theta \Phi'_r + \cos \theta \frac{\Phi'_\theta}{r} \right) + 2U_\infty w'_x \left(\sin \theta \Phi''_{rt} + \cos \theta \frac{\Phi''_{\theta t}}{r} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\nabla \Omega)^2}{\partial x} &= -2U_\infty r \sin \theta w'''_{xxx} \Phi'_x + 2U_\infty (1 - r \sin \theta w''_{xx}) \Phi''_{xx} + \\ &+ 2U_\infty w''_{xx} \left(\sin \theta \Phi'_r + \cos \theta \frac{\Phi'_\theta}{r} \right) + 2U_\infty w'_x \left(\sin \theta \Phi''_{xr} + \cos \theta \frac{\Phi''_{x\theta}}{r} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\nabla \Omega)^2}{\partial r} &= -2U_\infty \sin \theta w''_{xx} \Phi'_x + 2U_\infty (1 - r \sin \theta w''_{xx}) \Phi''_{xr} + \\ &+ 2U_\infty w'_x \left(\sin \theta \Phi''_{rr} + \cos \theta \frac{\Phi''_{r\theta}}{r} - \cos \theta \frac{\Phi'_\theta}{r^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\nabla \Omega)^2}{\partial r} &= -2U_\infty r \cos \theta w''_{xx} \Phi'_x + 2U_\infty (1 - r \sin \theta w''_{xx}) \Phi''_{x\theta} + \\ &+ 2U_\infty w'_x \left(\cos \theta \Phi'_r - \sin \theta \frac{\Phi'_\theta}{r} + \sin \theta \Phi''_{r\theta} + \cos \theta \frac{\Phi''_{\theta\theta}}{r} \right) \end{aligned}$$

$$\left[\frac{\partial (x, r, \theta)}{\partial t} \right]_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} = \left\{ \begin{array}{l} -r \sin \theta w''_{xt} \\ \sin \theta w'_t \\ \cos \theta \frac{w'_t}{r} \end{array} \right\}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación primera para la derivada $\left. \frac{\partial (\nabla \Omega)^2}{\partial t} \right|_w$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial (\nabla \Omega)^2}{\partial t} \right|_w &= 2U_\infty \Phi''_{xt} - 2U_\infty r \sin \theta w'''_{xxt} \Phi'_x + 2U_\infty w''_{xt} \left(\sin \theta \Phi'_r + \cos \theta \frac{\Phi'_\theta}{r} \right) - \\ &- 2U_\infty r \sin \theta w''_{xt} \Phi''_{xx} + 2U_\infty w'_t \left(\sin \theta \Phi''_{xr} + \cos \theta \frac{\Phi''_{x\theta}}{r} \right) - \\ &- 2U_\infty r \sin \theta w''_{xx} \Phi''_{xt} + 2U_\infty w'_x \left(\sin \theta \Phi''_{rt} + \cos \theta \frac{\Phi''_{\theta t}}{r} \right) \end{aligned}$$

4. Término $a^2 \Delta \Omega$

$$\begin{aligned}
 \Delta \Omega &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \right) \right] = \\
 &= \frac{1}{r(1+r \sin \theta w''_{xx})} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{r}{1+r \sin \theta w''_{xx}} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r(1+r \sin \theta w''_{xx}) \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1+r \sin \theta w''_{xx}}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \right) \right] \simeq \\
 &\simeq \frac{1-r \sin \theta w''_{xx}}{r} \left[-r^2 \sin \theta w'''_{xxx} \Omega'_x + r(1-r \sin \theta w''_{xx}) \Omega''_{xx} + (1+r \sin \theta w''_{xx}) \Omega'_r + \right. \\
 &\quad \left. + r \sin \theta w''_{xx} \Omega'_r + r(1+r \sin \theta w''_{xx}) \Omega''_{rr} + \cos \theta w''_{xx} \Omega'_\theta + \frac{1+r \sin \theta w''_{xx}}{r} \Omega''_{\theta\theta} \right]
 \end{aligned}$$

y, despreciando términos de orden superior a la perturbación $w(x; t)$:

$$\Delta \Omega \simeq -r \sin \theta w'''_{xxx} \Omega'_x + \frac{1+r \sin \theta w''_{xx}}{r} \Omega'_r + \cos \theta w''_{xx} \frac{1}{r} \Omega'_\theta + (1-2r \sin \theta w''_{xx}) \Omega''_{xx} + \Omega''_{rr} + \frac{1}{r^2} \Omega''_{\theta\theta}$$

Las derivadas del potencial total $\Omega = U_\infty(x + r \sin \theta w'_x) + \Phi(x, r, \theta; t)$ se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}
 \Omega'_x &= U_\infty(1+r \sin \theta w''_{xx}) + \Phi'_x \\
 \Omega'_r &= U_\infty \sin \theta w'_x + \Phi'_r \\
 \Omega'_\theta &= U_\infty r \cos \theta w'_x + \Phi'_\theta \\
 \Omega''_{xx} &= U_\infty r \sin \theta w'''_{xxx} + \Phi''_{xx} \\
 \Omega''_{rr} &= \Phi''_{rr} \\
 \Omega''_{\theta\theta} &= -U_\infty r \sin \theta w'_x + \Phi''_{\theta\theta}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la última expresión de la laplaciana del potencial $\Delta \Omega$:

$$\begin{aligned}
 \Delta \Omega &= -r \sin \theta w'''_{xxx} [U_\infty(1+r \sin \theta w''_{xx}) + \Phi'_x] + (1-2r \sin \theta w''_{xx}) (U_\infty r \sin \theta w'''_{xxx} + \Phi''_{xx}) + \\
 &\quad + \frac{1}{r} (U_\infty \sin \theta w'_x + \Phi'_r) + \sin \theta w''_{xx} (U_\infty \sin \theta w'_x + \Phi'_r) + \Phi''_{rr} + \\
 &\quad + \cos \theta w''_{xx} \frac{1}{r} (U_\infty r \cos \theta w'_x + \Phi'_\theta) + \frac{1}{r^2} (-U_\infty r \sin \theta w'_x + \Phi''_{\theta\theta}) \simeq \\
 &\simeq \Phi''_{xx} + \Phi''_{rr} + \frac{1}{r^2} \Phi''_{\theta\theta} + \frac{1}{r} \Phi'_r + w''_{xx} \left(\sin \theta \Phi'_r + \frac{1}{r} \cos \theta \Phi'_\theta - 2r \sin \theta \Phi''_{xx} \right) - r \sin \theta w'''_{xxx} \Phi'_x
 \end{aligned}$$

Por otro lado, la velocidad del sonido es:

$$a^2 = a_\infty^2 + (\gamma - 1) \left[\frac{\partial \Omega}{\partial t} \Big|_w + \frac{(\nabla \Omega)^2 - U_\infty^2}{2} \right]$$

donde:

$$(\nabla \Omega)^2 - U_\infty^2 \simeq 2U_\infty(1-r \sin \theta w''_{xx}) \Phi'_x + 2U_\infty w'_x \left(\sin \theta \Phi'_r + \cos \theta \frac{\Phi'_\theta}{r} \right)$$

$$\left. \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right|_w = U_\infty \Phi'_x + \Phi'_t - r \sin \theta (U_\infty w''_{xx} + w''_{xt}) \Phi'_x + (U_\infty w'_x + w'_t) \left(\sin \theta \Phi'_r + \cos \theta \frac{\Phi'_\theta}{r} \right)$$

por lo que la velocidad del sonido al cuadrado queda:

$$a^2 = a_\infty^2 + (\gamma - 1) \left[U_\infty \Phi'_x + \Phi'_t - r \sin \theta (U_\infty w''_{xx} + w''_{xt}) \Phi'_x + (U_\infty w'_x + w'_t) \left(\sin \theta \Phi'_r + \cos \theta \frac{\Phi'_\theta}{r} \right) \right]$$

Reteniendo términos lineales en el potencial de perturbación Φ el término $a^2 \Delta \Omega$ se puede escribir como $a_\infty^2 \Delta \Omega$.

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación del potencial total:

$$a^2 \Delta \Omega = \left. \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} \right|_w + \left. \frac{(\nabla \Omega)^2}{\partial t} \right|_w + \frac{1}{2} (\nabla \Omega \cdot \nabla) (\nabla \Omega)^2$$

se obtiene:

$$(a_\infty^2 - U_\infty^2) \Phi''_{xx} + a_\infty^2 \frac{\Phi''_r}{r} + a_\infty^2 \Phi''_{rr} + a_\infty^2 \frac{\Phi''_{\theta\theta}}{r^2} - 2U_\infty \Phi''_{xt} - \Phi''_{tt} = G(r, \theta, w(x; t), \Phi(x, r, \theta; t), U_\infty, a_\infty)$$

donde:

$$\begin{aligned} G(r, \theta, w, \Phi, U_\infty, a_\infty) = & -r \sin \theta [w'''_{xtt} + 2U_\infty w'''_{xxt} + (U_\infty^2 - a_\infty^2) w'''_{xxx}] \Phi'_x + \\ & + [w''_{tt} + 2U_\infty w''_{xt} + (U_\infty^2 - a_\infty^2) w''_{xx}] \left(\sin \theta \Phi'_r + \cos \theta \frac{\Phi'_\theta}{r} \right) - \\ & - 2r \sin \theta [U_\infty w''_{xt} + (U_\infty^2 - a_\infty^2) w''_{xx}] \Phi''_{xx} + \\ & + 2U_\infty (U_\infty w'_x + w'_t) \left(\sin \theta \Phi''_{xr} + \cos \theta \frac{\Phi''_{x\theta}}{r} \right) - \\ & - 2r \sin \theta (U_\infty w''_{xx} + w''_{xt}) \Phi''_{xt} + \\ & + 2 (U_\infty w'_x + w'_t) \left(\sin \theta \Phi''_{rt} + \cos \theta \frac{\Phi''_{\theta t}}{r} \right) \end{aligned}$$

Una consecuencia de la linealidad de la ecuación diferencial y su condición de contorno es la posibilidad de formular el potencial de perturbación $\Phi(x, r, \theta; t)$ como una combinación lineal de las siguientes dos soluciones $\phi_0(x, r, \theta)$ y $\phi(x, r, \theta; t)$, donde:

1. El potencial de perturbación $\phi_0(x, r, \theta)$ es la solución de la ecuación diferencial con $w(x; t) = 0$, que corresponde al problema estacionario de flujo axilsimétrico.
2. El potencial de perturbación $\phi(x, r, \theta; t)$ es la solución de la ecuación diferencial con $w(\tilde{x}; t) \neq 0$, que corresponde al problema estacionario (el desplazamiento $w(\tilde{x})$ no dependa de t) o no estacionario asociado al desplazamiento $w(\tilde{x}; t)$.

4.6. Condición de Contorno

4.6.1. Formulación en el Sistema de Ejes Viento

La condición de contorno se escribe:

$$\frac{DS}{Dt} = \left. \frac{\partial S}{\partial t} \right|_w + \nabla \Omega \cdot \nabla S = 0$$

donde $S(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}; t) = 0$ es la ecuación de la superficie del cuerpo o la(s) aleta(s).

Condición de contorno en la superficie del cuerpo

La expresión de la superficie del cuerpo se obtiene de la siguiente ecuación, que relaciona el radio del cuerpo $R(\tilde{x})$ y la deformación $w(\tilde{x}; t)$:

$$\begin{aligned} R(\tilde{x})^2 &= \tilde{r}^2 + w(\tilde{x}; t)^2 - 2\tilde{r}w(\tilde{x}, t) \cos\left(\tilde{\theta} + \frac{\pi}{2}\right) \simeq \tilde{r}^2 + 2\tilde{r}w(\tilde{x}, t) \sin\tilde{\theta} = \\ &= \tilde{r}^2 \left(1 + 2\frac{w(\tilde{x}; t)}{\tilde{r}} \sin\tilde{\theta}\right) \end{aligned}$$

Sacando la raíz cuadrada a ambos términos de la ecuación:

$$R(\tilde{x}) = \tilde{r} \sqrt{1 + 2\frac{w(\tilde{x}; t)}{\tilde{r}} \sin\tilde{\theta}} \simeq \tilde{r} \left(1 + \frac{w(\tilde{x}; t)}{\tilde{r}} \sin\tilde{\theta}\right) = \tilde{r} + w(\tilde{x}; t) \sin\tilde{\theta}$$

y, despejando \tilde{r} :

$$\tilde{r} = R(\tilde{x}) - w(\tilde{x}; t) \sin\tilde{\theta}$$

por lo que la ecuación de la superficie del cuerpo queda ⁵:

$$S(\tilde{x}, \tilde{r}, \tilde{\theta}; t) = \tilde{r} - R(\tilde{x}) + w(\tilde{x}; t) \sin\tilde{\theta} = 0$$

El gradiente de la superficie del cuerpo ∇S se escribe:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \tilde{x}} &= -\frac{dR}{d\tilde{x}}(\tilde{x}) + \frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}; t) \sin\tilde{\theta} = -R' + w'_x \sin\tilde{\theta} \\ \frac{\partial S}{\partial \tilde{r}} &= 1 \\ \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial S}{\partial \tilde{\theta}} &= \frac{w(\tilde{x}; t)}{\tilde{r}} \cos\tilde{\theta} = \frac{w}{\tilde{r}} \cos\tilde{\theta} \end{aligned}$$

mientras que la derivada respecto al tiempo $\partial S/\partial t|_w$ es:

$$\left. \frac{\partial S}{\partial t} \right|_w = \frac{\partial w}{\partial t}(\tilde{x}; t) \sin\tilde{\theta} = w'_t \sin\tilde{\theta}$$

El potencial total $\Omega(\tilde{x}, \tilde{r}, \tilde{\theta}; t)$ en ejes viento es:

$$\Omega(\tilde{x}, \tilde{r}, \tilde{\theta}; t) = U_\infty \tilde{x} + \Phi(\tilde{x}, \tilde{r}, \tilde{\theta}; t) = U_\infty \tilde{x} + \phi_0(\tilde{x}, \tilde{r}) + \phi(\tilde{x}, \tilde{r}, \tilde{\theta}; t)$$

donde ϕ_0 es el potencial asociado al problema de espesor, i.e., ángulos de ataque y resbalamiento nulos y sin deformación elástica⁶. Por otro lado, el potencial ϕ está asociado a pequeños desplazamientos (como sólido rígido y/o deformaciones elásticas) respecto a la dirección de vuelo \tilde{x} . El gradiente del potencial queda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{x}} &= U_\infty + \phi'_{0\tilde{x}} + \phi'_x \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{r}} &= \phi'_{0\tilde{r}} + \phi'_r \\ \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{\theta}} &= \frac{1}{\tilde{r}} \phi'_\theta \end{aligned}$$

⁵Esta ecuación implica implícitamente que $w(\tilde{x}; t) \ll R(\tilde{x})$.

⁶Al considerar que el potencial ϕ_0 depende sólo de \tilde{x} y \tilde{r} se está asumiendo configuración axilsimétrica respecto a la dirección de vuelo \tilde{x} .

y, sustituyendo en la ecuación de la condición de contorno $\partial S/\partial t|_w + \nabla\Omega \cdot \nabla S = 0$:

$$w'_t \sin \tilde{\theta} + \left(U_\infty + \phi'_{0\tilde{x}} + \phi'_{\tilde{x}}, \phi'_{0\tilde{r}} + \phi'_{\tilde{r}}, \frac{1}{\tilde{r}} \phi'_{\tilde{\theta}} \right) \cdot \left(-R' + w'_{\tilde{x}} \sin \tilde{\theta}, 1, \frac{w}{\tilde{r}} \cos \tilde{\theta} \right) = 0$$

ecuación que se debe cumplir en $r = R(\tilde{x}) - w(\tilde{x}, t) \sin \tilde{\theta}$.

Esta condición de contorno se linealiza despreciando términos del orden de la perturbación al cuadrado ($\sim w^2$) y haciendo que se cumpla en una superficie *no deformada* del cuerpo, i.e., $r = R(\tilde{x})$. Para ello es necesario expresar las derivadas del potencial ϕ_0 en la superficie *no deformada*:

$$\begin{aligned} \phi'_{0\tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{r}) &= \phi'_{0\tilde{x}}(\tilde{x}_0 + w'_{\tilde{x}}(\tilde{x}_0; t)\tilde{z}_0, R(\tilde{x}_0) - w(\tilde{x}_0, t) \sin \tilde{\theta}) \simeq \\ &\simeq \phi'_{0\tilde{x}}(\tilde{x}_0, R(\tilde{x}_0)) + \phi''_{0\tilde{x}\tilde{x}}(\tilde{x}_0, R(\tilde{x}_0))w'_{\tilde{x}}(\tilde{x}_0; t)\tilde{z}_0 - \phi''_{0\tilde{x}\tilde{r}}(\tilde{x}_0, R(\tilde{x}_0))w(\tilde{x}_0, t) \sin \tilde{\theta} \simeq \\ &\simeq \phi'_{0\tilde{x}}(\tilde{x}_0, R(\tilde{x}_0)) - \phi''_{0\tilde{x}\tilde{r}}(\tilde{x}_0, R(\tilde{x}_0))w(\tilde{x}_0, t) \sin \tilde{\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi'_{0\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{r}) &= \phi'_{0\tilde{r}}(\tilde{x}_0 + w'_{\tilde{x}}(\tilde{x}_0; t)\tilde{z}_0, R(\tilde{x}_0) - w(\tilde{x}_0, t) \sin \tilde{\theta}) \simeq \\ &\simeq \phi'_{0\tilde{r}}(\tilde{x}_0, R(\tilde{x}_0)) + \phi''_{0\tilde{x}\tilde{r}}(\tilde{x}_0, R(\tilde{x}_0))w'_{\tilde{x}}(\tilde{x}_0; t)\tilde{z}_0 - \phi''_{0\tilde{r}\tilde{r}}(\tilde{x}_0, R(\tilde{x}_0))w(\tilde{x}_0, t) \sin \tilde{\theta} \simeq \\ &\simeq \phi'_{0\tilde{r}}(\tilde{x}_0, R(\tilde{x}_0)) - \phi''_{0\tilde{r}\tilde{r}}(\tilde{x}_0, R(\tilde{x}_0))w(\tilde{x}_0, t) \sin \tilde{\theta} \end{aligned}$$

por lo que la condición de contorno queda expresada mediante las siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} -R'\phi'_{0\tilde{x}} + \phi'_{0\tilde{r}} &= U_\infty R', \text{ en } (\tilde{x}_0, R(\tilde{x}_0)) \\ -R'\phi'_{\tilde{x}} + \phi'_{\tilde{r}} &= -(U_\infty + \phi'_{0\tilde{x}})w'_{\tilde{x}} \sin \tilde{\theta} + (\phi''_{0\tilde{r}\tilde{r}} - R'\phi''_{0\tilde{x}\tilde{r}})w \sin \tilde{\theta} - w'_t \sin \tilde{\theta}, \text{ en } (\tilde{x}_0, R(\tilde{x}_0)) \end{aligned}$$

En el caso de configuraciones esbeltas, las derivadas según la dirección de vuelo \tilde{x} son mucho menores que las derivadas según la dirección transversal \tilde{r} , por lo que las ecuaciones anteriores se pueden simplificar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \phi'_{0\tilde{r}} &= U_\infty R', \text{ en la superficie no deformada } (\tilde{x}_0, R(\tilde{x}_0)) \\ \phi'_{\tilde{r}} &= (-U_\infty w'_{\tilde{x}} + w\phi''_{0\tilde{r}\tilde{r}} - w'_t) \sin \tilde{\theta}, \text{ en la superficie no deformada } (\tilde{x}_0, R(\tilde{x}_0)) \end{aligned}$$

Condición de contorno en la superficie de la(s) aleta(s)

La ecuación de la superficie de la aleta es:

$$S(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}; t) = \tilde{z} + w(\tilde{x}; t) = 0$$

y, por tanto, los términos asociados a la condición de contorno son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial t} \Big|_w &= w'_t \\ \nabla S &= (w'_{\tilde{x}}, 0, 1) \\ \nabla \Omega &= (U_\infty + \phi'_{0\tilde{x}} + \phi'_{\tilde{x}}, \phi'_{0\tilde{y}} + \phi'_{\tilde{y}}, \phi'_{0\tilde{z}} + \phi'_{\tilde{z}}) \end{aligned}$$

que queda:

$$w'_t + (U_\infty + \phi'_{0\tilde{x}} + \phi'_{\tilde{x}})w'_{\tilde{x}} + \phi'_{0\tilde{z}} + \phi'_{\tilde{z}} = 0, \text{ en } z = w(\tilde{x}; t)$$

Esta condición de contorno se formula en la superficie no deformada, i.e., $\tilde{z} = 0$. Para ello, se expresan las derivadas del potencial ϕ_0 en $z = w(\tilde{x}; t)$ en función de las derivadas en $\tilde{z} = 0$:

$$\begin{aligned} \phi'_{0\tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= \phi'_{0\tilde{x}}(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{z}_0 - w(\tilde{x}; t)) \simeq \phi'_{0\tilde{x}}(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, 0) - w(\tilde{x}_0; t)\phi''_{\tilde{x}\tilde{z}}(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, 0) \\ \phi'_{0\tilde{z}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= \phi'_{0\tilde{z}}(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{z}_0 - w(\tilde{x}; t)) \simeq \phi'_{0\tilde{z}}(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, 0) - w(\tilde{x}_0; t)\phi''_{\tilde{z}\tilde{z}}(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, 0) \end{aligned}$$

siendo $\tilde{x}_0 = \tilde{x}$, $\tilde{y}_0 = \tilde{y}$ y $\tilde{z}_0 = 0$ la ecuación de la superficie de la aleta *no deformada*. Sustituyendo en la condición de contorno:

$$w'_t + (U_\infty + \phi'_{0\tilde{x}} - w\phi''_{0\tilde{x}\tilde{z}} + \phi'_{\tilde{x}})w + \phi'_{0\tilde{z}} - w\phi''_{0\tilde{z}\tilde{z}} + \phi'_{\tilde{z}} = 0, \text{ en } (\tilde{x}, \tilde{y}, 0)$$

Separando el problema axilsimétrico estacionario con $w(\tilde{x}; t) = 0$ del problema de perturbación $w(\tilde{x}; t) \neq 0$:

$$\phi'_{0\tilde{z}} = 0, \text{ en la superficie } \textit{no deformada} (\tilde{x}, \tilde{y}, 0)$$

$$\phi'_{\tilde{z}} = - (U_\infty + \phi'_{0\tilde{x}})w'_x + w\phi''_{0\tilde{z}\tilde{z}} - w'_t, \text{ en la superficie } \textit{no deformada} (\tilde{x}, \tilde{y}, 0)$$

4.6.2. Formulación en el Sistema de Ejes Cuerpo

Como ya se formuló anteriormente, la condición de contorno en una superficie impermeable es:

$$\frac{DS}{Dt} = \frac{\partial S}{\partial t} \Big|_w + \nabla\Omega \cdot \nabla S = 0$$

El término $\nabla\Omega \cdot \nabla S$ se puede formular en cualquier sistema de referencia, en particular en el sistema de *ejes cuerpo*. La derivada parcial respecto al tiempo en *ejes viento* se puede escribir en función de derivadas en el sistema de referencia *ejes cuerpo*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} \Big|_w &= \frac{\partial S}{\partial t} \Big|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} = \frac{\partial S}{\partial t} \Big|_{(x, y, z)=cte} + \left[\frac{\partial S}{\partial(x, y, z)} \right] \left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial t} \right]_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} = \\ &= \frac{\partial S}{\partial t} \Big|_b + \left[\frac{\partial S}{\partial(x, y, z)} \right] \left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial t} \right]_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} \end{aligned}$$

donde $\partial S/\partial t|_b = 0$ ya que la superficie del vehículo cumple $S \equiv 0$ cuando las coordenadas del punto $(x, y, z) = cte$. Por tanto, la condición de contorno queda:

$$\left(\left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial t} \right]_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} + \nabla\Omega \right) \cdot \nabla S = 0$$

A continuación se comprobará el significado físico del término $[\partial(x, y, z)/\partial t]_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte}$. Para ello se derivan respecto al tiempo en *ejes viento* (manteniendo $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = cte$) las relaciones entre las coordenadas *ejes viento* $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ y las coordenadas *ejes cuerpo* (x, y, z) , i.e.,

$$\tilde{x} = \tilde{x}(x, y, z; t)$$

$$\tilde{y} = \tilde{y}(x, y, z; t)$$

$$\tilde{z} = \tilde{z}(x, y, z; t)$$

y sus derivadas respecto al tiempo en *ejes viento* (aplicando la regla de la cadena en la derivación) son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} \Big|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} &= 0 = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} \Big|_{(x, y, z)=cte} + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} \Big|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} \\ \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} \Big|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} &= 0 = \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} \Big|_{(x, y, z)=cte} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} \Big|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} \\ \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} \Big|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} &= 0 = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} \Big|_{(x, y, z)=cte} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} \Big|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} \end{aligned}$$

En forma matricial:

$$\left[\frac{\partial(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}{\partial t} \right]_{(x,y,z)=cte} = - \left[\frac{\partial(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}{\partial(x, y, z)} \right] \left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial t} \right]_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte}$$

y despejando el término $[\partial(x, y, z)/\partial t]_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte}$:

$$\left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial t} \right]_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} = - \left[\frac{\partial(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}{\partial(x, y, z)} \right]^{-1} \left[\frac{\partial(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}{\partial t} \right]_{(x,y,z)=cte}$$

En un instante de tiempo t_0 , la relación entre las componentes de un vector en el sistema de *ejes vientos* y el sistema de *ejes cuerpo* se obtiene derivando las siguientes relaciones:

$$\tilde{x} = \tilde{x}(x, y, z; t_0)$$

$$\tilde{y} = \tilde{y}(x, y, z; t_0)$$

$$\tilde{z} = \tilde{z}(x, y, z; t_0)$$

es decir:

$$\begin{aligned} d\tilde{x} &= \frac{\partial\tilde{x}}{\partial x} dx + \frac{\partial\tilde{x}}{\partial y} dy + \frac{\partial\tilde{x}}{\partial z} dz \\ d\tilde{y} &= \frac{\partial\tilde{y}}{\partial x} dx + \frac{\partial\tilde{y}}{\partial y} dy + \frac{\partial\tilde{y}}{\partial z} dz \\ d\tilde{z} &= \frac{\partial\tilde{z}}{\partial x} dx + \frac{\partial\tilde{z}}{\partial y} dy + \frac{\partial\tilde{z}}{\partial z} dz \end{aligned}$$

o, en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} d\tilde{x} \\ d\tilde{y} \\ d\tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \partial(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ \partial(x, y, z) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

donde $[\partial(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})/\partial(x, y, z)]$ es la matriz de cambio de coordenadas de *ejes cuerpo* a *ejes viento*. Derivando las relaciones equivalentes:

$$x = x(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}; t_0)$$

$$y = y(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}; t_0)$$

$$z = z(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}; t_0)$$

se obtiene una ecuación similar a la anterior, en este caso expresando las coordenadas en *ejes cuerpo* en función de las coordenadas en *ejes viento*:

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \partial(x, y, z) \\ \partial(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d\tilde{x} \\ d\tilde{y} \\ d\tilde{z} \end{pmatrix}$$

De estas dos ecuaciones relacionando las coordenadas en *ejes cuerpo* y *ejes viento* se obtiene la siguiente relación entre las matrices de transformación de coordenadas:

$$\begin{bmatrix} \partial(x, y, z) \\ \partial(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ \partial(x, y, z) \end{bmatrix}^{-1}$$

Volviendo a la relación:

$$\left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial t} \right]_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} = - \left[\frac{\partial(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}{\partial(x, y, z)} \right]^{-1} \left[\frac{\partial(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}{\partial t} \right]_{(x, y, z)=cte}$$

ahora se puede establecer el significado físico de cada uno de los términos, que es:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}{\partial t} \right]_{(x, y, z)=cte} &= \text{Componentes en } \textit{ejes viento} \text{ de la velocidad de} &= \vec{V}_{S,w} \\ &\text{la superficie} \\ \left[\frac{\partial(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}{\partial(x, y, z)} \right]^{-1} &= \text{Matriz de transformación de coordenadas de} &= T_{bw} \\ &\textit{ejes viento a ejes cuerpo} \end{aligned}$$

y, por tanto, el término $[\partial(x, y, z)/\partial t]_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte}$ es la velocidad de la superficie del vehículo cambiada de signo y expresada en *ejes cuerpo*, i.e.:

$$\left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial t} \right]_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} = -T_{bw} \vec{V}_{S,w} = -\vec{V}_{S,b}$$

Como resultado de lo anterior, la condición de contorno se puede escribir de la siguiente forma más compacta:

$$\left(\nabla \Omega - \vec{V}_{S,b} \right) \cdot \nabla S = 0$$

A continuación se pasa a desarrollar la ecuación anterior para el estado de deformación $w(\tilde{x}; t)$. Las coordenadas en *ejes viento* de los puntos (x, y, z) situados en la superficie de la configuración son:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x + z \frac{\partial w}{\partial x}(x; t) = x + z w'_x(x; t) \\ \tilde{y} &= y \\ \tilde{z} &= z - w(x; t) \end{aligned}$$

y, por tanto, los términos que intervienen en la condición de contorno son:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} \right|_{(x, y, z)=cte} &= z w''_{xx} ; & \left. \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} \right|_{(x, y, z)=cte} &= 0 ; & \left. \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} \right|_{(x, y, z)=cte} &= -w'_t \\ \left[\frac{\partial(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}{\partial(x, y, z)} \right] &= \begin{bmatrix} 1 + z w''_{xx} & 0 & w'_x \\ 0 & 1 & 0 \\ -w'_x & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \left[\frac{\partial(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}{\partial(x, y, z)} \right]^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{1 + z w''_{xx} + w'^2_x} & 0 & \frac{-w'_x}{1 + z w''_{xx} + w'^2_x} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{w'_x}{1 + z w''_{xx} + w'^2_x} & 0 & \frac{1 + z w''_{xx}}{1 + z w''_{xx} + w'^2_x} \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 - z w''_{xx} & 0 & -w'_x \\ 0 & 1 & 0 \\ w'_x & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial t} \right]_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} &= -\vec{V}_{S,b} = - \begin{bmatrix} 1 - z w''_{xx} & 0 & -w'_x \\ 0 & 1 & 0 \\ w'_x & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z w''_{xt} \\ 0 \\ -w'_t \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} -z w''_{xt} \\ 0 \\ w'_t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El gradiente del potencial $\nabla\Omega$ se escribe:

$$\begin{aligned}\nabla\Omega &= [U_\infty + (1 - zw''_{xx})\Phi'_x] \vec{e}_x + \Phi'_y \vec{e}_y + (U_\infty w'_x + \Phi'_z) \vec{e}_z = \\ &= [U_\infty + (1 - zw''_{xx})(\phi'_{0x} + \phi'_x)] \vec{e}_x + (\phi'_{0y} + \phi'_y) \vec{e}_y + (U_\infty w'_x + \phi'_{0z} + \phi'_z) \vec{e}_z \simeq \\ &\simeq [U_\infty + (1 - zw''_{xx})\phi'_{0x} + \phi'_x] \vec{e}_x + (\phi'_{0y} + \phi'_y) \vec{e}_y + (U_\infty w'_x + \phi'_{0z} + \phi'_z) \vec{e}_z\end{aligned}$$

mientras que el gradiente de la superficie es:

$$\nabla S = (1 - zw''_{xx}) \frac{\partial S}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial S}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial S}{\partial z} \vec{e}_z = (1 - zw''_{xx}) S'_x \vec{e}_x + S'_y \vec{e}_y + S'_z \vec{e}_z$$

Por tanto, la condición de contorno queda:

$$\begin{aligned}(-\vec{V}_{S,b} + \nabla\Omega) \cdot \nabla S &= [U_\infty + (1 - zw''_{xx})\phi'_{0x} + \phi'_x - zw''_{xt}] (1 - zw''_{xx}) S'_x + \\ &+ (\phi'_{0y} + \phi'_y) S'_y + (U_\infty w'_x + \phi'_{0z} + \phi'_z + w'_t) S'_z \simeq \\ &\simeq U_\infty (1 - zw''_{xx}) S'_x + (1 - 2zw''_{xx}) \phi'_{0x} S'_x + (\phi'_x - zw''_{xt}) S'_x + \\ &+ \phi'_{0y} S'_y + \phi'_y S'_y + (U_\infty w'_x + \phi'_{0z} + \phi'_z + w'_t) S'_z = 0\end{aligned}$$

Separando el problema *axilsimétrico estacionario* con $w(x; t) = 0$ del problema *no estacionario* con $w(x; t) \neq 0$ se obtienen las siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{aligned}\phi'_{0x} S'_x + \phi'_{0y} S'_y + \phi'_{0z} S'_z &= -U_\infty S'_x \\ \phi'_x S'_x + \phi'_y S'_y + \phi'_z S'_z &= z [(U_\infty + 2\phi'_{0x}) w''_{xx} + w''_{xt}] S'_x - (U_\infty w'_x + w'_t) S'_z\end{aligned}$$

Estas dos ecuaciones son válidas para toda la superficie del vehículo, aunque la ecuación de la superficie $S(x, y, z) = 0$ será diferente para el cuerpo y las aletas.

4.7. Coeficiente de Presiones

4.7.1. Formulación en el Sistema de Ejes Viento

Coordenadas Cartesianas

En el sistema de *ejes viento* y coordenadas cartesianas, la expresión del potencial total de velocidades es la siguiente:

$$\Omega(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}; t) = U_\infty \tilde{x} + \Phi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}; t) = U_\infty \tilde{x} + \phi_0(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) + \phi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}; t) \quad (4.59)$$

de forma que la velocidad total del fluido \vec{V} se escribe:

$$\vec{V} = \nabla\Omega = \frac{\partial\Omega}{\partial\tilde{x}} \vec{i} + \frac{\partial\Omega}{\partial\tilde{y}} \vec{j} + \frac{\partial\Omega}{\partial\tilde{z}} \vec{k} = (U_\infty + \Phi'_x) \vec{i} + \Phi'_y \vec{j} + \Phi'_z \vec{k} \quad (4.60)$$

Se distinguen los siguientes dos problemas:

1. Problema de espesor estacionario ($w(\tilde{x}; t) = 0$):

$$\begin{aligned}\Phi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}; t) &= \phi_0(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ (\nabla\Omega)^2 - U_\infty^2 &= 2U_\infty \phi'_{0\tilde{x}} + \phi'_{0\tilde{x}}{}^2 + \phi'_{0\tilde{y}}{}^2 + \phi'_{0\tilde{z}}{}^2 \\ \frac{\partial\Omega}{\partial t} \Big|_w &= 0\end{aligned} \quad (4.61)$$

El coeficiente de presiones queda:

$$\begin{aligned}
 C_{p0} &= \frac{\left[1 - \frac{\gamma-1}{a_\infty^2} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} \Big|_w + \frac{(\nabla \Omega)^2 - U_\infty^2}{2} \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1}{\frac{1}{2} \gamma M_\infty^2} = \\
 &= \frac{\left[1 - \frac{\gamma-1}{2a_\infty^2} \left(2U_\infty \phi'_{0\tilde{x}} + \phi'_{0\tilde{x}}{}^2 + \phi'_{0\tilde{y}}{}^2 + \phi'_{0\tilde{z}}{}^2 \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1}{\frac{1}{2} \gamma M_\infty^2} = \frac{\left[1 - \frac{\gamma-1}{2a_\infty^2} F_0 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1}{\frac{1}{2} \gamma M_\infty^2}
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

donde $F_0 = 2U_\infty \phi'_{0\tilde{x}} + \phi'_{0\tilde{x}}{}^2 + \phi'_{0\tilde{y}}{}^2 + \phi'_{0\tilde{z}}{}^2$

2. Problema completo, i.e., $w(\tilde{x}; t) \neq 0$:

En este caso, el potencial total queda:

$$\Omega(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}; t) = U_\infty \tilde{x} + \phi_0(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) + \phi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}; t) \tag{4.63}$$

y su gradiente se escribe:

$$\begin{aligned}
 \nabla \Omega &= (U_\infty + \phi'_{0\tilde{x}} + \phi'_{\tilde{x}}) \vec{i} + (\phi'_{0\tilde{y}} + \phi'_{\tilde{y}}) \vec{j} + (\phi'_{0\tilde{z}} + \phi'_{\tilde{z}}) \vec{k} \\
 (\nabla \Omega)^2 - U_\infty^2 &\simeq 2U_\infty \phi'_{0\tilde{x}} + \phi'_{0\tilde{x}}{}^2 + \phi'_{0\tilde{y}}{}^2 + \phi'_{0\tilde{z}}{}^2 + 2U_\infty \phi'_{\tilde{x}} + 2(\phi'_{0\tilde{x}} \phi'_{\tilde{x}} + \phi'_{0\tilde{y}} \phi'_{\tilde{y}} + \phi'_{0\tilde{z}} \phi'_{\tilde{z}}) \\
 \frac{\partial \Omega}{\partial t} \Big|_w &= \phi'_t
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

Al igual que la condición de contorno, el coeficiente de presiones se evalúa sobre la *superficie no deformada* $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{z}_0)$. Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned}
 \tilde{x} &= \tilde{x}_0 \\
 \tilde{y} &= \tilde{y}_0 \\
 \tilde{z} &= \tilde{z}_0 - w(\tilde{x}; t)
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

las derivadas de los potenciales se pueden desarrollar en serie y, quedándose con términos de primer orden se escriben:

$$\begin{aligned}
 \phi'_{0\tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= \phi'_{0\tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}_0) - w(\tilde{x}; t) \phi''_{0\tilde{x}\tilde{z}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}_0) \\
 \phi'_{0\tilde{y}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= \phi'_{0\tilde{y}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}_0) - w(\tilde{x}; t) \phi''_{0\tilde{y}\tilde{z}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}_0) \\
 \phi'_{0\tilde{z}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= \phi'_{0\tilde{z}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}_0) - w(\tilde{x}; t) \phi''_{0\tilde{z}\tilde{z}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}_0)
 \end{aligned} \tag{4.66}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Omega}{\partial t} \Big|_w + \frac{(\nabla \Omega)^2 - U_\infty^2}{2} &\simeq \phi'_t + \frac{1}{2} \left(2U_\infty \phi'_{0\tilde{x}} + \phi'_{0\tilde{x}}{}^2 + \phi'_{0\tilde{y}}{}^2 + \phi'_{0\tilde{z}}{}^2 \right) + \\
 &+ U_\infty \phi'_{\tilde{x}} + \phi'_{0\tilde{x}} \phi'_{\tilde{x}} + \phi'_{0\tilde{y}} \phi'_{\tilde{y}} + \phi'_{0\tilde{z}} \phi'_{\tilde{z}} - \\
 &- w \left(U_\infty \phi''_{0\tilde{x}\tilde{z}} + \phi'_{0\tilde{x}} \phi''_{0\tilde{x}\tilde{z}} + \phi'_{0\tilde{y}} \phi''_{0\tilde{y}\tilde{z}} + \phi'_{0\tilde{z}} \phi''_{0\tilde{z}\tilde{z}} \right) = \frac{1}{2} \tilde{F}_0 + \Delta \tilde{F}
 \end{aligned} \tag{4.67}$$

Finalmente, el coeficiente de presiones queda:

$$\begin{aligned}
 C_p &= \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left\{ \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{1}{2} \tilde{F}_0 + \Delta \tilde{F} \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right\} = \\
 &= C_{p0} - \frac{2}{U_\infty^2} \left(1 - \frac{\gamma-1}{2a_\infty^2} \tilde{F}_0 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \Delta \tilde{F} = C_{p0} + \Delta C_p
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

siendo:

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}_0 &= 2U_\infty \phi'_{0\tilde{x}} + \phi'_{0\tilde{x}}{}^2 + \phi'_{0\tilde{y}}{}^2 + \phi'_{0\tilde{z}}{}^2, \text{ en } (\tilde{x}, \tilde{x}, \tilde{z}_0) \\
 \Delta \tilde{F} &= (U_\infty + \phi'_{0\tilde{x}}) \phi'_{\tilde{x}} + \phi'_{0\tilde{y}} \phi'_{\tilde{y}} + \phi'_{0\tilde{z}} \phi'_{\tilde{z}} - w [(U_\infty + \phi'_{0\tilde{x}}) \phi''_{0\tilde{x}\tilde{z}} + \phi'_{0\tilde{y}} \phi''_{0\tilde{y}\tilde{z}} + \phi'_{0\tilde{z}} \phi''_{0\tilde{z}\tilde{z}}], \text{ en } (\tilde{x}, \tilde{x}, \tilde{z}_0)
 \end{aligned} \tag{4.69}$$

Coordenadas Cilíndricas

El potencial se formula de la siguiente forma:

$$\Omega(\tilde{x}, \tilde{r}, \tilde{\theta}; t) = U_\infty \tilde{x} + \Phi(\tilde{x}, \tilde{r}, \tilde{\theta}; t) = U_\infty + \phi_0(\tilde{x}, \tilde{r}) + \phi(\tilde{x}, \tilde{r}, \tilde{\theta}; t)$$

de forma que su gradiente queda:

$$\nabla \Omega = \frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{x}} \vec{e}_{\tilde{x}} + \frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{r}} \vec{e}_{\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{\theta}} \vec{e}_{\tilde{\theta}} = (U_\infty + \Phi'_{\tilde{x}}) \vec{e}_{\tilde{x}} + \Phi'_{\tilde{r}} \vec{e}_{\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \Phi'_{\tilde{\theta}} \vec{e}_{\tilde{\theta}}$$

1. Problema de espesor axilimétrico estacionario con $w(\tilde{x}; t) = 0$:

$$\begin{aligned}
 \Phi(\tilde{x}, \tilde{r}, \tilde{\theta}; t) &= \phi_0(\tilde{x}, \tilde{r}) \\
 (\nabla \Omega)^2 - U_\infty^2 &= 2U_\infty \phi'_{0\tilde{x}} + \phi'_{0\tilde{x}}{}^2 + \phi'_{0\tilde{r}}{}^2 \\
 \frac{\partial \Omega}{\partial t} \Big|_w &= 0
 \end{aligned}$$

El coeficiente de presiones queda:

$$\begin{aligned}
 C_{p0} &= \frac{\left[1 - \frac{\gamma-1}{a_\infty^2} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} \Big|_w + \frac{(\nabla \Omega)^2 - U_\infty^2}{2} \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1}{\frac{1}{2} \gamma M_\infty^2} = \\
 &= \frac{\left[1 - \frac{\gamma-1}{2a_\infty^2} (2U_\infty \phi'_{0\tilde{x}} + \phi'_{0\tilde{x}}{}^2 + \phi'_{0\tilde{r}}{}^2) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1}{\frac{1}{2} \gamma M_\infty^2} = \frac{\left[1 - \frac{\gamma-1}{2a_\infty^2} F_0 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1}{\frac{1}{2} \gamma M_\infty^2}
 \end{aligned}$$

donde $F_0 = 2U_\infty \phi'_{0\tilde{x}} + \phi'_{0\tilde{x}}{}^2 + \phi'_{0\tilde{r}}{}^2$.

2. Problema completo, i.e., $w(\tilde{x}; t) \neq 0$

En este caso, el potencial total queda:

$$\Omega(\tilde{x}, \tilde{r}, \tilde{\theta}; t) = U_\infty \tilde{x} + \phi_0(\tilde{x}, \tilde{r}) + \phi(\tilde{x}, \tilde{r}, \tilde{\theta}; t)$$

y su gradiente se escribe:

$$\begin{aligned}\nabla\Omega &= (U_\infty + \phi'_{0\tilde{x}} + \phi'_{\tilde{x}})\vec{e}_{\tilde{x}} + (\phi'_{0\tilde{r}} + \phi'_{\tilde{r}})\vec{e}_{\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}}\phi'_{\tilde{\theta}}\vec{e}_{\tilde{\theta}} \\ (\nabla\Omega)^2 - U_\infty^2 &= 2U_\infty\phi'_{0\tilde{x}} + \phi'_{0\tilde{x}}{}^2 + \phi'_{0\tilde{r}}{}^2 + 2U_\infty\phi'_{\tilde{x}} + 2(\phi'_{0\tilde{x}}\phi'_{\tilde{x}} + \phi'_{0\tilde{r}}\phi'_{\tilde{r}}) \\ \left.\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right|_w &= \phi'_t\end{aligned}$$

Al igual que la condición de contorno, el coeficiente de presiones se evalúa en la superficie *no deformada*. Teniendo en cuenta que $\tilde{r} = R(\tilde{x}) - w(\tilde{x}; t) \sin \tilde{\theta}$:

$$\begin{aligned}\phi'_{0\tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{r}) &\simeq \phi'_{0\tilde{x}}(\tilde{x}, R) - w(\tilde{x}; t) \sin \tilde{\theta} \phi''_{0\tilde{x}\tilde{r}}(\tilde{x}, R) \\ \phi'_{0\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{r}) &\simeq \phi'_{0\tilde{r}}(\tilde{x}, R) - w(\tilde{x}; t) \sin \tilde{\theta} \phi''_{0\tilde{r}\tilde{r}}(\tilde{x}, R) \\ \phi'_{\tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{r}) &\simeq \phi'_{\tilde{x}}(\tilde{x}, R) \\ \phi'_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{r}) &\simeq \phi'_{\tilde{r}}(\tilde{x}, R)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right|_w + \frac{(\nabla\Omega)^2 - U_\infty^2}{2} &\simeq \phi'_t + \frac{1}{2} \left(2U_\infty\phi'_{0\tilde{x}} + \phi'_{0\tilde{x}}{}^2 + \phi'_{0\tilde{r}}{}^2 \right) + \\ &\quad + U_\infty\phi'_{\tilde{x}} + \phi'_{0\tilde{x}}\phi'_{\tilde{x}} + \phi'_{0\tilde{r}}\phi'_{\tilde{r}} - w \sin \tilde{\theta} (U_\infty\phi''_{0\tilde{x}\tilde{x}} + \phi'_{0\tilde{x}}\phi''_{0\tilde{x}\tilde{r}} + \phi'_{0\tilde{r}}\phi''_{0\tilde{r}\tilde{r}}) = \\ &= \frac{1}{2}\tilde{F}_0 + \Delta\tilde{F}\end{aligned}$$

de forma que las últimas derivadas parciales se evalúan en $(\tilde{x}_0, R(\tilde{x}_0))$, es decir, la superficie *no deformada*. El coeficiente de presiones queda:

$$\begin{aligned}C_p &= \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left\{ \left[1 - \frac{\gamma-1}{a_\infty^2} \left(\frac{1}{2}\tilde{F}_0 + \Delta\tilde{F} \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right\} = \\ &= C_{p0} - \frac{2}{U_\infty^2} \left(1 - \frac{\gamma-1}{2a_\infty^2}\tilde{F}_0 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \Delta\tilde{F} = C_{p0} + \Delta C_p\end{aligned}$$

siendo:

$$\begin{aligned}\tilde{F}_0 &= 2U_\infty\phi'_{0\tilde{x}} + \phi'_{0\tilde{x}}{}^2 + \phi'_{0\tilde{r}}{}^2, \text{ en } (\tilde{x}_0, R(\tilde{x}_0)) \\ \Delta\tilde{F} &= (U_\infty + \phi'_{0\tilde{x}})\phi'_{\tilde{x}} + \phi'_{0\tilde{r}}\phi'_{\tilde{r}} - w \sin \tilde{\theta} [(U_\infty + \phi'_{0\tilde{x}})\phi''_{0\tilde{x}\tilde{r}} + \phi'_{0\tilde{r}}\phi''_{0\tilde{r}\tilde{r}}] + \phi'_t, \text{ en } (\tilde{x}_0, R(\tilde{x}_0))\end{aligned}$$

4.7.2. Formulación en el Sistema de Ejes Cuerpo

Coordenadas Cartesianas

1. Problema de Espesor: Configuraciones No Esbeltas

Se considera la configuración cuerpo/ala con ángulo de ataque y resbalamiento nulos y sin deformación flexible, i.e., $w(x; t) = 0$. El potencial total de velocidades Ω se escribe $\Omega(x, y, z; t) = U_\infty x + \phi_0(x, y, z)$. Los términos que intervienen en el coeficiente de presiones son:

$$\begin{aligned}\nabla\Omega &= (U_\infty + \phi'_{0x})\vec{e}_x + \phi'_{0y}\vec{e}_y + \phi'_{0z}\vec{e}_z \\ (\nabla\Omega)^2 - U_\infty^2 &\simeq 2U_\infty\phi'_{0x} + \phi'_{0x}{}^2 + \phi'_{0y}{}^2 + \phi'_{0z}{}^2 \\ \left.\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right|_w &= \left.\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right|_b + \left[\frac{\partial\Omega}{\partial(x, y, z)} \right] \cdot \left[-zw''_{xt} \quad 0 \quad w'_t \right]^T = 0\end{aligned}$$

Por tanto, el coeficiente de presiones para el problema de espesor se escribe:

$$\begin{aligned}
 C_{p0} &= \frac{\left[1 - \frac{\gamma-1}{a_\infty^2} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} \Big|_w + \frac{(\nabla \Omega)^2 - U_\infty^2}{2} \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1}{\frac{1}{2} \gamma M_\infty^2} = \\
 &= \frac{\left[1 - \frac{\gamma-1}{2a_\infty^2} \left(2U_\infty \phi'_{0x} + \phi'_{0x}{}^2 + \phi'_{0y}{}^2 + \phi'_{0z}{}^2 \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1}{\frac{1}{2} \gamma M_\infty^2} = \\
 &= \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left[\left(1 - \frac{\gamma-1}{2a_\infty^2} F_0 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right]
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

donde $F_0 = 2U_\infty \phi'_{0x} + \phi'_{0x}{}^2 + \phi'_{0y}{}^2 + \phi'_{0z}{}^2$

2. Problema Completo: Espesor (Configuración No Esbelta) + Pequeñas Deformaciones

En este caso el potencial total se escribe:

$$\Omega(x, y, z; t) = U_\infty (x + zw'_x) + \phi_0(x, y, z) + \phi(x, y, z; t) \tag{4.71}$$

donde $\phi_0(x, y, z)$ es el potencial de velocidades asociado al problema de espesor (descrito en el apartado anterior) y $\phi(x, y, z; t)$ es el potencial de velocidades asociado al problema de pequeños desplazamientos (rígidos y/o elásticos) respecto al problema anterior de espesor a ángulo de ataque y rebalamiento nulos.

El potencial ϕ está asociado a pequeñas perturbaciones $w(x; t)$ respecto al vuelo con ángulo de ataque y rebalamiento nulos y, por tanto, las velocidades de perturbación ϕ'_x , ϕ'_y y ϕ'_z serán comparables a la perturbación $w(x; t)$. Esto permite prescindir de términos cuadráticos en ϕ del orden de $\phi \cdot w(x; t)$.

A continuación se calculan los términos que intervienen en la expresión del coeficiente de presiones:

$$\begin{aligned}
 \nabla \Omega &= (1 - z''_{xx}) \Omega'_x \vec{e}_x + \Omega'_y \vec{e}_y + \Omega'_z \vec{e}_z = \\
 &= (1 - zw''_{xx}) [U_\infty (1 + zw''_{xx}) + \phi'_{0x} + \phi'_x] \vec{e}_x + (\phi'_{0y} + \phi'_y) \vec{e}_y + (U_\infty w'_x + \phi'_{0z} + \phi'_z) \vec{e}_z \simeq \\
 &\simeq [U_\infty + (1 - zw''_{xx}) \phi'_{0x} + \phi'_x] \vec{e}_x + [\phi'_{0y} + \phi'_y] \vec{e}_y + [U_\infty w'_x + \phi'_{0z} + \phi'_z] \vec{e}_z
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\nabla \Omega)^2 - U_\infty^2 &\simeq U_\infty^2 + (1 - 2zw''_{xx}) \phi'_{0x}{}^2 + 2U_\infty (1 - zw''_{xx}) \phi'_{0x} + 2U_\infty \phi'_x + 2\phi'_{0x} \phi'_x + \\
 &\quad + \phi'_{0y}{}^2 + 2\phi'_{0y} \phi'_y + \phi'_{0z}{}^2 + 2U_\infty w'_x \phi'_{0x} + 2\phi'_{0z} \phi'_z - U_\infty^2 \simeq \\
 &\simeq \left[2U_\infty \phi'_{0x} + \phi'_{0x}{}^2 + \phi'_{0y}{}^2 + \phi'_{0z}{}^2 \right] + (U_\infty + \phi'_{0x}) (\phi'_x - zw''_{xx} \phi'_{0x}) + \\
 &\quad + 2\phi'_{0y} \phi'_y + 2\phi'_{0z} \phi'_z + 2U_\infty w'_x \phi'_{0z}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Omega}{\partial t} \Big|_w &= \frac{\partial \Omega}{\partial t} \Big|_b + \left[\frac{\partial \Omega}{\partial (x, y, z)} \right] \cdot \left[\frac{\partial (x, y, z)}{\partial t} \right]_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})=cte} \simeq \\
 &\simeq U_\infty z w''_{xt} + \phi'_t + \\
 &\quad + (U_\infty (1 + z w''_{xx}) + \phi'_{0x} + \phi'_x, \phi'_{0y} + \phi'_y, U_\infty w'_x + \phi'_{0z} + \phi'_z) \cdot (-z w''_{xt}, 0, w'_t) \simeq \\
 &\simeq \phi'_t - z w''_{xt} \phi'_{0x} + w'_t \phi'_{0z} \\
 \frac{\partial \Omega}{\partial t} \Big|_w + \frac{(\nabla \Omega)^2 - U_\infty^2}{2} &\simeq \frac{1}{2} (2U_\infty \phi'_{0x} + \phi'^2_{0y} + \phi'^2_{0z}) + \phi'_t - z w''_{xt} \phi'_{0x} + w'_t \phi'_{0z} + \\
 &\quad + (U_\infty + \phi'_{0x}) (\phi'_x - z w''_{xx} \phi'_{0x}) + \phi'_{0y} \phi'_y + \phi'_{0z} \phi'_z + U_\infty w'_x \phi'_{0z} = \\
 &= \frac{1}{2} F_0 + \Delta F
 \end{aligned}$$

donde la función F_0 comprende los términos asociados al problema de espesor y la función ΔF comprende los términos asociados a las pequeñas perturbaciones $w(x; t)$:

$$\begin{aligned}
 F_0 &= 2U_\infty \phi'_{0x} + \phi'^2_{0x} + \phi'^2_{0y} + \phi'^2_{0z} \\
 \Delta F &= (U_\infty + \phi'_{0x}) (\phi'_x - z w''_{xx} \phi'_{0x}) + \phi'_{0y} \phi'_y + \phi'_{0z} \phi'_z + U_\infty w'_x \phi'_{0z} - z w''_{xt} \phi'_{0x} + w'_t \phi'_{0z} + \phi'_t
 \end{aligned}$$

La relación entre la presión local y la presión del fluido en el infinito no perturbado se puede escribir:

$$\begin{aligned}
 \frac{p}{p_\infty} &= \left[1 - \frac{\gamma - 1}{a_\infty^2} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} \Big|_w + \frac{(\nabla \Omega)^2 - U_\infty^2}{2} \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = \left[1 - \frac{\gamma - 1}{a_\infty^2} \left(\frac{1}{2} F_0 + \Delta F \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = \\
 &= \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2a_\infty^2} F_0 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \left[1 - \frac{\frac{\gamma - 1}{a_\infty^2} \Delta F}{1 - \frac{\gamma - 1}{2a_\infty^2} F_0} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \simeq \\
 &\simeq \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2a_\infty^2} F_0 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \left(1 - \frac{\frac{\gamma}{a_\infty^2} \Delta F}{1 - \frac{\gamma - 1}{2a_\infty^2} F_0} \right) \simeq \\
 &\simeq \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2a_\infty^2} F_0 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} - \frac{\gamma}{a_\infty^2} \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2a_\infty^2} F_0 \right]^{\frac{1}{\gamma - 1}} \Delta F
 \end{aligned}$$

expresión en la que se han retenido hasta los términos lineales en la perturbación $w(x; t)$. El coeficiente de presiones se escribirá:

$$\begin{aligned}
 C_p &= \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} = \frac{p}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} - 1 \simeq \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left\{ \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2a_\infty^2} F_0 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} - 1 \right\} - \\
 &\quad - \frac{2}{U_\infty^2} \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2a_\infty^2} F_0 \right]^{\frac{1}{\gamma - 1}} \Delta F = \\
 &= C_{p0} + \Delta C_p
 \end{aligned}$$

donde C_{p0} es el coeficiente de presiones que ya se calculó anteriormente para el efecto espesor y ΔC_p es el incremento del coeficiente de presiones asociado a las pequeñas perturbaciones $w(x; t)$.

Como resumen, las ecuaciones que proporcionan el coeficiente de presiones son:

$$C_p = C_{p0} + \Delta C_p \quad (4.72)$$

$$C_{p0} = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left\{ \left[1 - \frac{\gamma-1}{2a_\infty^2} F_0 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right\} \quad (4.73)$$

$$\Delta C_p = -\frac{2}{U_\infty^2} \left[1 - \frac{\gamma-1}{2a_\infty^2} F_0 \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \Delta F \quad (4.74)$$

$$F_0 = 2U_\infty \phi'_{0x} + \phi'_{0x}{}^2 + \phi'_{0y}{}^2 + \phi'_{0z}{}^2 \quad (4.75)$$

$$\begin{aligned} \Delta F = & (U_\infty + \phi'_{0x}) (\phi'_x - z w''_{xx} \phi'_{0x}) + \phi'_{0y} \phi'_y + \phi'_{0z} \phi'_z + U_\infty w'_x \phi'_{0z} - \\ & - z w''_{xt} \phi'_{0x} + w'_t \phi'_{0z} + \phi'_t \end{aligned} \quad (4.76)$$

3. Problema Completo: Espesor (Configuraciones Esbeltas) + Pequeñas Deformaciones

En el caso de configuraciones esbeltas, los términos asociados al problema de espesor son también pequeños (ϕ'_{0x}, ϕ'_{0y} y $\phi'_{0z} \ll U_\infty$) y las expresiones del coeficiente de presiones se puede simplificar en el siguiente modo:

$$C_p = C_{p0} + \Delta C_p \quad (4.77)$$

$$C_{p0} = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left\{ \left[1 - \frac{\gamma-1}{2a_\infty^2} F_0 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right\} \simeq -\frac{1}{U_\infty^2} F_0 \quad (4.78)$$

$$\Delta C_p = -\frac{2}{U_\infty^2} \left[1 - \frac{\gamma-1}{2a_\infty^2} F_0 \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \Delta F \simeq -\frac{2}{U_\infty^2} \left(1 + \frac{1}{2} M_\infty^2 C_{p0} \right) \Delta F \quad (4.79)$$

$$F_0 = 2U_\infty \phi'_{0x} + \phi'_{0x}{}^2 + \phi'_{0y}{}^2 + \phi'_{0z}{}^2 \quad (4.80)$$

$$\begin{aligned} \Delta F = & (U_\infty + \phi'_{0x}) (\phi'_x - z w''_{xx} \phi'_{0x}) + \phi'_{0y} \phi'_y + \phi'_{0z} \phi'_z + U_\infty w'_x \phi'_{0z} - \\ & - z w''_{xt} \phi'_{0x} + w'_t \phi'_{0z} + \phi'_t \end{aligned} \quad (4.81)$$

Coordenadas Cilíndricas

1. Problema de Espesor: Configuraciones No Esbeltas

Se considera la configuración cuerpo/ala con *ángulo de ataque y resbalamiento nulos* y sin deformación flexible, i.e., $w(x; t) = 0$. El potencial total de velocidades Ω se escribe $\Omega(x, r, \theta; t) = U_\infty x + \phi_0(x, r, \theta)$. Los términos que intervienen en el coeficiente de presiones son:

$$\begin{aligned}\nabla\Omega &= (U_\infty + \phi'_{0x}) \vec{e}_x + \phi'_{0r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \phi'_\theta \vec{e}_\theta \\ (\nabla\Omega)^2 - U_\infty^2 &\simeq 2U_\infty \phi'_{0x} + \phi'_{0x}{}^2 + \phi'_{0r}{}^2 + \frac{1}{r^2} \phi'_{0\theta}{}^2 \\ \left. \frac{\partial\Omega}{\partial t} \right|_w &= \left. \frac{\partial\Omega}{\partial t} \right|_b + \left[\frac{\partial\Omega}{\partial(x, r, \theta)} \right] \cdot \left[-r \sin\theta w''_{xt} \quad \sin\theta w'_t \quad \cos\theta w'_t \right]^T = 0\end{aligned}$$

Por tanto, el coeficiente de presiones para el problema de espesor se escribe:

$$\begin{aligned}C_{p0} &= \frac{\left[1 - \frac{\gamma-1}{a_\infty^2} \left(\left. \frac{\partial\Omega}{\partial t} \right|_w + \frac{(\nabla\Omega)^2 - U_\infty^2}{2} \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1}{\frac{1}{2} \gamma M_\infty^2} = \\ &= \frac{\left[1 - \frac{\gamma-1}{2a_\infty^2} \left(2U_\infty \phi'_{0x} + \phi'_{0x}{}^2 + \phi'_{0r}{}^2 + \frac{1}{r^2} \phi'_{0\theta}{}^2 \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1}{\frac{1}{2} \gamma M_\infty^2} = \\ &= \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left[\left(1 - \frac{\gamma-1}{2a_\infty^2} F_0 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right]\end{aligned}\tag{4.82}$$

donde $F_0 = 2U_\infty \phi'_{0x} + \phi'_{0x}{}^2 + \phi'_{0r}{}^2 + \frac{1}{r^2} \phi'_{0\theta}{}^2$

2. Problema Completo: Espesor (Configuración No Esbelta) + Pequeñas Deformaciones

En este caso el potencial total se escribe:

$$\Omega(x, r, \theta; t) = U_\infty (x + r \sin\theta w'_x) + \phi_0(x, r, \theta) + \phi(x, r, \theta; t)$$

donde $\phi_0(x, r, \theta)$ es el potencial de velocidades asociado al problema de espesor (descrito en el apartado anterior, con ángulo de ataque y resbalamiento nulos) y $\phi(x, r, \theta; t)$ es el potencial de velocidades asociado al problema de pequeños desplazamientos (rígidos y/o elásticos) respecto al problema de espesor.

Debido a que el potencial de perturbación $\phi(x, r, \theta; t)$ está asociado a pequeñas perturbaciones respecto al vuelo con ángulo de ataque y resbalamiento nulos, las velocidades de perturbación ϕ'_x , ϕ'_r y ϕ'_θ/r serán comparables a las perturbación $w(x; t)$. Esto permite prescindir de términos cuadráticos en ϕ o del orden de $\phi \cdot w(x; t)$

A continuación se calculan los términos que intervienen en la expresión del coeficiente de presiones:

$$\begin{aligned}\nabla\Omega &= (1 - r \sin\theta w''_{xx}) \Omega'_x \vec{e}_x + \Omega'_r \vec{e}_r + \frac{1}{r} \Omega'_\theta \vec{e}_\theta = \\ &= (1 - r \sin\theta w''_{xx}) \{ [U_\infty (1 + r \sin\theta w''_{xx}) + \phi'_{0x} + \phi'_x] \vec{e}_x + (U_\infty \sin\theta w'_x + \phi'_{0r} + \phi'_r) \vec{e}_r + \\ &\quad + \frac{1}{r} (U_\infty r \cos\theta w'_x + \phi'_{0\theta} + \phi'_\theta) \vec{e}_\theta \}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\nabla\Omega)^2 - U_\infty^2 &\simeq 2U_\infty\phi'_{0x} + \phi'_{0x}{}^2 + \phi'_{0r}{}^2 + \frac{1}{r^2}\phi'_{0\theta}{}^2 + 2\left(U_\infty\phi'_x + \phi'_{0x}\phi'_x + \phi'_{0r}\phi'_r + \frac{1}{r^2}\phi'_{0\theta}\phi'_\theta\right) - \\
 &\quad - 2r\sin\theta w''_{xx}(U_\infty + \phi'_{0x})\phi'_{0x} + 2U_\infty w'_x\left(\sin\theta\phi'_{0r} + \cos\theta\frac{\phi'_{0\theta}}{r}\right) \\
 \frac{\partial\Omega}{\partial t}\Big|_w &= \frac{\partial\Omega}{\partial t}\Big|_b + \left[\frac{\partial\Omega}{\partial(x,r,\theta)}\right] \cdot \left[\frac{\partial(x,r,\theta)}{\partial t}\right]_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=cte} \simeq \\
 &\simeq U_\infty r\sin\theta w''_{xt} + \phi'_t - U_\infty r\sin\theta w''_{xt} - r\sin\theta w''_{xt}\phi'_{0x} + \sin\theta w'_t\phi'_{0r} + \cos\theta\frac{\phi'_{0\theta}}{r} = \\
 &= -r\sin\theta w''_{xt}\phi'_{0x} + w'_t\left(\sin\theta\phi'_{0r} + \cos\theta\frac{\phi'_{0\theta}}{r}\right) + \phi'_t \\
 \frac{\partial\Omega}{\partial t}\Big|_w + \frac{(\nabla\Omega)^2 - U_\infty^2}{2} &= \frac{1}{2}\left(2U_\infty\phi'_{0x} + \phi'_{0x}{}^2 + \phi'_{0r}{}^2 + \frac{1}{r^2}\phi'_{0\theta}{}^2\right) + \\
 &\quad + (U_\infty + \phi'_{0x})(\phi'_x - r\sin\theta w''_{xx}\phi'_{0x}) + \phi'_{0r}\phi'_r + \frac{1}{r^2}\phi'_{0\theta}\phi'_\theta + \\
 &\quad + (U_\infty w'_x + w'_t)\left(\sin\theta\phi'_{0r} + \cos\theta\frac{\phi'_{0\theta}}{r}\right) - r\sin\theta w''_{xt}\phi'_{0x} + \phi'_t = \\
 &= \frac{1}{2}F_0 + \Delta F
 \end{aligned}$$

donde la función F_0 comprende los términos asociados al problema de espesor y la función ΔF comprende los términos asociados a las pequeñas perturbaciones $w(x;t)$:

$$\begin{aligned}
 F_0 &= 2U_\infty\phi'_{0x} + \phi'_{0x}{}^2 + \phi'_{0r}{}^2 + \frac{1}{r^2}\phi'_{0\theta}{}^2 \\
 \Delta F &= (U_\infty + \phi'_{0x})(\phi'_x - r\sin\theta w''_{xx}\phi'_{0x}) + \phi'_{0r}\phi'_r + \frac{1}{r^2}\phi'_{0\theta}\phi'_\theta + \\
 &\quad + (U_\infty w'_x + w'_t)\left(\sin\theta\phi'_{0r} + \cos\theta\frac{\phi'_{0\theta}}{r}\right) - r\sin\theta w''_{xt}\phi'_{0x} + \phi'_t
 \end{aligned}$$

De la misma forma que en la formulación con coordenadas cartesianas del apartado anterior, el coeficiente de presiones se escribirá:

$$\begin{aligned}
 C_p &= C_{p0} + \Delta C_p \\
 C_{p0} &= \frac{1}{\gamma M_\infty^2} \left\{ \left[1 - \frac{\gamma-1}{2a_\infty^2} F_0 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right\} \\
 \Delta C_p &= -\frac{2}{U_\infty^2} \left[1 - \frac{\gamma-1}{2a_\infty^2} F_0 \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \Delta F
 \end{aligned}$$

3. Problema Completo: Espesor (Configuraciones Esbeltas) + Pequeñas Deformaciones

En el caso de configuraciones esbeltas, los términos asociados al problema de espesor son también pequeños (ϕ'_{0x} , ϕ'_{0r} y $\phi'_{0\theta}/r \ll U_\infty$) y las expresiones del coeficiente de presiones se pueden simplificar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 C_p &= C_{p0} + \Delta C_p \\
 C_{p0} &= \frac{1}{\gamma M_\infty^2} \left\{ \left[1 - \frac{\gamma-1}{2a_\infty^2} F_0 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right\} \simeq -\frac{1}{U_\infty^2} F_0 \\
 \Delta C_p &= -\frac{2}{U_\infty^2} \left[1 - \frac{\gamma-1}{2a_\infty^2} F_0 \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \Delta F \simeq -\frac{2}{U_\infty^2} \left(1 + \frac{1}{2} M_\infty^2 C_{p0} \right) \Delta F
 \end{aligned}$$

donde, como en el apartado anterior, F_0 y ΔF vienen dados por:

$$F_0 = 2U_\infty \phi'_{0x} + \phi'_{0x}{}^2 + \phi'_{0r}{}^2 + \frac{1}{r^2} \phi'_{0\theta}{}^2$$

$$\Delta F = (U_\infty + \phi'_{0x}) (\phi'_x - r \sin \theta w''_{xx} \phi'_{0x}) + \phi'_{0r} \phi'_r + \frac{1}{r^2} \phi'_{0\theta} \phi'_\theta +$$

$$+ (U_\infty w'_x + w'_t) \left(\sin \theta \phi'_{0r} + \cos \theta \frac{\phi'_{0\theta}}{r} \right) - r \sin \theta w''_{xt} \phi'_{0x} + \phi'_t$$

4.8. Aerodinámica de configuraciones esbeltas

4.8.1. Flujo axial y flujo bidimensional cruzado

Como se ha comprobado en las secciones anteriores, la linealización de la ecuación del potencial da lugar a dos ecuaciones diferenciales, cada una de las cuales representa un problema que se detalla a continuación.

Flujo axial

Se denomina flujo axial al campo de velocidades alrededor de la configuración en vuelo estacionario sin deformación, i.e., $w(x; t) = 0$. Como ya se ha demostrado, este campo de velocidades deriva de un potencial ϕ_0 que debe cumplir la ecuación de Laplace $\Delta \phi_0 = 0$ y la condición de contorno de impermeabilidad en la superficie del cuerpo (flujo normal nulo, i.e., $\nabla \phi_0 \cdot \vec{n} = 0$).

Asumiendo configuración axilsimétrica, la ecuación de Laplace queda:

$$\Delta \phi_0 = \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_0}{\partial r} = 0$$

con la condición de contorno:

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial r} - \frac{dR}{dx} \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \sim \frac{\partial \phi_0}{\partial r} = \frac{dr(x)}{dx}$$

o, en variables adimensionales:

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}_0}{\partial \hat{r}^2} + \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{\phi}_0}{\partial \hat{r}} = 0 \text{ (Ecuación de Laplace)}$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_0}{\partial \hat{r}} = \frac{d\hat{R}}{d\hat{x}} \text{ (Condición de contorno)}$$
(4.83)

donde $\hat{x} = x/L$, $\hat{r} = r/L$ y $\hat{\phi}_0 = \phi_0/(U_\infty L)$, siendo L la dimensión característica longitudinal del vehículo, $R(x)$ el radio del cuerpo del vehículo en función de x (variable longitudinal) y U_∞ la velocidad de vuelo.

Puede comprobarse que el potencial $\hat{\phi}_0$ de la forma:

$$\hat{\phi}_0(x, r, \theta) = \hat{R} \frac{d\hat{R}}{d\hat{x}} \ln \hat{r}$$

cumple tanto la ecuación de Laplace como la condición de contorno. Volviendo a variables dimensionales:

$$\phi_0 = U_\infty R \frac{dR}{dx} \ln \left(\frac{r}{L} \right)$$

El campo de velocidades en coordenadas cilíndricas será:

$$\phi'_{0x} = U_\infty \left[\left(\frac{dR}{dx} \right)^2 + R \frac{d^2R}{dx^2} \right] \ln \left(\frac{r}{L} \right) \quad (4.84)$$

$$\phi'_{0r} = U_\infty R \frac{dR}{dx} \frac{1}{r} \quad (4.85)$$

$$\phi'_{0\theta} = 0 \quad (4.86)$$

En la expresión del coeficiente de presiones aparecen productos de velocidades y es necesario conocer los órdenes de magnitud para estimar los términos que son despreciables frente a los principales. Las velocidades anteriores son del orden siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_0}{\partial x} &\sim U_\infty \left[\left(\frac{\bar{\varnothing}}{L} \right)^2 + \bar{\varnothing} \frac{\bar{\varnothing}}{L^2} \right] \ln \frac{\bar{\varnothing}}{L} \sim U_\infty \left(\frac{\varnothing_{max}}{L} \right)^2 \ln \frac{\varnothing_{max}}{L} = U_\infty \tau^2 \ln \tau \\ \frac{\partial \phi_0}{\partial r} &\sim U_\infty \frac{\bar{\varnothing}}{L} \sim U_\infty \frac{\varnothing_{max}}{L} = U_\infty \tau \end{aligned}$$

Flujo cruzado

En el problema de flujo cruzado se consideran dos contribuciones dependiendo de la deformación relativa cuerpo/ala.

Flujo cruzado: contribución de los términos **WjB** y **WrB**

Los términos tipo **WjB** (acrónimo del inglés **W**ing **j**oined to **B**ody) corresponden a deformaciones de la configuración cuerpo/aleta *sin movimiento relativo de la aleta respecto al cuerpo*. En cualquier sección transversal x , la parte seccionada de aleta se mueve solidariamente a la sección del cuerpo.

Los modos tipo **WrB** (acrónimo del inglés **W**ing **r**elative to **B**ody) corresponden a *deformaciones de la aleta respecto al cuerpo*. En cualquier sección transversal x , la sección del cuerpo no tiene movimiento, mientras que las aletas tienen un desplazamiento relativo al cuerpo.

El desplazamiento total $w(x; t)$ en una sección transversal x se puede escribir como la contribución **WjB** más la **WrB**, i.e.:

$$w = w(x; t) = \sum_{i=1}^m \psi_i(x) \xi_i(t) = w_b(x; t) + w_{wb}(x; t) = \sum_{i=1}^m \psi_{i,b}(x) \xi_i(t) + \sum_{i=1}^m \psi_{i,wb}(x) \xi_i(t) \quad (4.87)$$

donde:

$$\begin{aligned} w_b(x; t) &= \sum_{i=1}^m \psi_{i,b}(x) \xi_i(t) \text{ es la contribución de todos los términos del tipo } \mathbf{WjB} \\ w_{wb}(x; t) &= \sum_{i=1}^m \psi_{i,wb}(x) \xi_i(t) \text{ es la contribución de todos los términos del tipo } \mathbf{WrB} \end{aligned} \quad (4.88)$$

Los términos $\psi_{i,b}(x)$ y $\psi_{i,wb}(x)$ son tal que:

$$\begin{aligned} \psi_{i,b}(x) &= \begin{cases} \psi_{i,b}(x) & \text{en el cuerpo.} \\ \psi_{i,b}(x) & \text{en las aletas.} \end{cases} \\ \psi_{i,wb}(x) &= \begin{cases} 0 & \text{en el cuerpo.} \\ \psi_{i,wb}(x) & \text{en las aletas.} \end{cases} \end{aligned}$$

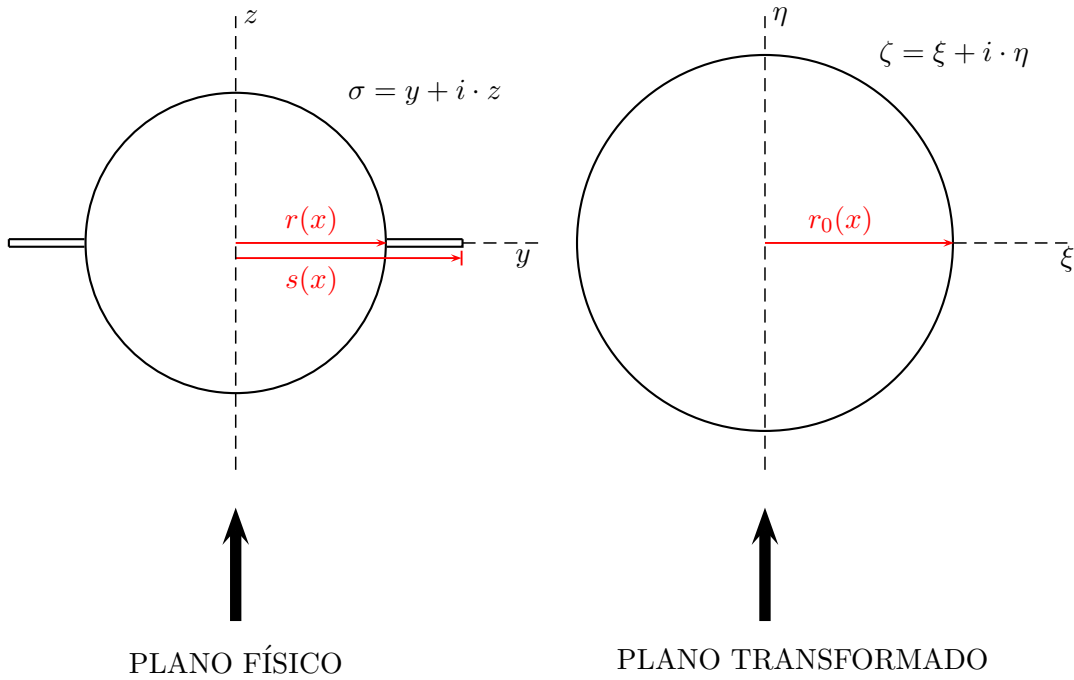


Figura 4.3: Planos *físico* y *transformado* en el problema de *flujo cruzado*.

4.8.2. Primera aproximación al flujo cruzado en deformaciones tipo WjB: ángulo de ataque estacionario α

En este apartado se estudia el campo de velocidades y presiones asociado a un ángulo de ataque estacionario α . La figura 4.3 representa una sección transversal de la configuración cuerpo/aleta obtenida por el corte con un plano genérico $x = cte$.

El flujo cruzado en la sección se resuelve mediante la siguiente transformación del plano *físico* yz al plano *transformado* $\xi\eta$:

$$\sigma + \frac{r^2}{\sigma} = \zeta + \frac{r_0^2}{\zeta} \quad (4.89)$$

donde $\sigma = y + i \cdot z$ es la variable compleja en el *plano físico*, $\zeta = \xi + i \cdot \eta$ es la variable compleja en el *plano transformado* y el parámetro r_0 viene dado por:

$$r_0 = \frac{1}{2} \left(s + \frac{r^2}{s} \right)$$

donde r es el radio del cuerpo y s la semienvargadura de la aleta, ambos calculados en la sección $x = x_0$ (ver figura 4.3). En el *plano transformado* la sección ha pasado a ser un círculo de radio r_0 que, como puede comprobarse, es mayor que el radio de la sección del cuerpo r en el *plano físico*:

$$r_0 = \frac{1}{2} \left(s + \frac{r^2}{s} \right) = \frac{1}{2} r \left(\frac{s}{r} + \frac{r}{s} \right) = \frac{1}{2} r \left(\frac{s}{r} + \frac{1}{s/r} \right) = \frac{1}{2} r f(s/r)$$

donde la función $f(s/r)$ tiene un mínimo que es igual a 2 para $s/r = 1$. Por otro lado, también puede comprobarse que este radio r_0 es menor o igual que la semienvargadura de la aleta s :

$$r_0 = \frac{1}{2} \left(s + \frac{r^2}{s} \right) = \frac{1}{2} s \left[1 + \left(\frac{r}{s} \right)^2 \right] \leq s$$

ya que $r/s \leq 1$ y, por tanto, $1 + (r/s)^2 \leq 2$.

Despejando la variable compleja ζ de la ecuación anterior:

$$\zeta = \frac{1}{2} \left[\left(\sigma + \frac{r^2}{\sigma} \right) \pm \sqrt{\left(\sigma + \frac{r^2}{\sigma} \right)^2 - 4r_0^2} \right] \quad (4.90)$$

Esta relación que permite averiguar en qué parte de ese círculo de radio r_0 (en el *plano transformado*) se han transformado la sección del cuerpo y las aletas del *plano físico*. Se distinguen las siguientes partes:

1. Contorno superior de la sección del cuerpo (*upper surface*), es decir, $\sigma = re^{i\theta}$ con $0 \leq \theta \leq 180$ grados:

$$\zeta = \frac{1}{2} \left[2r \cos \theta \pm \sqrt{4r^2 \cos^2 \theta - 4r_0^2} \right] = r \cos \theta \pm i \cdot r_0 \sqrt{1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \cos^2 \theta}$$

Para que el contorno superior del cuerpo en el *plano físico* pase a formar parte del contorno superior del círculo en el *plano transformado*, el signo en la indeterminación anterior debe ser positivo. Por tanto, la variable compleja ζ queda:

$$\zeta = r \cos \theta + i \cdot r_0 \sqrt{1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \cos^2 \theta}$$

2. Contorno superior de las aletas (*suction surface*), es decir $\sigma = y$ con $r(x) \leq y \leq s(x)$ y $-s(x) \leq y \leq -r(x)$

$$\zeta = \frac{1}{2} \left[\left(y + \frac{r^2}{y} \right) + \sqrt{\left(y + \frac{r^2}{y} \right)^2 - 4r_0^2} \right] = \frac{1}{2} \left[\left(y + \frac{r^2}{y} \right) + i \sqrt{4r_0^2 - \left(y + \frac{r^2}{y} \right)^2} \right]$$

3. Contorno inferior de las aletas (*pressure surface*), es decir $\sigma = y$ con $r(x) \leq y \leq s(x)$ y $-s(x) \leq y \leq -r(x)$

En este caso, la ecuación de transformación es similar a la anterior (contorno superior) aunque introduciendo el signo negativo:

$$\zeta = \frac{1}{2} \left[\left(y + \frac{r^2}{y} \right) - i \sqrt{4r_0^2 - \left(y + \frac{r^2}{y} \right)^2} \right]$$

4. Contorno inferior de la sección del cuerpo (*lower surface*), es decir, $\sigma = re^{i\theta}$ con $180 \leq \theta \leq 360$ grados.

La ecuación de transformación en este caso queda similar a la del contorno superior salvo el signo negativo:

$$\zeta = r \cos \theta - i \cdot r_0 \sqrt{1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \cos^2 \theta}$$

El potencial de velocidades en el *plano transformado* corresponde al problema bidimensional de círculo con corriente incidente αU_∞ . Este potencial se puede escribir como:

$$\hat{\Omega}_{cf} = -i\alpha U_\infty \left(\zeta - \frac{r_0^2}{\zeta} \right) \quad (4.91)$$

indicando con el subíndice cf que es el flujo bidimensional asociado al **crossflow** o *flujo cruzado*. Sustituyendo la expresión anterior para ζ en función de σ :

$$\hat{\Omega}_{cf} = -i\alpha U_\infty \left[\pm \sqrt{\left(\sigma + \frac{r^2}{\sigma}\right)^2 - 4r_0^2} \right] \quad (4.92)$$

El potencial de velocidades de perturbación $\hat{\Phi}_{cf}$ se escribe:

$$\hat{\Phi}_{cf} = \hat{\Omega}_{cf} + i\alpha U_\infty \sigma = -i\alpha U_\infty \left[\pm \sqrt{\left(\sigma + \frac{r^2}{\sigma}\right)^2 - \left(s + \frac{r^2}{s}\right)^2} - \sigma \right] \quad (4.93)$$

donde el signo positivo se aplica al extradós (contorno superior del cuerpo y contorno superior de las aletas, que se denominará de forma compacta con el equivalente en inglés *upper surface*), y el signo negativo se aplicaría al intradós (contorno inferior del cuerpo y contorno inferior de las aletas, que se denotará como *lower surface*).

Campo de velocidades de perturbación y presiones sobre el cuerpo

- Velocidad de perturbación axial u_α :

$$\frac{\partial \hat{\Phi}_{cf}}{\partial x} = -i\alpha U_\infty \left\{ \pm \frac{2 \left(\sigma + \frac{r^2}{\sigma}\right) \frac{r}{\sigma} \frac{dr}{dx} - \left(s + \frac{r^2}{s}\right) \left(\frac{ds}{dx} + \frac{2r \frac{dr}{dx} s - r^2 \frac{ds}{dx}}{s^2}\right)}{\sqrt{\left(\sigma + \frac{r^2}{\sigma}\right)^2 - \left(s + \frac{r^2}{s}\right)^2}} \right\} \quad (4.94)$$

teniendo en cuenta que sobre el cuerpo $\sigma = re^{i\theta}$:

$$\sigma + \frac{r^2}{\sigma} = re^{i\theta} + \frac{r^2}{re^{i\theta}} = 2r \cos \theta \quad (4.95)$$

$$\frac{\partial \hat{\Phi}_{cf}}{\partial x} = \mp i\alpha U_\infty \frac{4 \cos \theta e^{-i\theta} r \frac{dr}{dx} - \left(s + \frac{r^2}{s}\right) \left[2 \frac{r}{s} \frac{ds}{dx} + \frac{ds}{dx} \left(1 - \frac{r^2}{s^2}\right)\right]}{\sqrt{4r^2 \cos^2 \theta - \left(s + \frac{r^2}{s}\right)^2}} \quad (4.96)$$

La velocidad de perturbación axial u_α es la parte real de la derivada del potencial complejo $\partial \hat{\Phi}_{cf} / \partial x$, es decir:

$$u_\alpha = \phi'_x = \text{Re} \left(\frac{\partial \hat{\Phi}_{cf}}{\partial x} \right) = \mp \alpha U_\infty \frac{4r \frac{dr}{dx} \cos^2 \theta - \left(s + \frac{r^2}{s}\right) \left[2 \frac{r}{s} \frac{dr}{dx} + \frac{ds}{dx} \left(1 - \frac{r^2}{s^2}\right)\right]}{\sqrt{\left(s + \frac{r^2}{s}\right)^2 - 4r^2 \cos^2 \theta}} \quad (4.97)$$

- Velocidades de perturbación transversales v_α y w_α :

Las velocidades transversales según y y z , v_α y w_α respectivamente, se calculan a través de la derivada del potencial complejo respecto la variable compleja σ :

$$\frac{d\hat{\Phi}_{cf}}{d\sigma} = v_\alpha - iw_\alpha = -i\alpha U_\infty \left\{ \pm \frac{\left(\sigma + \frac{r^2}{\sigma}\right) \left(1 - \frac{r^2}{\sigma^2}\right)}{\sqrt{\left(\sigma + \frac{r^2}{\sigma}\right)^2 - \left(s + \frac{r^2}{s}\right)^2}} - 1 \right\} \quad (4.98)$$

y, sustituyendo la expresión de la variable compleja σ sobre la superficie del cuerpo, es decir, $\sigma = re^{i\theta}$:

$$v_\alpha - iw_\alpha = -i\alpha U_\infty \left\{ \pm \frac{2r \cos \theta (1 + i \sin 2\theta - \cos 2\theta)}{\sqrt{\left(s + \frac{r^2}{s}\right)^2 - 4r^2 \cos^2 \theta}} - 1 \right\} \quad (4.99)$$

Igualando parte real e imaginaria en la ecuación anterior se obtienen las velocidades de perturbación transversales v_α (según el eje y en dirección lateral) y w_α (según el eje z en dirección vertical):

$$v_\alpha = \phi'_y = \mp \alpha U_\infty \frac{4r \cos \theta \sin^2 \theta}{\sqrt{\left(s + \frac{r^2}{s}\right)^2 - 4r^2 \cos^2 \theta}} \quad (4.100)$$

$$w_\alpha = \phi'_z = \alpha U_\infty \phi'_x \left\{ \pm \frac{4r \sin \theta \cos^2 \theta}{\sqrt{\left(s + \frac{r^2}{s}\right)^2 - 4r^2 \cos^2 \theta}} - 1 \right\} \quad (4.101)$$

Campo de velocidades y presiones sobre las aletas (situadas en el plano $z=0$)

Sólo se calculan presiones sobre las superficies de control situadas en el plano $z = 0$. No es necesario calcular presiones sobre las aletas en el plano $y = 0$ ya que se están considerando movimientos simétricos respecto $y = 0$ de forma que las superficies de control en el plano vertical no influyen.

- Velocidad de perturbación axial u_α :

$$\frac{\partial \hat{\Phi}_{cf}}{\partial x} = -i\alpha U_\infty \left\{ \pm \frac{2 \left(\sigma + \frac{r^2}{\sigma}\right) \frac{r}{\sigma} \frac{dr}{dx} - \left(s + \frac{r^2}{s}\right) \left(\frac{ds}{dx} + \frac{2r \frac{dr}{dx} s - r^2 \frac{ds}{dx}}{s^2}\right)}{\sqrt{\left(\sigma + \frac{r^2}{\sigma}\right)^2 - \left(s + \frac{r^2}{s}\right)^2}} \right\} \quad (4.102)$$

y, teniendo en cuenta que en el plano de las aletas $z = 0$ ($\sigma = y + i \cdot z = y$), la velocidad axial queda:

$$u_\alpha = \phi'_x = Re \left(\frac{\partial \hat{\Phi}_{cf}}{\partial x} \right) = -\alpha U_\infty \left\{ \pm \frac{2 \frac{r}{y} \frac{dr}{dx} \left(y + \frac{r^2}{y}\right) - \left(s + \frac{r^2}{s}\right) \left[\frac{ds}{dx} \left(1 - \frac{r^2}{s^2}\right) + 2 \frac{r}{s} \frac{dr}{dx}\right]}{\sqrt{\left(s + \frac{r^2}{s}\right)^2 - \left(y + \frac{r^2}{y}\right)^2}} \right\} \quad (4.103)$$

- Velocidades de perturbación transversales v_α y w_α :

Las velocidades transversales según y y z , v_α y w_α respectivamente, se calculan a través de la derivada del potencial complejo respecto la variable compleja σ :

$$\frac{d\hat{\Phi}_{cf}}{d\sigma} = v_\alpha - iw_\alpha = -i\alpha U_\infty \left\{ \pm \frac{\left(\sigma + \frac{r^2}{\sigma}\right) \left(1 - \frac{r^2}{\sigma^2}\right)}{\sqrt{\left(\sigma + \frac{r^2}{\sigma}\right)^2 - \left(s + \frac{r^2}{s}\right)^2}} - 1 \right\} \quad (4.104)$$

y, sustituyendo la expresión de la variable compleja σ sobre la superficie de las aletas, es decir, $\sigma = y$:

$$v_\alpha = \phi'_y = \mp \alpha U_\infty \frac{\left(y + \frac{r^2}{y}\right) \left(1 - \frac{r^2}{y^2}\right)}{\sqrt{\left(s + \frac{r^2}{s}\right)^2 - \left(y + \frac{r^2}{y}\right)^2}} \quad (4.105)$$

$$w_\alpha = \phi'_z = -\alpha U_\infty \quad (4.106)$$

4.8.3. Flujo cruzado no estacionario: contribución de los términos **WjB**

El potencial de velocidades en el *plano transformado* corresponde al problema bidimensional de círculo con corriente incidente $U_\infty \partial w_b / \partial x + \partial w_b / \partial t$, donde $w_b = w_b(x; t)$ es el desplazamiento vertical en la sección de coordenada x producido por la contribución de todos los términos **WjB**, i.e.:

$$w_b = w_b(x; t) = \sum_{i=1}^m \psi_{i,b}(x) \xi_i(t) \quad (4.107)$$

Por tanto, el potencial total complejo se escribe:

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}_{cf} &= -i \left(U_\infty \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t} \right) \left[\pm \sqrt{\left(\sigma + \frac{r^2}{\sigma}\right) - 4r_0^2} \right] = \\ &= -i (U_\infty w'_x + w'_t) \left[\pm \sqrt{\left(\sigma + \frac{r^2}{\sigma}\right) - 4r_0^2} \right] \end{aligned} \quad (4.108)$$

Por tanto, el potencial de velocidades de perturbación $\hat{\Phi}_{cf}$ se escribe:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_{cf} &= \hat{\Omega}_{cf} + i (U_\infty w'_x + w'_t) = \\ &= -i (U_\infty w'_x + w'_t) \left[\pm \sqrt{\left(\sigma + \frac{r^2}{\sigma}\right)^2 - \left(s + \frac{r^2}{s}\right)^2} - \sigma \right] \end{aligned} \quad (4.109)$$

donde el signo positivo se aplica al extradós (contorno superior del cuerpo y contorno superior de las aletas, que se denominará de forma compacta con el equivalente inglés *upper surface*), y el signo negativo se aplicará al intradós (contorno inferior del cuerpo y contorno inferior de las aletas, que se denotará con *lower surface*).

La velocidad de perturbación axial u se calcula como la parte real de la derivada parcial $\partial\hat{\Phi}_{cf}/\partial x$. La expresión de esta derivada en el campo complejo se escribe:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\hat{\Phi}_{cf}}{\partial x} &= -i(U_\infty w''_{xx} + w''_{xt}) \left[\pm \sqrt{\left(\sigma + \frac{r^2}{\sigma}\right)^2 - \left(s + \frac{r^2}{s}\right)^2} - \sigma \right] - \\ &\quad - i(U_\infty w'_x + w'_t) \left\{ \pm i \frac{\left(s + \frac{r^2}{s} \right) \left(\frac{ds}{dx} + \frac{2rs \frac{dr}{dx} - r^2 \frac{ds}{dx}}{s^2} \right) - 2\frac{r}{\sigma} \left(\sigma + \frac{r^2}{\sigma} \right) \frac{dr}{dx}}{\sqrt{\left(s + \frac{r^2}{s}\right)^2 - \left(\sigma + \frac{r^2}{\sigma}\right)^2}} \right\} = \\ &= -i(U_\infty w''_{xx} + w''_{xt}) \left[\pm \sqrt{\left(\sigma + \frac{r^2}{\sigma}\right)^2 - \left(s + \frac{r^2}{s}\right)^2} - \sigma \right] \pm \\ &\quad \pm (U_\infty w'_x + w'_t) \frac{-2\frac{r}{\sigma} \left(\sigma + \frac{r^2}{\sigma} \right) \frac{dr}{dx} + \left(s + \frac{r^2}{s} \right) \left[2\frac{r}{s} \frac{dr}{dx} + \left(1 - \frac{r^2}{s^2} \right) \frac{ds}{dx} \right]}{\sqrt{\left(s + \frac{r^2}{s}\right)^2 - \left(\sigma + \frac{r^2}{\sigma}\right)^2}} \end{aligned} \quad (4.110)$$

Posteriormente se particularizará la variable compleja σ en la superficie del cuerpo o de las aletas y se calculará la parte real de esta expresión para obtener la velocidad axial de perturbación u .

Las velocidades de perturbación transversales v y w se calculan mediante la derivada en el plano complejo $\partial\hat{\Phi}_{cf}/\partial\sigma$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\hat{\Phi}_{cf}}{\partial\sigma} &= v - i \cdot w = -i(U_\infty w'_x + w'_t) \left\{ \pm \frac{\left(\sigma + \frac{r^2}{\sigma}\right) \left(1 - \frac{r^2}{\sigma^2}\right)}{\sqrt{\left(\sigma + \frac{r^2}{\sigma}\right)^2 - \left(s + \frac{r^2}{s}\right)^2}} - 1 \right\} = \\ &= -i(U_\infty w'_x + w'_t) \left\{ \pm \frac{\left(\sigma + \frac{r^2}{\sigma}\right) \left(1 - \frac{r^2}{\sigma^2}\right)}{\sqrt{\left(s + \frac{r^2}{s}\right)^2 - \left(\sigma + \frac{r^2}{\sigma}\right)^2}} - 1 \right\} \end{aligned} \quad (4.111)$$

Campo de velocidades de perturbación y presiones sobre el cuerpo

Sustituyendo la variable compleja σ por su valor en la superficie del cuerpo, i.e., $\sigma = re^{i\theta}$, se obtienen las velocidades de perturbación u , v y w :

- Velocidad de perturbación axial u :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\hat{\Phi}_{cf}}{\partial x} &= -i(U_\infty w''_{xx} + w''_{xt}) \left[\pm i \sqrt{\left(s + \frac{r^2}{s}\right)^2 - 4r^2 \cos^2 \theta} - re^{i\theta} \right] \pm \\ &\quad \pm (U_\infty w'_x + w'_t) \frac{-4e^{-i\theta} r \cos \theta \frac{dr}{dx} + \left(s + \frac{r^2}{s}\right) \left[2\frac{r}{s} \frac{dr}{dx} + \left(1 - \frac{r^2}{s^2}\right) \frac{ds}{dx} \right]}{\sqrt{\left(s + \frac{r^2}{s}\right)^2 - 4r^2 \cos^2 \theta}} \end{aligned} \quad (4.112)$$

La parte real de la derivada $\partial\hat{\Phi}_{cf}/\partial x$ es la velocidad de perturbación axial u :

$$u = \operatorname{Re} \left(\frac{\partial\hat{\Phi}_{cf}}{\partial x} \right) = (U_{\infty}w''_{xx} + w''_{xt}) \left[\pm \sqrt{\left(s + \frac{r^2}{s}\right)^2 - 4r^2 \cos^2 \theta} - r \sin \theta \right] \pm$$

$$\pm (U_{\infty}w'_x + w'_t) \frac{-4r \cos^2 \theta \frac{dr}{dx} + \left(s + \frac{r^2}{s}\right) \left[2\frac{r}{s} \frac{dr}{dx} + \left(1 - \frac{r^2}{s^2}\right) \frac{ds}{dx} \right]}{\sqrt{\left(s + \frac{r^2}{s}\right)^2 - 4r^2 \cos^2 \theta}}$$
(4.113)

- Velocidades de perturbación transversales v y w :

$$\frac{d\hat{\Phi}_{cf}}{d\sigma} = v - i \cdot w = -i (U_{\infty}w'_x + w'_t) \left[\pm \frac{2r \cos \theta (1 - e^{-i2\theta})}{i \sqrt{\left(s + \frac{r^2}{s}\right)^2 - 4r^2 \cos^2 \theta}} - 1 \right] =$$

$$= (U_{\infty}w'_x + w'_t) \left[\mp \frac{2r \cos \theta (1 - \cos 2\theta + i \sin 2\theta)}{\sqrt{\left(s + \frac{r^2}{s}\right)^2 - 4r^2 \cos^2 \theta}} + i \right]$$
(4.114)

Igualando parte real e imaginaria en ambos lados de la ecuación anterior:

$$v = \mp (U_{\infty}w'_x + w'_t) \frac{4r \sin^2 \theta \cos \theta}{\sqrt{\left(s + \frac{r^2}{s}\right)^2 - 4r^2 \cos^2 \theta}}$$

$$w = (U_{\infty}w'_x + w'_t) \left[\pm \frac{4r \sin \theta \cos^2 \theta}{\sqrt{\left(s + \frac{r^2}{s}\right)^2 - 4r^2 \cos^2 \theta}} - 1 \right]$$
(4.115)

Campo de velocidades de perturbación y presiones sobre las aletas

En la superficie de las aletas la variable compleja σ queda reducida a $\sigma = y$ ya que $z = 0$. Por tanto las velocidades de perturbación son:

- Velocidad de perturbación axial u :

$$\frac{\partial\hat{\Phi}_{cf}}{\partial x} = -i (U_{\infty}w''_{xx} + w''_{xt}) \left[\pm i \sqrt{\left(s + \frac{r^2}{s}\right)^2 - \left(y + \frac{r^2}{y}\right)^2} - y \right] \pm$$

$$\pm (U_{\infty}w'_x + w'_t) \frac{-2\frac{r}{y} \left(y + \frac{r^2}{y}\right) \frac{dr}{dx} + \left(s + \frac{r^2}{s}\right) \left[2\frac{r}{s} \frac{dr}{dx} + \left(1 - \frac{r^2}{s^2}\right) \frac{ds}{dx} \right]}{\sqrt{\left(s + \frac{r^2}{s}\right)^2 - \left(y + \frac{r^2}{y}\right)^2}}$$
(4.116)

Calculando la parte real de la expresión anterior se obtiene la velocidad de perturbación axial u :

$$u = \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \hat{\Phi}_{cf}}{\partial x} \right) = \pm (U_{\infty} w''_{xx} + w''_{xt}) \sqrt{\left(s + \frac{r^2}{s}\right)^2 - \left(y + \frac{r^2}{y}\right)^2} \mp (U_{\infty} w'_x + w'_t) \frac{2 \frac{r}{y} \left(y + \frac{r^2}{y}\right) \frac{dr}{dx} - \left(s + \frac{r^2}{s}\right) \left[2 \frac{r}{s} \frac{dr}{dx} + \left(1 - \frac{r^2}{s^2}\right) \frac{ds}{dx}\right]}{\sqrt{\left(s + \frac{r^2}{s}\right)^2 - \left(y + \frac{r^2}{y}\right)^2}} \quad (4.117)$$

- Velocidades de perturbación transversales v y w :

$$\frac{d\hat{\Phi}_{cf}}{d\sigma} = v - i \cdot w = -i (U_{\infty} w'_x + w'_t) \left[\pm \frac{\left(y + \frac{r^2}{y}\right) \left(1 - \frac{r^2}{y^2}\right)}{i \sqrt{\left(s + \frac{r^2}{s}\right)^2 - \left(y + \frac{r^2}{y}\right)^2}} - 1 \right] \quad (4.118)$$

Igualando parte real e imaginaria:

$$v = \mp (U_{\infty} w'_x + w'_t) \frac{y \left(1 - \frac{r^4}{y^4}\right)}{\sqrt{\left(s + \frac{r^2}{s}\right)^2 - \left(y + \frac{r^2}{y}\right)^2}} \quad (4.119)$$

$$w = - (U_{\infty} w'_x + w'_t)$$

Coefficiente de presiones

Se detallan a continuación los órdenes de magnitud en la expresión del coeficiente de presiones formulado anteriormente; de esa forma se podrá obtener una expresión simplificada que se puede utilizar en el caso de cuerpos esbeltos.

Para estudiar los órdenes de magnitud, desarrollamos el coeficiente de presiones en la suma de los términos que los componen. El coeficiente de presiones estacionario (asociado al efecto espesor) se escribe:

$$C_{p0} = -2 \frac{\phi'_{0x}}{U_{\infty}} + \left(\frac{\phi'_{0x}}{U_{\infty}}\right)^2 + \left(\frac{\phi'_{0r}}{U_{\infty}}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\phi'_{0\theta}}{U_{\infty}}\right)^2 \quad (4.120)$$

y el orden de los términos que lo componen es:

$$\begin{aligned} \frac{\phi'_{0x}}{U_{\infty}} &\sim \frac{U_{\infty} (\bar{\varnothing}/L)^2 \ln \left(\frac{\bar{\varnothing}}{L}\right)}{U_{\infty}} \sim \left(\frac{\bar{\varnothing}}{L}\right)^2 \ln \left(\frac{\bar{\varnothing}}{L}\right) \sim \left(\frac{\varnothing_{max}}{L}\right)^2 \ln \left(\frac{\varnothing_{max}}{L}\right) = \tau^2 \ln \tau \\ \frac{\phi'_{0r}}{U_{\infty}} &\sim \frac{U_{\infty} (\bar{\varnothing}/L)}{U_{\infty}} \sim \frac{\bar{\varnothing}}{L} \sim \frac{\varnothing_{max}}{L} = \tau \\ \frac{\phi'_{0\theta}}{U_{\infty}} &= 0 \text{ (por condición de axilsimetría)} \end{aligned} \quad (4.121)$$

donde $\bar{\varnothing}$ es un diámetro medio del cuerpo (dimensión transversal característica) y τ es la denominada *relación de esbeltez*, que es igual al radio máximo del cuerpo adimensionalizado con su longitud, i.e., $\tau = \varnothing_{max}/L$. De esta forma se ha comprobado que el coeficiente de presiones estacionario se puede reducir a:

$$C_{p0} = -2 \frac{\phi'_{0x}}{U_{\infty}} + \left(\frac{\phi'_{0r}}{U_{\infty}}\right)^2 \quad (4.122)$$

donde se han retenido términos del orden de τ^2 y $\tau^2 \ln \tau$.

Por otro lado, el coeficiente de presiones no estacionario se puede desarrollar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 C_{p1} = -\frac{2}{U_\infty^2} \left(1 + \frac{1}{2} M_\infty^2 C_{p0} \right) & \left(U_\infty \phi'_x - U_\infty r \sin \theta w''_{xx} \phi'_{0x} + \phi'_{0x} \phi'_x - r \sin \theta w''_{xx} \phi'_{0x}{}^2 + \right. \\
 & + \phi'_{0r} \phi'_r + \frac{1}{r^2} \phi'_{0\theta} \phi'_\theta + U_\infty \sin \theta w'_x \phi'_{0r} + U_\infty \cos \theta w'_x \frac{\phi'_{0\theta}}{r} + \\
 & \left. + \sin \theta w'_t \phi'_{0r} + \cos \theta w'_t \frac{\phi'_{0\theta}}{r} - r \sin \theta w''_{xt} \phi'_{0x} + \phi'_t \right) \quad (4.123)
 \end{aligned}$$

Los órdenes de magnitud de los diferentes sumandos son:

$$\begin{aligned}
 U_\infty \phi'_x & \sim U_\infty^2 \frac{\bar{w}}{L} \frac{\bar{\varnothing}}{L} \left(1 + \frac{f_{\bar{w}}}{f_L} \right) \sim U_\infty^2 \frac{\bar{w}}{L} \frac{\bar{\varnothing}}{L} = U_\infty^2 \frac{\bar{w}}{L} \tau \\
 U_\infty r \sin \theta w''_{xx} \phi'_{0x} & \sim U_\infty \bar{\varnothing} \frac{\bar{w}}{L^2} U_\infty \tau^2 \ln \tau \sim U_\infty^2 \frac{\bar{w}}{L} \tau^3 \ln \tau = U_\infty^2 \frac{\bar{w}}{L} \tau (\tau^2 \ln \tau) \\
 \phi'_{0x} \phi'_x & \sim U_\infty^2 \tau^2 \ln \tau \frac{\bar{w}}{L} \tau = U_\infty^2 \frac{\bar{w}}{L} \tau^3 \ln \tau = U_\infty^2 \frac{\bar{w}}{L} \tau (\tau^2 \ln \tau) \\
 r \sin \theta w''_{xx} \phi'_{0x}{}^2 & \sim \bar{\varnothing} \frac{\bar{w}}{L^2} U_\infty^2 \tau^4 (\ln \tau)^2 \sim U_\infty^2 \frac{\bar{w}}{L} \tau^5 (\ln \tau)^2 = U_\infty^2 \frac{\bar{w}}{L} \tau (\tau^2 \ln \tau)^2 \\
 \phi'_{0r} \phi'_r & \sim U_\infty^2 \tau \frac{\bar{w}}{L} \left(1 + \frac{f_{\bar{w}}}{f_L} \right) \sim U_\infty^2 \frac{\bar{w}}{L} \tau \\
 \frac{1}{r^2} \phi'_{0\theta} \phi'_\theta & = 0 \text{ (por condición de axilsimetría)} \\
 U_\infty \sin \theta w'_x \phi'_{0r} & \sim U_\infty^2 \frac{\bar{w}}{L} \frac{\bar{w}}{L} \left(1 + \frac{f_{\bar{w}}}{f_L} \right) \sim U_\infty^2 \left(\frac{\bar{w}}{L} \right)^2 \\
 U_\infty \cos \theta w'_x \frac{\phi'_{0\theta}}{r} & = 0 \\
 \sin \theta w'_t \phi'_{0r} & \sim \frac{\bar{w}}{T_{\bar{w}}} U_\infty \frac{\bar{w}}{L} \left(1 + \frac{f_{\bar{w}}}{f_L} \right) \sim U_\infty^2 \frac{f_{\bar{w}}}{f_L} \left(\frac{\bar{w}}{L} \right)^2 \left(1 + \frac{f_{\bar{w}}}{f_L} \right) \sim U_\infty^2 \left(\frac{\bar{w}}{L} \right)^2 \\
 \cos \theta w'_t \frac{\phi'_{0\theta}}{r} & = 0 \\
 r \sin \theta w''_{xt} \phi'_{0x} & \sim \bar{\varnothing} \frac{\bar{w}}{L T_{\bar{w}}} U_\infty \tau^2 \ln \tau \sim U_\infty^2 \frac{f_{\bar{w}} \bar{w}}{f_L L} \tau^3 \ln \tau \sim U_\infty^2 \frac{\bar{w}}{L} \tau^3 \ln \tau = U_\infty^2 \frac{\bar{w}}{L} \tau (\tau^2 \ln \tau) \\
 \phi'_t & \sim U_\infty^2 \frac{f_{\bar{w}}}{f_L} \left(1 + \frac{f_{\bar{w}}}{f_L} \right) \frac{\bar{w}}{L} \tau \sim U_\infty^2 \frac{\bar{w}}{L} \tau
 \end{aligned}$$

siendo $f_L = 1/T_L = U_\infty/L$ una frecuencia característica de variación de magnitudes en dirección longitudinal (en dirección de vuelo) y $f_w = 1/T_w$ es una frecuencia característica del movimiento transversal (perpendicular a la dirección de vuelo) de pequeñas perturbaciones.

Los términos anteriores se pueden catalogar en alguno de los siguientes órdenes de magnitud:

- Orden $U_\infty^2 \frac{\bar{w}}{L} \tau$.
- Orden $U_\infty^2 \left(\frac{\bar{w}}{L} \right)^2$.
- Orden $U_\infty^2 \frac{\bar{w}}{L} \tau (\tau^2 \ln \tau)$.

- Orden $U_\infty^2 \frac{\bar{w}}{L} \tau (\tau^2 \ln \tau)^2$.

Asumiendo pequeñas perturbaciones \bar{w}/L del orden de la *relación de esbeltez* del cuerpo τ y teniendo en cuenta que $\tau^2 \ln \tau$ reduce un orden de magnitud el término al que multiplica⁷, el coeficiente de presiones se escribe:

$$C_{p1} = -2 \left[\frac{\phi'_x}{U_\infty} + \frac{\phi'_{0r}}{U_\infty} \frac{\phi'_r}{U_\infty} + \left(w'_x + \frac{w'_t}{U_\infty} \right) \frac{\phi'_{0r}}{U_\infty} \sin \theta + \frac{1}{U_\infty^2} \phi'_t \right]$$

Se puede distinguir entre cuerpo y aletas del vehículo:

- Aletas:

En el caso de las aletas situadas en el plano horizontal $z=0$, se cumple que $\theta = 0$ (aleta derecha) ó $\theta = \pi$ (aleta izquierda), por lo que $\sin \theta = 0$, y el coeficiente de presiones queda:

$$C_{p1,w} = -2 \left[\frac{\phi'_x}{U_\infty} + \frac{\phi'_{0r}}{U_\infty} \frac{\phi'_r}{U_\infty} + \left(w'_x + \frac{w'_t}{U_\infty} \right) \frac{\phi'_{0r}}{U_\infty} \sin \theta + \frac{1}{U_\infty^2} \phi'_t \right]$$

Las aletas horizontales se sitúan en el plano $y = 0$, por lo que $\theta = 0$ (aleta derecha) ó $\theta = \pi$ (aleta izquierda) y $\sin \theta = 0$. De esta forma, la expresión del coeficiente de presiones se simplifica:

$$C_{p1,w} = -2 \left[\frac{\phi'_x}{U_\infty} + \frac{\phi'_{0r}}{U_\infty} \frac{\phi'_r}{U_\infty} + \frac{1}{U_\infty^2} \phi'_t \right]$$

Las velocidades que intervienen en el coeficiente de presiones se han calculado anteriormente:

$$\begin{aligned} \phi'_{0r} = \phi'_{0y} &= U_\infty r \frac{dr}{dx} \frac{1}{y} \\ \phi'_x &= \mp U_\infty \left(w'_x + \frac{w'_t}{U_\infty} \right) \frac{2 \frac{r}{y} \left(y + \frac{r^2}{y} \right) \frac{dr}{dx} - \left(s + \frac{r^2}{s} \right) \left[2 \frac{r}{s} \frac{dr}{dx} + \left(1 - \frac{r^2}{s^2} \right) \frac{ds}{dx} \right]}{\sqrt{\left(s + \frac{r^2}{s} \right)^2 - \left(y + \frac{r^2}{y} \right)^2}} \pm \\ &\pm U_\infty \left(w''_{xx} + \frac{w''_{xt}}{U_\infty} \right) \sqrt{\left(s + \frac{r^2}{s} \right)^2 - \left(y + \frac{r^2}{y} \right)^2} \\ \phi'_r = \phi'_y &= \mp U_\infty \left(w'_x + \frac{w'_t}{U_\infty} \right) \frac{y \left(1 - \frac{r^4}{y^4} \right)}{\sqrt{\left(s + \frac{r^2}{s} \right)^2 - \left(y + \frac{r^2}{y} \right)^2}} \\ \phi'_t &= \pm U_\infty \left(w''_{xt} + \frac{w''_{tt}}{U_\infty} \right) \sqrt{\left(s + \frac{r^2}{s} \right)^2 - \left(y + \frac{r^2}{y} \right)^2} \end{aligned}$$

⁷La teoría de cuerpos esbeltos requiere que la *relación de esbeltez* del cuerpo no supere $\tau = 0,3$ (ver por ejemplo [Aré98b] y [Aré98a]). Para $\tau = 0,3$, el término $\tau^2 \ln \tau$ es del orden de 0,1, por lo que reduce en un orden de magnitud el término al que multiplica.

En variables adimensionales:

$$\begin{aligned}\frac{\phi'_{0y}}{U_\infty} &= \frac{\hat{r}}{\hat{y}} \frac{d\hat{r}}{d\hat{x}} \\ \frac{\phi'_x}{U_\infty} &= \mp \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{\hat{U}_\infty} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} \right) F_w(\hat{x}, \hat{y}) \pm \left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{1}{\hat{U}_\infty} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x} \partial \hat{t}} \right) G_w(\hat{x}, \hat{y}) \\ \frac{\phi'_{0y}}{U_\infty} \frac{\phi'_y}{U_\infty} &= \mp \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{\hat{U}_\infty} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} \right) H_w(\hat{x}, \hat{y}) \\ \frac{\phi'_t}{U_\infty^2} &= \pm \left(\frac{1}{\hat{U}_\infty} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x} \partial \hat{t}} + \frac{1}{\hat{U}_\infty^2} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{t}^2} \right) G_w(\hat{x}, \hat{y})\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}F_w(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{2 \left(\frac{\hat{r}^2}{\hat{y}^2} - \frac{\hat{r}^2}{\hat{s}^2} \right) \hat{r} \frac{d\hat{r}}{d\hat{x}} - \left(1 - \frac{\hat{r}^4}{\hat{s}^4} \right) \hat{s} \frac{d\hat{s}}{d\hat{x}}}{\sqrt{\left(\hat{s} + \frac{\hat{r}^2}{\hat{s}} \right)^2 - \left(\hat{y} + \frac{\hat{r}^2}{\hat{y}} \right)^2}} \\ G_w(\hat{x}, \hat{y}) &= \sqrt{\left(\hat{s} + \frac{\hat{r}^2}{\hat{s}} \right)^2 - \left(\hat{y} + \frac{\hat{r}^2}{\hat{y}} \right)^2} \\ H_w(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{\left(1 - \frac{\hat{r}^4}{\hat{y}^4} \right) \hat{r} \frac{d\hat{r}}{d\hat{x}}}{\sqrt{\left(\hat{s} + \frac{\hat{r}^2}{\hat{s}} \right)^2 - \left(\hat{y} + \frac{\hat{r}^2}{\hat{y}} \right)^2}}\end{aligned}$$

donde las magnitudes con dimensión de longitud se adimensionalizan con la longitud del vehículo L y el tiempo adimensional $\hat{t} = U_0/L \cdot t$, siendo U_0 una velocidad de referencia.

Sustituyendo las velocidades anteriores en el coeficiente de presiones:

$$C_{p1,w} = \pm 2 \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{\hat{U}_\infty} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} \right) (F_w + H_w) \mp 2 \left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} + 2 \frac{1}{\hat{U}_\infty} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x} \partial \hat{t}} + \frac{1}{\hat{U}_\infty^2} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{t}^2} \right) G_w$$

Sustituyendo la expresión del desplazamiento $\hat{w}(\hat{x}, \hat{t})$ en función de las coordenadas generalizadas:

$$\hat{w}(\hat{x}, \hat{t}) = \sum_{j=1}^m \psi_{j,b}(\hat{x}) \hat{\xi}_j(\hat{t})$$

el coeficiente de presiones se puede expresar:

$$C_{p1,w} = \sum_{j=1}^m C_{p1,w}^j$$

donde $C_{p1,w}^j$ es la contribución del modo $\psi_{j,b}$ al coeficiente de presiones sobre las aletas:

$$\begin{aligned}C_{p1,w}^j \Big|_{WjB} &= \pm 2 [\psi'_{j,b} (F_w + H_w) - \psi''_{j,b} G_w] \hat{\xi}_j \pm \\ &\pm 2 [\psi_{j,b} (F_w + H_w) - 2\psi'_{j,b} G_w] \frac{1}{\hat{U}_\infty} \frac{d\hat{\xi}_j}{d\hat{t}} \mp 2\psi_{j,b} G_w \frac{1}{\hat{U}_\infty^2} \frac{d^2 \hat{\xi}_j}{d\hat{t}^2}\end{aligned}$$

siendo $\psi'_{j,b} = d\psi_{j,b}/d\hat{x}$ y $\psi''_{j,b} = d^2\psi_{j,b}/d\hat{x}^2$ y se ha añadido el subíndice **WjB** para indicar que este coeficiente de presiones es el asociado a la contribución **WjB**.

■ Cuerpo:

Teniendo en cuenta las expresiones para las velocidades en el plano yz , la velocidad axial ϕ_r se escribe:

$$\begin{aligned}\phi_r &= v \cos \theta + w \sin \theta = \\ &= \mp U_\infty \left(w'_x + \frac{w'_t}{U_\infty} \right) \frac{4r \sin^2 \theta \cos \theta}{\sqrt{\left(s + \frac{s^2}{r} \right)^2 - 4r^2 \cos^2 \theta}} \cos \theta + \\ &+ U_\infty \left(w'_x + \frac{w'_t}{U_\infty} \right) \left[\pm \frac{4r \sin \theta \cos^2 \theta}{\sqrt{\left(s + \frac{s^2}{r} \right)^2 - 4r^2 \cos^2 \theta}} - 1 \right] \sin \theta = -U_\infty \left(w'_x + \frac{w'_t}{U_\infty} \right) \sin \theta\end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión del coeficiente de presiones:

$$\begin{aligned}C_{p1,b} &= -2 \left[\frac{\phi'_x}{U_\infty} + \frac{\phi'_{0r}}{U_\infty} \frac{\phi'_r}{U_\infty} + \left(w'_x + \frac{w'_t}{U_\infty} \right) \frac{\phi'_{0r}}{U_\infty} \sin \theta + \frac{1}{U_\infty^2} \phi'_t \right] = \\ &= -2 \left[\frac{\phi'_x}{U_\infty} - \frac{\phi'_{0r}}{U_\infty} \left(w'_x + \frac{w'_t}{U_\infty} \right) \sin \theta + \left(w'_x + \frac{w'_t}{U_\infty} \right) \frac{\phi'_{0r}}{U_\infty} \sin \theta + \frac{1}{U_\infty^2} \phi'_t \right] = \\ &= -2 \left(\frac{\phi'_x}{U_\infty} + \frac{1}{U_\infty^2} \phi'_t \right)\end{aligned}$$

Los términos ϕ'_x/U_∞ y ϕ'_t/U_∞^2 quedan:

$$\begin{aligned}\frac{\phi'_x}{U_\infty} &= \left(w''_{xx} + \frac{w''_{xt}}{U_\infty} \right) \left[\pm \sqrt{\left(s + \frac{r^2}{s} \right)^2 - 4r^2 \cos^2 \theta} - r \sin \theta \right] \pm \\ &\mp \left(w'_x + \frac{w'_t}{U_\infty} \right) \frac{4r \cos^2 \theta \frac{dr}{dx} - \left(s + \frac{r^2}{s} \right) \left[2 \frac{r}{s} \frac{dr}{dx} + \left(1 - \frac{r^2}{s^2} \right) \frac{ds}{dx} \right]}{\sqrt{\left(s + \frac{r^2}{s} \right)^2 - 4r^2 \cos^2 \theta}} \\ \frac{\phi'_t}{U_\infty^2} &= \left(\frac{w''_{xt}}{U_\infty} + \frac{w''_{tt}}{U_\infty^2} \right) \left[\pm \sqrt{\left(s + \frac{r^2}{s} \right)^2 - 4r^2 \cos^2 \theta} - r \sin \theta \right]\end{aligned}$$

Agrupando términos, el coeficiente de presiones se escribe:

$$\begin{aligned}C_{p1,b} &= \pm 2 \left(w'_x + \frac{w'_t}{U_\infty} \right) \frac{4r \cos^2 \theta \frac{dr}{dx} - \left(s + \frac{r^2}{s} \right) \left[2 \frac{r}{s} \frac{dr}{dx} + \left(1 - \frac{r^2}{s^2} \right) \frac{ds}{dx} \right]}{\sqrt{\left(s + \frac{r^2}{s} \right)^2 - 4r^2 \cos^2 \theta}} + \\ &- 2 \left(w''_{xx} + 2 \frac{w''_{xt}}{U_\infty} + \frac{w''_{tt}}{U_\infty^2} \right) \left[\pm \sqrt{\left(s + \frac{r^2}{s} \right)^2 - 4r^2 \cos^2 \theta} - r \sin \theta \right]\end{aligned}$$

Puede comprobarse que el coeficiente de presiones en el contorno superior del cuerpo, que denotaremos con $C_{p1,b}^+$, es igual y de signo contrario al coeficiente de presiones en el contorno inferior $C_{p1,b}^-$, indicando con el superíndice " + " el contorno superior del cuerpo (i.e., $z \geq 0$) y con el superíndice " - " el contorno inferior del mismo (i.e., $z \leq 0$).

Se puede expresar el coeficiente de presiones en variables adimensionales:

$$C_{p1,b} = \pm 2 \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{\hat{U}_\infty} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} \right) \frac{2 \frac{\hat{r}}{\hat{s}} \left[\cos 2\theta - \left(\frac{\hat{r}}{\hat{s}} \right)^2 \right] \frac{d\hat{r}}{d\hat{x}} - \left[1 - \left(\frac{\hat{r}}{\hat{s}} \right)^4 \right] \frac{d\hat{s}}{d\hat{x}}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{\hat{r}}{\hat{s}} \right)^2 \right]^2 - 4 \left(\frac{\hat{r}}{\hat{s}} \right)^2 \cos^2 \theta}} +$$

$$- 2 \left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} + 2 \frac{1}{\hat{U}_\infty} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x} \partial \hat{t}} + \frac{1}{\hat{U}_\infty^2} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{t}^2} \right) \left[\hat{s} \left(\pm \sqrt{\left[1 + \left(\frac{\hat{r}}{\hat{s}} \right)^2 \right]^2 - 4 \left(\frac{\hat{r}}{\hat{s}} \right)^2 \cos^2 \theta} - \frac{\hat{r}}{\hat{s}} \sin \theta \right) \right]$$

En el contorno superior, el coeficiente de presiones queda:

$$C_{p1,b}^+ = 2 \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{\hat{U}_\infty} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} \right) F_b(\hat{x}, \theta) - 2 \left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} + 2 \frac{1}{\hat{U}_\infty} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x} \partial \hat{t}} + \frac{1}{\hat{U}_\infty^2} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{t}^2} \right) G_b(\hat{x}, \theta)$$

donde:

$$F_b(\hat{x}, \theta) = \frac{2 \frac{\hat{r}}{\hat{s}} \left[\cos 2\theta - \left(\frac{\hat{r}}{\hat{s}} \right)^2 \right] \frac{d\hat{r}}{d\hat{x}} - \left[1 - \left(\frac{\hat{r}}{\hat{s}} \right)^4 \right] \frac{d\hat{s}}{d\hat{x}}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{\hat{r}}{\hat{s}} \right)^2 \right]^2 - 4 \left(\frac{\hat{r}}{\hat{s}} \right)^2 \cos^2 \theta}}$$

$$G_b(\hat{x}, \theta) = \hat{s} \left(\sqrt{\left[1 + \left(\frac{\hat{r}}{\hat{s}} \right)^2 \right]^2 - 4 \left(\frac{\hat{r}}{\hat{s}} \right)^2 \cos^2 \theta} - \frac{\hat{r}}{\hat{s}} \sin \theta \right)$$

Sustituyendo la expresión del desplazamiento $\hat{w}(\hat{x}, \hat{t})$ en función de las coordenadas y formas modales, $\hat{\xi}$ y $\psi_{j,b}$ (se están analizando modos del tipo **WjB**) respectivamente:

$$\hat{w}(\hat{x}, \hat{t}) = \sum_{j=1}^m \psi_{j,b}(\hat{x}) \xi_j(\hat{t})$$

el coeficiente de presiones en el contorno superior del cuerpo queda:

$$C_{p1,b}^+ = \sum_{j=1}^m C_{p1,b}^{j(+)}$$

donde $C_{p1,b}^{j(+)}$ es la contribución del modo $\psi_{j,b}$ al coeficiente de presiones:

$$C_{p1,b}^{j(+)} \Big|_{WjB} = 2 \left(\psi'_{j,b} \hat{\xi} + \psi_{j,b} \frac{1}{\hat{U}_\infty} \frac{d\hat{\xi}}{d\hat{t}} \right) F_b - 2 \left(\psi''_{j,b} \hat{\xi}_j + 2 \frac{1}{\hat{U}_\infty} \psi'_{j,b} \frac{d\hat{\xi}_j}{d\hat{t}} + \psi_{j,b} \frac{1}{\hat{U}_\infty^2} \frac{d^2 \hat{\xi}_j}{d^2 \hat{t}} \right) G_b =$$

$$= 2 (\psi'_{j,b} F_b - \psi''_{j,b} G_b) \hat{\xi}_j + 2 (\psi_{j,b} F_b - 2 \psi'_{j,b} G_b) \frac{1}{\hat{U}_\infty} \frac{d\hat{\xi}_j}{d\hat{t}} - 2 \psi_{j,b} G_b \frac{1}{\hat{U}_\infty^2} \frac{d^2 \hat{\xi}_j}{d^2 \hat{t}}$$

siendo $\psi'_{j,b} = d\psi_{j,b}/d\hat{x}$ y $\psi''_{j,b} = d^2\psi_{j,b}/d^2\hat{x}$ y se ha añadido el subíndice **WjB** para indicar que este coeficiente de presiones esta asociado a la contribución **WjB**.

Fuerzas Aerodinámicas Generalizadas

- Aletas:

Las fuerzas aerodinámicas generalizadas sobre las aletas se escriben:

$$\begin{aligned} Q_{w,i}|_{WjB} &= q_\infty \iint_{S_w} [C_{p,w}^+(x,y) - C_{p,w}^-(x,y)] \psi_{i,w}(x) dS = \\ &= q_\infty \iint_{S_w} \Delta C_{p,w}(x,y) \psi_{i,w}(x) dS = q_\infty \iint_{S_w} \Delta C_{p1,w}|_{WjB} \psi_{i,w}(x) dS = \\ &= 2q_\infty \iint_{S_w} C_{p1,w}^+|_{WjB} \psi_{i,w}(x) dS \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que $C_{p1,w}^-|_{WjB} = -C_{p1,w}^+|_{WjB}$.

Al considerarse modos simétricos respecto al plano de simetría xz , la fuerza generalizada total se puede expresar como el doble de la integración extendida a una de las aletas (izquierda o derecha):

$$Q_{w,i}|_{WjB} = 4q_\infty \iint_{S_w/2} C_{p1,w}^+|_{WjB} \psi_{i,w}(x) dS$$

Sustituyendo el coeficiente de presiones desarrollado en el apartado anterior, la contribución del modo $\psi_{j,b}$ a la fuerza generalizada sobre las aletas es:

$$\begin{aligned} \frac{Q_{w,ij}|_{WjB}}{q_\infty L^2} &= 4 \iint_{S_w/2} 2 [\psi'_{j,b}(F_w + H_w) - \psi''_{j,b} G_w] \psi_{i,w} d\hat{x} d\hat{y} \cdot \hat{\xi}_j + \\ &+ 4 \iint_{S_w/2} 2 [\psi_{j,b}(F_w + H_w) - 2\psi'_{j,b} G_w] \psi_{i,w} d\hat{x} d\hat{y} \cdot \frac{1}{\hat{U}_\infty} \frac{d\hat{\xi}_j}{d\hat{t}} + \\ &+ 4 \iint_{S_w/2} -2\psi_{j,b} G_w \psi_{i,w} d\hat{x} d\hat{y} \cdot \frac{1}{\hat{U}_\infty^2} \frac{d^2 \hat{\xi}_j}{d\hat{t}^2} \end{aligned}$$

por lo que la fuerza generalizada i sobre las aletas queda:

$$\frac{Q_{w,i}|_{WjB}}{q_\infty L^2} = \sum_{j=1}^m \frac{Q_{w,ij}|_{WjB}}{q_\infty L^2} = \sum_{j=1}^m q_{w,\xi_i \xi_j}|_{WjB} \hat{\xi}_j + q_{w,\xi_i \dot{\xi}_j}|_{WjB} \frac{1}{\hat{U}_\infty} \dot{\hat{\xi}}_j + q_{w,\xi_i \ddot{\xi}_j}|_{WjB} \frac{1}{\hat{U}_\infty^2} \ddot{\hat{\xi}}_j$$

donde $\dot{\hat{\xi}}_j = d\hat{\xi}_j/d\hat{t}$ y $\ddot{\hat{\xi}}_j = d^2 \hat{\xi}_j/d\hat{t}^2$.

- Cuerpo:

Las fuerzas aerodinámicas generalizadas sobre el cuerpo se escriben:

$$\begin{aligned} Q_{b,i}|_{WjB} &= q_\infty \int_0^L \left[\int_0^{2\pi} C_{p,b}|_{WjB} \sin \theta d\theta \right] r(x) \psi_{i,b}(x) dx = \\ &= q_\infty \int_0^L \left[\int_0^{2\pi} (C_{p0,b} \sin \theta + C_{p1,b}|_{WjB} \sin \theta) d\theta \right] r(x) \psi_{i,b}(x) dx = \\ &= q_\infty \int_0^L \left[\int_0^{2\pi} C_{p1,b}|_{WjB} \sin \theta d\theta \right] r(x) \psi_{i,b}(x) dx = \\ &= 2q_\infty \int_0^L \left[\int_0^\pi C_{p1,b}^+|_{WjB} \sin \theta d\theta \right] r(x) \psi_{i,b}(x) dx \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que la integración del coeficiente asociado al problema de espesor $C_{p0,b}$ es nula, y que la integración del coeficiente de presiones $C_{p1,b}|_{WjB}$ extendida al contorno del cuerpo se puede expresar como el doble de la integral extendida al contorno superior. A continuación se detallan los cambios de variable realizados en la integral extendida al contorno inferior:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} C_{p1,b}|_{WjB} \sin \theta d\theta &= \int_0^\pi C_{p1,b}^+|_{WjB} \sin \theta d\theta + \int_\pi^{2\pi} C_{p1,b}^-|_{WjB} \sin \theta d\theta = \\ &\stackrel{(\theta=\pi+\theta_0)}{=} \int_0^\pi C_{p1,b}^+|_{WjB}(\hat{x}, \theta) \sin \theta d\theta - \int_0^\pi C_{p1,b}^-|_{WjB}(\hat{x}, \pi + \theta_0) \sin \theta_0 d\theta_0 = \\ &\stackrel{C_{p1,b}^-|_{WjB}(\hat{x}, \pi+\theta_0) = -C_{p1,b}^+|_{WjB}(\hat{x}, \pi-\theta_0)}{=} \int_0^\pi C_{p1,b}^+|_{WjB}(\hat{x}, \theta) \sin \theta d\theta + \int_0^\pi C_{p1,b}^+|_{BW}(\hat{x}, \pi - \theta_0) \sin \theta_0 d\theta_0 = \\ &\stackrel{(\theta=\pi-\theta_0)}{=} \int_0^\pi C_{p1,b}^+|_{WjB}(\hat{x}, \theta) \sin \theta d\theta + \int_0^\pi C_{p1,b}^+|_{WjB}(\hat{x}, \theta) \sin \theta d\theta = 2 \int_0^\pi C_{p1,b}^+|_{WjB} \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

Sustituyendo el coeficiente de presiones en función de las coordenadas generalizadas $\hat{\xi}_j$, la contribución del modo $\psi_{j,b}$ a las fuerzas generalizadas es:

$$\begin{aligned} \frac{Q_{b,ij}|_{WjB}}{q_\infty L^2} &= 2 \left[\int_0^1 \hat{r} \psi_{i,b} d\hat{x} \int_0^\pi 2 (\psi'_{j,b} F_b - \psi''_{j,b} G_b) \sin \theta d\theta \right] \hat{\xi}_j + \\ &+ 2 \left[\int_0^1 \hat{r} \psi_{i,b} d\hat{x} \int_0^\pi 2 (\psi_{j,b} F_b - 2\psi'_{j,b} G_b) \sin \theta d\theta \right] \frac{1}{\hat{U}_\infty} \frac{d\hat{\xi}_j}{d\hat{t}} + \\ &+ 2 \left[\int_0^1 \hat{r} \psi_{i,b} d\hat{x} \int_0^\pi -2\psi_{j,b} G_b \sin \theta d\theta \right] \frac{1}{\hat{U}_\infty^2} \frac{d^2 \hat{\xi}_j}{d\hat{t}^2} \end{aligned}$$

de forma que la fuerza generalizadas total es:

$$\frac{Q_{b,i}|_{WjB}}{q_\infty L^2} = \sum_{j=1}^m \frac{Q_{b,ij}|_{WjB}}{q_\infty L^2} = \sum_{j=1}^m q_{b,\xi_i \xi_j} |_{WjB} \hat{\xi}_j + q_{b,\xi_i \dot{\xi}_j} |_{WjB} \frac{1}{\hat{U}_\infty} \dot{\hat{\xi}}_j + q_{b,\xi_i \ddot{\xi}_j} |_{WjB} \frac{1}{\hat{U}_\infty^2} \ddot{\hat{\xi}}_j$$

donde $\dot{\hat{\xi}}_j = d\hat{\xi}_j/d\hat{t}$ y $\ddot{\hat{\xi}}_j = d^2\hat{\xi}_j/d\hat{t}^2$.

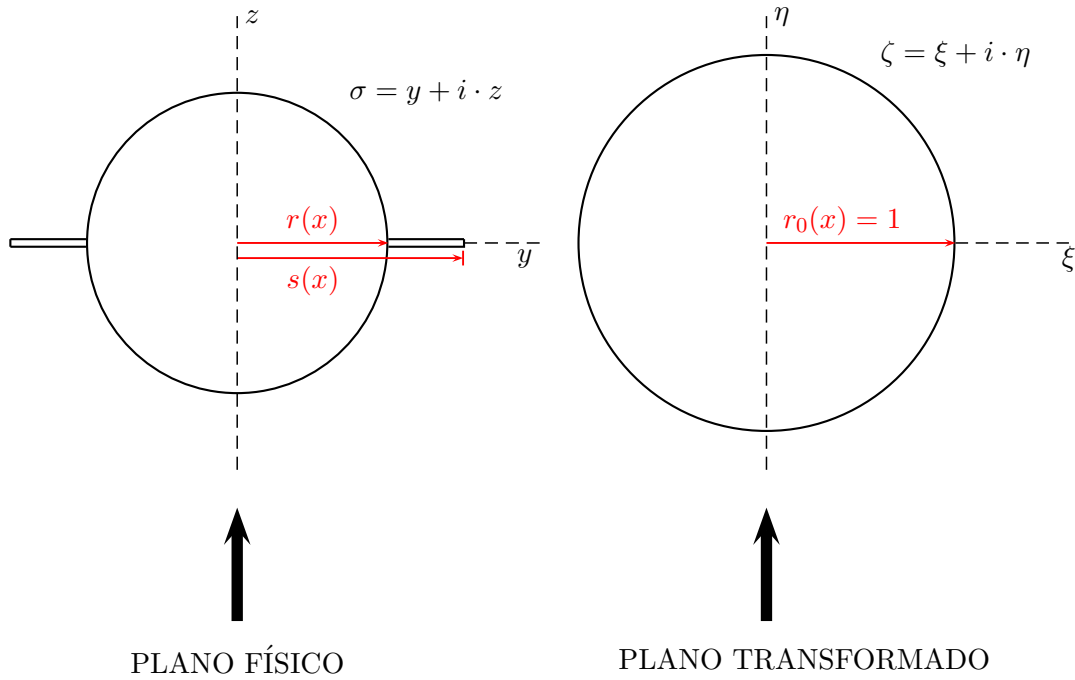
4.8.4. Flujo cruzado no estacionario: desplazamiento **WrB**.

El desplazamiento **WrB**, que se han denotado anteriormente con $w_{wb}(x; t)$, corresponde el movimiento relativo de las aletas con respecto al cuerpo. Si se realiza un corte por un plano $x = x_0$, la sección circular del cuerpo permanece inmóvil en el tiempo, mientras que las aletas (izquierda y derecha a la vez) se desplazan verticalmente la cantidad $w_{wb}(x; t)$, positiva en dirección opuesta al eje z de los *ejes cuerpo*.

La formulación del *flujo cruzado* asociado al desplazamiento **WrB** requiere una transformación en el plano complejo distinta a la necesaria en el desplazamiento **WjB**. Este es el motivo por el que se separan las dos contribuciones: el desplazamiento **WjB** formulado en el apartado anterior, y el desplazamiento **WrB** que se desarrolla en este apartado.

El desplazamiento relativo $w_{wb}(x; t)$ en formulación modal se expresa de la siguiente forma:

$$w_{wb}(x; t) = \sum_{i=1}^m \psi_{i,wb}(x) \xi_i(t) \quad (4.124)$$


 Figura 4.4: Planos *físico* y *transformado* en el problema de *flujo cruzado*.

donde $\psi_{i,wb}(x)$ es la parte del modo i que incluye movimiento relativo de la aleta respecto al cuerpo. Como ya se explicó anteriormente, el modo $\psi_i(x)$ se formula como la combinación lineal de $\psi_{i,b}(x)$ (contribución al desplazamiento \mathbf{WjB} desarrollado en el apartado anterior) y $\psi_{i,wb}(x)$ (contribución al desplazamiento \mathbf{WrB}):

$$\psi_i(x) = \psi_{i,b}(x) + \psi_{i,wb}(x) \quad (4.125)$$

donde $\psi_{i,wb}(x)$ es idénticamente nulo en las secciones del cuerpo y $\psi_{i,wb}(x) = \psi_{i,w}(x) - \psi_{i,b}(x)$ en las aletas.

Transformación Conforme

La transformación conforme entre el plano físico σ y el plano transformado ζ responde a la siguiente relación implícita:

$$\sigma + \frac{r^2}{\sigma} = \frac{1}{2} \left(s + \frac{r^2}{s} \right) \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) = \frac{1}{2} A \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \quad (4.126)$$

donde:

$$\sigma = y + i \cdot z$$

$$\zeta = \xi + i \cdot \eta$$

$$r = r(x) = \text{radio del cuerpo en la sección de coordenada } x.$$

$$s = s(x) = \text{semienvergadura de la aleta en la sección de coordenada } x.$$

$$A = s + \frac{r^2}{s}$$

Despejando la variable compleja $\zeta = \xi + i \cdot \eta$ del plano transformado se podrá averiguar en qué se transforma la sección cuerpo/ala física. Operando en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} \frac{2}{A} \left(\sigma + \frac{r^2}{\sigma} \right) &= \zeta + \frac{1}{\zeta} = \frac{\zeta^2 + 1}{\zeta} \Rightarrow \zeta^2 - \frac{2}{A} \left(\sigma + \frac{r^2}{\sigma} \right) \zeta + 1 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \zeta = \xi + i\eta &= \frac{1}{A} \left(\sigma + \frac{r^2}{\sigma} \right) \pm \sqrt{\frac{\left(\sigma + \frac{r^2}{\sigma} \right)^2}{A^2} - 1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \zeta = \xi + i\eta &= \frac{\sigma + \frac{r^2}{\sigma}}{s + \frac{r^2}{s}} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma + \frac{r^2}{\sigma}}{s + \frac{r^2}{s}} \right)^2 - 1} \end{aligned} \quad (4.127)$$

Sobre la superficie del cuerpo la variable física σ se puede escribir $\sigma = r e^{i\theta}$, mientras que en la superficie de las aletas (situadas en $z = 0$) la variable compleja σ coincide con y , i.e., $\sigma = y$. Por tanto, dependiendo de cuerpo o aletas, la transformación se podrá escribir:

- Transformación del contorno del cuerpo.

Sustituyendo $\sigma = r e^{i\theta}$ en la expresión de ζ :

$$\zeta = \xi + i\eta = \frac{2r}{s + \frac{r^2}{s}} \cos \theta \pm i \sqrt{1 - \left(\frac{2r}{s + \frac{r^2}{s}} \right)^2 \cos^2 \theta} \quad (4.128)$$

donde puede comprobarse que la fracción $2r/(s + r^2/s)$ es menor o igual que 1 ya que $s \geq r$. Por otro lado, se cumple que la norma de la variable compleja ζ es $|\zeta| = 1$, lo que demuestra que el contorno del cuerpo pasa a ser un arco del círculo unidad en el plano transformado.

- Transformación de la superficie de las aletas.

Sustituyendo $\sigma = y$ en la expresión de ζ :

$$\zeta = \xi + i\eta = \frac{y + \frac{r^2}{y}}{s + \frac{r^2}{s}} \pm i \sqrt{1 - \left(\frac{y + \frac{r^2}{y}}{s + \frac{r^2}{s}} \right)^2} \quad (4.129)$$

Puede comprobarse que la fracción $(y + r^2/y)/(s + r^2/s)$ es menor o igual que 1 cuando $y \geq s$, desigualdad que se cumple cuando la variable y recorre el contorno de las aletas. Por otro lado, se puede comprobar que el módulo del complejo ζ es $|\zeta| = 1$, lo que demuestra que el contorno de las aletas en el plano físico σ pasa a ser un arco de la circunferencia de radio unidad en el plano transformado ζ .

Los sectores de la circunferencia de radio unidad en los que se transforman el cuerpo y las aletas son:

1. Extradós ala derecha: la variable σ varía desde $\sigma = s$ a $\sigma = r$. Por tanto, la variable compleja ζ

en el plano transformado es:

$$\sigma = s \Rightarrow \zeta = 1$$

$$\sigma = r \Rightarrow \zeta = \frac{2r}{s + \frac{r^2}{s}} + i \sqrt{1 - \left(\frac{2r}{s + \frac{r^2}{s}} \right)^2} = \cos \gamma + i \cdot \sin \gamma$$

Por tanto, el extradós del ala derecha (o *right upper surface*) se convierte en el arco de circunferencia de radio unidad comprendido entre $\beta = 0$ (que corresponde a $\zeta = 1$) y $\beta = \gamma$, donde γ es el ángulo tal que:

$$\cos \gamma = \frac{2r}{s + \frac{r^2}{s}} \quad (4.130)$$

$$\sin \gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{2r}{s + \frac{r^2}{s}} \right)^2} \quad (4.131)$$

2. Intradós ala derecha: la variable σ varía desde $\sigma = r$ a $\sigma = s$. La variable compleja ζ en el plano transformado es:

$$\sigma = s \Rightarrow \zeta = 1$$

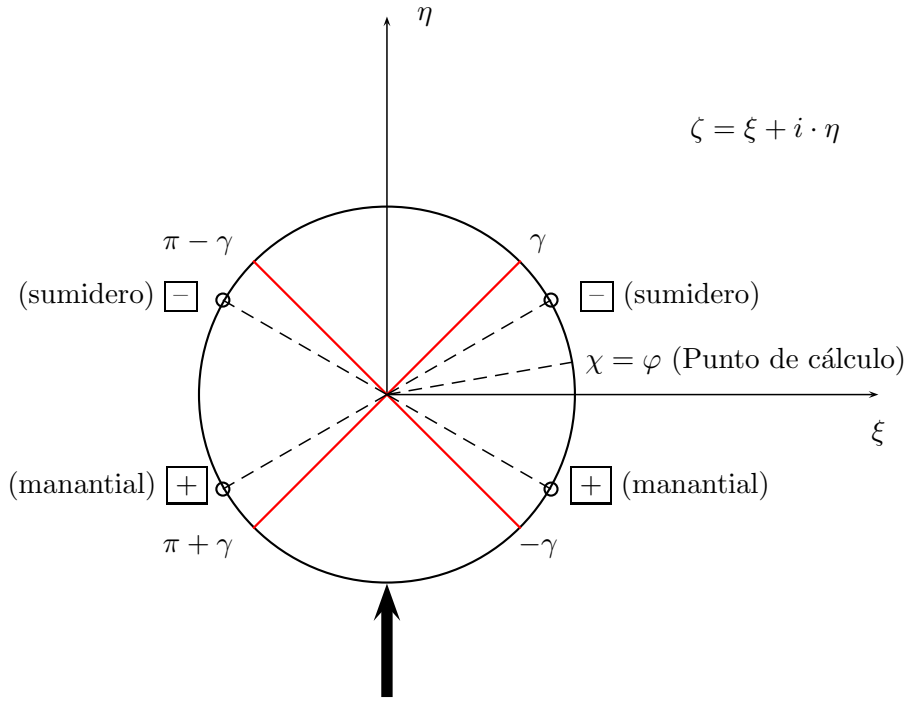
$$\sigma = r \Rightarrow \zeta = \frac{2r}{s + \frac{r^2}{s}} - i \sqrt{1 - \left(\frac{2r}{s + \frac{r^2}{s}} \right)^2} = \cos \gamma - i \cdot \sin \gamma$$

Por tanto, el intradós del ala derecha (o *right lower surface*) se convierte en el arco de la circunferencia de radio unidad comprendido entre $\beta = -\gamma$ y $\beta = 0$ (que corresponde a $\zeta = 1$), siendo γ el ángulo definido en el punto anterior para el extradós del ala.

3. Extradós ala izquierda ($-s \leq \sigma \leq -r$): se calcula de forma similar al extradós del ala derecha.
4. Intradós ala izquierda ($-s \leq \sigma \leq -r$): se calcula de forma similar al intradós del ala izquierda.
5. Contorno superior del cuerpo ($0 \leq \sigma \leq \pi$): en el plano transformado queda reducido al arco de la circunferencia de radio unidad comprendido entre γ y $\pi - \gamma$.
6. Contorno inferior del cuerpo ($\pi \leq \sigma \leq 2\pi$): en el plano transformado queda reducido al arco de la circunferencia de radio unidad comprendido entre $\pi + \gamma$ y $2\pi - \gamma$.

Potencial de perturbación

Se puede comprobar (ver [Kat91] y [Nie60]) que una distribución de manantiales y sumideros (i.e., dobletes) a lo largo de la envergadura de las aletas induce un campo de velocidades que cumple las condiciones de contorno. Se demuestra que la *intensidad por unidad de longitud* de los manantiales y sumideros coincide con la velocidad de perturbación en las aletas según el eje z (ejes cuerpo) en el plano


 Figura 4.5: Potencial de perturbación en el *plano transformado*.

de flujo cruzado. Esta velocidad de perturbación, que denotaremos por $W_z(x; t)$ por simplicidad de notación, es una condición de contorno determinada por el movimiento relativo de las aletas respecto al cuerpo $w_{wb}(x; t)$. Teniendo en cuenta ala derecha e izquierda, el diferencial del potencial queda:

$$d\hat{\Phi}_{cf} = -\frac{\left(U_\infty \frac{\partial w_{wb}}{\partial x} + \frac{\partial w_{wb}}{\partial t}\right) dy}{\pi} \left[\ln \frac{\zeta - e^{i\chi}}{\zeta - e^{-i\chi}} + \ln \frac{\zeta - e^{i(\pi-\chi)}}{\zeta - e^{-i(\pi-\chi)}} \right] \quad (4.132)$$

El potencial de flujo cruzado ($x = cte$) se calcula directamente en el contorno $\zeta = e^{i\varphi}$ ya que la velocidad asociada al mismo resulta como derivada de este potencial respecto a la dirección tangencial al cuerpo. La velocidad perpendicular al contorno es nula y por tanto no se evalúa el potencial a lo largo de dirección radial del plano transformado. Posteriormente se verá que la componente radial de la velocidad proviene de variaciones del potencial respecto a x , es decir, variaciones del potencial entre distintos planos transversales.

Sustituyendo $\zeta = e^{i\varphi}$, los términos logarítmicos de la fórmula anterior se expresan:

$$\begin{aligned} L_1 &= \ln \frac{\zeta - e^{i\chi}}{\zeta - e^{-i\chi}} = \ln \frac{e^{i\varphi} - e^{i\chi}}{e^{i\varphi} - e^{-i\chi}} = \ln e^{i\chi} \frac{e^{i\varphi} - e^{i\chi}}{e^{i(\varphi+\chi)} - 1} = \\ &= \ln e^{i\chi} \frac{(e^{i\varphi} - e^{i\chi})(e^{-i(\varphi+\chi)} - 1)}{(e^{i(\varphi+\chi)} - 1)(e^{-i(\varphi+\chi)} - 1)} = \ln \frac{e^{-i\chi} - e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} + e^{i\chi}}{2 - 2\cos(\varphi + \chi)} + i\chi = \\ &= \ln \frac{2(-\cos \varphi + \cos \chi)}{2 - 2\cos(\varphi + \chi)} + i\chi = \ln \frac{\cos \chi - \cos \varphi}{1 - \cos(\varphi + \chi)} + i\chi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_2 &= \ln \frac{\zeta - e^{i(\pi-\chi)}}{\zeta - e^{-i(\pi-\chi)}} = \ln \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\chi}}{e^{i\varphi} + e^{i\chi}} = \ln e^{-i\chi} \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\chi}}{e^{i(\varphi-\chi)} + 1} = \\
 &= \ln e^{-i\chi} \frac{(e^{i\varphi} + e^{-i\chi})(e^{-i(\varphi-\chi)} + 1)}{(e^{i(\varphi-\chi)} + 1)(e^{-i(\varphi-\chi)} + 1)} = \ln \frac{e^{i\chi} + e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} + e^{-i\chi}}{2 + 2\cos(\varphi - \chi)} - i\chi = \\
 &= \ln \frac{2(\cos \varphi + \cos \chi)}{2 + 2\cos(\varphi - \chi)} - i\chi = \ln \frac{\cos \chi + \cos \varphi}{1 + \cos(\varphi - \chi)} - i\chi
 \end{aligned}$$

Las singularidades tipo *manantial* se encuentran situadas en $-\chi$ y $\pi + \chi$, mientras que las singularidades tipo *sumidero* se sitúan en χ y $\pi - \chi$. Dependiendo del punto de cálculo del potencial φ , los términos logarítmicos anteriores pueden llegar a tener que evaluarse en números negativos, una operación que afortunadamente existe en el plano complejo. Sin embargo, de cara a una integración numérica posterior, conviene formular las ecuaciones de forma que los logaritmos se evalúen en número positivos. Las siguientes expresiones desarrollan dicha formulación dependiendo de la zona en la que se evalúa el potencial:

1. Contorno de aleta derecha:

$$-\chi < \varphi < \chi \Rightarrow \cos \chi - \cos \varphi < 0 \Rightarrow \cos \chi - \cos \varphi = |\cos \chi - \cos \varphi| e^{\pm i\pi}$$

El primer término logarítmico puede expresarse:

$$L_1 = \ln \frac{\cos \chi - \cos \varphi}{1 - \cos(\varphi + \chi)} + i\chi = \ln \frac{|\cos \chi - \cos \varphi|}{1 - \cos(\varphi + \chi)} + i(\chi \pm \pi) \quad (4.133)$$

2. Contorno de aleta izquierda:

$$\pi - \chi < \varphi < \pi + \chi \Rightarrow \cos \chi + \cos \varphi < 0 \Rightarrow \cos \chi + \cos \varphi = |\cos \chi + \cos \varphi| e^{\pm i\pi}$$

En este caso, el segundo término logarítmico es el que se puede expresar como:

$$L_2 = \ln \frac{\cos \chi + \cos \varphi}{1 + \cos(\varphi - \chi)} + i\chi = \ln \frac{|\cos \chi + \cos \varphi|}{1 + \cos(\varphi - \chi)} - i(\chi \pm \pi) \quad (4.134)$$

3. Contorno de cuerpo superior o inferior: en este caso ambos términos $\cos \chi - \cos \varphi$ y $\cos \chi + \cos \varphi$ (del primer y segundo logaritmo respectivamente) son positivos y por tanto la evaluación numérica es directa.

Por tanto, el potencial se puede expresar como:

$$d\hat{\Phi}_{cf} = -\frac{W_z(x;t)dy}{\pi} \left[\ln \frac{|\cos \chi - \cos \varphi|}{1 - \cos(\varphi + \chi)} + \ln \frac{|\cos \chi + \cos \varphi|}{1 + \cos(\varphi - \chi)} + i \cdot C \right] \quad (4.135)$$

donde $i \cdot C$ es un término constante múltiplo de π que se debe añadir cuando se recorre el contorno de las aletas. Este término $i \cdot C$ determina la *parte imaginaria* del potencial de perturbación y por tanto el potencial de velocidades (la parte real del potencial complejo) se expresa:

$$Re \left(d\hat{\Phi}_{cf} \right) = -\frac{W_z(x;t)dy}{\pi} \left[\ln \frac{|\cos \chi - \cos \varphi|}{1 - \cos(\varphi + \chi)} + \ln \frac{|\cos \chi + \cos \varphi|}{1 + \cos(\varphi - \chi)} \right] \quad (4.136)$$

siendo $W_z(x;t) = U_\infty \partial w_{wb}(x;t)/\partial x + \partial w_{wb}(x;t)/\partial t$ la velocidad según z en el plano de flujo cruzado inducida por el movimiento y/o deformación relativa de las aletas respecto al cuerpo, i.e., inducida por los desplazamientos relativos $w_{wb}(x;t)$.

Por último, el potencial $Re(\hat{\Phi}_{cf})$ resulta de la integral extendida a todas singularidades (manantiales y sumideros) distribuidas en las aletas:

$$Re(\hat{\Phi}_{cf}) = -\frac{W_z(x;t)dy}{\pi} \int_{y=r}^{y=s} \left[\ln \frac{|\cos \chi - \cos \varphi|}{1 - \cos(\varphi + \chi)} + \ln \frac{|\cos \chi + \cos \varphi|}{1 + \cos(\varphi - \chi)} \right] dy \quad (4.137)$$

Sólo queda expresar la coordenada y en función de la variable de integración χ . Para ello se acude a la relación entre las variables del *plano físico* y *plano transformado*:

$$\sigma + \frac{r^2}{\sigma} = \frac{1}{2} \left(s + \frac{r^2}{s} \right) \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) = \frac{r}{\cos \gamma} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) = 2r \frac{\cos \chi}{\cos \gamma} \quad (4.138)$$

donde se ha tenido en cuenta que $\zeta = e^{i\chi}$. Despejando la variable $\sigma = y + iz$ del plano físico:

$$\left(\frac{\sigma}{r} \right)^2 - 2 \frac{\cos \chi}{\cos \gamma} \left(\frac{\sigma}{r} \right) + 1 = 0 \Rightarrow \frac{\sigma}{r} = \frac{y}{r} + i \frac{z}{r} = \frac{\cos \chi}{\cos \gamma} \pm \sqrt{\frac{\cos^2 \chi}{\cos^2 \gamma} - 1} \quad (4.139)$$

y, teniendo en cuenta que $\cos \gamma \leq \cos \chi$:

$$\frac{y}{r} = \frac{1}{\cos \gamma} \left(\cos \chi + \sqrt{\cos^2 \chi - \cos^2 \gamma} \right) \quad (4.140)$$

donde el signo positivo está asociado a la aleta derecha, que es sobre la que se extiende la integral del potencial. La raíz cuadrada anterior siempre existe y es real ya que $\cos \gamma \leq \cos \chi$.

Volviendo a la ecuación del potencial y sustituyendo el diferencial dy teniendo en cuenta la expresión anterior⁸:

$$Re(\hat{\Phi}_{cf}) = -\frac{W_z(x;t)}{\pi} \int_{\chi=0}^{\chi=\gamma} \left[\ln \frac{|\cos \chi - \cos \varphi|}{1 - \cos(\varphi + \chi)} + \ln \frac{|\cos \chi + \cos \varphi|}{1 + \cos(\varphi - \chi)} \right] \frac{r}{\cos \gamma} \left(\sin \chi + \frac{\sin 2\chi}{2\sqrt{\cos^2 \chi - \cos^2 \gamma}} \right) d\chi \quad (4.141)$$

o, en forma más compacta sustituyendo previamente $r/\cos \gamma = 1/2(s + r^2/s)$:

$$Re(\hat{\Phi}_{cf}) = -\frac{W_z(x;t)}{2\pi} \left(s + \frac{r^2}{s} \right) I(\varphi; \gamma) \quad (4.142)$$

donde:

$$I(\varphi; \gamma) = \int_0^\gamma \left[\ln \frac{|\cos \chi - \cos \varphi|}{1 - \cos(\varphi + \chi)} + \ln \frac{|\cos \chi + \cos \varphi|}{1 + \cos(\varphi - \chi)} \right] \left(\sin \chi + \frac{\sin 2\chi}{2\sqrt{\cos^2 \chi - \cos^2 \gamma}} \right) d\chi \quad (4.143)$$

Integrando según [GD52] ó [DK54] se obtienen los siguientes resultados:

- Potencial en la superficie superior (extradós) de las aletas $Re(\hat{\Phi}_{cf,w}^+)$:

$$Re(\hat{\Phi}_{cf,w}^+) = \frac{W_z(x;t)}{4\pi} \left\{ 2\pi \sqrt{s_1^2 - y_1^2} \left(1 + \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \frac{r_1}{s_1} \right) + 4y_1 \tanh^{-1} \left[\frac{r_1}{y_1} \sqrt{\frac{s_1^2 - y_1^2}{s_1^2 - r_1^2}} \right] - 4r_1 \tanh^{-1} \sqrt{\frac{s_1^2 - y_1^2}{s_1^2 - r_1^2}} \right\} \quad (4.144)$$

⁸En el cambio de variable los límites de integración cambian de la siguiente forma: $y = r$ pasa a ser $\chi = \gamma$, mientras que $y = s$ se convierte en $\chi = 0$.

o, según [DK54], la siguiente expresión equivalente:

$$Re\left(\hat{\Phi}_{cf,w}^+\right) = \frac{W_z(x;t)}{2\pi} \left\{ \pi\sqrt{s_1^2 - y_1^2} \left(1 + \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \frac{r_1}{s_1}\right) + \right. \\ \left. y_1 \ln \frac{\sqrt{s_1^2 - r_1^2} + \frac{r_1}{y_1} \sqrt{s_1^2 - y_1^2}}{\sqrt{s_1^2 - r_1^2} - \frac{r_1}{y_1} \sqrt{s_1^2 - y_1^2}} - r_1 \ln \frac{\sqrt{s_1^2 - r_1^2} + \sqrt{s_1^2 - y_1^2}}{\sqrt{s_1^2 - r_1^2} - \sqrt{s_1^2 - y_1^2}} \right\} \quad (4.145)$$

donde el superíndice " + " indica la superficie superior de las aletas. Las variables r_1 , y_1 y s_1 se pueden escribir en función de las variables físicas del problema $s(x)$ (semienvergadura de las aletas en la sección x) y $r(x)$ (radio del cuerpo en la sección x):

$$\begin{aligned} r_1 &= 2r \\ y_1 &= y + \frac{r^2}{y} \\ s_1 &= s + \frac{r^2}{s} \end{aligned}$$

- Potencial en la superficie inferior (intradós) de las aletas $Re\left(\hat{\Phi}_{cf,w}^-\right)$:

Utilizando la formulación de [DK54], el potencial en el intradós de las aletas se escribe:

$$Re\left(\hat{\Phi}_{cf,w}^-\right) = -\frac{W_z(x;t)}{2\pi} \left\{ \pi\sqrt{s_1^2 - y_1^2} \left(1 + \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \frac{r_1}{s_1}\right) + \right. \\ \left. y_1 \ln \frac{\sqrt{s_1^2 - r_1^2} + \frac{r_1}{y_1} \sqrt{s_1^2 - y_1^2}}{\sqrt{s_1^2 - r_1^2} - \frac{r_1}{y_1} \sqrt{s_1^2 - y_1^2}} - r_1 \ln \frac{\sqrt{s_1^2 - r_1^2} + \sqrt{s_1^2 - y_1^2}}{\sqrt{s_1^2 - r_1^2} - \sqrt{s_1^2 - y_1^2}} \right\} \quad (4.146)$$

donde el superíndice " - " se refiere a la superficie inferior de las aletas. Las variables r_1 , y_1 y s_1 tienen la misma expresión en función de $r(x)$ y $s(x)$ que en el apartado anterior.

- Potencial en la superficie superior del cuerpo $Re\left(\hat{\Phi}_{cf,b}^+\right)$:

De nuevo, utilizando la formulación desarrollada en [DK54]:

$$Re\left(\hat{\Phi}_{cf,b}^+\right) = \frac{W_z(x;t)}{2\pi} \left\{ \pi \left(\sqrt{s_1^2 - y_1^2} - \sqrt{r_1^2 - y_1^2} \right) + 2\sqrt{s_1^2 - y_1^2} \cos^{-1} \left(\frac{r_1}{s_1} \right) + \right. \\ \left. y_1 \ln \frac{\sqrt{s_1^2 - y_1^2} + \frac{y_1}{r_1} \sqrt{s_1^2 - r_1^2}}{\sqrt{s_1^2 - y_1^2} - \frac{y_1}{r_1} \sqrt{s_1^2 - r_1^2}} - r_1 \ln \frac{\sqrt{s_1^2 - y_1^2} + \sqrt{s_1^2 - r_1^2}}{\sqrt{s_1^2 - y_1^2} - \sqrt{s_1^2 - r_1^2}} \right\} \quad (4.147)$$

donde el superíndice " + " se refiere a la superficie superior del cuerpo. Las variables r_1 , y_1 y s_1 se pueden escribir en función de las variables físicas del problema $s(x)$ (semienvergadura de las aletas en la sección x) y $r(x)$ (radio del cuerpo en la sección x):

$$\begin{aligned} r_1 &= 2r \\ y_1 &= 2y \\ s_1 &= s + \frac{r^2}{s} \end{aligned}$$

- Potencial en la superficie inferior del cuerpo $Re \left(\hat{\Phi}_{cf,b}^- \right)$:

$$Re \left(\hat{\Phi}_{cf,b}^- \right) = -\frac{W_z(x;t)}{2\pi} \left\{ \pi \left(\sqrt{s_1^2 - y_1^2} - \sqrt{r_1^2 - y_1^2} \right) + 2\sqrt{s_1^2 - y_1^2} \cos^{-1} \left(\frac{r_1}{s_1} \right) + \right. \\ \left. y_1 \ln \frac{\sqrt{s_1^2 - y_1^2} + \frac{y_1}{r_1} \sqrt{s_1^2 - r_1^2}}{\sqrt{s_1^2 - y_1^2} - \frac{y_1}{r_1} \sqrt{s_1^2 - r_1^2}} - r_1 \ln \frac{\sqrt{s_1^2 - y_1^2} + \sqrt{s_1^2 - r_1^2}}{\sqrt{s_1^2 - y_1^2} - \sqrt{s_1^2 - r_1^2}} \right\} \quad (4.148)$$

donde el superíndice " - " se refiere a la superficie inferior del cuerpo. Las variables r_1 , y_1 y s_1 tienen la misma expresión en función de $r(x)$ y $s(x)$ que en el apartado anterior.

Coefficiente de presiones

El coeficiente de presiones viene dado por:

$$C_p = C_{p0} + C_{p1} \\ C_{p0} = -\frac{1}{U_\infty^2} F_0 \\ C_{p1} = -\frac{2}{U_\infty^2} \left(1 + \frac{1}{2} M_\infty^2 C_{p0} \right) F_1$$

donde:

$$F_0 = 2U_\infty \phi'_{0x} + \phi'_{0x}{}^2 + \phi'_{0r}{}^2 + \frac{1}{r^2} \phi'_{0\theta}{}^2 \\ F_1 = (U_\infty + \phi'_{0x}) (\phi'_x - r \sin \theta w''_{xx} \phi'_{0x}) + \frac{1}{r^2} \phi'_{0\theta} \phi'_\theta + \\ + (U_\infty w'_x + w'_t) \left(\sin \theta + \cos \theta \frac{\phi'_{0\theta}}{r} \right) - r \sin \theta w''_{xt} \phi'_{0x} + \phi'_t$$

La expresión del coeficiente de presiones se simplifica considerablemente en el caso de que el radio del cuerpo en la zona de las aletas permanezca constante, es decir, $r(x) = cte$. Esta hipótesis no es demasiado restrictiva ya que suele cumplirse en la mayoría de los misiles. Asumiendo por tanto $r(x) = cte$, el potencial $\phi_0(x, r) = r(x)r'(x) \ln(r)$ es idénticamente nulo, de forma que el coeficiente de presiones queda:

$$C_{p0} = 0 \\ C_p = C_{p0} + C_{p1} = -\frac{2}{U_\infty^2} (U_\infty \phi'_x + \phi'_t)$$

Campo de velocidades de perturbación y presiones sobre las aletas (plano $z=0$)

Sólo se calculan presiones sobre las superficies de control situadas en el plano $z = 0$. No es necesario calcular presiones sobre las aletas en el plano $y = 0$ ya que se están considerando movimientos simétricos respecto $y = 0$ de forma que las superficies de control en el plano vertical no influyen.

Como ya se ha visto en apartados anteriores, el potencial en la superficie de las aletas se escribe

(superíndice "+" para extradós y "-" para intradós):

$$\begin{aligned}
 Re \left(\hat{\Phi}_{cf,w} \right) = \Phi_{cf,w} = \pm W_z(x;t) \frac{1}{2\pi} \left\{ \pi \sqrt{s_1^2 - y_1^2} \left(1 + \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \frac{r_1}{s_1} \right) + \right. \\
 \left. + y_1 \ln \frac{\sqrt{s_1^2 - r_1^2} + \frac{r_1}{y_1} \sqrt{s_1^2 - y_1^2}}{\sqrt{s_1^2 - r_1^2} - \frac{r_1}{y_1} \sqrt{s_1^2 - y_1^2}} - r_1 \ln \frac{\sqrt{s_1^2 - r_1^2} + \sqrt{s_1^2 - y_1^2}}{\sqrt{s_1^2 - r_1^2} - \sqrt{s_1^2 - y_1^2}} \right\}
 \end{aligned} \quad (4.149)$$

donde el signo positivo en '+' aplica al extradós y el signo negativo al intradós.

Teniendo en cuenta que $W_z(x;t) = U_\infty \partial w_{wb} / \partial x + \partial w_{wb} / \partial t$, y , las derivadas del potencial que aparecen en las expresión del coeficiente de presiones se escriben (utilizando variables adimensionales):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \phi_{cf,w}}{\partial x} &= \pm \left(\frac{\partial \hat{w}_{wb}}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{\hat{U}_\infty} \frac{\partial \hat{w}_{wb}}{\partial \hat{t}} \right) \frac{\partial F_w}{\partial x}(\hat{x}, \hat{y}) \pm \left(\frac{\partial^2 \hat{w}_{wb}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{1}{\hat{U}_\infty} \frac{\partial^2 \hat{w}_{wb}}{\partial \hat{x} \partial \hat{t}} \right) F_w(\hat{x}, \hat{y}) \\
 \frac{\partial \phi_{cf,w}}{\partial t} &= \pm \left(\frac{1}{\hat{U}_\infty} \frac{\partial^2 \hat{w}_{wb}}{\partial \hat{x} \partial \hat{t}} + \frac{1}{\hat{U}_\infty^2} \frac{\partial^2 \hat{w}_{wb}}{\partial \hat{t}^2} \right) F_w(\hat{x}, \hat{y})
 \end{aligned}$$

donde se han utilizado las variables adimensionales $\hat{x} = x/L$, $\hat{t} = U_0 t/L$, $\hat{U}_\infty = U_\infty/U_0$, $\hat{F}_w = F_w/L$, $\hat{\xi}_i = \xi_i/L$, y:

$$\begin{aligned}
 F_w &= \frac{1}{2\pi L} \left\{ \pi \sqrt{s_1^2 - y_1^2} \left(1 + \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \frac{r_1}{s_1} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + y_1 \ln \frac{\sqrt{s_1^2 - r_1^2} + \frac{r_1}{y_1} \sqrt{s_1^2 - y_1^2}}{\sqrt{s_1^2 - r_1^2} - \frac{r_1}{y_1} \sqrt{s_1^2 - y_1^2}} - r_1 \ln \frac{\sqrt{s_1^2 - r_1^2} + \sqrt{s_1^2 - y_1^2}}{\sqrt{s_1^2 - r_1^2} - \sqrt{s_1^2 - y_1^2}} \right\} \\
 \frac{\partial \hat{F}_w}{\partial \hat{x}} &= \frac{\partial F_w}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\left[1 - \left(\frac{r}{s} \right)^4 \right] \frac{ds}{dx}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{r}{s} \right)^2 \right]^2 - \left[\frac{y}{s} + \frac{(r/s)^2}{y/s} \right]^2}} \left[1 + \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \frac{2(r/s)}{1 + (r/s)^2} \right] = \\
 &= \frac{2}{\pi} \frac{\left[1 - \left(\frac{r}{s} \right)^4 \right] \frac{ds}{dx} \tan^{-1} \left(\frac{s}{r} \right)}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{r}{s} \right)^2 \right]^2 - \left[\frac{y}{s} + \frac{(r/s)^2}{y/s} \right]^2}}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo las velocidades anteriores en el coeficiente de presiones:

$$\begin{aligned}
 C_{p1,w}|_{WrB} &= -2 \frac{\phi'_x}{U_\infty} - 2 \frac{\phi'_t}{U_\infty^2} = \mp 2 \left(\frac{\partial \hat{w}_{wb}}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{\hat{U}_\infty} \frac{\partial \hat{w}_{wb}}{\partial \hat{t}} \right) \frac{\partial F_w}{\partial x} \mp \\
 &\quad \mp 2 \left(\frac{\partial^2 \hat{w}_{wb}}{\partial \hat{x}^2} + 2 \frac{1}{\hat{U}_\infty} \frac{\partial^2 \hat{w}_{wb}}{\partial \hat{x} \partial \hat{t}} + \frac{1}{\hat{U}_\infty^2} \frac{\partial^2 \hat{w}_{wb}}{\partial \hat{t}^2} \right) F_w
 \end{aligned}$$

Sustituyendo la expresión del desplazamiento $\hat{w}_{wb}(\hat{x}, \hat{t})$ en función de las coordenadas generalizadas:

$$\hat{w}_{wb}(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{j=1}^m \psi_{j,wb}(\hat{x}) \hat{\xi}_j(t)$$

el coeficiente de presiones se puede expresar:

$$C_{p1,w}|_{WrB} = \sum_{j=1}^m C_{p1,w}^j|_{WrB}$$

siendo $C_{p1,w}^j|_{WrB}$ es la contribución del modo ψ_j al coeficiente de presiones sobre las aletas:

$$\begin{aligned} C_{p1,w}^j|_{WrB} = & \mp 2 \left(\psi'_{j,wb} \frac{\partial F_w}{\partial x} + \psi''_{j,wb} F_w \right) \hat{\xi}_j \mp \\ & \mp 2 \left(\psi_{j,wb} \frac{\partial F_w}{\partial x} + 2\psi'_{j,wb} F_w \right) \frac{1}{\hat{U}_\infty} \frac{d\hat{\xi}_j}{dt} \mp 2\psi_{j,wb} F_w \frac{1}{\hat{U}_\infty^2} \frac{\partial^2 \hat{\xi}_j}{\partial t^2} \end{aligned}$$

donde $\psi'_{j,wb} = d\psi_{j,wb}/d\hat{x}$ y $\psi''_{j,wb} = d^2\psi_{j,wb}/d\hat{x}^2$.

En el intradós de las aletas el coeficiente de presiones tiene el mismo valor absoluto pero signo contrario, por lo que el salto de presiones $\Delta C_{p1,w}|_{WrB}$ queda:

$$\Delta C_{p1,w}|_{WrB} = C_{p1,w}|_{WrB}^- - C_{p1,w}|_{WrB}^+ = \sum_{j=1}^m \left(C_{p1,w}^j|_{WrB}^- - C_{p1,w}^j|_{WrB}^+ \right) = \sum_{j=1}^m \Delta C_{p1,w}^j|_{WrB} \quad (4.150)$$

donde el salto de presiones asociado al modo $\psi_{j,wb}$, es decir, $\Delta C_{p1,w}^j|_{WrB}$, es:

$$\begin{aligned} \Delta C_{p1,w}^j|_{WrB} = & + 4 \left(\psi'_{j,wb} \frac{\partial F_w}{\partial x} + \psi''_{j,wb} F_w \right) \hat{\xi}_j + \\ & + 4 \left(\psi_{j,wb} \frac{\partial F_w}{\partial x} + 2\psi'_{j,wb} F_w \right) \frac{1}{\hat{U}_\infty} \frac{d\hat{\xi}_j}{dt} + 4\psi_{j,wb} F_w \frac{1}{\hat{U}_\infty^2} \frac{\partial^2 \hat{\xi}_j}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Por último, sólo queda comentar algunas características de la derivada $\partial \hat{F}/\partial \hat{x}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{F}_w}{\partial \hat{x}} = \frac{\partial F_w}{\partial x} &= \frac{1}{2} \frac{\left[1 - \left(\frac{r}{s} \right)^4 \right] \frac{ds}{dx}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{r}{s} \right)^2 \right]^2 - \left[\frac{y}{s} + \frac{(r/s)^2}{y/s} \right]^2}} \left[1 + \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \frac{2(r/s)}{1 + (r/s)^2} \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\left[1 - \left(\frac{r}{s} \right)^4 \right] \frac{ds}{dx} \tan^{-1} \left(\frac{s}{r} \right)}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{r}{s} \right)^2 \right]^2 - \left[\frac{y}{s} + \frac{(r/s)^2}{y/s} \right]^2}} \end{aligned}$$

Puede comprobarse que el denominador de la expresión anterior tiende a cero cuando y tiende a s , es decir, cuando y se acerca a la punta de la aleta (o superficie de control). Esto implica que la derivada parcial $\partial \hat{F}_w/\partial \hat{x}$ es un infinito en el entorno de $y = s$, cuyo orden es interesante calcular ya que interviene de forma explícita en la expresión del coeficiente de presiones sobre la aleta. Desarrollando equivalencias en el denominador:

$$\begin{aligned} \left[1 + \left(\frac{r}{s} \right)^2 \right] \sqrt{1 - \left[\frac{\frac{y}{s} + \frac{(r/s)^2}{y/s}}{1 + \left(\frac{r}{s} \right)^2} \right]^2} &\sim \left[1 + \left(\frac{r}{s} \right)^2 \right] \sqrt{2 \ln \frac{1 + \left(\frac{r}{s} \right)^2}{\frac{y}{s} + \frac{(r/s)^2}{y/s}}} \sim \\ &\sim \sqrt{2} \sqrt{1 + \left(\frac{r}{s} \right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{r}{s} \right)^2 - \frac{y}{s} - \frac{(r/s)^2}{(y/s)}} \sim \sqrt{2} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{s} \right)^4} \sqrt{1 - \frac{y}{s}} \end{aligned} \quad (4.151)$$

De esta forma, la derivada parcial en el entorno de $y = s$ se expresa como:

$$\frac{\partial \hat{F}_w}{\partial \hat{x}} \sim \frac{2}{\pi} \frac{\left[1 - \left(\frac{r}{s}\right)^4\right] \frac{ds}{dx} \tan^{-1}\left(\frac{s}{r}\right)}{\sqrt{2} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{s}\right)^4} \sqrt{1 - \frac{y}{s}}} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{s}\right)^4} \frac{ds}{dx} \tan^{-1}\left(\frac{s}{r}\right)}{\sqrt{1 - \frac{y}{s}}} \quad (4.152)$$

La expresión anterior de la derivada $\partial \hat{F}_w / \partial \hat{x}$ tiene una singularidad en $y = s$ que va como $1/\sqrt{1 - y/s}$. Esta singularidad es integrable en el entorno de $y = s$ como se detalla a continuación en el cálculo de la siguiente integral impropia:

$$\begin{aligned} \int_{1-\epsilon}^{-1} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{y}{s}}} d\left(\frac{y}{s}\right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \int_{1-\epsilon}^x \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{y}{s}}} d\left(\frac{y}{s}\right) = \lim_{x \rightarrow 1} -\sqrt{1 - \frac{y}{s}} \Big|_{1-\epsilon}^x = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\epsilon} - \sqrt{1 - x} = \sqrt{\epsilon} \end{aligned} \quad (4.153)$$

Se ha demostrado que una función equivalente a la derivada $\partial \hat{F}_w / \partial \hat{x}$ en el entorno de $y = s$ es integrable en el entorno de la singularidad, por lo que aplicando el conocido *criterio de comparación* en el cálculo de integrales impropias ([Bur94]), la propia función $\partial \hat{F}_w / \partial \hat{x}$ será integrable. Esta propiedad asegura la existencia de la integración del $\Delta C_{p,ws}$ en las aletas o, lo que es lo mismo, la existencia de fuerzas/momentos aerodinámicos inducidos por las aletas y asociados a los modos $\psi_{i,wb}(x)$

Campo de velocidades de perturbación y presiones sobre el cuerpo

Se puede demostrar que las fuerzas generalizadas sobre el cuerpo en los modos **WrB** queda⁹:

$$Q_{i,b}|_{WrB} = 2q_\infty \int_0^L \left[\int_0^\pi C_{p1,b}^+ \Big|_{WrB} \sin \theta d\theta \right] r(x) \psi_{i,b}(x) dx$$

Por tanto, calcular el coeficiente de presiones en la sección superior del cuerpo $C_{p1,b}^+ \Big|_{WrB}$ es suficiente para el cálculo posterior de las *fuerzas generalizadas*. A continuación se detalla su cálculo.

Como ya se ha comprobado en secciones anteriores, el potencial no estacionario sobre el cuerpo asociado a los modos del tipo **WrB**, es decir, los modos de desplazamiento relativo de aletas respecto al cuerpo $\psi_{i,wb}(x)$, se escribe:

$$\begin{aligned} \Phi_{cf,b}^+(x, y) &= W_z(x; t) \frac{1}{2\pi} \left\{ \pi \sqrt{s_1^2 - y_1^2} \left[1 + \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{r_1}{s_1} \right) \right] - \pi \sqrt{r_1^2 - y_1^2} + \right. \\ &\quad \left. + y_1 \ln \frac{\sqrt{s_1^2 - y_1^2} + \frac{y_1}{r_1} \sqrt{s_1^2 - r_1^2}}{\sqrt{s_1^2 - y_1^2} - \frac{y_1}{r_1} \sqrt{s_1^2 - r_1^2}} - r_1 \ln \frac{\sqrt{s_1^2 - y_1^2} + \sqrt{s_1^2 - r_1^2}}{\sqrt{s_1^2 - y_1^2} - \sqrt{s_1^2 - r_1^2}} \right\} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $W_z(x; t) = U_\infty \partial w_{wb} / \partial x + \partial w_{wb} / \partial t$, las derivadas parciales del potencial que aparecen en la expresión del coeficiente de presiones se escriben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{cf,b}^+}{U_\infty} &= \left(\frac{\partial \hat{w}_{wb}}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{\hat{U}_\infty} \frac{\partial \hat{w}_{wb}}{\partial \hat{t}} \right) \frac{\partial F_b}{\partial x}(\hat{x}, \hat{y}) + \left(\frac{\partial^2 \hat{w}_{wb}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{1}{\hat{U}_\infty} \frac{\partial^2 \hat{w}_{wb}}{\partial \hat{x} \partial \hat{t}} \right) F_b(\hat{x}, \hat{y}) \\ \frac{\partial \Phi_{cf,b}^+}{U_\infty^2} &= \left(\frac{1}{\hat{U}_\infty} \frac{\partial^2 \hat{w}_{wb}}{\partial \hat{x} \partial \hat{t}} + \frac{1}{\hat{U}_\infty^2} \frac{\partial^2 \hat{w}_{wb}}{\partial \hat{t}^2} \right) F_b(\hat{x}, \hat{y}) \end{aligned}$$

⁹Véase la demostración equivalente para los modos W_jB .

donde se han introducido las variables adimensionales $\hat{x} = x/L$, $\hat{t} = U_0/L \cdot t$, $\hat{U}_\infty = U_\infty/U_0$, $\hat{w}_{wb} = w_{wb}/L$, y la función $F_b(\hat{x}, \hat{y})$ es:

$$F_b(x, y) = \frac{1}{2\pi L} \left\{ \pi \sqrt{s_1^2 - y_1^2} \left[1 + \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{r_1}{s_1} \right) \right] - \pi \sqrt{r_1^2 - y_1^2} + \right. \\ \left. + y_1 \ln \frac{\sqrt{s_1^2 - y_1^2} + \frac{y_1}{r_1} \sqrt{s_1^2 - r_1^2}}{\sqrt{s_1^2 - y_1^2} - \frac{y_1}{r_1} \sqrt{s_1^2 - r_1^2}} - r_1 \ln \frac{\sqrt{s_1^2 - y_1^2} + \sqrt{s_1^2 - r_1^2}}{\sqrt{s_1^2 - y_1^2} - \sqrt{s_1^2 - r_1^2}} \right\}$$

donde:

$$\begin{aligned} r_1 &= 2r \\ y_1 &= 2y \\ s_1 &= s + \frac{r^2}{s} \end{aligned}$$

y siendo $r = r(x)$ el radio del cuerpo y $s = s(x)$ la semienvergadura del ala, ambos particularizados para la sección transversal x .

Sustituyendo las velocidades anteriores en el coeficiente de presiones sobre el cuerpo:

$$C_{p1,b}^+ \Big|_{WrB} = -2 \left(\frac{\partial \hat{w}_{wb}}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{\hat{U}_\infty} \frac{\partial \hat{w}_{wb}}{\partial \hat{t}} \right) \frac{\partial F_b}{\partial x} - 2 \left(\frac{\partial^2 w_{wb}}{\partial \hat{x}^2} + 2 \frac{1}{\hat{U}_\infty} \frac{\partial^2 w_{wb}}{\partial \hat{x} \partial \hat{t}} + \frac{1}{\hat{U}_\infty^2} \frac{\partial^2 w_{wb}}{\partial \hat{t}^2} \right) F_b$$

Sustituyendo la expresión del desplazamiento $\hat{w}_{wb}(\hat{x}, \hat{t})$ en función de las coordenadas generalizadas:

$$\hat{w}_{wb}(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{j=1}^m \psi_{j,wb}(\hat{x}) \hat{\xi}_j(t)$$

el coeficiente de presiones se puede expresar:

$$C_{p1,b}^+ \Big|_{WrB} = \sum_{j=1}^m C_{p1,b}^{(+j)} \Big|_{WrB}$$

donde $C_{p1,b}^{(+j)} \Big|_{WrB}$ es la contribución **WrB** del modo ψ_j al coeficiente de presiones sobre las aletas:

$$\begin{aligned} C_{p1,b}^{(+j)} \Big|_{WrB} &= -2 \left(\psi'_{j,wb} \frac{\partial F_b}{\partial x} + \psi''_{j,wb} F_b \right) \hat{\xi}_j - \\ &- 2 \left(\psi_{j,wb} \frac{\partial F_b}{\partial x} + 2\psi'_{i,wb} F_b \right) \frac{1}{\hat{U}_\infty} \frac{d\hat{\xi}_j}{d\hat{t}} - 2\psi_{j,wb} F_b \frac{1}{\hat{U}_\infty^2} \frac{\partial^2 \hat{\xi}_j}{\partial \hat{t}^2} \end{aligned}$$

siendo $\psi'_{j,wb} = d\psi_{j,wb}/d\hat{x}$ y $\psi''_{j,wb} = d^2\psi_{j,wb}/d\hat{x}^2$.

Por último, el término $\partial F_b/\partial x$ queda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_b}{\partial x} &= \frac{1}{2} \frac{\left[1 - \left(\frac{r}{s} \right)^4 \right] \frac{ds}{dx}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{y}{s} \right)^2 \right]^2 - 4 \left(\frac{y}{s} \right)^2}} \left[1 + \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \frac{r/s}{1 + (r/s)^2} \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\left[1 - \left(\frac{r}{s} \right)^4 \right] \frac{ds}{dx} \tan^{-1} \left(\frac{s}{r} \right)}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{y}{s} \right)^2 \right]^2 - 4 \left(\frac{y}{s} \right)^2}} \end{aligned}$$

Fuerzas Generalizadas

- Aletas:

Las fuerzas aerodinámicas generalizadas sobre las aletas se escriben:

$$\begin{aligned}
 Q_{i,w}|_{WrB} &= q_\infty \iint_{S_w} [C_{p,w}^+(x,y) - C_{p,w}^-(x,y)] \psi_{i,w}(x) dS = \\
 &= q_\infty \iint_{S_w} -\Delta C_{p,w}(x,y) \psi_{i,w}(x) dS = q_\infty \iint_{S_w} -\Delta C_{p1,w}(x,y) \psi_{i,w}(x) dS = \\
 &= 2q_\infty \iint_{S_w} C_{p1,w}^+|_{WrB} \psi_{i,w}(x) dS
 \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que $C_{p1,w}^-|_{WrB} = -C_{p1,w}^+|_{WrB}$. Al considerarse modos simétricos respecto al plano de simetría xz , la fuerza generalizada total se puede expresar como el doble de la integración extendida a una de las aletas (izquierda o derecha):

$$Q_{i,w}|_{WrB} = 4q_\infty \iint_{S_w} C_{p1,w}^+|_{WrB} \psi_{i,w}(x) dS$$

Sustituyendo el coeficiente de presiones desarrollado en el apartado anterior, la contribución del modo ψ_j a la fuerza generalizada sobre las aletas es:

$$\begin{aligned}
 \frac{Q_{ij,w}|_{WrB}}{q_\infty L^2} &= 4 \iint_{S_w} -2 \left(\psi'_{j,wb} \frac{\partial F_w}{\partial x} + \psi''_{j,wb} F_w \right) \psi_{i,w} d\hat{x} d\hat{y} \cdot \hat{\xi}_j + \\
 &+ 4 \iint_{S_w} -2 \left(\psi_{j,wb} \frac{\partial F_w}{\partial x} + 2\psi'_{j,wb} F_w \right) \psi_{i,w} \cdot \frac{1}{\hat{U}_\infty} \frac{d\hat{\xi}_j}{dt} + 4 \iint_{S_w} -2\psi_{j,wb} F_w \frac{1}{\hat{U}_\infty^2} \cdot \frac{d^2\hat{\xi}_j}{dt^2}
 \end{aligned}$$

por lo que la fuerza generalizada i sobre las aletas queda:

$$\frac{Q_{i,w}|_{WrB}}{q_\infty L^2} = \sum_{j=1}^m \frac{Q_{ij,w}|_{WrB}}{q_\infty L^2} = \sum_{j=1}^m q_{\xi_i \xi_j, w}|_{WrB} \hat{\xi}_j + q_{\xi_i \dot{\xi}_j, w}|_{WrB} \frac{1}{\hat{U}_\infty} \dot{\xi}_j + q_{\xi_i \ddot{\xi}_j, w}|_{WrB} \frac{1}{\hat{U}_\infty^2} \ddot{\xi}_j$$

- Cuerpo:

Las fuerzas aerodinámicas generalizadas sobre el cuerpo se escriben:

$$\begin{aligned}
 Q_{i,b}|_{WrB} &= q_\infty \int_0^L \left[\int_0^{2\pi} C_{p,b}|_{WrB} \sin \theta d\theta \right] r(x) \psi_{i,b}(x) dx = \\
 &= q_\infty \int_0^L \left[\int_0^{2\pi} C_{p0,b} \sin \theta + C_{p1,b}|_{WrB} \sin \theta d\theta \right] r(x) \psi_{i,b}(x) dx = \\
 &= q_\infty \int_0^L \left[\int_0^{2\pi} C_{p1,b}|_{WrB} \sin \theta d\theta \right] r(x) \psi_{i,b}(x) dx = \\
 &= 2q_\infty \int_0^L \left[\int_0^{2\pi} C_{p1,b}^+|_{WrB} \sin \theta d\theta \right] r(x) \psi_{i,b}(x) dx
 \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que la integración del coeficiente de presiones asociado al problema de espesor $C_{p0,b}$ es nula, y que la integración del coeficiente de presiones $C_{p1,b}|_{WrB}$ extendida

al contorno del cuerpo se puede expresar como el doble de la integral extendida al contorno superior.

Sustituyendo el coeficiente de presiones en función de las coordenadas generalizadas $\hat{\xi}_j$, la contribución del modo ψ_j a las fuerzas generalizadas es:

$$\begin{aligned} \frac{Q_{ij,b}|_{WrB}}{q_\infty L^2} &= 2 \left[\int_0^1 \hat{r} \psi_{i,b} d\hat{x} \int_0^\pi -2 \left(\psi'_{j,wb} \frac{\partial F_b}{\partial x} + \psi''_{j,wb} F_b \right) \sin \theta d\theta \right] \cdot \hat{\xi}_j + \\ &+ 2 \left[\int_0^1 \hat{r} \psi_{i,b} d\hat{x} \int_0^\pi -2 \left(\psi_{j,wb} \frac{\partial F_b}{\partial x} + 2\psi'_{j,wb} F_b \right) \sin \theta d\theta \right] \cdot \frac{1}{\hat{U}_\infty} \frac{d\hat{\xi}_j}{dt} + \\ &+ 2 \left[\int_0^1 \hat{r} \psi_{i,b} d\hat{x} \int_0^\pi -2\psi_{j,wb} F_b \sin \theta d\theta \right] \cdot \frac{1}{\hat{U}_\infty^2} \frac{d^2 \hat{\xi}_j}{dt^2} \end{aligned}$$

por lo que la fuerza generalizada i sobre el cuerpo queda:

$$\frac{Q_{i,b}|_{WrB}}{q_\infty L^2} = \sum_{j=1}^m \frac{Q_{ij,b}|_{WrB}}{q_\infty L^2} = \sum_{j=1}^m q_{\xi_i \xi_j, b}|_{WrB} \hat{\xi}_j + q_{\xi_i \dot{\xi}_j, b}|_{WrB} \frac{1}{\hat{U}_\infty} \dot{\hat{\xi}}_j + q_{\xi_i \ddot{\xi}_j, b}|_{WrB} \frac{1}{\hat{U}_\infty^2} \ddot{\hat{\xi}}_j$$

Las tablas que se adjuntan en las dos páginas siguientes resumen todos los términos necesarios para el cálculo de las fuerzas aerodinámicas.

	DEFORMACIONES TIPO W_jB	DEFORMACIONES TIPO W_rB
F_b	$\frac{2 \left[\cos 2\theta - \left(\frac{\hat{r}}{\hat{s}} \right)^2 \right] \hat{r} \frac{d\hat{r}}{d\hat{x}} - \left[1 - \left(\frac{\hat{r}}{\hat{s}} \right)^4 \right] \hat{s} \frac{d\hat{s}}{d\hat{x}}}{\sqrt{\left(\hat{s} + \frac{\hat{r}^2}{\hat{s}} \right)^2 - 4\hat{r}^2 \cos^2 \theta}}$	$\frac{1}{2\pi} \left\{ \pi \sqrt{\hat{s}_1^2 - \hat{y}_1^2} \left[1 + \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{\hat{r}_1}{\hat{s}_1} \right) \right] - \pi \sqrt{\hat{r}_1^2 - \hat{y}_1^2} + \right. \\ \left. + \hat{y}_1 \ln \frac{\sqrt{\hat{s}_1^2 - \hat{y}_1^2} + \frac{\hat{y}_1}{\hat{r}_1} \sqrt{\hat{s}_1^2 - \hat{r}_1^2}}{\sqrt{\hat{s}_1^2 - \hat{y}_1^2} - \frac{\hat{y}_1}{\hat{r}_1} \sqrt{\hat{s}_1^2 - \hat{r}_1^2}} - \hat{r}_1 \ln \frac{\sqrt{\hat{s}_1^2 - \hat{y}_1^2} + \sqrt{\hat{s}_1^2 - \hat{r}_1^2}}{\sqrt{\hat{s}_1^2 - \hat{y}_1^2} - \sqrt{\hat{s}_1^2 - \hat{r}_1^2}} \right\}$
$\frac{\partial F_b}{\partial x}$		$\frac{2}{\pi} \frac{\left[1 - \left(\frac{\hat{r}}{\hat{s}} \right)^4 \right] \hat{s} \frac{d\hat{s}}{d\hat{x}} \tan^{-1} \left(\frac{\hat{s}}{\hat{r}} \right)}{\sqrt{\left(\hat{s} + \frac{\hat{y}^2}{\hat{s}} \right)^2 - 4\hat{y}^2}}$
G_b	$\sqrt{\left(\hat{s} + \frac{\hat{r}^2}{\hat{s}} \right)^2 - 4\hat{r}^2 \cos^2 \theta} - \hat{r} \sin \theta$	
H_b		
$C_{p1,b}^{j(+)}$	$2 (\psi'_{j,b} F_b - \psi''_{j,b} G_b) \hat{\xi}_j + 2 (\psi_{j,b} F_b - 2\psi'_{j,b} G_b) \frac{d\hat{\xi}_j}{d\hat{t}} - 2\psi_{j,b} G_b \frac{d^2 \hat{\xi}_j}{d\hat{t}^2}$	$-2 \left(\psi'_{j,wb} \frac{\partial F_b}{\partial x} + \psi''_{j,wb} F_b \right) \hat{\xi}_j - 2 \left(\psi_{j,wb} \frac{\partial F_b}{\partial x} + 2\psi'_{j,wb} F_b \right) \frac{d\hat{\xi}_j}{d\hat{t}} - 2\psi_{j,wb} F_b \frac{d^2 \hat{\xi}_j}{d\hat{t}^2}$

Tabla 4.1: Coeficiente de presiones sobre la superficie superior del CUERPO en deformaciones tipo **WjB** (Wing joined to Body) y **WrB** (Wing relative to Body).

	DEFORMACIONES TIPO W_jB	DEFORMACIONES TIPO WrB
F_w	$\frac{2 \left[\left(\frac{\hat{r}}{\hat{y}} \right)^2 - \left(\frac{\hat{r}}{\hat{s}} \right)^2 \right] \hat{r} \frac{d\hat{r}}{d\hat{x}} - \left[1 - \left(\frac{\hat{r}}{\hat{s}} \right)^4 \right] \hat{s} \frac{d\hat{s}}{d\hat{x}}}{\sqrt{\left(\hat{s} + \frac{\hat{r}^2}{\hat{s}} \right)^2 - \left(\hat{y} + \frac{\hat{r}^2}{\hat{y}} \right)^2}}$	$\frac{1}{2\pi} \left\{ \pi \sqrt{\hat{s}_1^2 - \hat{y}_1^2} \left[1 + \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{\hat{r}_1}{\hat{s}_1} \right) \right] + \right.$ $\left. + \hat{y}_1 \ln \frac{\sqrt{\hat{s}_1^2 - \hat{r}_1^2} + \frac{\hat{r}_1}{\hat{y}_1} \sqrt{\hat{s}_1^2 - \hat{y}_1^2}}{\sqrt{\hat{s}_1^2 - \hat{r}_1^2} - \frac{\hat{r}_1}{\hat{y}_1} \sqrt{\hat{s}_1^2 - \hat{y}_1^2}} - \hat{r}_1 \ln \frac{\sqrt{\hat{s}_1^2 - \hat{r}_1^2} + \sqrt{\hat{s}_1^2 - \hat{y}_1^2}}{\sqrt{\hat{s}_1^2 - \hat{r}_1^2} - \sqrt{\hat{s}_1^2 - \hat{y}_1^2}} \right\}$
$\frac{\partial F_w}{\partial x}$		$\frac{2 \left[1 - \left(\frac{\hat{r}}{\hat{s}} \right)^4 \right] \hat{s} \frac{d\hat{s}}{d\hat{x}} \tan^{-1} \left(\frac{\hat{s}}{\hat{r}} \right)}{\pi \sqrt{\left(\hat{s} + \frac{\hat{r}^2}{\hat{s}} \right)^2 - \left(\hat{y} + \frac{\hat{r}^2}{\hat{y}} \right)^2}}$
G_w	$\sqrt{\left(\hat{s} + \frac{\hat{r}^2}{\hat{s}} \right)^2 - \left(\hat{y} + \frac{\hat{r}^2}{\hat{y}} \right)^2}$	
H_w	$\frac{\left[1 - \left(\frac{\hat{r}}{\hat{y}} \right)^4 \right] \hat{r} \frac{d\hat{r}}{d\hat{x}}}{\sqrt{\left(\hat{s} + \frac{\hat{r}^2}{\hat{s}} \right)^2 - \left(\hat{y} + \frac{\hat{r}^2}{\hat{y}} \right)^2}}$	
$C_{p1,w}^{j(+)}$	$2 [\psi'_{j,b} (F_w + H_w) - \psi''_{j,b} G_w] \hat{\xi}_j +$ $+ [\psi_{j,b} (F_w + H_w) - 2\psi'_{j,b} G_w] \frac{d\hat{\xi}_j}{d\hat{t}} - 2\psi_{j,b} G_w \frac{d^2 \hat{\xi}_j}{d\hat{t}^2}$	$-2 \left(\psi'_{j,wb} \frac{\partial F_w}{\partial x} + \psi''_{j,wb} F_w \right) \hat{\xi}_j - 2 \left(\psi_{j,wb} \frac{\partial F_w}{\partial x} + 2\psi'_{j,wb} F_w \right) \frac{d\hat{\xi}_j}{d\hat{t}} - 2\psi_{j,wb} F_w \frac{d^2 \hat{\xi}_j}{d\hat{t}^2}$

Tabla 4.2: Coeficiente de presiones sobre la superficie superior de las ALETAS (extradós) en deformaciones tipo **WjB** (**W**ing joined to **B**ody) y **WrB** (**W**ing relative to **B**ody).

4.9. Consideraciones Finales

En este capítulo se han calculado las expresiones de las fuerzas aerodinámicas generalizadas sobre configuraciones cuerpo/ala esbeltas. Se ha utilizado la teoría no estacionaria de Cuerpos Esbeltos, que linealiza la ecuación del potencial de velocidades y permite separar el problema de espesor o flujo axial del problema bidimensional de flujo transversal. El problema de espesor produce una distribución de presiones axilsimétrica (en configuraciones axilsimétricas como la estudiada en esta tesis) y no contribuye a las fuerzas no estacionarias. El problema de flujo transversal induce presiones diferenciales entre extradós e intradós, lo que da lugar a una distribuciones de presiones que producen fuerzas no estacionarias.

El problema de flujo transversal se calcula acudiendo a la teoría de transformación conforme en el plano complejo. El plano físico se transforma en un círculo en el plano transformado en el que es inmediato calcular las velocidades de perturbación y por tanto la distribución de presiones. Las ecuaciones de transformación dependen de la condición de contorno en la sección $x = cte$ en la que se está calculando el flujo transversal, de forma cada modo $\psi_i(x)$ se calcula acudiendo a sus dos contribuciones:

1. Deformación conjunta cuerpo-ala $\psi_{i,b}(x)$ (**WjB**, acrónimo de **W**ing **j**oined to **B**ody)
2. Deformación relativa de la aleta respecto al cuerpo $\psi_{i,wb}(x) = \psi_{i,w}(x) - \psi_{i,b}(x)$ (**WrB**, acrónimo de **W**ing **r**elative to **B**ody)

Una vez calculadas las fuerzas aerodinámicas y formuladas las ecuaciones de la dinámica (o aeroelásticas) en el capítulo 4, se está en disposición de poder calcular las ecuaciones diferenciales de estado-espacio de configuraciones cuerpo/ala esbeltas. Sólo queda integrar estas ecuaciones diferenciales para obtener la respuesta del sistema. Esto es lo que se avanza en el siguiente capítulo, en el que se describen los módulos principales del código **FHSWB**, entre ellos el módulo integrador desarrollado ad hoc para el tratamiento de no linealidades tipo *freeplay* e *hysteresis*.

Recuérdese que los módulos de integración (en Fortran 90) y análisis/postproceso (en Matlab) del código **FHSWB** son independientes, de forma que pueden integrar o analizar cualquier sistema de estado-espacio.

Capítulo 5

SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES AEROELÁSTICAS. CÓDIGO FHSWB

5.1. Introducción

Como ya se explicó en la sección 1.3, esta tesis doctoral presenta una serie de contribuciones que pueden resumirse en las siguientes:

1. Desarrollo de un código *autocontenido* (en Fortran 90) para el análisis aerodinámico (estacionario y no estacionario) y aeroelástico (lineal y no lineal) de *configuraciones cuerpo/ala esbeltas*.

Los dos capítulos anteriores se han centrado en la formulación teórica de las ecuaciones aeroelásticas de configuraciones esbeltas *flexibles*, ya sea en dominio de la frecuencia (aeroelasticidad lineal) o en la formulación matricial estado-espacio (aeroelasticidad no lineal). En este capítulo se detallan los datos necesarios requeridos por el código **FHSWB** para que, basándose en la formulación desarrollada en los dos capítulos anteriores, se obtengan las ecuaciones aeroelásticas de configuraciones cuerpo/ala esbeltas y puedan ser resueltas en el dominio de la frecuencia o del tiempo.

2. Una segunda contribución es del desarrollo de *software* (en Fortran 90) para la integración en el dominio del tiempo de las ecuaciones aeroelásticas estado-espacio de cualquier sistema, especialmente adaptado para el tratamiento de no linealidades tipo *freeplay* o *hysteresis*. Este software incluye herramientas de caracterización de la respuesta en tiempo real con el objeto de reducir tiempos de cálculo.

Una vez planteadas las ecuaciones aeroelásticas en la formulación *estado-espacio*, ya sea mediante la teoría desarrollada en los capítulos anteriores para configuraciones esbeltas o vengán dadas por otro(s) código(s) porque el sistema es más complejo (aeronave, etc.), se procede a la integración en el dominio del tiempo. Este módulo de integración desarrollado en la tesis puede ser aplicable a cualquier configuración, siempre y cuando el sistema de ecuaciones estado-espacio sea dado. En el caso de configuraciones cuerpo-ala esbeltas, el propio código de esta tesis es capaz de calcular el sistema de ecuaciones estado-espacio, de ahí que se califique a la tesis como *autocontenida* para este tipo de configuraciones.

En este capítulo se describen también las principales características del módulo de integración del código **FHSWB**, así como los parámetros que el usuario puede definir: paso de tiempo, precisión, etc.

3. Por último, una tercera contribución es el desarrollo de herramientas de post-proceso y análisis de la respuesta del sistema. Estas herramientas están desarrolladas en Matlab y se describen en el capítulo 11.

La integración de sistemas con no linealidades tipo *freeplay* o *hysteresis* presenta ciertas particularidades importantes, como es la necesidad de capturar las esquinas de la no linealidad para evitar la acumulación de errores durante la integración, la detección en tiempo real del tipo de respuesta con el objeto de ahorrar tiempo de cálculo, etc. Todas estas particularidades se explican en la sección 5.2.

A continuación, la sección 5.3 detalla la secuencia de ejecución del código, explicando qué módulo calcula las ecuaciones aeroelásticas de configuraciones esbeltas, en qué momento se puede importar las ecuaciones estado-espacio de cualquier sistema para ser integradas, etc.

Por último, la sección 5.5 incluye los dos ficheros de control que son entradas del código: el fichero de control con los parámetros generales y el fichero de control con las formas modales. Cada uno de los dos ficheros de control esta compuesto por unas tarjetas que se describen en esta sección.

Una vez presentado el código en este capítulo, el siguiente se dedicará a la validación de los distintos módulos con varios casos de prueba encontrados en la literatura.

5.2. Principales Características del Código **FHSWB**

Esta sección describe el código **FHSWB**, cuyas siglas hacen referencia al tipo de vehículo al que es aplicable (**FHSWB** acrónimo de **F**reeplay **H**ysteresis on **S**lender **W**ing/**B**ody Configurations). Recuérdese sin embargo que parte del código es aplicable directamente a cualquier tipo de configuraciones, siempre y cuando sean conocidas las ecuaciones aeroelásticas en la formulación estado-espacio.

5.2.1. Formulación de las Ecuaciones Aeroelásticas de Configuraciones Esbeltas

El código **FHSWB** implementa las ecuaciones de los dos capítulos anteriores 3 y 4, realizando las integraciones de línea y superficie mediante métodos de integración estándar. Una vez introducidas las formas modales, el código calcula las matrices de inercia, rigidez y aerodinámica generalizadas, acoplándolas para formular las ecuaciones aeroelásticas en el dominio de la frecuencia o en la formulación estado-espacio.

La integración del coeficiente de presiones en las superficies de control para obtener las fuerzas aerodinámicas precisa de un método de integración que permita procesar singularidades, debido a que el coeficiente de presiones tiene a infinito en el borde de ataque.

5.2.2. Método de Solución en el Dominio de la Frecuencia

Una vez calculadas las principales matrices del sistema (inercia, rigidez y aerodinámica) y asumiendo respuesta armónica, se procede a resolver las ecuaciones aeroelásticas mediante el método k. Esto permite obtener dos resultados principales:

1. Una estimación de la velocidad de *flutter* lineal.
2. Cálculo de la inestabilidad aeroelástica *divergencia*.

5.2.3. Método de Solución en el Dominio del Tiempo

El código **FHSWB** implementa una solución en el dominio del tiempo de las ecuaciones aeroelásticas. Una vez formuladas las ecuaciones matriciales de Estado-Espacio:

$$\begin{aligned}\frac{d\{x\}}{dt} &= [A] \{x\} + [B] \{u\} \\ \{y\} &= [C] \{x\} + [D] \{u\}\end{aligned}\tag{5.1}$$

$$\{ConstraintFunction\} = [ConstraintMatrix] \{x\} - \{ConstraintValues\}$$

se realiza una integración en el dominio del tiempo con la colección de integradores **ODEPACK** ([Hin83]), desarrollada por el *Center of Applied Scientific Computing* del **LLNL** (*Lawrence Livermore National Laboratory*, en Livermore, U.S.A.). El **LLNL** es parte del *National Nuclear Security Administration* dentro del Departamento de Energía de los Estados Unidos.

El paquete **ODEPACK** es de libre adquisición y puede descargarse de la dirección de Internet www.computation.llnl.gov/casc/software.html.

La tercera ecuación matricial se introduce con el objetivo de determinar los instantes de tiempo en los que el sistema pasa por las esquinas de la no linealidad. Esta ecuación se explica en la siguiente sección.

5.2.4. Integración con Detección de Entrada/Salida de la Zona Muerta o *Deadband*

La detección de los instantes de tiempo exactos (*switching-points*) en los que en sistema de Estado-Espacio debe cambiarse, debido a una entrada o salida de la zona *deadband* de la no linealidad *freeplay*, es de vital importancia para no acumular errores durante la integración ([RJD⁺01] o [Lin93]). La figura 5.1 compara la integración con el código **FHSWB** con una integración estándar sin detección de la esquina de la no linealidad. Se representa el giro de las superficies de control de un sistema de reabastecimiento en vuelo tipo *boom*, asumiendo una no linealidad en la rotación de las superficies de control del tipo *freeplay*. Con un mismo paso de tiempo de integración de 0,001 [sec], puede observarse que la integración sin detección de las esquinas de la no linealidad proporciona un resultado erróneo. A medida que se disminuye el paso de tiempo, el método de Runge-Kutta converge a la solución del código **FHSWB**. Sin embargo, es necesario reducir el paso de tiempo a $5 \cdot 10^{-5}$ para conseguir resultados comparables al código **FHSWB** con detección de esquinas.

En el código **FHSWB**, el vector $\{ConstraintFunction\}$ de la ecuación matricial:

$$\{ConstraintFunction\} = [ConstraintMatrix] \{x\} - \{ConstraintValues\}$$

determina condiciones de interrupción en la integración de las ecuaciones. Cuando alguna de las componentes $ConFun(i)$ es cero indica el cumplimiento de alguna de las siguientes condiciones:

1. La variable no lineal alcanza la esquina izquierda de la no linealidad tipo *freeplay* (componente $ConstraintFunction(1) = 0$).

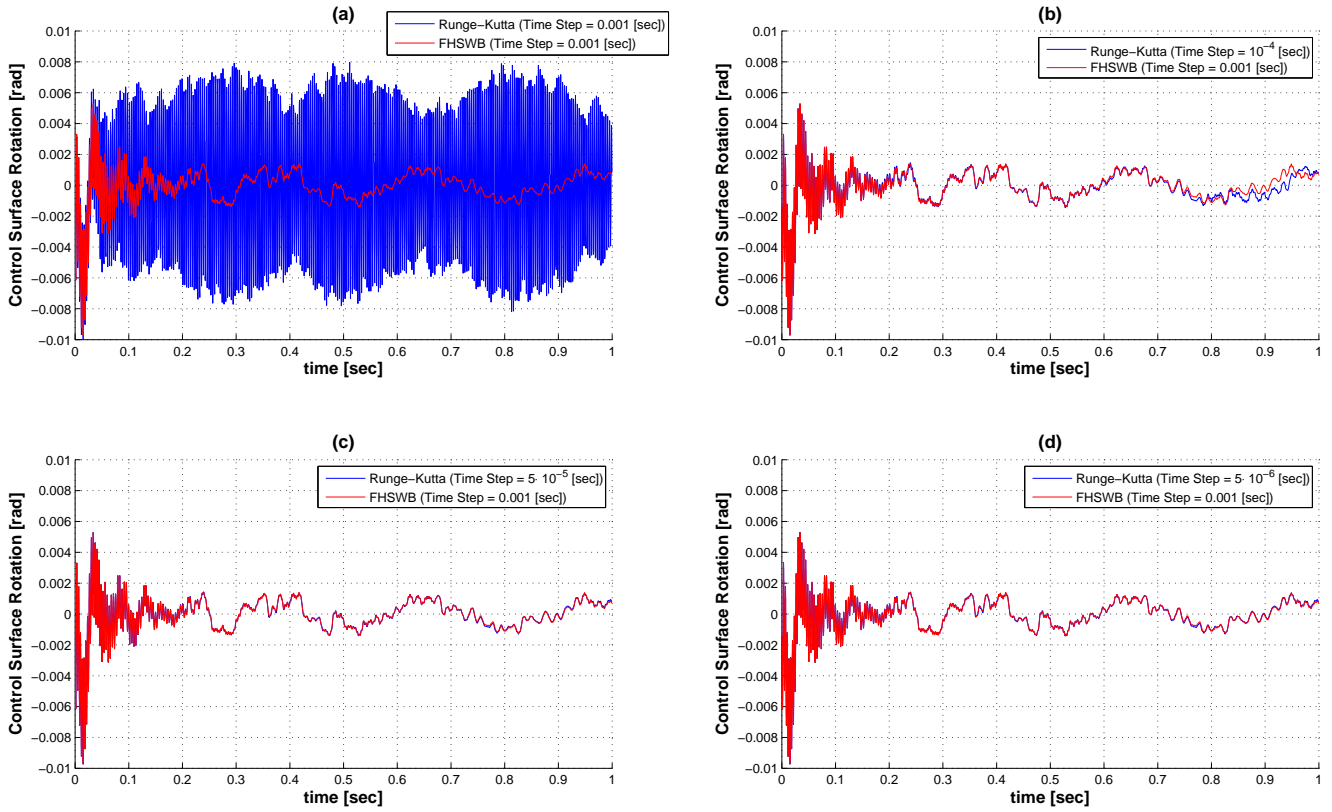


Figura 5.1: Integración del código **FHSWB** con paso de tiempo 0,001 [sec] comparado con un método Runge-Kutta sin detección de las esquinas de la no linealidad y con paso de tiempo de integración: (a) 0,001 [sec] (b) $1 \cdot 10^{-4}$ [sec] (c) $5 \cdot 10^{-5}$ [sec] y (d) $5 \cdot 10^{-6}$ [sec]

2. La variable no lineal alcanza la esquina derecha de la no linealidad tipo *freeplay* (componente $ConstraintFunction(2) = 0$).
3. La variable no lineal alcanza un máximo o mínimo (componente $ConstraintFunction(3) = 0$).

La matriz [$ConstraintMatrix$] y el vector $\{ConstraintValues\}$ asociados al cumplimiento de las tres condiciones anteriores se detallan en la figura 5.3. La determinación del tiempo en el que la componente i del vector $\{ConstraintFunction\}$ alcanza un cero requiere una iteración entre dos valores de $\{ConstraintFunction(i)\}$ de distinto signo, es decir, requiere encontrar los ceros de la función $\{ConstraintFunction(i)\}$. Existen distintos métodos para encontrar las raíces de una función ([PVT96]): método de la bisección, método de la secante, método *regula-falsi* e *illinois*, método de Ridder, etc. De todos ellos, el método de *illinois* ([HS80]), una mejora del método *regula-falsi*, es el utilizado en el paquete **ODEPACK**. La figura 5.2, extraída de la referencia [Don02], compara el método *illinois* con el *regula-falsi*.

El método *illinois* funciona de la siguiente forma: cuando busca la solución de $f(t) = 0$ y detecta dos puntos entre los que la solución debe estar, en la figura 5.2 los valores $f(t_l) < 0$ y $f(t_u) > 0$, traza una recta que pasa por los puntos $(t_l, f(t_l))$ y $(t_u, f(t_u))$ y calcula el corte por cero, obteniendo el

punto $(t'_l, f(t'_l))$. Como el valor de $f(t'_l)$ es menor que cero, el punto $(t_l, f(t_l))$ se traslada al $(t'_l, f(t'_l))$, mientras que el otro punto cuya abscisa no se mueve pasa a ser $(t_u, f(t_u)/2)$. Esta última operación es la que diferencia al método *illinois* del método *regula-falsi*, ya que en el caso del *regula-falsi* el punto $(t_u, f(t_u))$ se habría quedado fijo sin dividir su ordenada por dos. La ventaja del método *illinois* es que converge más rápidamente que el método *regula-falsi*.

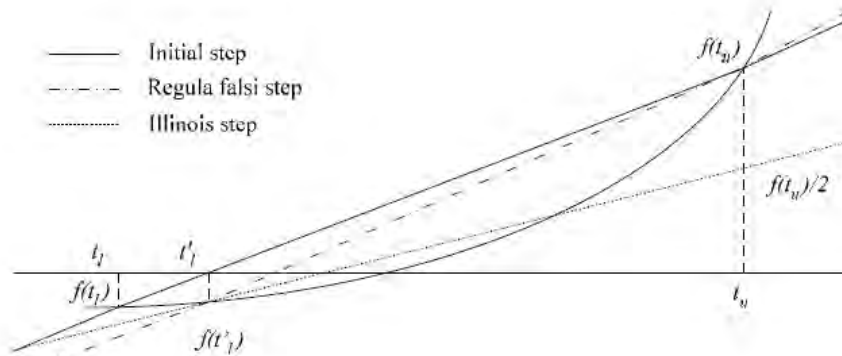


Figura 5.2: Método *illinois* comparado con el método *regula-falsi*.

5.2.5. Módulos de representación gráfica en tiempo de ejecución

El código **FHSWB** incluye una serie de módulos de representación gráfica que permite procesar resultados en tiempo de ejecución,

1. Módulo de representación gráfica de la configuración cuerpo/ala, incluyendo la localización de los soportes, eje de charnela de las superficies de control, centros de gravedad (cuerpo, superficies de control y cuerpo/ala), etc.
2. Módulo de representación gráfica de las formas modales.
3. Módulo de representación gráfica de la respuesta del sistema: evolución de la respuesta con el tiempo, planos de fase, fuerza/momento no lineal, etc.
4. Módulo de animación del mecanismo de *flutter*.

Todos estos módulos han sido programados en *Fortran 90* con la utilización de las subrutinas gráficas estándar *PGPLOT*.

Figura 5.3: Función $ConstraintFunction(1:3,1)$ que controla el paso por las esquinas de las no linealidades tipo *freeplay* o *hysteresis*.

ConstraintFunction(1:3,1)

(FUNCIÓN VECTORIAL DE CONTROL PARA LA CAPTURA DE LAS ESQUINAS DE LA NO LINEALIDAD)

La función vectorial $ConstraintFunction$ de dimensión 3×1 se utiliza para determinar el paso por las esquinas de la no linealidad *freeplay*¹. Las componente $ConstraintFunction(1)$ vale 0 cuando la variable no lineal se sitúa es la esquina izquierda de la no linealidad (*LeftFreeplay*), la componente $ConstraintFunction(2)$ vale 0 cuando la variable no lineal se sitúa en la esquina derecha de la no linealidad (*RightFreeplay*), y la componente $ConstraintFunction(3)$ se utiliza para capturar máximos y mínimos de la variable no lineal. A continuación, se formula la ecuación matricial asociada a las tres posibles localizaciones de la no linealidad.

Cuando alguna componente de la función $ConstraintFunction$ cambia de signo, el integrador vuelve atrás y cambia el paso de tiempo para capturar el cero de la $ConstraintFunction$ y realizar en ese tiempo el cambio de ecuaciones Estado-Espacio.

- Caso 1: Soporte no lineal en desplazamiento:

$$\{ConstraintFunction\} = \begin{bmatrix} \psi_{1,NLD} & \psi_{2,NLD} & \dots & \psi_{m,NLD} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \psi_{1,NLD} & \psi_{2,NLD} & \dots & \psi_{m,NLD} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \psi_{1,NLD} & \psi_{2,NLD} & \dots & \psi_{m,NLD} \end{bmatrix} \{x\} - \begin{Bmatrix} LeftFreeplay \\ RightFreeplay \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

- Caso 2: Soporte no lineal en rotación:

$$\{ConstraintFunction\} = \begin{bmatrix} \psi'_{1,NLD} & \psi'_{2,NLD} & \dots & \psi'_{m,NLD} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \psi'_{1,NLD} & \psi'_{2,NLD} & \dots & \psi'_{m,NLD} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \psi'_{1,NLD} & \psi'_{2,NLD} & \dots & \psi'_{m,NLD} \end{bmatrix} \{x\} - \begin{Bmatrix} LeftFreeplay \\ RightFreeplay \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

- Caso 3: Soporte no lineal en actuadores:

$$\{ConstraintFunction\} = \begin{bmatrix} \psi'_{1,wb}(x_h) & \psi'_{2,wb}(x_h) & \dots & \psi'_{m,wb}(x_h) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \psi'_{1,wb}(x_h) & \psi'_{2,wb}(x_h) & \dots & \psi'_{m,wb}(x_h) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \psi'_{1,wb}(x_h) & \psi'_{2,wb}(x_h) & \dots & \psi'_{m,wb}(x_h) \end{bmatrix} \{x\} - \begin{Bmatrix} LeftFreeplay \\ RightFreeplay \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

¹Recuérdese que la no linealidad *hysteresis* se puede reducir a dos no linealidades *freeplay* con distinta precarga.

5.2.6. Detectores en tiempo real del tipo de respuesta

El código **FHSWB** incorpora un módulo de caracterización de la respuesta con el objetivo de determinar en tiempo de ejecución el tipo de respuesta del sistema, i.e.: amortiguada, armónica LCO, caos o *flutter*. Este módulo cumple los siguientes importantes objetivos:

1. Permite identificar de forma automática la respuesta suministrando, en las variables e intervalo de tiempo seleccionado por el usuario, los siguientes valores:
 - Valor mínimo, máximo y media aritmética.
 - Desviación estándar y raíz media cuadrática.
 - Frecuencias características.
 - Valores pico (mínimo y/o máximos) que se utilizarán en el postproceso para construir los diagramas de bifurcación.
2. La identificación en tiempo real permite interrumpir la integración del sistema (ya se ha caracterizado la respuesta con los valores del punto anterior) y reduce tiempos de cálculo, algo fundamental en el diseño de una aeronave que requiere la evaluación de cientos de puntos de vuelo combinados con decenas de valores para cada uno de los parámetros que definen la no-linealidad.

A continuación se describe el fundamento teórico de cada uno de los módulos que detectan los tipos de respuesta.

Detector de respuesta amortiguada

Sea el sistema aeroelástico en la formulación Estado-Espacio:

$$\frac{d\{x\}}{d\hat{t}} = [A] \{x\} + [B] \{u\} \quad (5.5)$$

donde recuérdese que el vector de estado $\{x\}$ está formado por las coordenadas y velocidades generalizadas dispuestas en la siguiente forma:

$$\{x\} = \left\{ \begin{array}{c} \{\hat{\xi}\} \\ d\{\hat{\xi}\}/d\hat{t} \end{array} \right\} \quad (5.6)$$

Con el objetivo de determinar si la respuesta está amortiguada, en los instantes de tiempo en los alguna componente del vector *ConstraintFunction* alcanza un cero, el código **FHSWB** evalúa las siguientes cantidades:

1. Media cuadrática de las velocidades generalizadas (variable *RadioVectorRMSdxSSdt* dentro del código), i.e.:

$$RadioVectorRMSdxSSdt = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{d\hat{\xi}_i}{d\hat{t}} \right)^2} \quad (5.7)$$

Si esta variable *RadioVectorRMSdxSSdt* es menor que 10^{-4} se considera que este instante de tiempo es un estado *amortiguado* de tipo 1.

2. Condición de estacionariedad en alguna de las esquinas de la no linealidad:

En este tipo de no linealidades (*freeplay* o *hysteresis*) el grado de libertad no lineal puede tender a situarse en las esquinas de la no linealidad, zona en la que el muelle no lineal ya empieza a actuar contrarrestando el resto de fuerzas exteriores. Para determinar una respuesta estacionaria (amortiguada) asociada a este fenómeno se calculan, en los instantes de tiempo en los que alguna de las restricciones *ConstraintFunction*(1 : 3, 1) es cero, los dos valores siguientes:

- a) Distancia del grado de libertad no lineal a la esquina izquierda de la no linealidad (variable *ConstraintFunction*(1) en el código **FHSWB**). Si la variable *ConstraintFunction*(1) es menor que 10^{-4} se considera que este instante de tiempo es un estado *amortiguado* de tipo 2.
- b) Distancia del grado de libertad no lineal a la esquina derecha de la no linealidad (variable *ConstraintFunction*(2) en el código **FHSWB**). Si la variable *ConstraintFunction*(2) es menor que 10^{-4} se considera que este instante de tiempo es un estado *amortiguado* de tipo 3.

El código **FHSWB** considera que la respuesta es amortiguada cuando alguna de los tres estados *amortiguados* se repite de forma consecutiva un número determinado de instantes de tiempo. Este número se almacena en una variable interna *MAXNumberOfDetectedDampedPoints* y actualmente tiene un valor de 50.

Una vez que la respuesta se considera amortiguada, el código interrumpe la integración y devuelve una estadística como la del siguiente ejemplo (extraído de **S01.ROT.FDA** con valor de holgura adimensional 0,005):

```
>>> Uinf_ADIM          110.000000
BC                    =  1.50E-02 -1.50E-02 -1.50E-02  0.00E+00  0.00E+00  0.00E+00
DeadbandUp           = -0.00493  0.00707
DeadbandDown         = -0.00707  0.00493
Preload(Down & Up) = -5.16706  5.16706
MOTION = DMP / ySS(1:2*N_MODES) = (-.43708E-04 0.39050E-04 -.60042E-02 0.90075E-05 -.12724E-06 0.13461E-16) at time = 5.554
DFA :(-.39362E-17 0.56696E-16 0.25042E-17)( 0.10068E-16 0.97516E-17): 0 : DAMPED MOTION / [min-mean,MAX-mean]=[ 0.000000, 0.000000]
DFA :( 0.60042E-02 0.60042E-02 0.60042E-02)( 0.60042E-02 0.62777E-08): 0 : DAMPED MOTION / [min-mean,MAX-mean]=[ 0.000000, 0.000000]
BIF : 1 : 0.006004
```

donde se indica:

1. La velocidad de vuelo adimensional ($Uinf_ADIM = 110$).
2. Las condiciones iniciales en el vector de estado (*BC*).
3. Parámetros de la no linealidad (*DeadbandUP*, *DeadbandDown*, etc.).
4. La caracterización de la respuesta (en este caso amortiguada o *damped DMP*), junto con el vector de salida $\{y\}$ en el tiempo de integración ($time = 5,554$) en el que el código **FHSWB** ha decidido catalogar a la respuesta como *amortiguada*.
5. Una línea por cada variable que el usuario ha decidido monitorizar, encabezada por las siglas *DFA* (de *Discrete Fourier Analysis*):

```
DFA :( 0.60042E-02 0.60042E-02 0.60042E-02)( 0.60042E-02 0.62777E-08): 0 : DAMPED MOTION / [min-mean,MAX-mean]=[ 0.000000, 0.000000]
```


y en la que se especifica:

- a) Valor mínimo ($0,60042E-02$), máximo ($0,60042E-02$) y media aritmética ($0,60042E-02$).
 - b) Raíz media cuadrática ($0,60042E-02$) y desviación estándar ($0,62777E-08$).
 - c) Número de frecuencias características (en este caso 0 ya que es movimiento amortiguado).
 - d) Caracterización de la respuesta: DAMPED MOTION.
 - e) Distancia de la media aritmética al valor mínimo y al valor máximo ($[min - mean, MAX - mean] = [0,000000, 0,000000]$)
6. Últimos extremos relativos (mínimos o máximos) de la variable no lineal (desplazamiento de soporte, rotación de soporte o giro de actuador) que se utilizarán en el postproceso para construir los diagramas de bifurcación.

Detector de respuesta armónica LCO

El integrador del código **FHSWB** determina de forma precisa el paso de la variable no lineal por las esquinas de la no linealidad, calculando el tiempo de paso y ajustando el tiempo de integración del paso anterior para caer en la esquina. Como se detalla en 5.2.3, el método utilizado para la determinación del paso es el método *illinois*, una variación del método *regula-falsi*.

Se ha aprovechado esta característica del código, la posibilidad de determinar condiciones de paso por un valor en algunas de las variables de estado (o variables elaboradas), para implementar un módulo de caracterización de respuesta armónica. La idea es la siguiente:

- Durante la integración se determina el tiempo exacto en el que la variable no lineal alcanza un extremo relativo.
- Se guardan en un vector un número determinado consecutivo de estos extremos. La variable *NumberOfLCOPoints* determinan el número de extremos que se guardan, y un valor de 50 ha demostrado ser válido en los resultados.
- Cada bloque de 50 extremos (almacenados en un vector que se denominará $\{LCO\}_1$) se compara con el siguiente bloque de otros 50 extremos (almacenados en un vector que se denomina $\{LCO\}_2$). En caso de que la diferencia calculada de la siguiente forma:

$$LCO_{Detector} = \sqrt{\sum_{i=1}^{50} [LCO_1(i) - LCO_2(i)]^2} \quad (5.8)$$

sea menor que 10^{-10} se considera que los dos bloques son idénticos y una variable denominada *iLCOBlock* se incrementa en uno. En caso contrario, los dos bloques son distintos y la variable *iLCOBlock* se resetea a 0.

Cuando el número consecutivo de bloques idénticos ($LCO_{Detector} < 10^{-10}$) llega al determinado por la variable *NumberOfLCOBlocks*, que por defecto tiene un valor de 4, se considera que la respuesta es repetitiva de tipo armónico LCO.

- Una vez que el código **FHSWB** caracteriza a la respuesta de tipo LCO, devuelve una estadística como el siguiente ejemplo (extraído de **S01.ROT.HDA** con valor de holgura adimensional 0,006):

```
>>> Uinf_ADIM          360.000000
BC                    =   1.50E-02  -1.50E-02  -1.50E-02   0.00E+00   0.00E+00   0.00E+00
DeadbandUp           =   -0.00493   0.00707
DeadbandDown         =   -0.00707   0.00493
Preload(Down & Up) =   -5.16706   5.16706
MOTION = LCD
DFA : ( -.90870E+01  0.90872E+01  -.11346E-01) ( 0.62363E+01  0.62363E+01):  3 :  10.43[Hz]( 16.02)/  31.54[Hz]( 10.91)/  52.65[Hz](  2.78)/
DFA : ( -.19489E-01  0.19489E-01  0.13029E-03) ( 0.12950E-01  0.12949E-01):  2 :  10.43[Hz]( 16.02)/  31.54[Hz](  6.10)/
BIF :  2 :  -0.019489  0.019489
```

con una información similar a la descrita en el caso de respuesta amortiguada del punto anterior.

Detector de respuesta caótica

El código **FHSWB** no puede determinar en tiempo real y con una única respuesta si ésta es caótica o no, debido a que el concepto de *caos* es algo más complejo y no es suficiente un análisis de una respuesta para unas únicas condiciones iniciales. La característica fundamental del caos es la dependencia sensible a las condiciones iniciales, de forma que una variación pequeña de las condiciones conduce a respuestas completamente distintas. Para la determinación del caos se han desarrollado herramientas de postproceso de los resultados del código **FHSWB** y que se describen en el capítulo 11.

Sin embargo, una información muy útil, *síntoma de caos*, y que el código **FHSWB** sí es capaz de suministrar en tiempo de ejecución es:

1. El número de frecuencias características de la respuesta. Las respuesta de tipo caótico no tienen frecuencias características, por lo que un número elevado de frecuencias caractericticas (PSD plano) es un primer síntoma de caos.
2. Elevado número de extremos relativos distintos en la variable no lineal. Esto indica que la respuesta alcanza mínimos y máximos de una forma aleatoria y no sigue un patrón clásico de las respuestas de tipo armónico con repetición de mínimos y máximos.

El siguiente ejemplo es la salida que el código **FHSWB** suministra para una integración con una respuesta que parece caótica:

```
>>> Uinf_ADIM          270.000000
BC                    =   1.50E-02  -1.50E-02  -1.50E-02   0.00E+00   0.00E+00   0.00E+00
DeadbandUp           =   -0.00493   0.00707
DeadbandDown         =   -0.00707   0.00493
Preload(Down & Up) =   -5.16706   5.16706
MOTION = LCO
DFA : ( -.58798E+01  0.58884E+01  0.58883E-04) ( 0.26869E+01  0.26869E+01): 23 :  10.14[Hz]( 16.02)/  15.00[Hz](  0.21)/  15.03[Hz](  1.07)/ etc.
DFA : ( -.11470E-01  0.11470E-01  -.16704E-04) ( 0.57008E-02  0.57007E-02):  9 :   4.42[Hz](  0.43)/   5.11[Hz](  0.30)/   5.16[Hz](  1.33)/ etc.
BIF : 20 :  -0.011474  -0.011454  -0.011435  -0.011355  -0.011274  -0.008296  -0.007263  -0.007205  -0.007135  -0.006984  0.005843  0.006018  0.006128 etc.
```

Puede observarse el elevado número de frecuencias características (23 en la primera variable y 9 en la segunda), y el elevado número de mínimos y máximos distintos que está alcanzando la variable no lineal y que se indica en la variable BIF:

```
BIF : 20 :  -0.011474  -0.011454  -0.011435  -0.011355  -0.011274  -0.008296  -0.007263  -0.007205  -0.007135  -0.006984  0.005843  0.006018  etc.
```

De esta forma, el código **FHSWB** suministra *candidatos* a respuesta caótica que deben confirmarse con las herramientas que se describen en el capítulo 11.

Detector de respuesta flutter

Dado el sistema en la formulación Estado-Espacio:

$$\frac{d\{x\}}{d\hat{t}} = [A] \{x\} + [B] \{u\} \quad (5.9)$$

$$\{y\} = [A] \{x\} + [B] \{u\} \quad (5.10)$$

el código **FHSWB** cataloga una respuesta como *flutter* si ocurre alguna de las condiciones siguientes:

1. El valor absoluto de una variable definida por el usuario (que se introduce en el vector de salida $\{y\}$) alcanza un valor máximo, también definido por el usuario.
2. El valor absoluto de alguna de las variables de estado del vector $\{x\}$ alcanza unos valores máximos definidos por el usuario.
3. El valor de la raíz media cuadrática de las *coordenadas generalizadas* (variable denominada *RadioVectorRMSxSS*) o de las *velocidades generalizadas* (variable denominada *RadioVectorRMSdxSSdt*) alcanza un valor definido por el usuario, i.e.,

$$RadioVectorRMSxSS = \sqrt{\sum_{i=1}^m \hat{\xi}_i^2} > 10^{+6} \text{ (valor por defecto)} \quad (5.11)$$

$$RadioVectorRMSdxSSdt = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{d\hat{\xi}_i}{d\hat{t}}\right)^2} > 10^{+6} \text{ (valor por defecto)} \quad (5.12)$$

Una vez catalogada la respuesta como *flutter*, el código **FHSWB** interrumpe la integración y devuelve una estadística como el siguiente ejemplo:

```
>>> Uinf_ADIM          500.000000
BC                    =  1.50E-02  -1.50E-02  -1.50E-02   0.00E+00   0.00E+00   0.00E+00
DeadbandUp           =  -0.00493   0.00707
DeadbandDown         =  -0.00707   0.00493
Preload(Down & Up)   =  -5.16706   5.16706
MOTION = FLT / ySS(1:2*N_MODES) = ( -.29996E-01  0.41650E+00  0.10021E+01  0.34953E+02  -.48152E+03  -.66105E-10) at time =      2.677
*** FLUTTER !. MODE = 3 (xSS =      1.002149 ABSLimitsToDetectFlutterOccurance =      1.000000
```

en el que indica la existencia de *flutter* ($MOTION = FLT$), el tiempo en el que se ha interrumpido la integración ($at\ time = 2.677$) y el motivo ($***\ FLUTTER\ !.\ MODE = 3\ (xSS = 1.002149\ ABSLimitsToDetectFlutterOccurance = 1.000000)$).

5.3. Programa Principal: Secuencia de Ejecución

El programa principal de cálculo realiza las siguientes operaciones de forma secuencial:

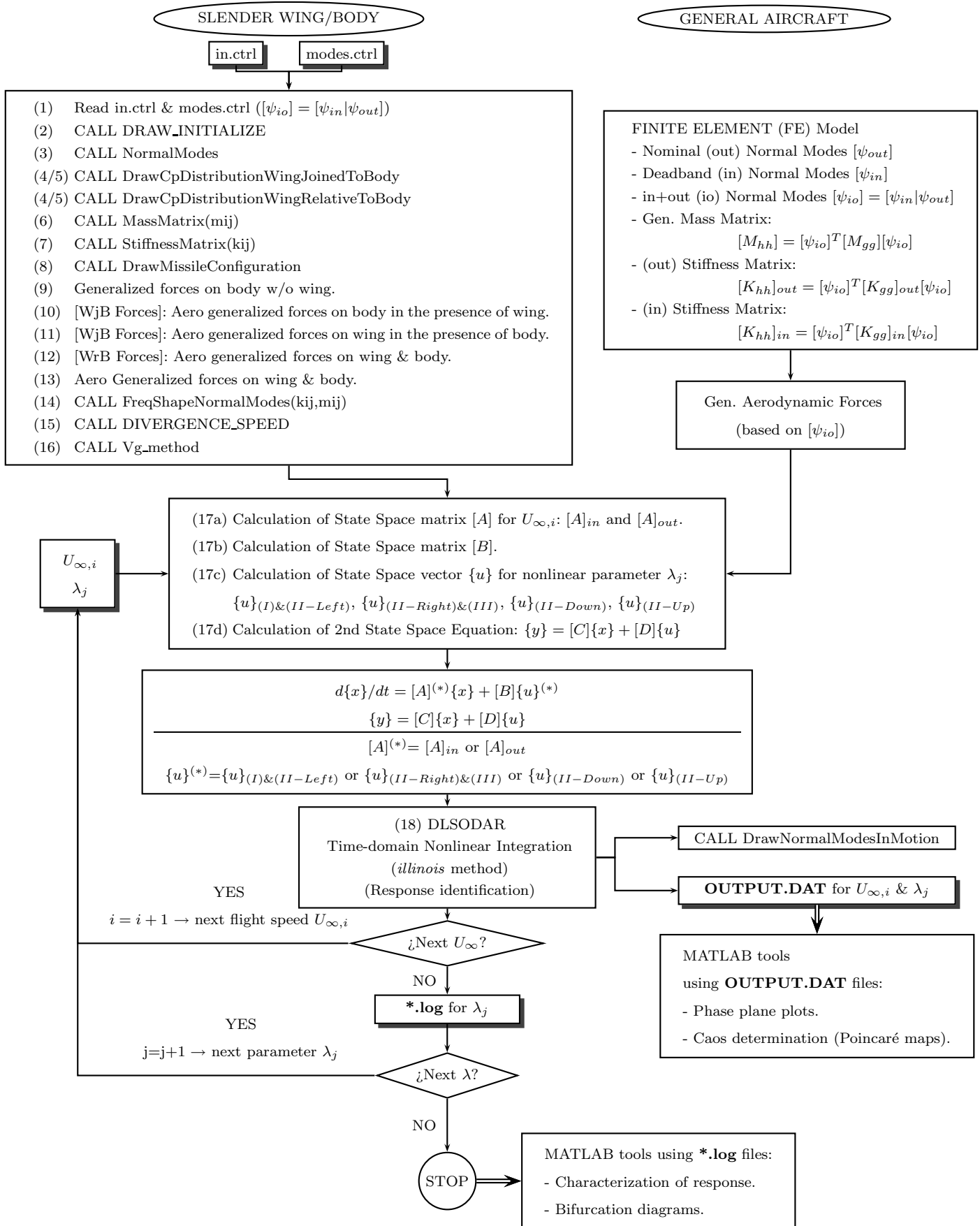
1. Lectura de los dos ficheros de control **in.ctrl** y **modes.ctrl**.
2. Inicialización del entorno gráfico (subrutina *DRAW_INITIALIZE*).
3. Representación gráfica de las formas modales (subrutina *NormalModes*).
4. Cálculo del coeficiente de presiones aerodinámico (estacionario y no estacionario) para deformaciones producidas por cada uno de los modos $\psi_i(\hat{x})$, calculando por orden:
 - Contribución **WjB** del modo $\psi_i(\hat{x})$, i.e., $\psi_{i,b}(\hat{x})$.
 - Contribución **WrB** del modo $\psi_i(\hat{x})$, i.e., $\psi_{i,w}(\hat{x}) - \psi_{i,b}(\hat{x})$.
5. Representación gráfica de la distribución del coeficiente de presiones en secciones de la configuración $x = cte$.
6. Cálculo/lectura de la matriz de masas generalizada.
7. Cálculo/lectura de la matriz de rigidez generalizada.
8. Representación gráfica de la configuración en un plano xy .
9. Cálculo de fuerzas generalizadas sobre el cuerpo aislado.
10. Cálculo de fuerzas generalizadas sobre el cuerpo en presencia de las superficies de control: contribución **WjB**.
11. Cálculo de fuerzas generalizadas sobre las superficies de control en presencia del cuerpo: contribución **WjB**.
12. Cálculo de fuerzas generalizadas sobre el cuerpo y las superficies de control: contribución **WrB**.
13. Cálculo de fuerzas generalizadas totales: **WjB+WrB**.
14. Cálculo de frecuencias modales.
15. Cálculo de la velocidad de *divergencia*.
16. Cálculo de la velocidad de *flutter* lineal.
17. Formulación/lectura de las matrices de estado-espacio².
18. Integración de las ecuaciones en el dominio del tiempo.

Una vez terminada la integración se puede procesar los resultados mediante herramientas MATLAB y/o continuar con otra velocidad de vuelo U_∞ . En este segundo caso, se vuelven a generar las matrices de estado-espacio para volver a realizar una integración en el tiempo.

La página siguiente incluye un diagrama de bloques con la secuencia de ejecución.

²En este punto se pueden introducir directamente las matrices de estado-espacio de cualquier configuración, que habrán sido calculadas con la metodología que se indica en la columna *General Aircraft* del diagrama de bloques que se incluye en la página siguiente.

DIAGRAMA DE BLOQUES CON LA SECUENCIA DE EJECUCIÓN



5.4. Elección de la Base Modal

Como puede observarse en el diagrama de bloques de la sección 5.3, el código **FHSWB** utiliza *modos asumidos* con una *base mixta* $[\psi_{io}]$, que se construye completando la *base nominal* $[\psi_{out}]$ (modos obtenidos con la rigidez nominal) con modos locales asociados a la rigidez local nula, i.e., modos de la *base cero* $[\psi_{in}]$. En esta tesis, la *base mixta* se construye incorporando modos de deformación a la base nominal mediante el siguiente procedimiento:

1. Rigidez nominal (fuera de la zona *deadband*): Cálculo de los modos de la *base nominal* $[\psi_{out}]$.
2. Rigidez cero (dentro de la zona *deadband*): Cálculo de los modos de la base con rigidez local nula o *base cero*, i.e., $[\psi_{in}]$.
3. Completar la *base nominal* con modos de la *base cero*, obteniendo la *base mixta* $[\psi_{io}] = [\psi_{in}|\psi_{out}]$.

Para comprobar la validez de esta base *modal mixta* $[\psi_{io}]$ se ha realizado una serie de simulaciones sobre un modelo aeroelástico de un *tail boom* o pértiga de reabastecimiento en vuelo ([ASR⁺07]). La figura 5.4 representa tres respuestas del sistema aeroelástico *boom* en las tres condiciones siguientes:

1. Figura (a): Sistema lineal con los actuadores de las aletas del *boom* con la rigidez nominal. La solución exacta sería la correspondiente a la base nominal $[\psi_{out}]$ (línea de color negro), la solución con la base modal obtenida con rigidez nula en los actuadores $[\psi_{in}]$ corresponde a la línea roja y, por último, la solución con la base modal mixta $[\psi_{io}]$ corresponde a la línea azul. La solución con la base modal mixta coincide con la solución exacta obtenida con la base modal nominal.
2. Figura (b): Sistema lineal con los actuadores de las aletas del *boom* con la rigidez nula (dentro de la zona muerta o *deadband*). El código de colores es el mencionado en la figura anterior y de nuevo puede observarse que la solución con la base modal mixta sigue a la solución exacta que, en este caso, viene dada por la base modal obtenida con rigidez nula en los actuadores, i.e., la *base cero* $[\psi_{in}]$.
3. Figura (c): Sistema no lineal con *hysteresis* en los actuadores de las aletas. Con el mismo código de colores que las dos figuras anteriores, puede observarse que la solución con la base modal mixta $[\psi_{io}]$ reproduce las oscilaciones de ciclo límite, mientras que la base modal nominal $[\psi_{out}]$ no es capaz de reproducir estas oscilaciones debido a que carece del modo de control (sólido rígido) de rotación de aletas. La base con rigidez nula $[\psi_{in}]$ proporciona una solución más cercana a la obtenida con la base modal mixta debido a que contiene el modo de control de rotación de aletas.

Por tanto, se comprueba que es fundamental incorporar a la base modal de *modos asumidos* todos los modos necesarios para reproducir las deformaciones que aparecen en todas las zonas de la no linealidad. La *base mixta* $[\psi_{io}]$, formada con modos de la *base nominal* $[\psi_{out}]$ y la base con rigidez nula o *base cero* $[\psi_{in}]$, se introduce por primera vez en esta tesis y proporciona buenos resultados. Es un método parecido al *Método de las Masas Ficticias* de M. Karpel ([GK08]) que introduce modos adicionales en la base modal nominal forzando deformaciones locales.

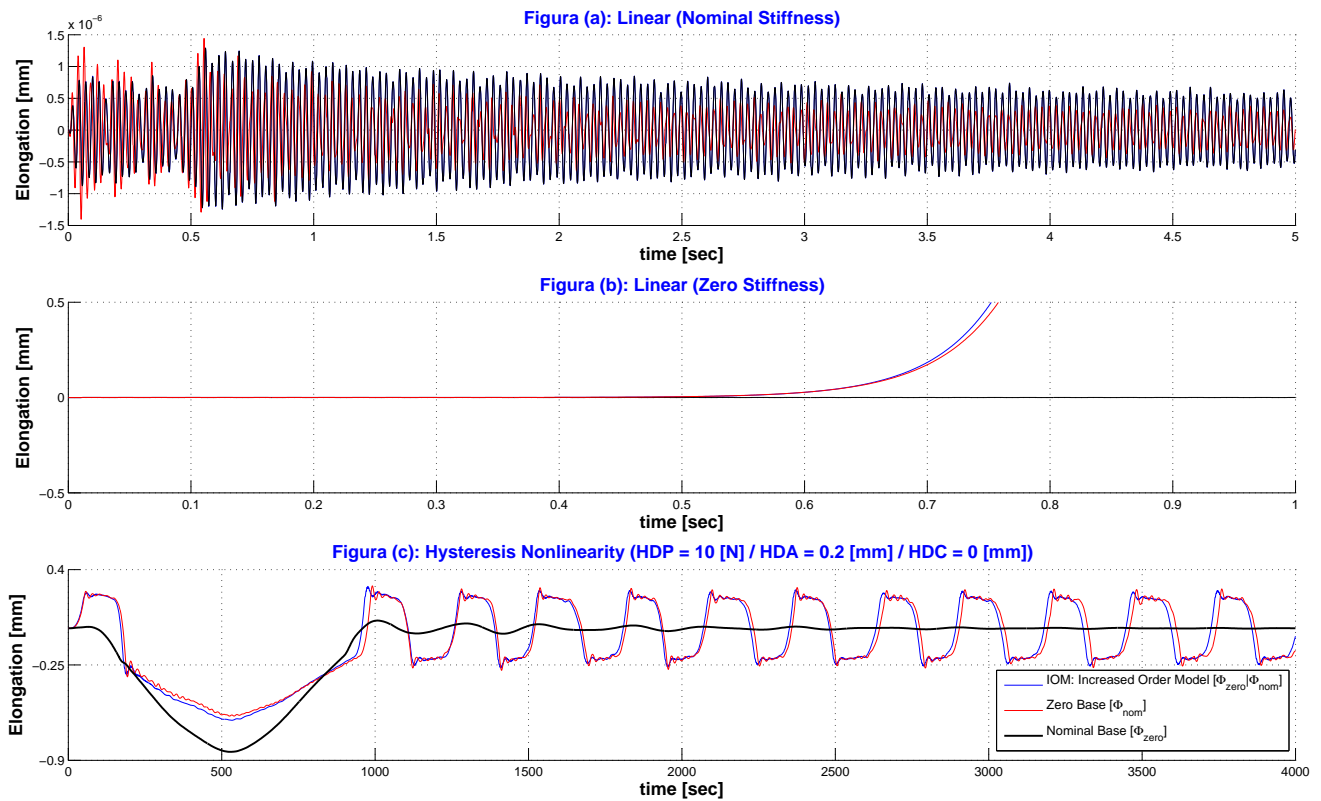


Figura 5.4: : Elongación del actuador de las aletas del sistema de reabastecimiento en vuelo *boom*. Figura (a): respuesta del sistema lineal con rigidez nominal. Figura (b): respuesta del sistema lineal con rigidez nula. Figura (c): respuesta del sistema no lineal con *hysteresis*.

5.5. Descripción de los Ficheros de Control

El código **FHSWB** necesita como entrada dos ficheros de control: uno con los parámetros generales (geometría, propiedades de rigidez y masa, condiciones de cálculo, etc...) y otro con los modos de deformación (modos de sólido rígido y elásticos). La forma de introducir datos es a través de *tarjetas* con 10 *campos* de 8 columnas cada uno. A continuación se detalla cada una de las tarjetas con comentarios sobre todos los campos que pueden ser introducidos.

Todas las tarjetas, excepto la tarjeta *MODE*, se introduce en el fichero de control con los parámetros generales.

- ADDFILM = Tarjeta que permite reproducir en una película 2D el movimiento del misil.

ADDFILM	iyAxis	FRtoSKIP	MLtoWAIT						
ADDFILM	8	5	100						

- iyAxis = Índice que determina la posición dentro del vector de salida $\{y\}$ de la variable que se representa como referencia junto con la película del movimiento del misil. Un cursor relaciona el movimiento del misil con el *time-history* de la variable asociada al índice *iyAxis*.
- FRtoSKIP = El movimiento del misil es la sucesión de *fotos instantáneas*, una por cada punto de cálculo. El número de puntos de cálculo depende del *intervalo de tiempo* definido en la solución numérica de la ecuación de Estado-Espacio. Si el intervalo de tiempo es pequeño (normalmente causado por necesidad de convergencia numérica), el número de *fotos instantáneas* o *frames* es excesivo y conviene reproducir el movimiento del misil saltando de *FRtoSKIP* en *FRtoSKIP* frames.
- MLtoWAIT = Milisegundos que se desea congelar cada frame que se representa. Este valor se especifica para reproducir a una velocidad más lenta el movimiento.

- ADDFORCE = Tarjeta que permite obtener la fuerza/momento no lineal.

ADDFORCE	ixAxis								
ADDFORCE	8								

- ixAxis = Índice del vector $\{y\}$ de la 2ª Ecuación de Estado-Espacio que se utiliza como variable en el eje x para representar la fuerza/momento no lineal. El vector $\{y\}$ contiene las coordenadas generalizadas, las velocidades generalizadas, y las variables definidas con la tarjeta ADDOUT.

- ADDOUT = Tarjeta que permite obtener variables adicionales en el vector de salida $\{y\}$ (2ª Ecuación de Estado-Espacio). Estas nuevas variables se colocan en el vector $\{y\}$ a continuación de las coordenadas generalizadas y velocidades generalizadas.

ADDOUT	NADDOUT				
	TYPE	DISPROTA	XCOOR	LABEL	
	
ADDOUT	4				
	BODY	DISP	0,0	BODY NOSE NONDIMENSIONAL DISPLACEMENT	
	BODY	ROTA	0,0	BODY NOSE ROTATION	
	WING	DISP	2,0	WING NONDIMENSIONAL DISP AT x=2.0 [m]	
	WING	ROTA	3,0	WING ROTATION AT x=3.0 [m]	
	WINGREL	ROTA	2,4	RELATIVE-to-BODY WING ROT AT x=2.4 [m]	

NADDOUT Número de variables de salida adicionales que se colocarán en el vector $\{y\}$ a continuación de las coordenadas generalizadas y las velocidades generalizadas.

TYPE Tipo de salida:

BODY Desplazamiento (DISP) o rotación (ROTA) en una sección x del cuerpo.

BODY1 Velocidad lineal (DISP) o velocidad angular (ROTA) en una sección x del cuerpo.

WING Desplazamiento (DISP) o rotación (ROTA) en una sección x de las aletas.

WING1 Velocidad lineal (DISP) o velocidad angular (ROTA) en una sección x de las aletas.

WINGREL Desplazamiento (DISP) o rotación (ROTA) de las aletas relativas al cuerpo en una sección x de las aletas.

WINGREL1 Velocidad lineal (DISP) o velocidad angular (ROTA) de las aletas relativas al cuerpo en una sección x de las aletas.

DISPROTA Desplazamiento o rotación, i.e., DISP=Desplazamiento / ROTA=Rotación.

XCOOR Coordenadas de la sección del cuerpo o aletas en unidades [L].

LABEL Etiqueta que se utilizará para caracterizar esta variable.

- ADDPLOT = Tarjeta que permite representar gráficamente cualquier par de variables del vector de salida $\{y\}$.

ADDPLOT	NADDPLOT		
	ixAxis	iyAxis	TITLE

ADDPLOT	1		
	1	2	TÍTULO: variable 2 vs variable 1

NADDPLOT Número de gráficos adicionales.

ixAxis Índice de la primera variable dentro del vector $\{y\}$.

iyAxis Índice de la segunda variable que se respresentará en el eje y vs la variable definida con el índice $ixAxis$.

TITLE Título del gráfico.

- DETECTOR = Tarjeta que activa el detector de movimiento LCO .

DETECTOR	VALUE								
DETECTOR	1								

VALUE Entero 0/1 indicando si se activa el detector de movimiento LCO . DETECTOR=0 desactiva la detección, mientras que DETECTOR=1 lo activa. Por defecto, DETECTOR=1.

- EREF = Modulo de Elasticidad de Young de referencia en unidades $[M/(LT^2)]$.

EREF	E_0								
EREF	$6,9 \cdot 10^{10}$								

E_0 Módulo de elasticidad (Módulo de Young) de referencia. Como referencia, se pueden utilizar algunos valores del módulo de Young con significado físico como el del Aluminio ($E_0 = 6,9 \cdot 10^{10}[N/m^2]$) o el del Acero ASTM A-514 ($E_0 = 2 \cdot 10^{11}[N/m^2]$).

- FLUTOUT = Acrónimo del inglés *FLUT*ter *OUT*. Tarjeta que permite especificar el valor umbral de una variable del vector de salida $y(:)$ a partir del cual se considera que la estructura ha entrado en *flutter*.

FLUTOUT	iMAXy	MAXy							
FLUTOUT	10	1.5							

iMAXy Índice de la variable dentro del vector y seleccionada para detectar *flutter*.

MAXy Máximo valor del valor absoluto de la variable de salida y (*iMAXy*).

NOTA: Los umbrales definidos por la tarjeta *FLUTOUT* se completan con la tarjeta *FLUTWAR* y con valores umbrales definidos para cada uno de los modos (valor máximo de la coordenada generalizada y velocidad generalizada) en el fichero de control en el que se especifican las formas modales.

- FLUTWAR = Acrónimo del inglés *FLUT*ter *WAR*ning. Tarjeta que permite especificar el valor umbral a partir del cual se considera que la estructura ha entrado en *flutter*.

FLUTWAR	MAXDISP	MAXVEL							
FLUTWAR	1.E+06	1.E+06							

MAXDISP Máximo valor de la *raíz media cuadrática* de los desplazamientos generalizados, i.e., del valor $\sqrt{\sum_{i=1}^n x(i)^2}$, donde n es el número de modos y $x(1:n)$ es la parte del vector de estado-espacio con las coordenadas generalizadas.

MAXVEL Máximo valor de la *raíz media cuadrática* de las velocidades generalizadas, i.e., del valor $\sqrt{\sum_{i=n+1}^{2n} x(i)^2}$, donde n es el número de modos y $x(n+1:2n)$ es la parte del vector de estado-espacio con las velocidades generalizadas.

NOTA: Los umbrales definidos por la tarjeta *FLUTWAR* se completan con unos valores umbrales definidos para cada uno de los modos (valor máximo de la coordenada generalizada y velocidad generalizada) en el fichero de control en el que se especifican las formas modales.

- MODE = Modo de deformación.

MODE	iMODE	LABEL							
	BODY	$a_{0,b}$	$a_{1,b}$	$a_{2,b}$	$a_{3,b}$	$a_{4,b}$	$a_{5,b}$	$a_{6,b}$	
	WING	$a_{0,w}$	$a_{1,w}$	$a_{2,w}$	$a_{3,w}$	$a_{4,w}$	$a_{5,w}$	$a_{6,w}$	
	INITIAL	$\hat{\xi}(0)$	$d\hat{\xi}/d\hat{t}(0)$						
MODE	1	HEAVING							
	BODY	1,0	0,0						
	WING	1,0	0,0						
	INITIAL	0,0	0,5						

iMODE Índice del modo.

$a_{j,b}$ Coeficiente asociado al orden del polinomio en j en una expresión polinómica que determina la deformada en el cuerpo.

$a_{j,w}$ Coeficiente asociado al orden del polinomio en j en una expresión polinómica que determina la deformada en las aletas.

$\hat{\xi}(0)$ Condición inicial en coordenada generalizada.

$d\hat{\xi}/d\hat{t}(0)$ Condición inicial en velocidad generalizada.

De esta forma, la deformada del cuerpo y ala vendrán dadas respectivamente por las siguientes expresiones:

$$\psi_b(\hat{x}) = a_{0,b} + a_{1,b} \cdot \hat{x} + a_{2,b} \cdot \hat{x}^2 + a_{3,b} \cdot \hat{x}^3 + a_{4,b} \cdot \hat{x}^4 + a_{5,b} \cdot \hat{x}^5 + a_{6,b} \cdot \hat{x}^6$$

$$\psi_w(\hat{x}) = a_{0,w} + a_{1,w} \cdot \hat{x} + a_{2,w} \cdot \hat{x}^2 + a_{3,w} \cdot \hat{x}^3 + a_{4,w} \cdot \hat{x}^4 + a_{5,w} \cdot \hat{x}^5 + a_{6,w} \cdot \hat{x}^6$$

- MPULBODY(\hat{x}) = Masa por unidad de longitud del cuerpo en unidades [M/L] que se adimensionaliza internamente con MPULREF. Se expresa en función de la variable x adimensional, es decir, $\hat{x} = x/L$, siendo L la longitud del cuerpo.

MPULBODY	FACTOR	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	
MPULBODY	3.0	-0.5	0.01						

FACTOR Factor que multiplica a la función $MPULBODY(\hat{x})$.

a_i Coeficiente asociado al orden del polinomio en i en una expresión polinómica de $MPULBODY(\hat{x})$ (ver expresión en el siguiente párrafo).

La masa por unidad de longitud se expresa por tanto como:

$$MPULBODY(\hat{x}) = FACTOR * [a_0 + a_1 \cdot \hat{x} + a_2 \cdot \hat{x}^2 + a_3 \cdot \hat{x}^3 + a_4 \cdot \hat{x}^4 + a_5 \cdot \hat{x}^5 + a_6 \cdot \hat{x}^6]$$

En el ejemplo que se propone y asumiendo que se trabaja en el Sistema Internacional S.I.:

$$MPULBODY(\hat{x}) = 3,0 \cdot (-0,5 + 0,01 \cdot \hat{x}) \quad [Kg/m]$$

- $MPULREF$ = Masa por unidad de longitud utilizada como referencia en la adimensionalización de las ecuaciones. Unidades: [M/L].

MPULREF	m_0								
MPULREF	0,5								

- $MPULWING(\hat{x})$ = Masa por unidad de longitud de las dos aletas en unidades [M/L] que se adimensionaliza internamente con $MPULREF$. Se expresa en función de la variable x adimensional, es decir, $\hat{x} = x/L$, siendo L la longitud del cuerpo.

MPULWING	FACTOR	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	
MPULWING	3,0	-0,5	0,01						

FACTOR Factor que multiplica a la función $MPULWING(\hat{x})$.

a_i Coeficiente asociado al orden del polinomio en i en una expresión polinómica de $MPULWING(\hat{x})$ (ver expresión en el siguiente párrafo).

La masa por unidad de longitud se expresa por tanto como:

$$MPULWING(\hat{x}) = FACTOR * [a_0 + a_1 \cdot (\hat{x} - \hat{x}_0) + a_2 \cdot (\hat{x} - \hat{x}_0)^2 + a_3 \cdot (\hat{x} - \hat{x}_0)^3 + a_4 \cdot (\hat{x} - \hat{x}_0)^4 + a_5 \cdot (\hat{x} - \hat{x}_0)^5 + a_6 \cdot (\hat{x} - \hat{x}_0)^6]$$

siendo \hat{x}_0 la coordenada axial adimensional del borde de ataque de la cuerda en la raíz del ala. En el ejemplo que se propone y asumiendo que se trabaja en el Sistema Internacional S.I.:

$$MPULWING(\hat{x}) = 3,0 \cdot [-0,5 + 0,01 \cdot (\hat{x} - \hat{x}_0)] \quad [Kg/m]$$

- **REMPLOT** = Tarjeta que se utiliza para especificar las variables del vector de salida $\{y\}$ que no se desean monitorizar.

REMPLOT	nVAR								
	iVAR1	iVAR2	...						

nVAR = Número de variables no se desean monitorizar (nVAR \leq 8).

iVARj = Índice que determina la posición dentro del vector de salida $\{y\}$ de la variable que no se desea monitorizar (j \leq 8).

- **RHOINFTY** = Tarjeta que introduce la densidad a la altura de vuelo. Unidades $[M/L^3]$.

RHOINFTY	ρ_∞								
RHOINFTY	0,50								

- **RHOREF** = Tarjeta que introduce densidad de referencia. Unidades $[M/L^3]$.

RHOREF	ρ_0								
RHOREF	1,225								

- **SPRING** = Tarjeta que introduce una sujeción tipo *muelle*.

SPRING	TYPE	xAxis	FreqHz	LINorNON	NLTYPE				
	LEDEDown	RIDEDown	GFDDown	GFUp					
SPRING	ROTA	2.5	30.0	NONLIN	HYSTERES				
	-0.1	+0.1	-5.0	10.0					

TYPE	Tipo de muelle:
	DISP Muelle en el cuerpo del misil que trabaja en desplazamiento.
	ROTA Muelle en el cuerpo del misil que trabaja en rotación.
	ACTU Muelle que simula el actuador de las aletas.
xAxis	Coordenada axial x de la sección del cuerpo (unidades físicas [L]) en la que se sitúa el muelle tipo <i>DISP</i> o <i>ROTA</i> . En el caso de muelle tipo <i>ACTU</i> este campo debe quedar vacío ya que al actuador se le asigna directamente la posición del eje de charnela.
FreqHz	Frecuencia característica del muelle en Hz, calculada de la siguiente forma
	Muelle DISP: $FreqHz_{(DISP)} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_{DISP}}{M}}$, siendo M la masa total del misil.
	Muelle ROTA: $FreqHz_{(ROTA)} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_{ROTA}}{I_G}}$, siendo I_G el Momento de Inercia del misil respecto a su centro de gravedad.
	Muelle ACTU: $FreqHz_{(ACTU)} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_{ACTU}}{I_w}}$, siendo I_w el Momento de Inercia de las aletas respecto al eje de charnela.
LINorNON	Campo que define si el muelle es lineal o no (Lineal=LINEAR, No lineal = NONLIN).
NLTYPE	En el caso de muelle no lineal (campo anterior con la etiqueta NONLIN) especifica el tipo de no linealidad, que puede ser:
	HYSTERES No linealidad de tipo histéresis.
LEDEDown	<u>LE</u> ft <u>DE</u> adband <u>Down</u> .
RIDEDown	<u>RI</u> ght <u>DE</u> adband <u>Down</u> .
GFDown	<u>G</u> eneralized <u>F</u> orce <u>Down</u> .
GFUp	<u>G</u> eneralized <u>F</u> orce <u>Up</u> .

Los valores de LEDEDown y RIDEDown depende de la localización de la no linealidad: en caso de soporte no lineal en desplazamiento, se especifica los valores izquierdo y derecho de la holgura en unidades físicas [L]; en caso de soporte no lineal en rotación o soporte no lineal en actuadores, se especifica valores izquierdo y derecho en términos de $\partial w_{NLR}/\partial x$ o $\partial w_{wb}(x_h)/\partial x$ respectivamente. Para ángulos pequeños de

nolinealidad, estos dos últimos valores son aproximadamente el ángulo de rotación.

- VELREF = Velocidad de referencia en unidades $[L/T^2]$.

VELREF	U_0								
VELREF	0.50								

U_0 Velocidad de referencia en unidades $[L/T^2]$. Se utiliza en la adimensionalización de las ecuaciones.

5.5.1. Ejemplo de fichero de control con parámetros generales

El fichero que se incluye a continuación corresponde al caso **S01.ROT.Freeplay**, i.e, misil soportado en avión (**S01**) con no linealidad de tipo *freeplay* (**Freeplay**) en la rotación de las aletas **ROT**.

```

$...1...2...3...4...5...6...7...8...9...10...|
$ BODY properties
  BODY                4
  BODY_LENGTH         3.657
  BODY_SREF           1.000
  TAO                 0.100
$...1...2...3...4...5...6...7...8...9...10...|
$ WING properties...
  WING                2
  XO                  2.500
  YO                  0.000
  XF                  3.500
  SWEEP_DEG          30.0
  WING_SREF           1.0
$...1...2...3...4...5...6...7...8...9...10...|
$ BODY and WING properties...
  SREF                1.0
$...1...2...3...4...5...6...7...8...9...10...|
$ MODES properties...
$  N_MODES
  XG                  0.50
  XBETA_WingRef       0.67
$...1...2...3...4...5...6...7...8...9...10...|
$ FREQUENCY-DOMAIN METHODS
  Vg_method           Y          $ (Y=YES, N=NO)
  K_method             N
$...1...2...3...4...5...6...7...8...9...10...|
$ INTEGRATION CONDITIONS
  inc_X               0.001
  LINEAR_INTEGRATION_METHOD NONE    $ (DIVPAG/DIVPRK/DLSODAR/ALL(A)/NONE(N))
  NONLINEAR_INTEGRATION_METHOD DLSODAR $ (SeCoBi(S)/ReStSi(R)/Henon(H)/ALL(A)/NONE(N))
  deltaY_to_ACTION    0.01        $ (SeCoBi and Henon parameter, ReStSi for message)
$...1...2...3...4...5...6...7...8...9...10...|
$ MODE SORTING (1=HEAVING,2=ALFA,3=BETA)
  ORDER_VECTOR(1:3)   1      2      3
  N_ACMO              3
$...1...2...3...4...5...6...7...8...9...10...|
$ OTHER OPTIONS
  AUTO_ANSWER         1          $ (0=MANUAL, 1=AUTOMATIC)
  RAD_OR_DEG          2          $ (1=RAD, 2=DEG)
  DEVICE              1          $ (0=SCREEN, 1=Postcript)
  DFA_OUTPUT          0          $ (0=NO,1=YES)
  PLOT_OUTPUT         0          $ (0=NO,1=YES)
$...1...2...3...4...5...6...7...8...9...10...|
$ SWEEP OPTIONS
  SWEEP_MODE          0          $ (0=NO,1=YES)
  Uinf_ADIM(INIT,END,STEP) 10.0 340.0 10.    $
  BC(which?,INIT,END,STEP) 3      0.1  2.0  0.1  $ The rest Y_INIT defined above.
  FINAL_TIME,BORDER_TIME,STEP 500.0 400.0 0.001 1    $
  OUT_TECplotSweep   output.dat
$...1...2...3...4...5...6...7...8...9...10...|
$ DISP SPRINGS:
$...1...2...3...4...5...6...7...8...9...10...|
SPRING DISP  2.152214 5.0  LINEAR
$-----
$ ROTA SPRINGS:
$...1...2...3...4...5...6...7...8...9...10...|
SPRING ROTA  2.152214 10.0  LINEAR
$-----
$ ACTU SPRING:
$...1...2...3...4...5...6...7...8...9...10...|
SPRING ACTU          25.00  NONLIN  HYSTERES
+      -0.005  +0.005  +0.00  +0.00
$-----
$...1...2...3...4...5...6...7...8...9...10...|
EREF  2.E09
RHOREF 1.2250D0          +
RHOINFTY1.2250d0
VELREF 0.5144
$...1...2...3...4...5...6...7...8...9...10...|
$      a0      a1      a2      a3      a4      a5      a6
EIY  1.0      600000.          +

```

```

$. . . 1 . . . 2 . . . 3 . . . 4 . . . 5 . . . 6 . . . 7 . . . 8 . . . 9 . . . 10 . . . |
$      a0      a1      a2      a3      a4      a5      a6
MPULREF 1.0
MPULBODY 1.0 25.    50.0
MPULWING 1.0      25.0
$MPULWING 1.0      10.0
$
$. . . 1 . . . 2 . . . 3 . . . 4 . . . 5 . . . 6 . . . 7 . . . 8 . . . 9 . . . 10 . . . |
ADDOUT 3
      BODY  ROTA  0.00  BODY ROTATION x=0.0 [L]
      WINGREL ROTA  3.17  WING RELATIVE ROTATION x=3.17 [L]
      BODY  ROTA  3.17  BODY ROTATION x=3.17 [L]
$. . . 1 . . . 2 . . . 3 . . . 4 . . . 5 . . . 6 . . . 7 . . . 8 . . . 9 . . . 10 . . . |
REMPLOT 7
      1      2      3      4      5      7      9
$ADDPLOT 1
$      1      2      MODE #3 vs MODE #2
ADDFORCE 8
ADDFILM 8 5 200
$. . . 1 . . . 2 . . . 3 . . . 4 . . . 5 . . . 6 . . . 7 . . . 8 . . . 9 . . . 10 . . . |
FLUTWAR 1.e+06 1.E+06
EXIT
    
```

5.5.2. Ejemplo de fichero de control con formas modales

El fichero que se incluye a continuación corresponde al caso **RIG.modes.S01**, i.e, modos de deformación de misil rígido (**RIG**) y soportado de tipo **S01**.

```

$. . . 1 . . . 2 . . . 3 . . . 4 . . . 5 . . . 6 . . . 7 . . . 8 . . . 9 . . . 10 . . . |
MODE 1 HEAVING
      BODY +1.0
      WING +1.0
      INITIAL +0.015 +0.000
      MAXVAL 1.000 1E03
$. . . 1 . . . 2 . . . 3 . . . 4 . . . 5 . . . 6 . . . 7 . . . 8 . . . 9 . . . 10 . . . |
MODE 2 MISSILE AoA
      BODY 0.588519-1.0
      WING 0.588519-1.0
      INITIAL -0.015 +0.000
      MAXVAL 1.000 1E03
MODE 3 WING ROTATION
      BODY 0.0
      WING 0.866831-1.000
      INITIAL -0.015 +0.000
      MAXVAL 1.000 1E03
EXIT
    
```

5.6. Consideraciones Finales

En este capítulo se han descrito los dos módulos principales del código **FHSWB**, ambos codificados en Fortran 90:

1. Módulo de cálculo aerodinámico y aeroelástico de configuraciones cuerpo/ala esbeltas, incluyendo la posibilidad de introducir no linealidades aeroelásticas y generando las ecuaciones aeroelásticas en formulación estado-espacio.
2. Integración de las ecuaciones de estado-espacio con detección de la esquina de la no linealidad, permitiendo calcular de forma exacta el punto en el que se debe cambiar el sistema. El método utilizado se denomina *illinois* y es una modificación del clásico *regula-falsi*. Este módulo además incorpora *detectores del tipo de respuesta en tiempo de ejecución*. Esta capacidad permite identificar el tipo de respuesta y por tanto interrumpir la integración y pasar al siguiente valor del parámetro, reduciendo de esta forma los tiempos de cálculo.

El código **FHSWB** permite entradas mediante tarjetas que han sido descritas en la sección 5.5.

Una vez presentado el código, el capítulo siguiente se dedica a la validación de los distintos módulos.

Capítulo 6

VALIDACIÓN DEL CÓDIGO FHSWB

6.1. Introducción

Una vez presentado el código **FHSWB** en el capítulo anterior, se presenta en este capítulo algunos resultados con el objetivo de validar los distintos módulos. La validación se realiza en los siguientes puntos:

1. Validación del módulo *inercial/estructural* (sección 6.2):

El código **FHSWB** utiliza la teoría de *modos asumidos*, es decir, las formas modales son una entrada e internamente el código resuelve las ecuaciones elásticas calculando las frecuencias de los modos introducidos. Con el objeto de validar la generación de las ecuaciones elásticas, se ha realizado el procedimiento que se describe a continuación. Se ha modelizado una configuración típica cuerpo/ala mediante elementos finitos con el código comercial MSC.NASTRAN, y se han obtenido los modos y sus frecuencias. Esta misma configuración se ha modelizado con el código **FHSWB**, se han introducido los modos de deformación de MSC.NASTRAN, y se ha comprobado que las frecuencias obtenidas con **FHSWB** coinciden con las de MSC.NASTRAN. De esta forma se ha comprobado que las matrices de masas y rigidez generalizadas se han generado correctamente.

2. Validación del módulo *aerodinámico* (sección 6.3):

El módulo de cálculo de fuerzas aerodinámicas no estacionarias se ha comprobado en distintas configuraciones: cuerpo aislado, ala aislada y configuración cuerpo/ala esbelta.

3. Validación del método de solución de las ecuaciones aeroelásticas en el dominio de la frecuencia, método k (sección 6.4):

La solución *flutter* del código **FHSWB** se comprueba con la solución del código comercial MSC.NASTRAN, utilizando para ello distintas configuraciones de soportado: soportado **S01**, i.e., configuración cuerpo/ala soportada del avión, y soportado **S02**, i.e., configuración en vuelo libre.

4. Validación del integrador numérico (sección 6.5):

El integrador numérico de las ecuaciones aeroelásticas en formulación estado-espacio es validado mediante una comprobación con un problema que tiene solución analítica, un *tren de masas* unido por muelles, en uno de los cuales se introduce una no linealidad del tipo *hysteresis*.

6.2. Validación del módulo inercial/estructural

El código **FHSWB** utiliza una formulación basada en *modos asumidos*, es decir, recibe unos modos de deformación predefinidos por el usuario y formula las ecuaciones aeroelásticas en esta base modal. La solución con modos asumidos será más precisa cuanto más representativos de la estructura sean los modos.

Con el objetivo de tener una base modal adecuada, se ha desarrollado un modelo de elementos finitos MSC.NASTRAN de la configuración que es estudio de esta tesis. El modelo y la solución modal (solución 103 de MSC.NASTRAN) que proporciona las formas y frecuencias modales se incluyen en el apéndice F.

Utilizando estas formas modales provenientes de un modelo de elementos finitos (o *FEM*, acrónimo de *Finite Element Model*), se ha realizado el siguiente proceso para validación del módulo inercial/estructural del código **FHSWB**:

1. Se aproximan las formas modales del modelo *FEM* con funciones polinómicas $\psi_{b/w}(\hat{x})$ que el código **FHSWB** puede procesar. Las formas polinómicas admiten hasta siete coeficientes:

$$\psi_{b/w}(\hat{x}) = a_0 + a_1\hat{x} + a_2\hat{x}^2 + a_3\hat{x}^3 + a_4\hat{x}^4 + a_5\hat{x}^5 + a_6\hat{x}^6 \quad (6.1)$$

La aproximación en las cuatro primeras formas modales puede verse en la figura 6.2. Los círculos azules (○) representan la deformación del cuerpo, mientras que los círculos verdes (◉) representan la deformación de las aletas, ambas deformaciones proporcionadas por el modelo de elementos finitos (código comercial MSC.NASTRAN). La línea continua de color rojo (—) representa el modo aproximado de deformación del cuerpo $\psi_{i,b}$ (aproximación polinómica de 5^o orden al modo de MSC.NASTRAN) que se introduce como *modo asumido* al código **FHSWB**. La línea de color verde (—) representa el modo aproximado de deformación de las aletas $\psi_{i,w}$ que, al considerarse rígidas, es una aproximación de 1^{er} orden y coincide de forma exacta al modo de MSC.NASTRAN.

Los coeficientes de esta aproximación modal para los cuatro primeros modos se detallan en la tabla 6.1, mientras que el fichero de control de entrada al código **FHSWB** con estas formas modales se incluyen en la figura 6.1.

2. El fichero de control con los modos (figura 6.1) y el fichero de control en el que se declaran los principales parámetros de la configuración (figura 6.3), son las dos entradas que necesita el código **FHSWB** para formular las ecuaciones aeroelásticas del sistema.

Estos dos ficheros de control se pasan al módulo de cálculo inercial/estructural para comprobar que las matriz de masas generalizada y la matriz de rigidez generalizada se calculan correctamente. Adicionalmente, se comparan las frecuencias que predice el código **FHSWB** con las del modelo FEM. El resultado de esta comparación de frecuencias se incluye en la tabla 6.2. Puede apreciarse que el código **FHSWB** predice las mismas frecuencias del modelo MSC.NASTRAN.

	b=body	$\psi_{b(w)}(\hat{x}) = a_{0,b(w)} + a_{1,b(w)}\hat{x} + a_{2,b(w)}\hat{x}^2 + a_{3,b(w)}\hat{x}^3 + a_{4,b(w)}\hat{x}^4 + a_{5,b(w)}\hat{x}^5 + a_{6,b(w)}\hat{x}^6$						
	w=wing	$a_{0,b(w)}$	$a_{1,b(w)}$	$a_{2,b(w)}$	$a_{3,b(w)}$	$a_{4,b(w)}$	$a_{5,b(w)}$	$a_{6,b(w)}$
MODO #1 (YAW)	$\psi_{1,b}(\hat{x})$	-0.155738	0.2646451					
	$\psi_{1,w}(\hat{x})$	0.0109348	0.0723671					
MODO #2 (LATERAL)	$\psi_{2,b}(\hat{x})$	-0.073269						
	$\psi_{2,w}(\hat{x})$	-0.073270						
MODO #3 (ROTATION)	$\psi_{3,b}(\hat{x})$	0.0365831	-0.126584	-0.011835	0.0417200	0.2553350	-0.174834	
	$\psi_{3,w}(\hat{x})$	-1.95274	2.257036					
MODO #4 (1st BENDING)	$\psi_{4,b}(\hat{x})$	0.1846984	-0.670100	-0.514598	1.775788	-0.227851	-0.426529	
	$\psi_{4,w}(\hat{x})$	0.3883167	-0.405973					

Tabla 6.1: Coeficientes que determinan las funciones polinómicas asociadas a las formas modales de la configuración flexible.

```

$...1...2...3...4...5...6...7...8...9...10...
$      a0      a1      a2      a3      a4      a5      a6
MODE  1      MISSILE ANGLE OF ATTACK
      BODY      -.155738.2646451
      WING      .0109348.0723671
      INITIAL  1.3002  1.0
      MAXVAL   5.2008  1E06
$...1...2...3...4...5...6...7...8...9...10...
$      a0      a1      a2      a3      a4      a5      a6
MODE  2      MISSILE HEAVING
      BODY      -.073269
      WING      -.073270
      INITIAL  +0.0  1.0
      MAXVAL   1.E12  1E06
$...1...2...3...4...5...6...7...8...9...10...
$      a0      a1      a2      a3      a4      a5      a6
MODE  3      MISSILE WING ROTATION
      BODY      .0365831-.126584-.011835.0417200.2553350-.174834
      WING      -1.952742.257036
      INITIAL  0.1169  1.0
      MAXVAL   0.4676  1E06
$...1...2...3...4...5...6...7...8...9...10...
$      a0      a1      a2      a3      a4      a5      a6
MODE  4      MISSILE 1st BENDING
      BODY      .1846984-.670100-.5145981.775788-.227851-.426529
      WING      .3883167-.405973
      INITIAL  0.2383  1.0
      MAXVAL   0.9533  1E06
EXIT
    
```

Figura 6.1: Fichero de control del código **FHSWB** con las formas modales: modelo flexible **FLE**.

	Frecuencias ([Hz])	
	MSC.NASTRAN	FHSWB
MODO #1 (YAW)	0,0	0,0
MODO #2 (LATERAL)	0,0	0,1
MODO #3 (ROTATION)	25,1	25,0
MODO #4 (1st BENDING)	30,2	31,0

Tabla 6.2: MSC.NASTRAN vs **FHSWB**: comparación de frecuencias modales.

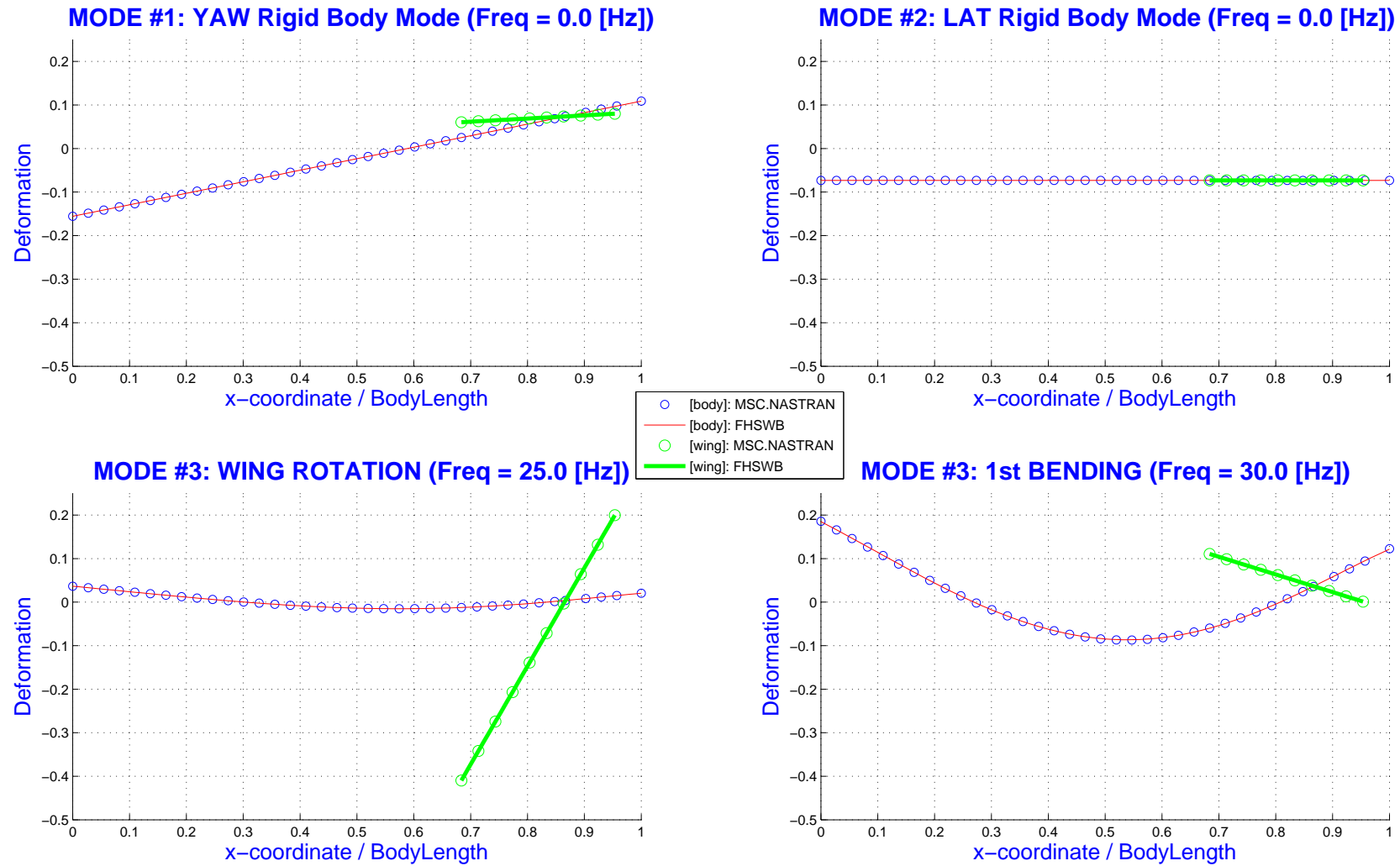


Figura 6.2: Modos de deformación calculados con el código comercial MSC.NASTRAN: los círculos azules (\circ) representan la deformación del cuerpo, mientras que los círculos verdes (\circ) representan la deformación de las aletas. La línea continua de color rojo ($-$) representa el modo aproximado de deformación del cuerpo $\psi_{i,b}$ (aproximación polinómica de 5^o orden al modo de MSC.NASTRAN) que se introduce como *modo asumido* al código **FHSWB**. La línea de color verde ($-$) representa el modo aproximado de deformación de las aletas $\psi_{i,w}$ que, al considerarse rígidas, es una aproximación de 1^{er} orden y coincide de forma exacta al modo de MSC.NASTRAN.

```

$...1...|...2...|...3...|...4...|...5...|...6...|...7...|...8...|...9...|...10...| : BODY PROPERTIES
BODY          4
BODY_LENGTH   3.657
BODY_SREF     1.000
TAO           0.100
$...1...|...2...|...3...|...4...|...5...|...6...|...7...|...8...|...9...|...10...| : WING PROPERTIES
WING          2
XO            2.500
YO            0.000
XF            3.500
SWEEP_DEG     30.0
WING_SREF     1.0
$...1...|...2...|...3...|...4...|...5...|...6...|...7...|...8...|...9...|...10...| : BODY & WING PROPERTIES
SREF          1.0
$...1...|...2...|...3...|...4...|...5...|...6...|...7...|...8...|...9...|...10...| : MODES PROPERTIES
XG            0.50
XBETA_WingRef 0.67
$...1...|...2...|...3...|...4...|...5...|...6...|...7...|...8...|...9...|...10...| : FREQUENCY-DOMAIN METHODS
Vg_method     Y           ! (Y=YES, N=NO)
K_method      N
$...1...|...2...|...3...|...4...|...5...|...6...|...7...|...8...|...9...|...10...| : INTEGRATION CONDITIONS
inc_X         0.001
LINEAR_INTEGRATION_METHOD NONE           ! (DIVPAG/DIVPRK/DLSODAR/ALL(A)/NONE(N))
NONLINEAR_INTEGRATION_METHOD DLSODAR     ! (SeCoBi(S)/ReStSi(R)/Henon(H)/ALL(A)/NONE(N))
deltaY_to_ACTION 0.01           ! (SeCoBi and Henon parameter, ReStSi for message)
$...1...|...2...|...3...|...4...|...5...|...6...|...7...|...8...|...9...|...10...| : MODE SORTING
ORDER_VECTOR(1:3) 1 2 3
N_ACMO         3
$...1...|...2...|...3...|...4...|...5...|...6...|...7...|...8...|...9...|...10...| : OTHER OPTIONS
AUTO_ANSWER    1           ! (0=MANUAL, 1=AUTOMATIC)
RAD_OR_DEG     2           ! (1=RAD, 2=DEG)
DEVICE         1           ! (0=SCREEN, 1=Postscript)
DFA_OUTPUT     0           ! (0=NO,1=YES)
PLOT_OUTPUT    0           ! (0=NO,1=YES)
$...1...|...2...|...3...|...4...|...5...|...6...|...7...|...8...|...9...|...10...| : SWEEP OPTIONS
SWEEP_MODE     0           ! (0=NO,1=YES)
Uinf_ADIM(INIT,END,STEP) 10.0 340.0 10.0 !
BC(which?,INIT,END,STEP) 3 0.1 2.0 0.1 ! The rest Y_INIT defined above.
FINAL_TIME,BORDER_TIME,STEP 500.0 400.0 0.001 1 ! LCODetectorONorOFF
OUT_TECplotSweep output.dat
$...1...|...2...|...3...|...4...|...5...|...6...|...7...|...8...|...9...|...10...| : DISP/ROTA/ACTU SPRINGS
SPRING DISP 2.152214 0.0001 LINEAR
SPRING ROTA 2.152214 0.0001 LINEAR
SPRING ACTU 25.00 NONLIN HYSTERES
+ -0.005 +0.005 +0.00 +5.00
$...1...|...2...|...3...|...4...|...5...|...6...|...7...|...8...|...9...|...10...|
EREF 2.E09
RHOREF 1.2250D0 +
RHOINFTY1.2250d0
VELREF 0.5144
$...1...|...2...|...3...|...4...|...5...|...6...|...7...|...8...|...9...|...10...|
$ a0 a1 a2 a3 a4 a5 a6 +
EIY 1.0 600000.
$...1...|...2...|...3...|...4...|...5...|...6...|...7...|...8...|...9...|...10...|
$ a0 a1 a2 a3 a4 a5 a6
MPULREF 1.0
MPULBODY 1.0 25. 50.0
MPULWING 1.0 25.0
$...1...|...2...|...3...|...4...|...5...|...6...|...7...|...8...|...9...|...10...|
ADDOUT 3
BODY ROTA 0.00 BODY ROTATION x=0.0 [L]
WINGREL ROTA 3.17 WING RELATIVE ROTATION x=3.17 [L]
BODY ROTA 3.17 BODY ROTATION x=3.17 [L]
$...1...|...2...|...3...|...4...|...5...|...6...|...7...|...8...|...9...|...10...|
REMPLOT 10
1 2 3 4 5 6 7 8
9 11
ADDFORCE 10
ADDFILM 10 5 200
$...1...|...2...|...3...|...4...|...5...|...6...|...7...|...8...|...9...|...10...|
FLUTWAR 1.e+06 1.E+06
FLUTOUT 10 1.0
EXIT

```

Figura 6.3: Fichero de control con los principales parámetros de la configuración, incluyendo distribución de masa y rigidez por unidad de longitud.

6.3. Validación del módulo aerodinámico

En esta sección se comparan los resultados del código **FHSWB** con algunos casos tipo de la literatura. Se realizan tres validaciones por separado:

- Validación del cálculo de fuerzas aerodinámicas sobre cuerpos esbeltos.
- Validación del cálculo de fuerzas aerodinámicas sobre alas esbeltas.
- Validación del cálculo de fuerzas aerodinámicas sobre configuraciones esbeltas cuerpo/ala.

6.3.1. Validación del modulo aerodinámico: cuerpos esbeltos.

La referencia [Lee90] desarrolla una solución analítica para el cálculo de las fuerzas aerodinámicas no estacionarias sobre cuerpos de revolución flexibles. En esta sección se calcularán las derivadas de estabilidad de forma analítica según esta formulación y se compararán con los resultados del código **FHSWB**.

A continuación se detalla la formulación analítica de la referencia [Lee90]. El coeficiente de presiones no estacionario sobre un cuerpo de revolución se puede escribir:

$$C_p = \hat{C}_p \sin \theta = \left[\Re \hat{C}_p + ik \cdot \Im \hat{C}_p \right] \sin \theta \quad (6.2)$$

donde:

$$\begin{aligned} \Re \hat{C}_p &= -2 \left(2 \frac{dr}{dx} \frac{d\psi}{dx} + r \frac{d^2\psi}{dx^2} - k^2 r \psi \right) \\ \Im \hat{C}_p &= -4 \left(\psi \frac{dr}{dx} + r \frac{d\psi}{dx} \right) \end{aligned} \quad (6.3)$$

siendo $r(x)$ el radio del cuerpo de revolución, $\psi(x)$ el modo de deformación y k la frecuencia reducida. Las fuerzas aerodinámicas generalizadas se escriben como:

$$\begin{aligned} Q_{ij} &= q_\infty \int_{x=0}^{x=L} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} (-C_{pj} \vec{n}) \cdot (-\psi_i \vec{k}) r dx d\theta = q_\infty \int_{x=0}^{x=L} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \hat{C}_{pj} \psi_i \sin^2 \theta r dx d\theta = \\ &= q_\infty \pi \int_{x=0}^{x=L} \hat{C}_{pj} \psi_i r dx \end{aligned} \quad (6.4)$$

Adimensionalizando con la longitud del cuerpo L y una superficie de referencia S_{ref} basada en la mayor área transversal del cuerpo, las fuerzas aerodinámicas adimensionales quedan:

$$q_{ij} = \frac{Q_{ij}}{\pi \frac{\varnothing_{max}^2}{4}} = \frac{4}{\tau^2} \int_{\hat{x}=0}^{\hat{x}=1} \hat{C}_{pj} \psi_i \hat{r} d\hat{x} \quad (6.5)$$

siendo \varnothing_{max} el diámetro del cuerpo en la sección de mayor área transversal y utilizando variables de longitud adimensionalizadas con la longitud del cuerpo L .

Sustituyendo la expresión del coeficiente de presiones (6.3) en la integral (6.5), y considerando como modos de oscilación el de *heaving* ($\psi_1(\hat{x}) = 1$) y el de cabeceo respecto a la punta del cuerpo,

i.e., $\psi_2(\hat{x}) = \hat{x}$:

$$\begin{aligned}
 [q] &= \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} = \frac{4}{\tau^2} \begin{bmatrix} \int_{\hat{x}=0}^{\hat{x}=1} \hat{C}_{p1} \psi_1 \hat{r} d\hat{x} d\hat{x} & \int_{\hat{x}=0}^{\hat{x}=1} \hat{C}_{p2} \psi_1 \hat{r} d\hat{x} d\hat{x} \\ \int_{\hat{x}=0}^{\hat{x}=1} \hat{C}_{p1} \psi_2 \hat{r} d\hat{x} d\hat{x} & \int_{\hat{x}=0}^{\hat{x}=1} \hat{C}_{p2} \psi_2 \hat{r} d\hat{x} d\hat{x} \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{4}{\tau^2} \begin{bmatrix} \int_0^1 \left(2k^2 \hat{r} - ik4 \frac{d\hat{r}}{d\hat{x}} \right) \hat{r} d\hat{x} & \int_0^1 \left[-2 \left(2 \frac{d\hat{r}}{d\hat{x}} - k^2 \hat{r} \hat{x} \right) - ik4 \left(\hat{x} \frac{d\hat{r}}{d\hat{x}} + \hat{r} \right) \right] \hat{r} d\hat{x} \\ \int_0^1 \left(2k^2 \hat{r} - ik4 \frac{d\hat{r}}{d\hat{x}} \right) \hat{x} \hat{r} d\hat{x} & \int_0^1 \left[-2 \left(2 \frac{d\hat{r}}{d\hat{x}} - k^2 \hat{r} \hat{x} \right) - ik4 \left(\hat{x} \frac{d\hat{r}}{d\hat{x}} + \hat{r} \right) \right] \hat{x} \hat{r} d\hat{x} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Dado el cuerpo mediante su radio en función de la coordenada axial, la ecuación matricial anterior (6.6) permite determinar las fuerzas aerodinámicas generalizadas.

A continuación se particularizará para el cuerpo *ojiva de revolución*, cuyo radio viene dado por:

$$\hat{r}(\hat{x}) = 2\tau\hat{x}(1 - \hat{x}) \tag{6.7}$$

Sustituyendo en (6.6) se obtienen las fuerzas generalizadas para dicha *ojiva de revolución*:

$$[q]_{ojiva} = \begin{bmatrix} \frac{16}{15}k^2 & \frac{8}{15}k^2 - ik\frac{16}{15} \\ \frac{8}{15}k^2 + ik\frac{16}{15} & \frac{16}{15} + \frac{32}{105}k^2 \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

Se han calculado estas fuerzas generalizadas con el código **FHSWB**. Dicho código proporciona la matriz de fuerzas generalizadas separada en tres matrices, la parte proporcional a las coordenadas generalizadas, la parte proporcional a la primera derivada de éstas (amortiguamiento aerodinámico), y la proporcional a la segunda derivada de las coordenadas generalizadas (lo que comúnmente se denomina *inercia aerodinámica*). El motivo de que el código proporcione las fuerzas de esta forma es que, aparte de poder resolver la ecuación de flameo en el dominio de la frecuencia, también está preparado para integrar las ecuaciones en el dominio del tiempo con la posibilidad de incluir no linealidades estructurales.

El resultado del código **FHSWB** para ojivas de revolución es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 \{q\}_{FHSWB} &= [q]_{\xi\xi} \{\xi\} + [q]_{\xi\dot{\xi}} \left\{ \frac{d\hat{\xi}}{d\hat{t}} \right\} + [q]_{\xi\ddot{\xi}} \left\{ \frac{d^2\hat{\xi}}{d\hat{t}^2} \right\} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0,000 & 0,000 \\ 0,000 & 1,067 \end{bmatrix} \{\hat{\xi}\} + \begin{bmatrix} 0,000 & -1,067 \\ 1,067 & 0,000 \end{bmatrix} \left\{ \frac{d\hat{\xi}}{d\hat{t}} \right\} + \begin{bmatrix} -1,067 & -0,5333 \\ -0,5333 & -0,3048 \end{bmatrix} \left\{ \frac{d^2\hat{\xi}}{d\hat{t}^2} \right\}
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

Asumiendo movimiento armónico, la primera y segunda derivada de las coordenadas generalizadas se escriben:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \frac{d\hat{\xi}}{d\hat{t}} \right\} &= ik \{\hat{\xi}\} \\
 \left\{ \frac{d^2\hat{\xi}}{d\hat{t}^2} \right\} &= -k^2 \{\hat{\xi}\}
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

Sustituyendo (6.10) en (6.9) se obtiene:

$$[q]_{FHSWB} = \begin{bmatrix} 1,067 \cdot k^2 & 0,5333 \cdot k^2 - ik \cdot 1,067 \\ 0,5333 \cdot k^2 + ik \cdot 1,067 & 1,067 + 0,3048 \cdot k^2 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Comparando el resultado anterior (6.11) con (6.8) se observa que el código **FHSWB** proporciona los mismos valores que los que se obtienen analíticamente con la teoría de la referencia [Lee90].

Otro cuerpo que se ha comprobado es un cono de revolución, de ecuación:

$$\hat{r}(\hat{x}) = \tau \frac{\hat{x}}{2} \quad (6.12)$$

Sustituyendo (6.12) en la ecuación matricial de las fuerzas generalizadas (6.6):

$$[q]_{cono} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}k^2 - ik \cdot 2 & -2 + \frac{1}{2}k^2 - ik \frac{8}{3} \\ \frac{1}{2}k^2 - ik \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} + \frac{2}{5}k^2 - ik \cdot 2 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

El resultado equivalente del código **FHSWB** para este cono de revolución es:

$$\begin{aligned} [q]_{FHSWB} &= [q]_{\xi\xi} \{\xi\} + [q]_{\xi\dot{\xi}} \left\{ \frac{d\hat{\xi}}{dt} \right\} + [q]_{\xi\ddot{\xi}} \left\{ \frac{d^2\hat{\xi}}{dt^2} \right\} = \\ &= \begin{bmatrix} 0,000 & -2,000 \\ 0,000 & -1,333 \end{bmatrix} \left\{ \hat{\xi} \right\} + \begin{bmatrix} -2,000 & -2,667 \\ -1,333 & -2,000 \end{bmatrix} \left\{ \frac{d\hat{\xi}}{dt} \right\} + \begin{bmatrix} -0,667 & -0,500 \\ -0,500 & -0,400 \end{bmatrix} \left\{ \frac{d^2\hat{\xi}}{dt^2} \right\} \end{aligned} \quad (6.14)$$

Asumiendo movimiento armónico a una frecuencia reducida k :

$$[q]_{FHSWB} = \begin{bmatrix} 0,667 \cdot k^2 - ik \cdot 2,000 & -2,000 + 0,500 \cdot k^2 - ik \cdot 2,667 \\ 0,500 \cdot k^2 - ik \cdot 1,333 & -1,333 + 0,400 \cdot k^2 - ik \cdot 2,000 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

expresión que coincide con la obtenida analíticamente en (6.13).

De esta forma queda comprobado que el módulo de cálculo aerodinámico sobre cuerpos esbeltos funciona correctamente.

6.3.2. Validación del modulo aerodinámico: alas esbeltas.

En esta sección se validará el módulo de cálculo aerodinámico del código **FHSWB** aplicándolo a un ala oscilando en *heaving* y cabeceo. J.Katz ([Kat91]) proporciona resultados para un ala triangular esbelta oscilando en régimen incompresible.

Adimensionalizando por la cuerda en la raíz del ala L , y después de cierta manipulación de algunos

términos, las fuerzas generalizadas según la referencia [Kat91] se pueden escribir:

$$\begin{aligned}
 \{q\}_{Katz} = & \begin{bmatrix} 0 & -\pi \int_0^1 \hat{b}(\hat{x}) \frac{d\hat{b}(\hat{x})}{d\hat{x}} d\hat{x} \\ 0 & -\pi \int_0^1 (\hat{x} - \hat{x}_0) \hat{b}(\hat{x}) \frac{d\hat{b}(\hat{x})}{d\hat{x}} d\hat{x} \end{bmatrix} \left\{ \hat{\xi} \right\} + \\
 & + \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{2} [\hat{b}(1)^2 - \hat{b}(0)^2] & -\pi \left[\int_0^1 \hat{b}(\hat{x})^2 + \int_0^1 (\hat{x} - \hat{x}_0) \hat{b}(\hat{x}) \frac{d\hat{b}(\hat{x})}{d\hat{x}} d\hat{x} \right] \\ -\pi \int_0^1 (\hat{x} - \hat{x}_0) \hat{b}(\hat{x}) \frac{d\hat{b}(\hat{x})}{d\hat{x}} d\hat{x} & -\pi \left[\int_0^1 (\hat{x} - \hat{x}_0) \hat{b}(\hat{x})^2 d\hat{x} + \int_0^1 (\hat{x} - \hat{x}_0)^2 \hat{b}(\hat{x}) \frac{d\hat{b}(\hat{x})}{d\hat{x}} d\hat{x} \right] \end{bmatrix} \left\{ \frac{d\hat{\xi}}{d\hat{t}} \right\} + \\
 & + \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{2} \int_0^1 \hat{b}(\hat{x})^2 d\hat{x} & -\frac{\pi}{2} \int_0^1 (\hat{x} - \hat{x}_0) \hat{b}(\hat{x})^2 d\hat{x} \\ -\frac{\pi}{2} \int_0^1 (\hat{x} - \hat{x}_0) \hat{b}(\hat{x})^2 d\hat{x} & -\frac{\pi}{2} \int_0^1 (\hat{x} - \hat{x}_0)^2 \hat{b}(\hat{x})^2 d\hat{x} \end{bmatrix} \left\{ \frac{d^2\hat{\xi}}{d\hat{t}^2} \right\}
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

donde:

- L cuerda en la raíz del ala, utilizada para adimensionalizar las fuerzas generalizadas.
- $\hat{x} = x/L$ coordenada axial adimensionalizada con la longitud de referencia L
- $\hat{b}(\hat{x}) = b(\hat{x})/L$ distribución adimensional de envergadura en función de la coordenada axial adimensional \hat{x} .
- $\hat{x}_0 = x_0/L$ coordenada del centro de giro del modo de cabeceo.

Se ha aplicado la ecuación anterior (6.16) a un ala triangular dada por:

$$\hat{b}(\hat{x}) = 2\hat{x} \tan \alpha \tag{6.17}$$

y como modo de cabeceo se considera el giro respecto a la punta de ala, i.e., $\hat{x}_0 = 0$.

Sustituyendo en la expresión para las coordenadas generalizadas, ecuación matricial (6.16), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \{q\}_{Katz} = & \begin{bmatrix} 0 & -2\pi \tan^2 \alpha \\ 0 & -\frac{4}{3}\pi \tan^2 \alpha \end{bmatrix} \left\{ \hat{\xi} \right\} + \begin{bmatrix} -2\pi \tan^2 \alpha & -\frac{8}{3}\pi \tan^2 \alpha \\ -\frac{4}{3}\pi \tan^2 \alpha & -2\pi \tan^2 \alpha \end{bmatrix} \left\{ \frac{d\hat{\xi}}{d\hat{t}} \right\} + \\
 & + \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}\pi \tan^2 \alpha & -\frac{1}{2}\pi \tan^2 \alpha \\ -\frac{1}{2}\pi \tan^2 \alpha & -\frac{2}{5}\pi \tan^2 \alpha \end{bmatrix} \left\{ \frac{d^2\hat{\xi}}{d\hat{t}^2} \right\}
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

Se ha ejecutado el código **FHSWB** para un ala en flecha y ángulo en punta de 10,0 [deg] ($\alpha = 5,0$ [deg]),

obteniéndose las siguientes fuerzas generalizadas:

$$\begin{aligned} \{q\}_{Katz} = & \begin{bmatrix} 0,0 & -0,048093 \\ 0,0 & -0,032062 \end{bmatrix} \left\{ \hat{\xi} \right\} + \begin{bmatrix} -0,048093 & -0,064124 \\ -0,032062 & -0,048093 \end{bmatrix} \left\{ \frac{d\hat{\xi}}{dt} \right\} + \\ & + \begin{bmatrix} -0,016031 & -0,012023 \\ -0,012023 & -0,009619 \end{bmatrix} \left\{ \frac{d^2\hat{\xi}}{dt^2} \right\} \end{aligned} \quad (6.19)$$

que coinciden con las obtenidas mediante la ecuación (6.18) al sustituir la tangente del ángulo α por su valor. De esta forma queda comprobado que el módulo de cálculo aerodinámico sobre alas esbeltas funciona correctamente.

6.3.3. Validación del modulo aerodinámico: configuraciones cuerpo/ala.

A.H. Sacks ([Sac54]) proporciona algunos resultados de derivadas de estabilidad longitudinales para configuraciones esbeltas cuerpo/ala. De todas ellas, se ha escogido la configuración de la figura 6.4 para comparar con el código **FHSWB**.

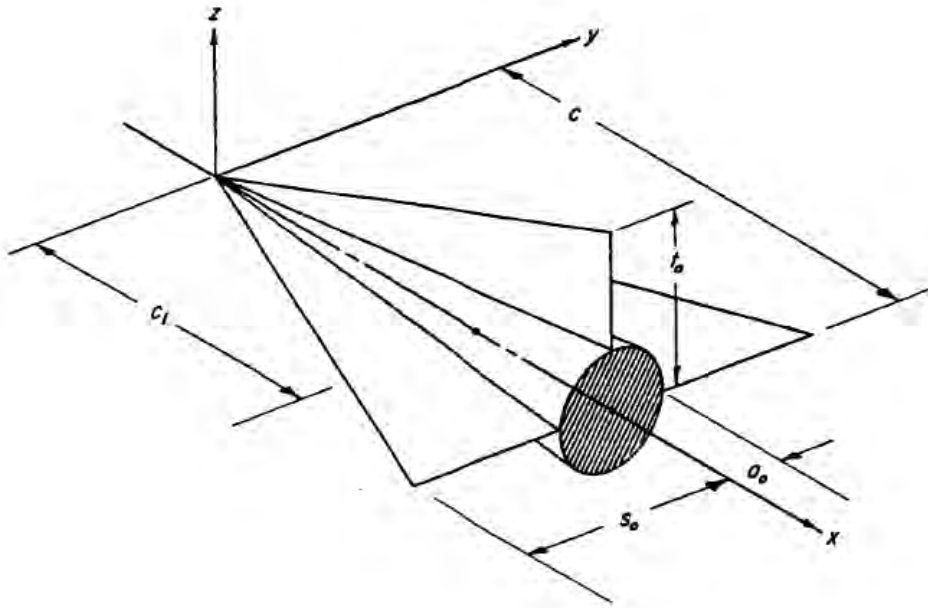


Figura 6.4: Configuración esbelta cuerpo/ala (obtenida de [Sac54]) utilizada en la validación del código **FHSWB**.

Para el cálculo de las derivadas de estabilidad es conveniente formular las fuerzas aerodinámicas en el dominio de la frecuencia. A continuación se desarrolla de forma breve el procedimiento de obtención de las derivadas de estabilidad a partir de las matrices de fuerzas aerodinámicas que proporciona el código **FHSWB**.

Las fuerzas aerodinámicas se pueden escribir como:

$$\{Q\} = q_\infty L^2 \left\{ [q_{\xi\xi}] \left\{ \hat{\xi} \right\} + [q_{\xi\dot{\xi}}] \frac{1}{\hat{U}_\infty} \left\{ \frac{d\hat{\xi}}{dt} \right\} + [q_{\xi\ddot{\xi}}] \frac{1}{\hat{U}_\infty^2} \left\{ \frac{d^2\hat{\xi}}{dt^2} \right\} \right\} \quad (6.20)$$

donde $[q_{\xi\xi}]$, $[q_{\xi\dot{\xi}}]$ y $[q_{\dot{\xi}\dot{\xi}}]$ son salidas directas del código **FHSWB**.

Asumiendo movimiento armónico, es decir:

$$\begin{aligned}\{\hat{\xi}\} &= \{\bar{\xi}\} e^{i\omega t} = \{\bar{\xi}\} e^{ik\hat{U}_\infty \hat{t}} \\ \{Q\} &= \{\bar{Q}\} e^{i\omega t} = \{\bar{Q}\} e^{ik\hat{U}_\infty \hat{t}}\end{aligned}\quad (6.21)$$

donde $\{\bar{\xi}\}$ y $\{\bar{Q}\}$ son, en general, variables complejas con parte real e imaginaria. Sustituyendo las relaciones (6.21) se obtiene:

$$\frac{\{\bar{Q}\}}{q_\infty L^2} = \{\bar{Q}\} = \left([q_{\xi\xi}] + ik[q_{\xi\dot{\xi}}] - k^2[q_{\dot{\xi}\dot{\xi}}] \right) \{\bar{\xi}\} = [\bar{q}] \{\bar{\xi}\} \quad (6.22)$$

donde $k = \omega L/U_\infty$ es la frecuencia reducida.

Por otro lado, el coeficiente y momentos aerodinámicos en función de la variable $\xi_1 = h$ (heaving positivo hacia abajo) y $\xi_2 = \theta$ (cabeceo) se escriben:

$$\begin{aligned}C_L &= C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha + C_{L\dot{\alpha}}\frac{L}{U_\infty}\frac{d\alpha}{dt} + C_{Lq}\frac{L}{U_\infty}\frac{d\theta}{dt} \\ C_M &= C_{M0} + C_{M\alpha}\alpha + C_{M\dot{\alpha}}\frac{L}{U_\infty}\frac{d\alpha}{dt} + C_{Mq}\frac{L}{U_\infty}\frac{d\theta}{dt}\end{aligned}\quad (6.23)$$

En el caso del misil C_{L0} y C_{M0} son nulas. Por otro lado, el ángulo de ataque instantáneo α se escribe en función de las dos coordenadas generalizadas h y θ de la siguiente forma:

$$\alpha = \theta + \frac{1}{U_\infty}\frac{dh}{dt} \quad (6.24)$$

Asumiendo movimiento armónico, y sustituyendo la expresión anterior (6.24) en las dos ecuaciones para el coeficiente de sustentación y momento (6.23):

$$\begin{aligned}\bar{C}_L &= (-k^2 C_{L\dot{\alpha}} + ik C_{L\alpha})\frac{\bar{h}}{L} + [C_{L\alpha} + ik(C_{L\dot{\alpha}} + C_{Lq})]\bar{\theta} \\ \bar{C}_M &= (-k^2 C_{M\dot{\alpha}} + ik C_{M\alpha})\frac{\bar{h}}{L} + [C_{M\alpha} + ik(C_{M\dot{\alpha}} + C_{Mq})]\bar{\theta}\end{aligned}\quad (6.25)$$

Por último, se establecen las relaciones entre estos coeficientes y las fuerzas aerodinámicas adimensionales de la ecuación (6.22):

$$\begin{aligned}\bar{C}_L &= -\frac{\bar{Q}_1}{q_\infty S_{ref}} = -\bar{Q}_1 \\ \bar{C}_M &= \frac{\bar{Q}_2}{q_\infty S_{ref}} = \bar{Q}_2\end{aligned}\quad (6.26)$$

El coeficiente de sustentación es positivo cuando la configuración sustenta, es decir, cuando la fuerza es hacia arriba. Sin embargo, la fuerza generalizada asociada es positiva en dirección de h positivos, es decir, hacia abajo. De ahí el signo negativo que aparece en la expresión de \bar{C}_L en la ecuación (6.26).

Sustituyendo (6.22) y (6.25) en (6.26) se obtienen las siguientes relaciones:

$$\left(\frac{L^2}{S_{ref}}\right)\bar{q}_{11} = k^2 C_{L\dot{\alpha}} - ik C_{L\alpha} \quad (6.27)$$

$$\left(\frac{L^2}{S_{ref}}\right)\bar{q}_{12} = -C_{L\alpha} - ik(C_{L\dot{\alpha}} + C_{Lq}) \quad (6.28)$$

$$\left(\frac{L^2}{S_{ref}}\right)\bar{q}_{21} = -k^2 C_{M\dot{\alpha}} + ik C_{M\alpha} \quad (6.29)$$

$$\left(\frac{L^2}{S_{ref}}\right)\bar{q}_{22} = C_{M\alpha} + ik(C_{M\dot{\alpha}} + C_{Mq}) \quad (6.30)$$

De estas ecuaciones se extraen las derivadas de estabilidad longitudinales en función de las fuerzas aerodinámicas generalizadas:

$$C_{L\alpha} = - \left(\frac{L^2}{S_{ref}} \right) \Re(\bar{q}_{12}) = - \left(\frac{L^2}{S_{ref}} \right) \frac{\Im(\bar{q}_{11})}{k} \quad (6.31)$$

$$C_{L\dot{\alpha}} = \left(\frac{L^2}{S_{ref}} \right) \frac{\Re(\bar{q}_{11})}{k^2} \quad (6.32)$$

$$C_{L\dot{\alpha}} + C_{Lq} = - \left(\frac{L^2}{S_{ref}} \right) \frac{\Im(\bar{q}_{12})}{k} \quad (6.33)$$

$$C_{M\alpha} = \left(\frac{L^2}{S_{ref}} \right) \Re(\bar{q}_{22}) = \left(\frac{L^2}{S_{ref}} \right) \frac{\Im(\bar{q}_{21})}{k} \quad (6.34)$$

$$C_{M\dot{\alpha}} = - \left(\frac{L^2}{S_{ref}} \right) \frac{\Re(\bar{q}_{21})}{k^2} \quad (6.35)$$

$$C_{M\dot{\alpha}} + C_{Mq} = \left(\frac{L^2}{S_{ref}} \right) \frac{\Im(\bar{q}_{22})}{k} \quad (6.36)$$

En la tabla 6.3 se presentan las matrices de fuerzas aerodinámicas resultado del código **FHSWB** para la configuración propuesta en la referencia [Sac54] con longitud c la unidad. Las superficies y longitud de referencia son:

$$L = c = 1,0$$

$$S_{ref} = s_0 \cdot c$$

La forma del ala es triangular y varía con el parámetro a_0/s_0 desde 0,1 a 1,0, siendo este último valor correspondiente a no tener ala.

El modo de cabeceo corresponde a un giro respecto al punto $\hat{x}_0 = 1/3$. Utilizando las ecuaciones (6.31) a (6.36) se obtienen las derivadas de estabilidad detalladas en la tabla 6.4.

Para poder comparar con la referencia [Sac54], se dividen las derivadas de estabilidad de la tabla 6.4 por unos factores de escala. Después de esta división se obtiene una única función Θ para todas las derivadas, función que depende únicamente del parámetro a_0/s_0 .

Al escalar las derivadas de la siguiente forma:

$$\Theta \left(\frac{a_0}{s_0} \right) = \frac{C_{L\alpha}}{\frac{\pi}{2}A} = \frac{C_{Lq}}{\frac{\pi}{6}A} = \frac{C_{L\dot{\alpha}}}{\frac{\pi}{6}A} = \frac{-C_{M\dot{\alpha}}}{\frac{\pi}{72}A} = \frac{-C_{Mq}}{\frac{\pi}{24}A} \quad (6.37)$$

donde $A = 4 \cdot s_0/c$, se obtienen los valores de la tabla 6.5. La última columna corresponde al valor medio del resto de columnas. Puede observarse, salvo errores numéricos, que todas las columnas proporcionan la misma función Θ (figura 6.6), que coincide con la deducida en la referencia [Sac54] (figura 6.5).

a_0/s_0	s_0	$q_{\xi\xi}$		$q_{\xi\dot{\xi}}$		$q_{\xi\ddot{\xi}}$	
0,1	0,500000	0,000000	-1,555252	-1,555252	-1,036854	-0,518423	-0,043206
		0,000000	-0,000008	-0,000008	-0,172816	-0,043206	-0,023043
0,2	0,250000	0,000000	-0,377617	-0,377617	-0,251751	-0,125874	-0,010491
		0,000000	-0,000003	-0,000003	-0,041961	-0,010491	-0,005595
0,3	0,166667	0,000000	-0,160238	-0,160238	-0,106829	-0,053414	-0,004452
		0,000000	-0,000002	-0,000002	-0,017806	-0,004452	-0,002374
0,4	0,125000	0,000000	-0,084980	-0,084980	-0,056656	-0,028327	-0,002361
		0,000000	-0,000001	-0,000001	-0,009444	-0,002361	-0,001259
0,5	0,100000	0,000000	-0,051051	-0,051051	-0,034036	-0,017018	-0,001419
		0,000000	-0,000001	-0,000001	-0,005673	-0,001419	-0,000757
0,6	0,083333	0,000000	-0,033579	-0,033579	-0,022388	-0,011194	-0,000933
		0,000000	-0,000001	-0,000001	-0,003732	-0,000933	-0,000498
0,7	0,071429	0,000000	-0,024046	-0,024046	-0,016032	-0,008016	-0,000668
		0,000000	-0,000001	-0,000001	-0,002672	-0,000668	-0,000356
0,8	0,062500	0,000000	-0,018889	-0,018889	-0,012594	-0,006296	-0,000525
		0,000000	-0,000001	-0,000001	-0,002099	-0,000525	-0,000280
0,9	0,055556	0,000000	-0,016408	-0,016408	-0,010940	-0,005470	-0,000456
		0,000000	-0,000001	-0,000001	-0,001824	-0,000456	-0,000243
1,0	0,0500000	0,000000	-0,015708	-0,015708	-0,010473	-0,005236	-0,000437
		0,000000	-0,000001	-0,000001	-0,001746	-0,000437	-0,000233

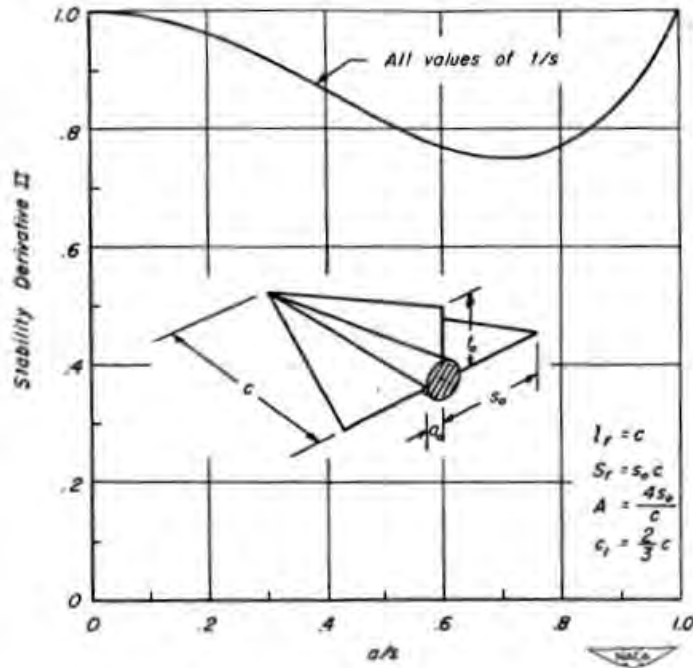
Tabla 6.3: Matrices de fuerzas aerodinámicas generalizadas para la configuración cuerpo/ala de la referencia [Sac54]

a_0/s_0	S_{ref}	$C_{L\alpha}$	$C_{L\dot{\alpha}}$	C_{Lq}	$C_{M\dot{\alpha}}$	C_{Mq}
0,1	0,5000	3,1096	1,0368	1,0369	-0,0864	-0,2592
0,2	0,2500	1,5100	0,5035	0,5035	-0,0420	-0,1259
0,3	0,1667	0,9612	0,3205	0,3205	-0,0267	-0,0801
0,4	0,1250	0,6797	0,2266	0,2266	-0,0189	-0,0567
0,5	0,1000	0,5104	0,1702	0,1702	-0,0142	-0,0425
0,6	0,0833	0,4028	0,1343	0,1343	-0,0112	-0,0336
0,7	0,0714	0,3366	0,1122	0,1122	-0,0094	-0,0280
0,8	0,0625	0,3021	0,1007	0,1008	-0,0084	-0,0252
0,9	0,0556	0,2953	0,0985	0,0985	-0,0082	-0,0246
1,0	0,0500	0,3141	0,1047	0,1047	-0,0087	-0,0262

Tabla 6.4: Derivadas de estabilidad para la configuración propuesta en la referencia [Sac54]

a_0/s_0	$C_{L\alpha}/\frac{\pi}{2}A$	$C_{Lq}/\frac{\pi}{6}A$	$C_{L\dot{\alpha}}/\frac{\pi}{6}A$	$-C_{M\dot{\alpha}}/\frac{\pi}{72}A$	$-C_{Mq}/\frac{\pi}{24}A$	$\Theta(a_0/s_0)$
0,1	0,9898	0,9901	0,9901	0,9902	0,9901	0,9901
0,2	0,9613	0,9616	0,9616	0,9617	0,9617	0,9616
0,3	0,9178	0,9181	0,9181	0,9183	0,9182	0,9181
0,4	0,8654	0,8657	0,8656	0,8658	0,8658	0,8656
0,5	0,8123	0,8125	0,8125	0,8130	0,8125	0,8126
0,6	0,7694	0,7696	0,7696	0,7698	0,7698	0,7696
0,7	0,7499	0,7502	0,7502	0,7502	0,7502	0,7501
0,8	0,7694	0,7698	0,7696	0,7701	0,7696	0,7697
0,9	0,8459	0,8462	0,8462	0,8465	0,8465	0,8463
1,0	0,9997	1,0002	1,0000	1,0015	1,0000	1,0003

Tabla 6.5: Derivadas de estabilidad para la configuración propuesta en la referencia [Sac54]



(b) Stability derivative II.

$$II = \frac{C_{L_{\dot{m}}}}{\frac{\pi}{2}A} = \frac{C_{L_{\dot{q}}}}{\frac{\pi}{6}A} = \frac{C_{L_{\dot{m}}}}{\frac{\pi}{6}A} = \frac{C_{L_{\dot{q}}}}{\frac{\pi}{72}A} - \frac{C_{m_{\dot{m}}}}{\frac{\pi}{72}A} - \frac{C_{m_{\dot{q}}}}{\frac{\pi}{24}A} - \frac{C_{m_{\dot{q}}}}{\frac{\pi}{135}A} = \frac{C_{Y_{pq}}}{\frac{\pi}{72}A} - \frac{C_{n_{pq}}}{\frac{\pi}{135}A}$$

Figura 6.5: Resultados de las derivadas de estabilidad documentados en la referencia [Sac54] para la configuración de la figura 6.4.

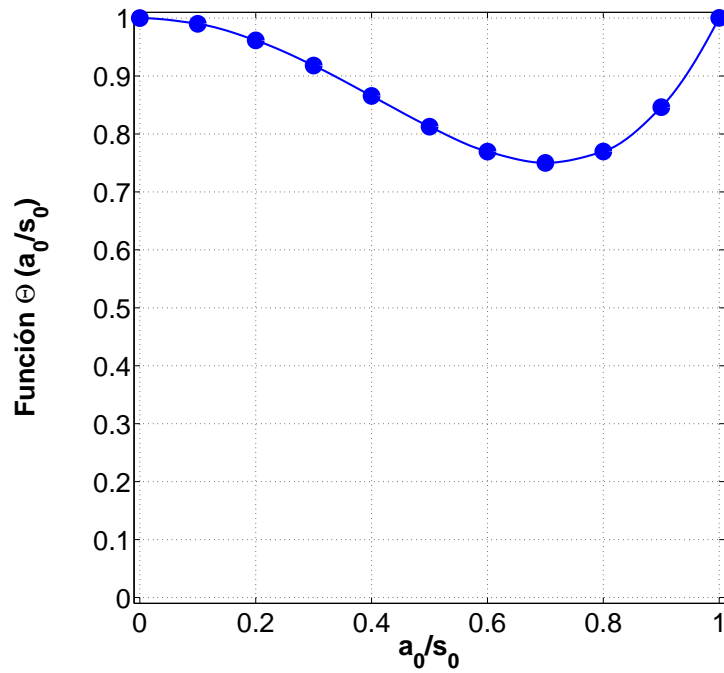


Figura 6.6: Resultados de las derivadas de estabilidad para la configuración de la figura 6.4 obtenidos con el código **FHSWB**

6.4. Validación del módulo de solución de flutter lineal (método Vg)

Para la validación del módulo de cálculo de *flutter* se ha considerado la configuración de la referencia [SHW62] (ver figura 6.7) que consiste en un cono de $7,5^\circ$ de semivértice y con dos grados de libertad: modo vertical (*heaving* o *plunging*) y modo de cabeceo (*pitching*).

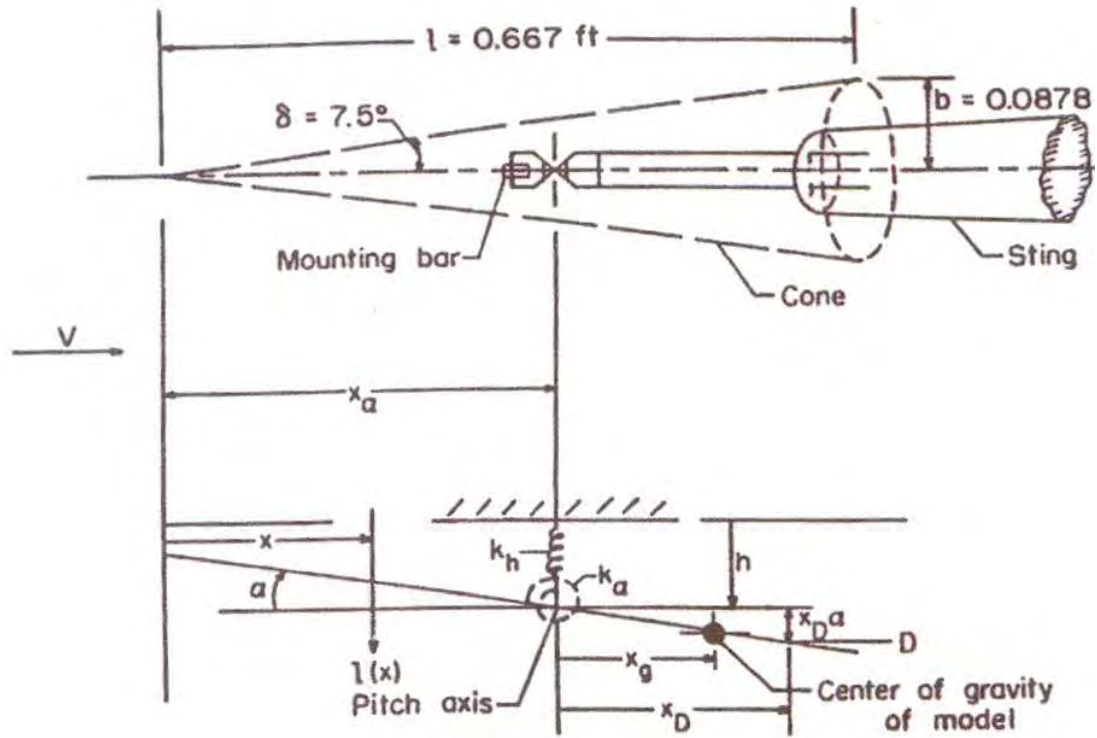


Figura 6.7: Configuración utilizada en la validación del módulo de solución de flutter lineal.

El rango de números de Mach estudiados en [SHW62] es de 1,6 hasta 6,5, y el objetivo de este estudio fue verificar la validez de las diversas teorías existentes en el momento (por ejemplo, teoría de Munk-Jones de [Mil50]) comparándolas con resultados experimentales para esta configuración. A continuación se detallan las ecuaciones aeroelásticas del sistema de la figura 6.7.

Las ecuaciones de equilibrio para el sistema de dos grados de libertad son:

$$\begin{aligned} m_h \ddot{h} + S_\alpha \ddot{\alpha} + K_h h &= q_\infty L^2 \left(Q_{hh} \frac{h}{L} + Q_{h\alpha} \alpha \right) \\ S_h \ddot{h} + I_\alpha \ddot{\alpha} + K_\alpha \alpha &= q_\infty L^3 \left(Q_{\alpha h} \frac{h}{L} + Q_{\alpha\alpha} \alpha \right) \end{aligned} \quad (6.38)$$

donde m_h es la masa del cono en movimiento vertical, S_α es el momento estático de inercia respecto al eje de giro, I_α es el momento de inercia del cono respecto al eje de giro, K_h la rigidez del muelle en movimiento vertical, y K_α la rigidez del muelle en movimiento de cabeceo. En estas ecuaciones no se considera amortiguamiento estructural. Dividiendo la primera ecuación por mL y la segunda ecuación por mL^2 , donde m es la masa del cono y L es la longitud del mismo, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m_h/m & S_\alpha/mL \\ S_\alpha/mL & I_\alpha/mL^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h}/L \\ \ddot{\alpha} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_h/m & 0 \\ 0 & K_\alpha/mL^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h/L \\ \alpha \end{Bmatrix} = \\ = \frac{q_\infty L}{m} \begin{bmatrix} Q_{hh} & Q_{h\alpha} \\ Q_{\alpha h} & Q_{\alpha\alpha} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h/L \\ \alpha \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6.39)$$

Teniendo en cuenta la definición de los siguientes parámetros adimensionales:

$$\omega_h^2 = \frac{K_h}{m_h}; \quad \omega_\alpha^2 = \frac{K_\alpha}{I_\alpha}; \quad r_\alpha = \sqrt{\frac{I_\alpha}{mL^2}}; \quad x_g = \frac{S_\alpha}{mL}; \quad \mu = \frac{m}{\pi\rho_\infty L^3} \quad (6.40)$$

y que las ecuaciones anteriores sólo son válidas para movimiento armónico, es decir, justo en el punto de *flutter*:

$$h = h_0 \cdot e^{i\omega t}; \quad \alpha = \alpha_0 e^{i\omega t} \quad (6.41)$$

se obtiene la siguiente ecuación característica para el cálculo de la velocidad y frecuencia del mecanismo de *flutter*:

$$\left| \begin{bmatrix} \frac{m_h}{m} \left(\frac{\omega_h}{\omega_\alpha}\right)^2 & 0 \\ 0 & r_\alpha^2 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} \frac{m_h}{m} & x_g \\ x_g & r_\alpha^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2\pi\mu k^2} \begin{bmatrix} Q_{hh} & Q_{h\alpha} \\ Q_{\alpha h} & Q_{\alpha\alpha} \end{bmatrix} \right) - \left(\frac{\omega_\alpha}{\omega}\right)^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (6.42)$$

donde k es la frecuencia reducida definida como $k = \omega L/U_\infty$. De la condición de que la parte real e imaginaria del determinante anterior sea igual a cero se obtienen los valores de k_f y de ω_α/ω_f , indicando con el subíndice f los valores de la frecuencia reducida k y el cociente ω_α/ω en el punto de *flutter*. Una vez calculados k_f y ω_α/ω_f se puede obtener la velocidad de *flutter* de la siguiente forma:

$$\frac{U_f}{\omega_\alpha L} = \frac{1}{k_f \frac{\omega_\alpha}{\omega}} \Rightarrow U_f = \omega_\alpha L \frac{1}{k_f \frac{\omega_\alpha}{\omega}} \quad (6.43)$$

De los distintos valores de la referencia [SHW62] se han utilizado los valores del denominado *modelo 1*:

$$\frac{m}{m_h} = 0,6; \quad x_g = 0,0564; \quad r_\alpha^2 = 0,0585; \quad x_0 \text{ (eje de giro)} = 0,50 \quad (6.44)$$

Los resultados obtenidos para distintos valores del parámetro ω_h/ω_α se resumen gráficamente en la figura 6.8 y numéricamente en la tabla 6.6. Se compara el código **FHSWB** con la teoría de Munk-Jones (ver referencia [Mil50]) y resultados experimentales. De estos resultados se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- Al comparar las frecuencias del mecanismo de *flutter* obtenidas con el código **FHSWB** con las de la teoría de Munk-Jones ([Mil50]) puede observarse que el resultado es prácticamente idéntico. Esto era de esperar ya que la teoría desarrollada en [Mil50] es una particularización de la implementada en el código **FHSWB** a *cuerpos esbeltos aislados* (sin aletas).
- Al comparar las velocidades de *flutter* adimensionales ($U_f/\omega_\alpha L$) obtenidas con el código **FHSWB** y la teoría de Munk-Jones se observa pequeñas diferencias en el rango de frecuencias entre 1,2 y 2,0, aunque estas diferencias se deben únicamente a la precisión para tomar datos del gráfico del informe que contiene la solución de Munk-Jones ([SHW62]). Para la frecuencia de 1,0 existe una notable diferencia pero en este caso la evolución de la velocidad de *flutter* que desaparece para un valor aproximado de frecuencia de 0,8 crece muy rápidamente, por lo que pequeñas variaciones en la precisión del cálculo de *flutter* pueden producir importantes variaciones en los resultados. En cualquier caso, para este valor de frecuencia adimensional $\omega_h/\omega_\alpha = 1$, el resultado del código **FHSWB** se compara mejor con los valores experimentales que la teoría de Munk-Jones.
- Al comparar los resultados tanto del código **FHSWB** como de la teoría de Munk-Jones ([Mil50]) con los datos experimentales se observa que la frecuencia del mecanismo de *flutter* se predice bastante bien, mientras que la velocidad de *flutter* experimental es mayor que la calculada. Es conocido que la teoría de cuerpos esbeltos proporciona valores conservativos de velocidad de *flutter*, siendo ésta uno de sus principales atractivos.

Con estos resultados se considera validado el módulo de cálculo de *flutter*. Por otro lado, el capítulo 8 detalla y compara los resultados del código **FHSWB** con el código comercial **MSC.NASTRAN** para la configuración de la tesis. Estos resultados sirven también de validación.

		Código FHSWB		Munk & Jones		Experimental Data	
ω_h/ω_α	μ	ω_α/ω_f	$U_\infty/(\omega_\alpha \frac{L}{2} \sqrt{\mu})$	ω_α/ω_f	$U_\infty/(\omega_\alpha \frac{L}{2} \sqrt{\mu})$	ω_α/ω_f	$U_\infty/(\omega_\alpha \frac{L}{2} \sqrt{\mu})$
1.0	0.9830	0.9394	0.9170	0.95	0.57	—	2.352
1.2	10.7054	0.7975	0.2009	0.81	0.21	0.805	0.716
1.4	6.0489	0.6918	0.0641	0.69	0.05	0.724	0.817
1.6	5.5789	0.6101	0.2487	0.60	0.25	0.6435	0.984
1.8	2.7504	0.5454	0.4000	0.55	0.46	0.563	1.209
2.0	3.1228	0.4928	0.5318	0.48	0.60	0.531	1.335
2.2	2.3961	0.4493	0.6534	0.44	0.73	0.461	1.585

Tabla 6.6: Resultados numéricos para la configuración de la figura 6.7 comparando el código **FHSWB** con resultados experimentales y resultados de Munk-Jones.

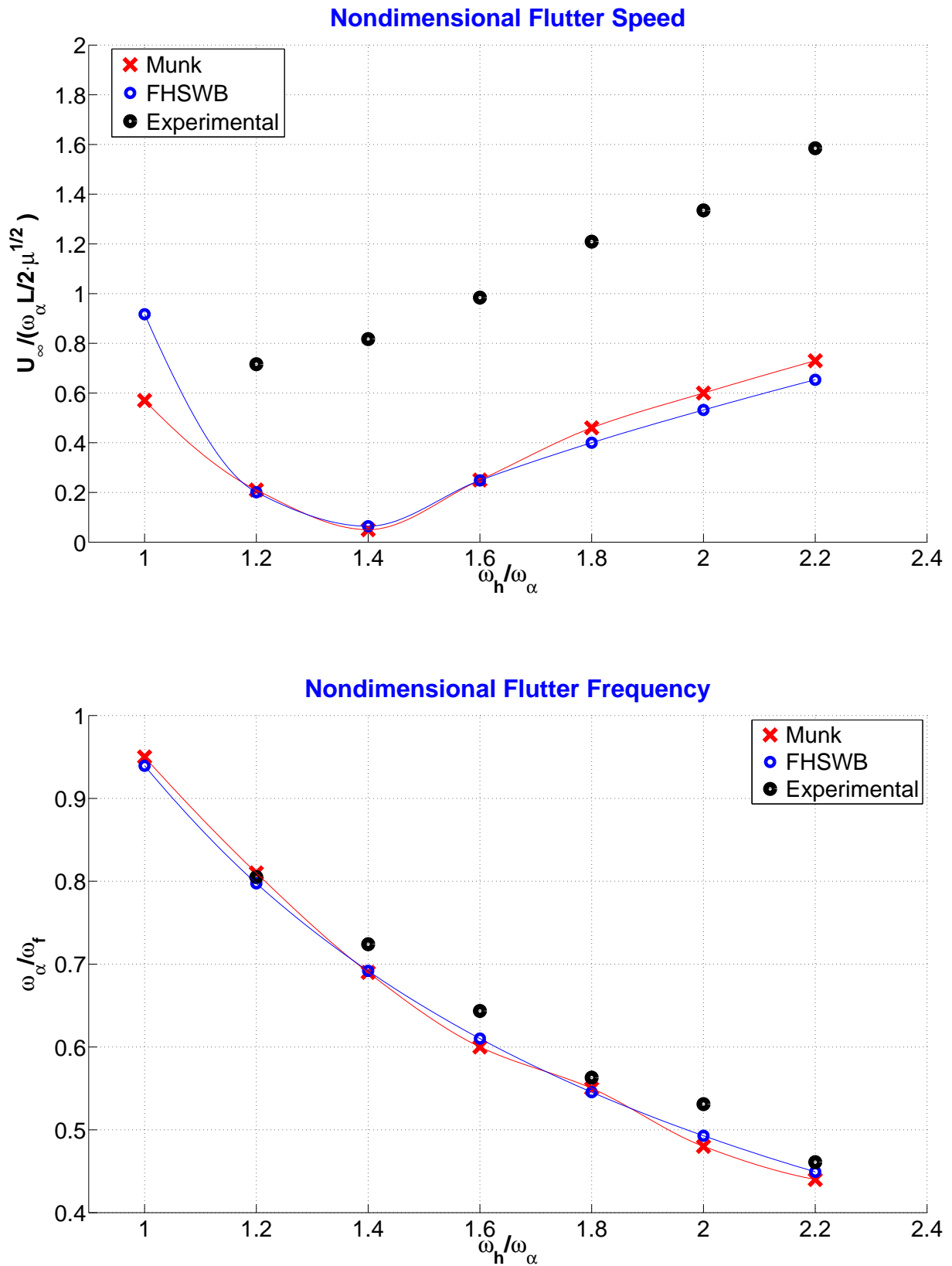


Figura 6.8: Velocidad de *flutter* adimensional (figura superior) y frecuencia del mecanismo de *flutter* (figura inferior) en función de la relación entre la frecuencia del modo vertical ω_h y la frecuencia del modo de cabeceo ω_{α} , es decir, $\omega_h / \omega_{\alpha}$.

6.5. Validación del integrador numérico

El método de integración numérica de las ecuaciones de Estado-Espacio ha sido validado para un caso particular que tiene solución analítica directa. Se trata de un *tren de masas* unidas por muelles (ver figura 6.9). En los siguientes párrafos se describen el modelo estructural y másico que se ha utilizado así como la forma de resolver analítica y numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales que resulta.

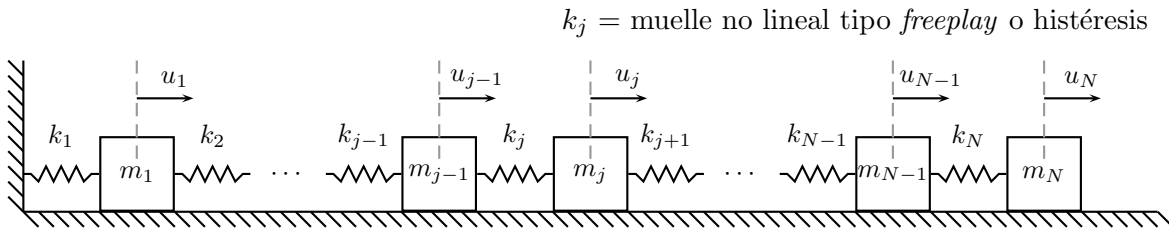


Figura 6.9: Tren de masas unidas por muelles.

6.5.1. Formulación de las ecuaciones del tren de masas

La energía cinética del sistema puede escribirse como:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left(\frac{du_i}{dt} \right)^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{u}_i^2 \quad (6.45)$$

siendo N el número de masas, m_i la masa del bloque i y \dot{u}_i la velocidad del bloque i . Las fuerzas que actúan sobre el sistema son conservativas y derivan de un potencial V dado por:

$$V = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} k_i (u_i - u_{i-1})^2 + (F - k_j \delta) (u_j - u_{j-1}) \quad (6.46)$$

siendo $u_0 = 0$ el desplazamiento nulo en la pared, j el muelle en el que aparece una no linealidad concentrada del tipo *freeplay* o histéresis¹, F la precarga del muelle² j y δ el parámetro no lineal que depende de la zona en la que se encuentre el sistema dentro de la no linealidad del tipo *freeplay* o *histéresis*.

En el caso de una no linealidad *freeplay* el parámetro δ se define como:

$$\delta = \begin{cases} \delta^- & \text{en la zona I con } u_j - u_{j-1} \leq \delta^- \\ \frac{u_j - u_{j-1}}{2} & \text{en la zona II con } \delta^- \leq u_j - u_{j-1} \leq \delta^+ \\ \delta^+ & \text{en la zona III con } u_j - u_{j-1} \geq \delta^+ \end{cases} \quad (6.47)$$

La no linealidad *histéresis* se puede considerar como una superposición de no linealidades del tipo *freeplay*, de tal forma que los valores de F , δ^- y δ^+ de la ecuación anterior 6.47 cambian dependiendo de la rama de la *histéresis* por la que pase el sistema (ver figura 6.10).

¹La restricción a este tipo de no linealidades proviene de la formulación de la energía potencial en la ecuación 6.46.

²La precarga se considera positiva si el muelle intenta acercar las dos masas sobre las que actúa.

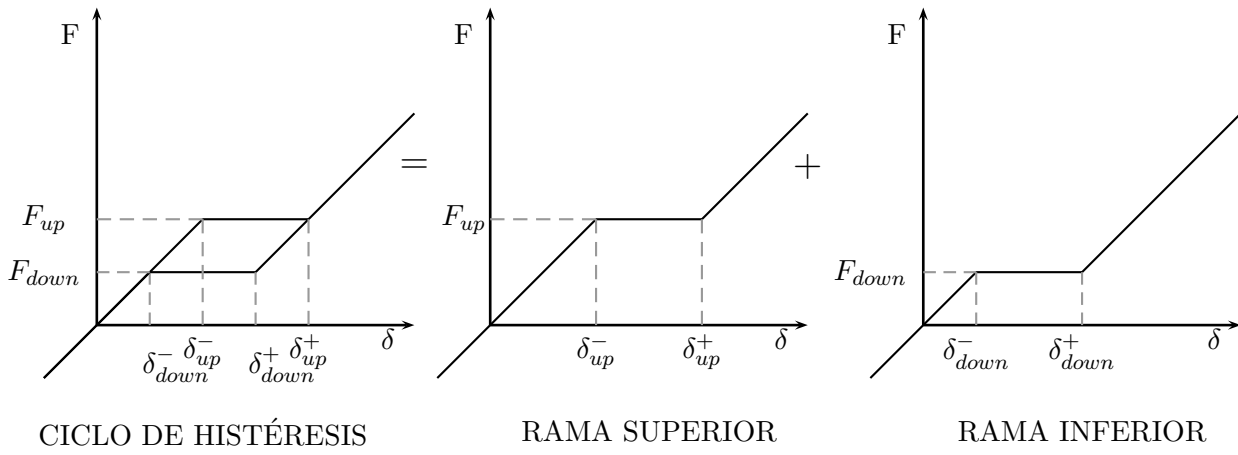


Figura 6.10: El ciclo de histéresis se puede considerar como una superposición de dos no linealidades tipo *freeplay*.

En la rama superior se cumpliría:

$$F = F_{up}$$

$$\delta = \begin{cases} \delta_{up}^- & \text{en la zona I con } u_j - u_{j-1} \leq \delta_{up}^- \\ \frac{u_j - u_{j-1}}{2} & \text{en la zona II con } \delta_{up}^- \leq u_j - u_{j-1} \leq \delta_{up}^+ \\ \delta_{up}^+ & \text{en la zona III con } u_j - u_{j-1} \geq \delta_{up}^+ \end{cases} \quad (6.48)$$

mientras que los parámetros correspondientes a la rama inferior de la histéresis serían:

$$F = F_{down}$$

$$\delta = \begin{cases} \delta_{down}^- & \text{en la zona I con } u_j - u_{j-1} \leq \delta_{down}^- \\ \frac{u_j - u_{j-1}}{2} & \text{en la zona II con } \delta_{down}^- \leq u_j - u_{j-1} \leq \delta_{down}^+ \\ \delta_{down}^+ & \text{en la zona III con } u_j - u_{j-1} \geq \delta_{down}^+ \end{cases} \quad (6.49)$$

Como puede observarse, las zonas I, II y III dependen del ciclo de histéresis, de tal forma que si el sistema se mueve por la rama superior estas zonas están delimitadas por los valores de δ_{up}^- y δ_{up}^+ , mientras que si el sistema recorre la rama inferior los valores de δ_{down}^- y δ_{down}^+ son los que limitan las zonas. Con el objetivo de localizar de forma unívoca la posición del sistema dentro del ciclo de histéresis, se utilizará la siguiente notación (ver figura 6.11):

Zona I	Zona exterior izquierda de la no linealidad histéresis cumpliendo $u_j - u_{j-1} \leq \delta_{down}^-$. El muelle no lineal j mantiene su rigidez nominal k_j .
Zona II-Left	Zona situada en la rama superior de la histéresis cumpliendo $\delta_{down}^- \leq u_j - u_{j-1} \leq \delta_{up}^-$. El muelle no lineal j mantiene su rigidez nominal k_j .
Zona II-Right	Zona situada en la rama inferior de la histéresis cumpliendo $\delta_{down}^+ \leq u_j - u_{j-1} \leq \delta_{up}^+$. El muelle no lineal j mantiene su rigidez nominal k_j .
Zona II-Down	Zona <i>deadband</i> o de rigidez nula perteneciente a la rama inferior de la histéresis, cumpliendo $\delta_{down}^- \leq u_j - u_{j-1} \leq \delta_{down}^+$. El muelle no lineal j tiene rigidez nula ($k_j = 0$).
Zona II-Up	Zona <i>deadband</i> o de rigidez nula perteneciente a la rama superior de la histéresis, cumpliendo $\delta_{up}^- \leq u_j - u_{j-1} \leq \delta_{up}^+$. El muelle no lineal j tiene rigidez nula ($k_j = 0$).
Zona III	Zona exterior derecha de la no linealidad histéresis cumpliendo $u_j - u_{j-1} \geq \delta_{up}^+$. El muelle j mantiene su rigidez nominal k_j .

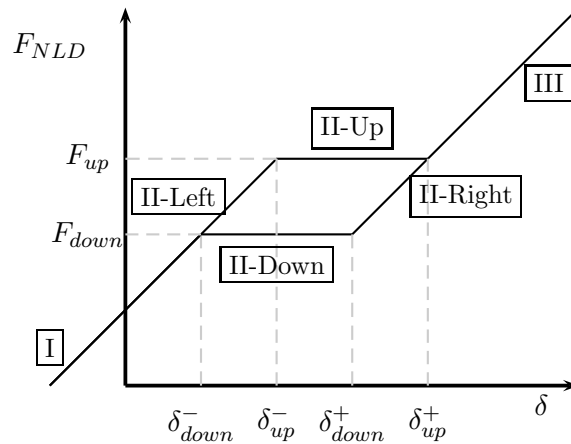


Figura 6.11: Zonas del ciclo de histéresis.

De esta forma, la zona II (-Left, -Right, -Down o -Up) se puede considerar la *zona interior* del ciclo de histéresis, mientras que las zonas I y III corresponden a las zonas exteriores del ciclo (Zona I izquierda, Zona III derecha). Los valores de F y δ de la ecuación 6.46 para cada una de estas zonas pueden verse en la tabla 6.7. Las zonas I y III pueden considerarse como pertenecientes a la rama inferior o superior del ciclo de histéresis, dependiendo de la historia anterior del sistema. Las demás zonas pertenecen unívocamente al *freeplay inferior* o *freeplay superior*.

Las ecuaciones de Lagrange ([Gan03]) que determinan las ecuaciones diferenciales que caracterizan el sistema son:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \xi_i} = - \frac{\partial V}{\partial \xi_i} + \tilde{Q}_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.50)$$

donde T es la energía cinética del sistema, V la energía potencial de las fuerzas potenciales y \tilde{Q}_i son las fuerzas generalizadas no potenciales. Se formulan tantas ecuaciones como coordenadas generalizadas

Zona	Rama Inferior	Rama Superior
Zone I	$(F_{down}, \delta_{down}^-)$	(F_{up}, δ_{up}^-)
Zone II-Left	NO	(F_{up}, δ_{up}^-)
Zone II-Right	$(F_{down}, \delta_{down}^+)$	NO
Zone III	$(F_{down}, \delta_{down}^+)$	(F_{up}, δ_{up}^+)
Zone II-Down	$(F_{down}, \frac{u_j - u_{j-1}}{2})$	NO
Zone II-Up	NO	$(F_{up}, \frac{u_j - u_{j-1}}{2})$

Tabla 6.7: Principales parámetros del ciclo de histéresis en función de la zona en la que se encuentra el sistema. Puede observarse que las zonas I y III se pueden considerar como pertenecientes a la rama inferior o superior de la histéresis dependiendo de la historia anterior del sistema.

ξ_i . En este caso sencillo del *tren de masas*, resulta útil elegir como coordenadas generalizadas ξ_i los desplazamientos u_i de las masas, por lo que las ecuaciones de Lagrange quedan:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i} \right) + \frac{\partial V}{\partial u_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.51)$$

donde se ha tenido en cuenta que la energía cinética depende sólo de las velocidades \dot{u}_i y no existen fuerzas externas que no deriven de un potencial, es decir, $\tilde{Q}_i = 0$. El cálculo del término asociado a la energía cinética es sencillo ya que no depende de la zona donde se encuentre el sistema:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i} \right) = \frac{d}{dt} (m_i \dot{u}_i) = m_i \ddot{u}_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.52)$$

Sin embargo, el cálculo del término proveniente de la energía potencial es más complejo puesto que depende de la zona del ciclo de histéresis, a través de los dos parámetros F y δ (ver ecuación 6.46).

En todas las zonas (I, II-Left, -Right, -Up, -Down y III), y si la coordenada u_i es distinta de las coordenadas u_{j-1} y u_j (desplazamientos de las masas unidas por el muelle no lineal), la derivada del potencial queda:

$$\frac{\partial V}{\partial u_i} = \left[\begin{array}{ccc} -k_i & k_i + k_{i+1} & -k_{i+1} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_{i-1} \\ u_i \\ u_{i+1} \end{array} \right\} \quad \forall i \neq j, j+1 \quad (6.53)$$

Si la derivada del potencial es respecto a las coordenadas u_{j-1} y u_j , es necesario distinguir entre:

1. Zonas I, II-Left, -Right y III, es decir, zonas en las que la rigidez del muelle no lineal es k_j :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial V}{\partial u_{j-1}} \\ \frac{\partial V}{\partial u_j} \end{array} \right\} &= \begin{bmatrix} -k_{j-1} & k_{j-1} + k_j & -k_j & 0 \\ 0 & -k_j & k_j + k_{j+1} & -k_{j+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{j-2} \\ u_{j-1} \\ u_j \\ u_{j+1} \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{Bmatrix} -F + k_j \delta \\ +F - k_j \delta \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6.54)$$

siendo F y δ los parámetros definidos en la tabla 6.7.

2. Zonas II-Up y II-Down, en las que el muelle no lineal j pasa por la zona plana de la no linealidad, de forma que su rigidez es $k_j = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial V}{\partial u_{j-1}} \\ \frac{\partial V}{\partial u_j} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} -k_{j-1} & k_{j-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{j+1} & -k_{j+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{j-2} \\ u_{j-1} \\ u_j \\ u_{j+1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -F \\ +F \end{Bmatrix} \quad (6.55)$$

estando F definido en la tabla 6.7 para las zonas II-Up y II-Down.

Las derivadas anteriores se pueden expresar en forma vectorial:

$$\left\{ \frac{\partial V}{\partial u} \right\} = [K_{nominal}] \{u\} - \{FBCK_{nominal}\} \quad \text{en I, II-Left, II-Right ó III} \quad (6.56)$$

$$\left\{ \frac{\partial V}{\partial u} \right\} = [K_{zero}] \{u\} - \{FBCK_{zero}\} \quad \text{en II-Down ó II-Up} \quad (6.57)$$

expresando con el subíndice *nominal* las zonas del sistema en las que el muelle no lineal j tiene su rigidez nominal k_j , y con el subíndice *zero* las zonas en las que el sistema pasa por II-Down ó II-Up, zonas en las que el muelle no lineal j tiene rigidez nula $k_j = 0$. Las fuerzas $FBCK_{nominal}$ y $FBCK_{zero}$ se pueden considerar fuerzas de realimentación (en inglés *feedback*, de ahí las siglas *BCK*), que tienen en cuenta la precarga del muelle y la variación en la fuerza del muelle por la presencia de la holgura.

Finalmente, las ecuaciones de Lagrange podrán escribirse:

$$[M] \{\ddot{u}\} + [K_{n/z}] \{u\} = \{FBCK_{n/z}\} \quad (6.58)$$

donde n/z se refiere a *nominal* y *zero* respectivamente.

6.5.2. Ecuaciones en Estado-Espacio y Solución Analítica

Las ecuaciones diferenciales anteriores (de segundo orden) pueden escribirse como una ecuación diferencial de primer orden. Para ello, se construye un vector $\{x\}$ de la siguiente forma:

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{\dot{u}\} \end{Bmatrix} \quad (6.59)$$

La derivada de este nuevo vector $\{x\}$ será:

$$\begin{aligned} \frac{d\{x\}}{dt} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -[M]^{-1}[K_{n/z}] & 0 \end{bmatrix} \{x\} + \begin{bmatrix} 0 \\ -[M]^{-1} \end{bmatrix} \{FBCK_{n/z}\} \\ &= [A_{n/z}] \{x\} + [B_{n/z}] \{FBCK_{n/z}\} \end{aligned} \quad (6.60)$$

que es la denominada *Primera Ecuación de Estado-Espacio*. Como variables de salida $\{y\}$, se deseará monitorizar una parte del vector $\{x\}$, del vector $\{FBCK_{n/z}\}$, o una combinación lineal de los mismos, es decir:

$$\{y\} = [C] \{x\} + [D] \{FBCK_{n/z}\} \quad (6.61)$$

que es la denominada *Segunda Ecuación de Estado-Espacio*. Por tanto, las ecuaciones de Estado-Espacio son:

$$\begin{aligned} \frac{d\{x\}}{dt} &= [A_{n/z}] \{x\} + [B_{n/z}] \{FBCK_{n/z}\} \\ \{y\} &= [C] \{x\} + [D] \{FBCK_{n/z}\} \end{aligned} \quad (6.62)$$

Estas dos ecuaciones matriciales forman un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden de coeficientes constantes. La solución de este tipo de sistemas de ecuaciones diferenciales ha sido ampliamente desarrollada durante los últimos años, especialmente con la teoría de control de sistemas. Sin embargo, las ecuaciones (6.62) presentan una particularidad adicional, y es que son de coeficientes constantes a trozos³, en el sentido de que los valores de las matrices $[A_{n/z}]$, $[B_{n/z}]$ y del vector $\{FBCK_{n/z}\}$ dependen de la zona del ciclo de *freeplay/hysteresis* por la que pasa el sistema.

6.5.3. Integración numérica: módulo integrador de FHSWB

La integración numérica se realiza mediante el módulo de integración del código **FHSWB**, basado en el paquete de integradores **ODEPACK**. Los detalles de este módulo, que implementa el método *illinois* para el cálculo del paso por las esquinas de la no linealidad, ya han sido descritos en la sección 5.2.

6.5.4. Solución analítica: *Point Transformation Method*

En este apartado se desarrolla la solución analítica del sistema de ecuaciones:

$$[M] \{\ddot{u}\} + [K_{n/z}] \{u\} = \{FBCK_{n/z}\} \quad (6.63)$$

³En la literatura inglesa se denominan *piecewise linear systems*.

que, como ya se ha dicho anteriormente, es un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden de coeficientes constantes en cada tramo del ciclo del *freeplay/hysteresis*. Se puede demostrar la linealidad de la solución de este tipo de ecuaciones diferenciales, de forma que la solución completa se puede escribir como una solución particular $\{u_p\}$ más una solución del sistema homogéneo:

$$[M] \{\ddot{u}_h\} + [K_{n/z}] \{u_h\} = 0 \quad (6.64)$$

En primer lugar nos ocuparemos de la solución del sistema homogéneo. Se demuestra que las soluciones del tipo:

$$\{u_h\} = \Re \left(\{\tilde{u}_h\} e^{i\omega t} \right) \quad (6.65)$$

cumplen la ecuación homogénea. Sustituyendo en (6.63), se obtiene un problema de autovalores/autovectores cuya solución proporciona las *frecuencias propias* y los *modos propios* del sistema:

$$\left(-\omega^2 [I] + [M]^{-1} [K_{n/z}] \right) \{\tilde{u}_h\} = 0 \quad (6.66)$$

Como puede observarse, las frecuencias/modos propios del sistema dependen del tramo de la no linealidad por la que pasa el sistema. En los tramos del ciclo *freeplay/hysteresis* en los que el muelle k_j está activo la matriz de rigidez es $[K_n]$, mientras que en los tramos del ciclo en los que la rigidez k_j cae a cero (*zona muerta* o *deadband*) la matriz de rigidez del sistema es $[K_z]$. Como resultado, el sistema homogéneo proporciona unos modos $[\phi_{n/z}]$ y frecuencias propias $\omega_{n/z}^j$ ($j = 1, 2, \dots, N$) que caracterizan el sistema.

Por otro lado, se demuestra que estos modos son linealmente independientes y diagonalizan las matrices de masas y rigidez, por lo que pueden ser utilizados como un adecuado cambio de variable para resolver la solución del sistema completo (ecuación (6.63)). Sustituyendo $\{u\} = [\phi_{n/z}] \{\xi_{n/z}\}$ en (6.63) y premultiplicando por $[\phi]^T$:

$$[\phi_{n/z}]^T [M] [\phi_{n/z}] \{\ddot{\xi}_{n/z}\} + [\phi_{n/z}]^T [K_{n/z}] [\phi_{n/z}] \{\xi_{n/z}\} = [\phi_{n/z}]^T \{F B C K_{n/z}\} \quad (6.67)$$

que, escrito de forma más compacta, queda:

$$[M_{hh(n/z)}] \{\ddot{\xi}_{n/z}\} + [K_{hh(n/z)}] \{\xi_{n/z}\} = \{F B C K_{h(n/z)}\} \quad (6.68)$$

donde $[M_{hh(n/z)}]$ y $[K_{hh(n/z)}]$ son las matrices de masa y rigidez en la base modal (subíndices *hh*), $\{F B C K_{h(n/z)}\}$ es el vector de fuerzas proyectado en la base modal (subíndice *h*), y $\{\xi_{n/z}\}$ es el vector de coordenadas modales o *coordenadas generalizadas*, que pasan a ser las variables del sistema.

Las matrices $[M_{hh(n/z)}]$ y $[K_{hh(n/z)}]$ son diagonales, lo que indica que las coordenadas generalizadas $\{\xi_{n/z}\}$ están desacopladas, y el sistema de ecuaciones (6.68) se reduce a N ecuaciones diferenciales de segundo orden independientes. Su solución depende de si existen modos de sólido rígido o no. En el primer caso, algún término de la diagonal en la matriz de rigidez $[K_{hh(n/z)}]$ es cero, y la solución de la ecuación diferencial asociada es del tipo $\xi^j = at^2 + bt + c$. Se distinguen por tanto dos casos:

1. Sistema *nominal*:

$$[M_{hh(n)}] \{\ddot{\xi}_n\} + [K_{hh(n)}] \{\xi_n\} = \{F B C K_{h(n)}\} \quad (6.69)$$

donde la matriz de rigidez modal $[K_{hh(n)}]$ tiene su diagonal formada por elementos no nulos. Como ya se dijo anteriormente, las ecuaciones están desacopladas, de forma que la ecuación genérica j se escribe:

$$M_{hh(n)}^{jj} \ddot{\xi}^j + K_{hh(n)}^{jj} \xi^j = F B C K_{h(n)}^j \quad (6.70)$$

cuya solución es:

$$\xi_n^j(t) = \frac{FBCK_{hh(n)}^j}{K_{hh(n)}^{jj}} + \Re \left[\left(\xi_n^j|_{t=0} - \frac{FBCK_{hh(n)}^j}{K_{hh(n)}^{jj}} + i \frac{\dot{\xi}_n^j|_{t=0}}{\omega_n^j} \right) \exp \{i\omega_n^j t\} \right] \quad (6.71)$$

siendo $\xi_n^j|_{t=0}$ y $\dot{\xi}_n^j|_{t=0}$ la coordenada y velocidad generalizada j en el instante inicial y ω_n^j la frecuencia propia definida por:

$$\omega_n^j = \sqrt{\frac{K_{hh(n)}^{jj}}{M_{hh(n)}^{jj}}} \quad (6.72)$$

2. Sistema zero ($k_j = 0$)

$$[M_{hh(z)}] \{\ddot{\xi}_z\} + [K_{hh(z)}] \{\xi_z\} = \{FBCK_{h(z)}\} \quad (6.73)$$

donde la matriz de rigidez modal $[K_{hh(z)}]$ tiene su diagonal formada por elementos no nulos excepto uno asociado al modo de sólido rígido que aparece cuando $k_j = 0$. En este caso, la ecuación asociada es:

$$M_{hh(n)}^{11} \ddot{\xi}_z^1 = FBCK_{h(n)}^1 \quad (6.74)$$

indicando con el superíndice 1 su posición en el sistema de ecuaciones. Su solución queda:

$$\xi_z^1(t) = \frac{FBCK_{h(z)}^1}{M_{hh(z)}^{11}} \frac{t^2}{2} + \dot{\xi}_z^1|_{t=0} t + \xi_z^1|_{t=0} \quad (6.75)$$

La evolución del resto de coordenadas generalizadas ξ_z^j ($j = 2, 3, \dots, N$) se rigen por ecuaciones del tipo (6.70), y su solución queda como (6.71)

Las condiciones iniciales en la base modal se escriben en función de condiciones iniciales en los desplazamientos u_j o velocidades \dot{u}_j :

$$\{\xi_{(n/z)}\}_0 = \left([\phi_{(n/z)}]^T [\phi_{(n/z)}] \right)^{-1} [\phi_{(n/z)}]^T \{u\}_0 \quad (6.76)$$

$$\{\dot{\xi}_{(n/z)}\}_0 = \left([\phi_{(n/z)}]^T [\phi_{(n/z)}] \right)^{-1} [\phi_{(n/z)}]^T \{\dot{u}\}_0 \quad (6.77)$$

donde el subíndice *cero* indica condiciones iniciales en $t = 0$.

6.5.5. Comparación solución analítica vs. integración numérica.

A continuación se compara la solución analítica del método *Point Transformation Method* con la solución numérica directa. Este caso de comparación considera 20 masas con el muelle #2 presentando una no linealidad de tipo histéresis (ver figura 6.9). La no linealidad *histéresis* desarrollada en esta tesis se puede considerar como la composición de dos no linealidades del tipo *freeplay*, la inferior con una precarga de $-1,0$ [N] y holgura $[-0,01, +0,01]$ en [m], y la superior con precarga de $+1,0$ [N] y holgura $[+0,01, +0,03]$ [m] (ver resultado en la figura (6.14)).

Las figuras 6.12 y 6.13 muestran los desplazamientos $u(i)$ de las 20 masas, donde i varía desde 1 a 20, comparando la solución analítica (línea azul continua $-$) con la solución numérica (puntos

discretos rojos \mathbf{x}). La solución numérica tiene la precaución de detectar de forma exacta las esquinas de la no linealidad y cambiar de base modal en ese momento. Puede observarse que las diferencias entre la solución analítica y numérica son inapreciables.

La figura 6.15 corresponde a la solución numérica en los instantes iniciales y sirve para ilustrar la captura de las esquinas de la no linealidad. Puede observarse que el paso de tiempo constante del código, en este caso 0,005 [s], se interrumpe cuando el sistema pasa por alguna de las esquinas de la no linealidad, momento en el que el código vuelve atrás, calcula el tiempo de paso por la esquina y devuelve el vector de estado-espacio del sistema en esa esquina.

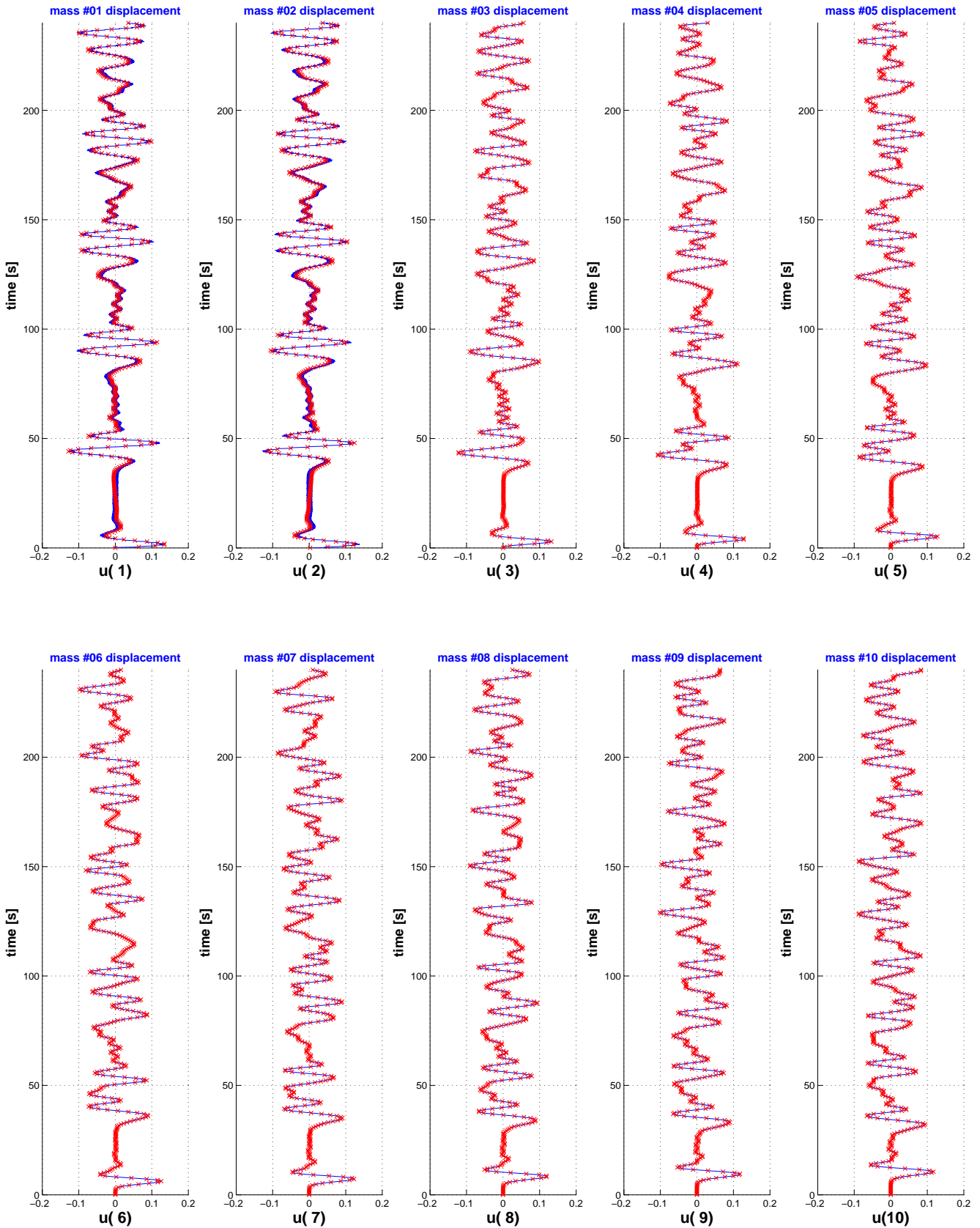


Figura 6.12: Comparación entre la integración numérica (—) y solución analítica (x)

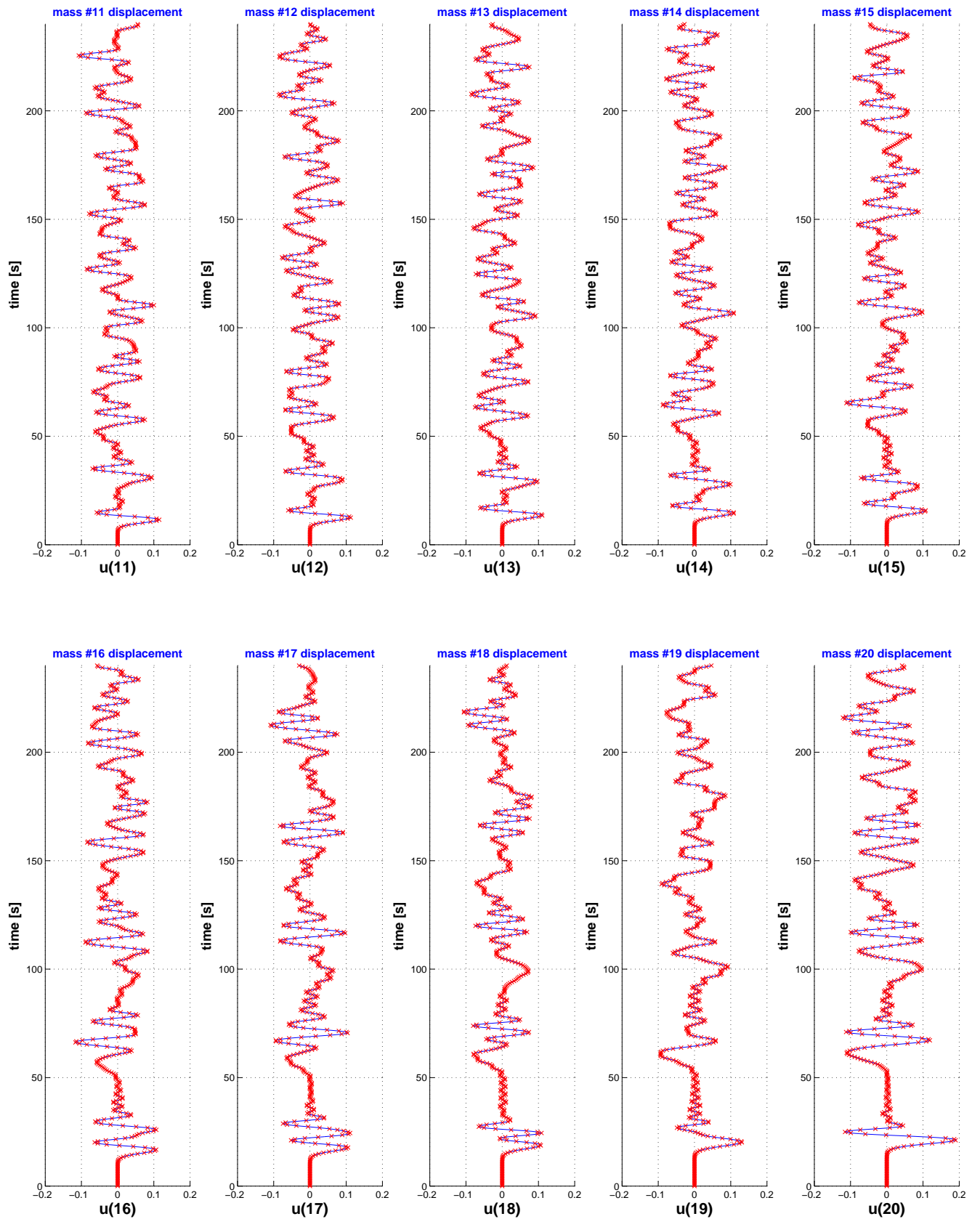


Figura 6.13: Comparación entre la integración numérica (—) y solución analítica (x)

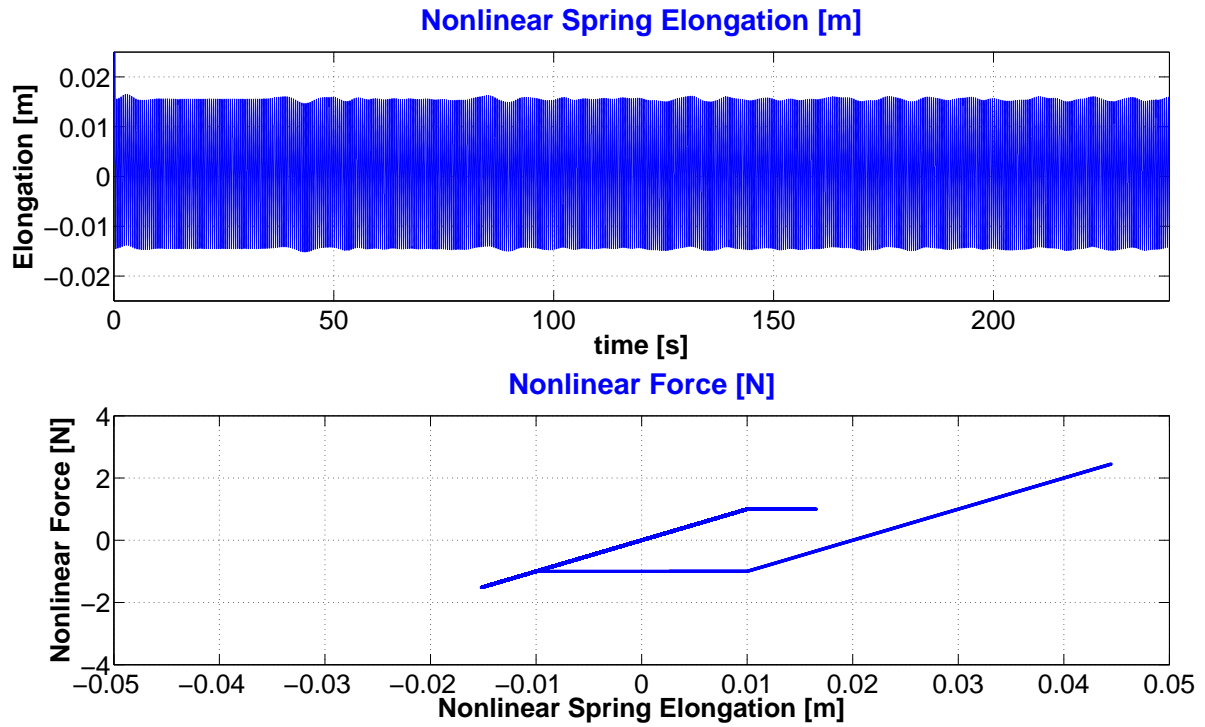


Figura 6.14: Elongación del muelle no lineal en función del tiempo (figura superior) y fuerza no lineal en función de la elongación del muelle no lineal (figura inferior).

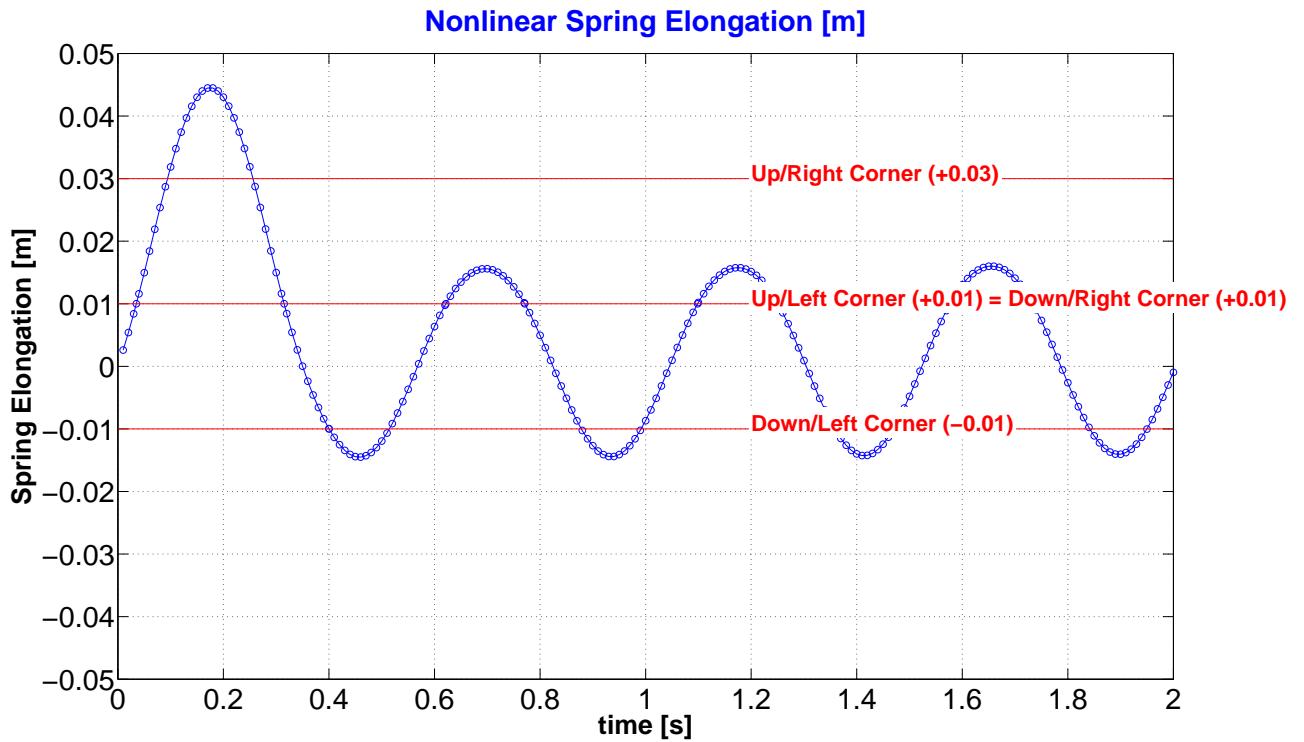


Figura 6.15: Intervalo de tiempo seleccionado que muestra la captura de las esquinas de la no linealidad con el código *FHSWB*.

6.6. Consideraciones Finales

En este capítulo se han validado los distintos módulos del código **FHSWB**, obteniéndose las siguientes conclusiones:

- El módulo inercial/estructural se ha validado con un modelo de elementos finitos implementado en el código comercial **MSC.NASTRAN**. Se ha comprobado que el código **FHSWB** calcula de forma correcta las matrices generalizadas de masa y rigidez, obteniendo para los modos del modelo de elementos finitos las mismas frecuencias que proporciona el modelo **MSC.NASTRAN**.
- La validación del módulo aerodinámico se ha realizado en varios pasos, con el objeto de validar de forma independiente cada una de las contribuciones a las fuerzas aerodinámicas. En primer lugar se ha validado el cálculo de fuerzas no estacionarias sobre dos cuerpos esbeltos (ojiva de revolución y cono), comparando el código **FHSWB** con una solución analítica basada en la teoría de cuerpos esbeltos. A continuación se ha realizado el mismo ejercicio con un ala triangular esbelta, obteniéndose buenos resultados comparados con la solución analítica, para finalmente validar el código con una configuración completa cuerpo/ala. Los resultados son satisfactorios, lo que valida no sólo la formulación teórica desarrollada en los capítulos 3 y 4, sino también la implementación de esta teoría en el código en Fortran 90.
- Se ha realizado una validación del método de solución de la ecuación de *flutter* en el dominio de la frecuencia (*flutter* lineal), comprobando que el código realiza de forma correcta el acoplamiento de los tres modelos (inercial, estructural y aerodinámico) y el método k implementado en el código **FHSWB** proporciona los valores correctos de la frecuencia y velocidad del mecanismo de *flutter*. La validación se ha realizado con resultados teóricos y experimentales de una configuración de cuerpo esbelto.
- Por último, el integrador numérico de las ecuaciones de estado-espacio se ha validado aplicándolo a la resolución de un sistema con solución analítica, un tren de masas unidos por muelles siendo uno ellos un muelle no lineal con no linealidad de tipo *hysteresis*. Los resultados indican que el código funciona correctamente y la integración en el tiempo se interrumpe de forma exacta en las esquinas de la no linealidad (método *illinois*). Como ya se ha comentado, la captura de la esquina de la no linealidad es importante con el objeto de no ir acumulando errores a medida que avanza la integración.

El resultado de las anteriores estudios permite afirmar que el código **FHSWB** funciona de forma satisfactoria, por lo que se pasa a continuación a aplicarlo a la configuración estudio de la tesis: cuerpo central con aletas triangulares traseras a modo de superficies de control. Esta configuración se describe de forma detallada en el capítulo siguiente.

Capítulo 7

CONFIGURACIÓN DE ESTUDIO. PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

7.1. Introducción

En este capítulo se detalla la configuración utilizada en la tesis para caracterizar el efecto de no linealidades estructurales en la aeroelasticidad de una aeronave. Se trata de una configuración cuerpo/ala esbelta tipo misil, formada por un cuerpo esbelto central con relación de esbeltez $\tau = 0,10$ y dos aletas triangulares traseras a modo superficies de control aerodinámico (ver figura 7.1). Las aletas introducen carga aerodinámica girando alrededor su eje de charnela, y se deflectan de forma simétrica. El problema físico a resolver se detalla en la sección 7.2.

Las dimensiones del vehículo son similares al misil AMRAAM, aunque la superficie de las aletas es mayor en la configuración de esta tesis (ver sección 7.3). Las propiedades másicas (centro de gravedad, momentos de inercia, etc.) son también parecidas a las del misil AMRAAM y se detallan en la sección 7.4. El resto de características geométricas (localización del eje de charnela de las aletas, etc.) y las propiedades de rigidez (soportes, modos de flexión del cuerpo, etc.) se han seleccionado para obtener una velocidad de flutter lineal en el rango subsónico alto/transónico. La sección 7.5 detalla los dos tipos de condiciones de contorno que se han considerado: misil instalado en el pilón de una plataforma que lo transporta (soportado **S01**) y misil en vuelo libre (soportado **S02**). Por otro lado, se estudian dos modelos estructurales (sección 7.5):

1. Para los dos soportados **S01** y **S02**, modelo estructural de misil rígido (**RIG**) con tres grados de libertad como sólido rígido: desplazamiento lateral, guiñada y rotación de aletas.
2. Sólo para el soportado **S02**, modelo estructural de misil flexible (**FLE**) con cuatro grados de libertad: desplazamiento lateral, guiñada, rotación de aletas y primera flexión lateral¹. En el soportado **S01** no se ha estudiado la posibilidad de modelo flexible debido a que las uniones misil/pilón rigidizan la estructura, y la primera flexión del misil suele estar muy por encima de la frecuencia de los modos estructurales que intervienen en los mecanismos de flutter.

En el soportado **S01**, misil colgado de una plataforma a través de un pilón con modelo estructural

¹Sin embargo, este problema es equivalente a considerar modo de desplazamiento vertical o *heaving*, modo de ángulo de ataque, modo de rotación simétrica de aletas y primera flexión vertical.

rígido **RIG**, las frecuencias de los modos son similares a las obtenidas en ensayos estructurales sobre configuraciones del mismo tipo. La frecuencia de rotación de las aletas depende de la inercia de las aletas y de la rigidez de los actuadores. Se ha seleccionado un actuador de forma que la frecuencia de rotación esté en torno a una frecuencia típica de superficies de control (25-30 [Hz]). En el soportado **S02** y modelo flexible **FLE**, se ha seleccionado un primer modo de flexión con una frecuencia relativamente baja (unos 30 [Hz]) con el objeto de que interfiera en los mecanismos de flutter y se pueda observar el efecto de la flexibilidad en la respuesta aeroelástica.

Se consideran no linealidades estructurales concentradas del tipo *freeplay* o *hysteresis* localizadas en los tres modos principales: lateral, guiñada y rotación de aletas (sección 7.6). Por otro lado, la sección 7.7 detalla los principales características de la no linealidad que se varían de forma paramétrica y se describen los casos estudiados (modelo estructural, soportado, localización y tipo de no linealidad, etc.). Por último, la sección 7.8 introduce un ejemplo de la forma en la que se realizado el postproceso de la respuesta.

7.2. Problema físico

Los resultados que se presentan en esta tesis estudian dos posibles configuraciones:

1. Misil instalado en el avión (soportado **S01**):

La instalación en una aeronave de cargas subalares del tipo misil, depósitos de combustible, pods de reabastecimiento o defensa, etc. requiere una certificación completa cubriendo los distintos paneles (aerodinámica, estructura, interferencia electromagnética,...) y, entre ellos, el panel de aeroelasticidad. La certificación desde el punto de vista aeroelástico requiere el cumplimiento con las normas (civiles o militares) de aeronavegabilidad, las cuales exigen demostrar con simulaciones teóricas, ensayos en tierra (GVT²) y ensayos en vuelo (FFT³) que la aeronave está libre de cualquier tipo de inestabilidad aeroelástica (flutter, divergencia, inversión de mando, vibraciones tipo LCOs, etc.).

Las simulaciones teóricas de *flutter* se obtendrán con un modelo aeroelástico (aerodinámico + estructura + masa) que incluyan las propiedades de las cargas subalares que se incorporan. Los mecanismos de *flutter* del avión se verán modificados fundamentalmente por el cambio de los modos propios (frecuencia y forma modal) de la aeronave con la inclusión de las cargas subalares. Uno de los efectos típicos perjudiciales suele ser el cambio de la frecuencia de la torsión de ala.

El efecto de los misiles en la aeroelasticidad de la aeronave debe valorarse con modelos aeroelásticos complejos: un modelo de Elementos Finitos del avión, un modelo aerodinámico completo incluyendo posibles correcciones a altos números de Mach por efectos transónicos, y un modelo inercial con masa distribuida (OEW, carga de pago y combustible) teniendo en cuenta las distintas misiones del avión (logística, entrenamiento, etc.) y la política de distribución de combustible en los tanques. En todos estos cálculos, la carga subalar se suele modelizar como un sólido rígido unido a un pión flexible que colgará del ala. La aerodinámica no estacionaria suele ser aproximada con una teoría de cuerpos esbeltos acoplada al Doublet-Lattice (ver [Aré98b] y

²Del término inglés Ground Vibration Test

³Del término inglés Flight Vibration Test

[Aré98a]), que continúa siendo el código estándar en la industria aeronáutica, al menos en la etapa de certificación de la aeronave.

La instalación de la carga subalar afecta a los modos propios de la estructura original, tendiendo por lo general a bajar la frecuencia los modos fundamentales del ala (primeras flexión y torsión) por efectos inerciales. Además de modificar los modos propios de la aeronave original, el conjunto pilón con la carga subalar tiene sus modos locales de vibración dando lugar a nuevos modos en la estructura. Estos nuevos modos propios son:

- Modo *lateral* del conjunto pilón + carga subalar: es un modo local con movimiento exclusivo del conjunto pilón/carga y se encuentra generalmente en el rango de 5 a 10 [Hz].
- Modo de *guiñada* del conjunto pilón + cargas subalar: es también un modo local con movimiento exclusivo del conjunto pilón/carga subalar y se encuentra generalmente en el rango 10 a 20 [Hz].
- Modo vertical de *cabeceo* del conjunto pilón + carga subalar: es un modo de cabeceo del conjunto pilón + carga subalar pero, a diferencia de los dos anteriores, induce movimientos adicionales en la estructura del ala, fundamentalmente torsión local. Se encuentra a más alta frecuencia que los dos anteriores y suele tener más amortiguamiento ya que induce movimiento de parte de la superficie sustentadora del ala.

Las frecuencias de los modos *lateral* y de *guiñada* anteriores se basan en ensayos de vibración en tierra **GVT** de aviones como el EADS/CASA A310-MRTT ([GAC04]) o el EADS/CASA A330-MRTT ([MCC07b]).

El *flutter* de la aeronave se verá afectado por el modo anterior de cabeceo vertical del conjunto pilón+carga, ya que este modo induce torsiones locales en el ala. Los otros dos modos de movimiento transversal del misil (lateral y guiñada) podrán inducir *flutter* local del misil pero no es previsible que modifiquen el *flutter* del avión básico en el que desea instalar las cargas subalares. Sin embargo, si bien estos dos modos no modifican el *flutter* del avión básico, son candidatos a la aparición de **Limit Cycle Oscillations (LCOs)** debido a su bajo amortiguamiento aerodinámico.

Los resultados de esta tesis se centran en el estudio del comportamiento aeroelástico del misil en dirección transversal, estudiando no sólo la velocidad de flutter lineal sino también la aparición de LCOs por la existencia de no linealidades estructurales.

La ventaja de la formulación de cuerpo esbelto no estacionaria que se presenta en esta tesis es que permite formular las fuerzas aerodinámicas en el dominio del tiempo, mientras que los métodos aerodinámicos tipo Doublet-Lattice se formulan en el dominio de la frecuencia. Una formulación exacta en el dominio del tiempo es la única que permite detectar LCOs de alta frecuencia y movimiento caótico; los métodos aproximados en el dominio de la frecuencia (*Describing Function Method*, etc.) no permiten detectar armónicos de alto orden (incluso aunque el movimiento resultante sea oscilatorio puro) y tampoco detectan respuestas que no sean periódicas, es decir, movimiento caótico.

2. Misil en vuelo libre (soportado **S02**):

En el caso de vuelo libre se estudia de nuevo la velocidad de *flutter* lineal incluyendo los modos de sólido rígido por la condición de vuelo *free-free*, y la aparición de LCOs por la existencia de no linealidades estructurales. Los resultados de la tesis son aplicables al problema *longitudinal* y *lateral*:

- a) *Longitudinal*: en el modelo **RIG** se incluyen el modo de desplazamiento vertical de sólido rígido o *heaving*, modo de ángulo de ataque, modo de rotación de aletas, mientras que en el modelo flexible **FLE** se consideran los modos anteriores junto con el primer modo de flexión vertical.
- b) *Lateral*: en el modelo **RIG** se incluyen el modo de desplazamiento lateral, modo de guiñada y modo de rotación de aletas, mientras que en el modelo flexible **FLE** se consideran los modos anteriores junto con el primer modo de flexión lateral.

Teniendo en cuenta que, para el soportado **S01**, la tesis resuelve el problema lateral *lateral*, en el soportado **S02** se considera por facilidad de notación el mismo problema *lateral* aunque, como ya se ha dicho, los resultados en este último caso son extrapolables directamente al problema *longitudinal*.

7.3. Configuración Geométrica

Las dimensiones de la configuración de la tesis se especifican en la vista en planta (plano xz) de la figura 7.1, todas ellas en las dimensiones $[L]$ que, en el S.I., serán metros $[m]$. Sus dimensiones se comparan con el misil AMRAAM (*Advanced Medium-Range Air-to-Air Missile*) de Raytheon Company.

Las principales características de este modelo son:

1. Superficies de control (aletas) mayores que las de misiles convencionales como el AMRAAM, lo que le permite alcanzar maniobras más exigidas con menor radio de giro.
2. Una relación de esbeltez del cuerpo mayor ($\tau = 0,10$) comparada con la de misiles clásicos como el AMRAAM ($\tau_{AMRAAM} = 0,05$), lo que permite investigar en el estudio una mayor interferencia aerodinámica cuerpo/ala.

Estas dos características, que parecen mejorar las cualidades de vuelo del misil, *modifican* las cualidades aeroelásticas del misil, especialmente el hecho de tener una mayor superficie de control.

7.4. Modelo Inercial

Se consideran las siguientes distribución de masa por unidad de longitud:

$$\hat{m}_b(\hat{x}) = \frac{m_b(\hat{x})}{m_0} = 25,0 + 50,0 \cdot \hat{x} [M/L]$$

$$\hat{m}_w(\hat{x}) = \frac{m_w(\hat{x})}{m_0} = 25,0 \cdot (\hat{x} - \hat{x}_0) [M/L]$$

donde \hat{m}_b es la masa por unidad de longitud adimensional del cuerpo y \hat{m}_w es la masa por unidad de longitud adimensional de la aleta, ambas adimensionalizadas con $m_0 = 1,0 [M/L^2]$. Recuerdese por otro lado que \hat{x}_0 es la coordenada adimensional (adimensionalizada con la longitud del misil L) del borde de ataque de la aleta en la raíz.

Estas distribuciones másicas proporcionan las características inerciales de la configuración que se resumen en la tabla 7.1.

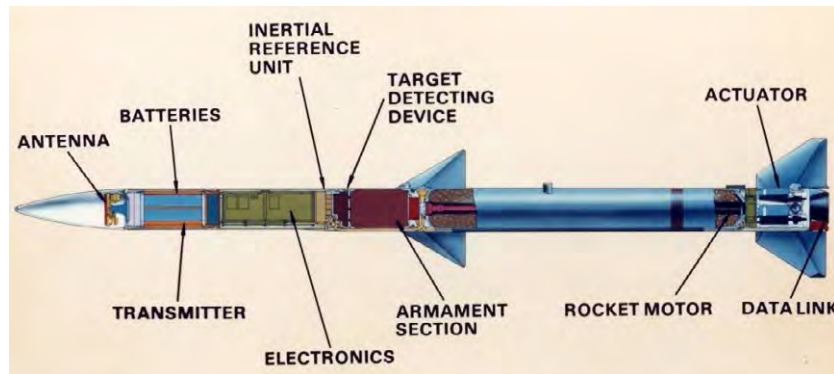
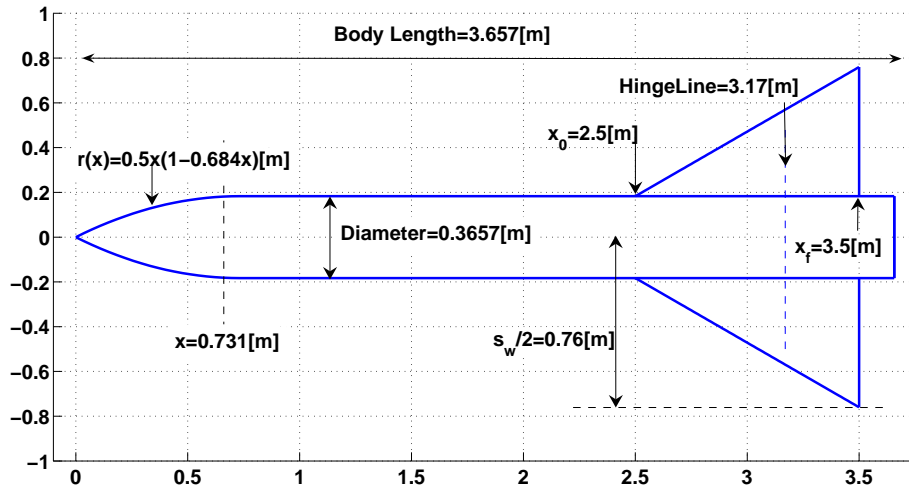


Figura 7.1: Configuración geométrica del misil (arriba) comparada con el misil AMRAAM (abajo).

M_b : Masa del cuerpo	182,85[M]
M_w : Masa de las aletas	3,42[M]
M_{wb} : Masa total	186,27[M]
CoG_b : Centro de Gravedad del cuerpo	2,13[L]
CoG_w : Centro de Gravedad de las aletas	3,17[L]
CoG_{wb} : Centro de Gravedad de la configuración	2,15[L]
I_{yy} : Momento de Inercia respecto a CoG_{wb}	190,57[M · L ²]

Tabla 7.1: Principales propiedades másicas de la configuración.

7.5. Modelo Estructural/Soportado del Misil

Se consideran dos modelos estructurales distintos de misil:

1. Misil rígido **RIG**: Misil rígido con 3 grados de libertad (movimiento lateral, de guiñada y de rotación de aletas).
2. Misil flexible **FLE**: Misil flexible con los 3 grados de libertad anteriores y primer modo de flexión del misil (ver norma [Def99], párrafo 35.11.e.ii y 35.11.e.iii). La flexibilidad del misil se ha modelizado con un modelo tipo viga o *beam* (ver norma [Def99], párrafo 35.11.b.ii) utilizando el código comercial **MSC.NASTRAN**. Aunque en esta tesis no se presentan resultados con flexión en la cuerda (*chordwise bending*) en las aletas, el código **FHSWB** permite introducir este tipo de deformación, que es especialmente importante en aletas fijas con gran cuerda.

Por otro lado, se consideran dos situaciones distintas de soportado:

1. Soportado **S01** (figuras 7.2 y 7.3): Misil soportado en el ala de un avión. El misil se deberá modelizar con un soporte que reproduzca los modos laterales de flexión y guiñada del pylon que lo une al ala. Para ello se considera un soporte modelizado con dos muelles, uno que trabaja a desplazamiento y otro a rotación situados ambos en el centro de gravedad de la configuración, y con la rigidez adecuada para reproducir las siguientes frecuencias propias de flexión lateral y guiñada:
 - Frecuencia de movimiento lateral de flexión: $f_{lateral} = 5,0$ [Hz].
 - Frecuencia de movimiento de guiñada: $f_{yaw} = 10,0$ [Hz].

El orden de magnitud de las frecuencias anteriores corresponde a frecuencias propias de pilones de los que cuelgan misiles del peso que se está utilizando en esta tesis (entre 150 y 200 [Kg]).

En este tipo de soportado, las frecuencias de los modos flexibles del misil quedan muy por encima de las frecuencias propias de los modos *lateral*, guiñada (*yaw*) o de *rotación de aletas*. Por este motivo, esta configuración se considera rígida *RIG*.

2. Soportado **S02** (figura 7.4): Misil en vuelo libre con dos grados de libertad como sólido rígido (desplazamiento lateral y guiñada). En este caso los modos flexibles del misil pueden encontrarse a frecuencias en torno a las de los modos propios *lateral*, de *yaw* y de *rotación de aletas*. Por este motivo, este tipo de soportado se asocia a los dos posibles modelos estructurales *RIG* y *FLE*.

Por otro lado, y en este soportado S02 de vuelo libre, los resultados del problema expuesto de perturbaciones laterales son directamente aplicables al estudio del problema *longitudinal*, es decir con los grados de libertad de *heaving+cabeceo+rotación simétrica de aletas+modos flexibles verticales adicionales*.



Figura 7.2: Panoplia de misiles y stores con soportado **S01** (foto: Eurofighter).



Figura 7.3: Soportado **S01**: misil colgado de pílón (foto: F16).

De esta forma, se podrán tener las siguientes tres configuraciones de misil en cuanto a modelo y soportado se refiere: **RIG.S01**, **RIG.S02**, y **FLE.S02**.

7.6. Nolinealidades Estructurales Concentradas

Dependiendo del soportado, se consideran las siguientes nolinealidades estructurales:

1. Soportado **S01**. La nolinealidad estructural puede estar concentrada en los siguientes grados de libertad:



Figura 7.4: Misil en vuelo libre: soportado **S02** (foto: Boeing F15).

- a) Rotación de aletas (**ROT**)
- b) Guiñada del conjunto misil+pilón (**YAW**).
- c) Desplazamiento lateral del conjunto misil+pilon (**LAT**).

La primera no linealidad en la rotación de aletas (**ROT**) puede simular una holgura en la rotación debido a múltiples causas: tolerancias de fabricación de los actuadores que comandan la rotación, desgaste de los actuadores, fallo o rotura en vuelo, etc. Las dos últimas (**YAW** y **LAT**) simulan una no linealidad en la guiñada o flexión lateral del conjunto misil+pilón y normalmente no corresponde a tolerancias de fabricación debido a que la uniones pilón/ala y misil/pilón son rígidas con bulones de alto par de apriete. Sin embargo, puede ocurrir fallos/roturas, como especifica por ejemplo el párrafo 3.2.1.3 de la norma *MIL-A-887C* ([MAB87] o [MAC93]):

3.2.1.3 Fail-safe aeroelastic stability criteria. The stability design requirements of 3.1.1 shall be met after each of the adverse conditions listed below:

...

c. Detail design shall either satisfy the stability design requirements of 3.1.1 after each structural failure listed below, or provide the required static strength and fatigue design margins such that these failures will not occur during the service life of the aircraft.

...

3. Failure of any single element in the supporting structure of any pylon, rack, or external store.

...

2. Soportado **S02**. La no linealidad estructural sólo puede estar situada en la rotación de aletas (**ROT**).

7.7. Estudio paramétrico

Para cada una de las configuraciones anteriores **RIG.S01**, **RIG.S02**, y **FLE.S02**, se consideran dos tipos de no linealidades estructurales concentradas:

- No linealidad tipo *freeplay* (figura 7.6):

Dada una no linealidad *nominal* de tipo *freeplay* con una holgura de $[-0,005, +0,005]^4$ [rad] ó [m], se establecen las siguientes variaciones paramétricas:

1. Amplitud de la holgura (**FDA**, acrónimo del inglés *Freeplay Deadband Amplitude*).
2. Centro de la holgura (**FDC**, acrónimo del inglés *Freeplay Deadband Center*).
3. Precarga (**FDP**, acrónimo del inglés *Freeplay Deadband Preload*).
4. Condiciones de Contorno (**FBC**, acrónimo del inglés *Freeplay Boundary Conditions*).

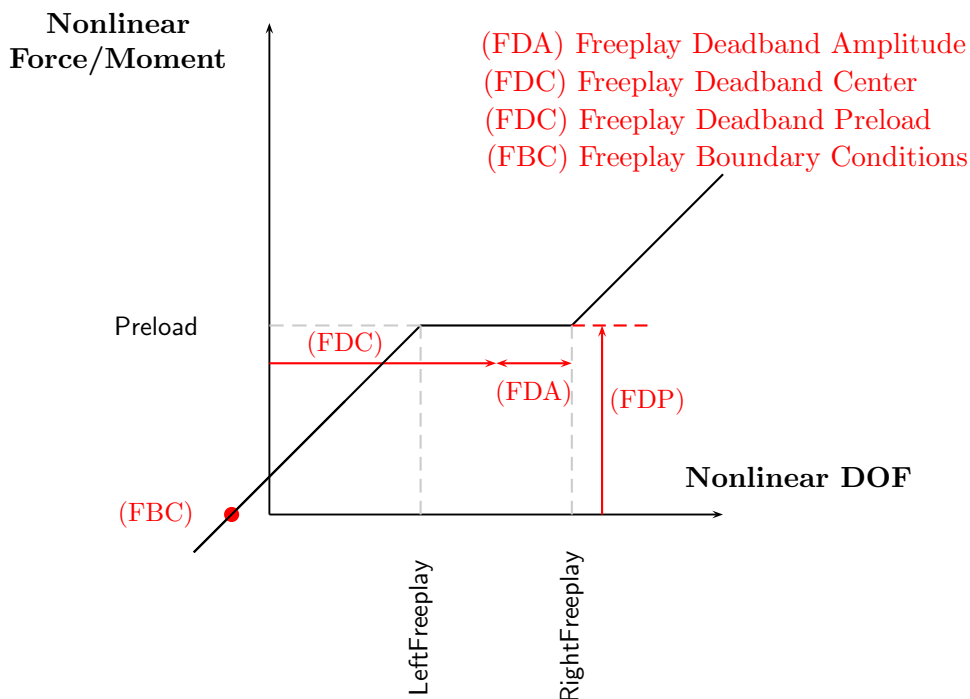


Figura 7.6: No linealidad del tipo *freeplay* con los principales parámetros que la definen.

⁴En caso de tener esta no linealidad en un grado de libertad de giro correspondería a una holgura en grados de $\mp \arctan(0,005) \simeq \mp 0,005 \cdot 180/\pi = \mp 0,286$ [deg]; en el caso de ser una no linealidad en un soporte de desplazamiento corresponde a una holgura en desplazamiento de $\mp 0,005$ en el S.I., es decir, ∓ 5 [mm].

■ Nolinealidad estructural tipo *hysteresis* (figura 7.7):

Dada una nolinealidad *nominal* de tipo *histéresis* con una holgura de $[-0,005, +0,005]$ [rad] ó [m] y precarga superior e inferior de $[-5,0, +5,0]$ ⁵ [N] o [N.m], se establecen las siguientes variaciones paramétricas:

1. Amplitud de la holgura (**HDA**, acrónimo el inglés *H*ysteresis *D*eadband *A*mplitude).
2. Centro de la holgura (**HDC**, acrónimo el inglés *H*ysteresis *D*eadband *C*enter).
3. Precarga (**HDP**, acrónimo el inglés *H*ysteresis *D*eadband *P*reload).
4. Condiciones de Contorno (**HBC**, acrónimo el inglés *H*ysteresis *B*oundary *C*onditions).

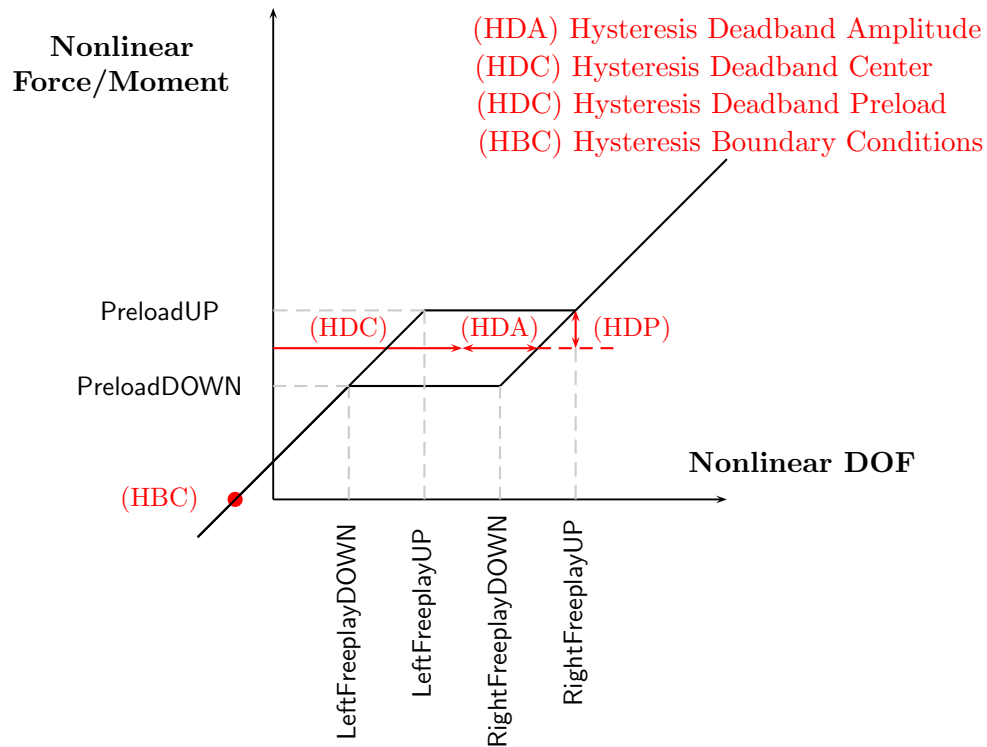


Figura 7.7: Nolinealidad del tipo *hysteresis* con los principales parámetros que la definen.

⁵En caso de nolinealidad en desplazamiento la precarga adimensional se formula como $\frac{F_0}{m_0 \cdot U_0^2}$, donde F_0 es la precarga con dimensiones de fuerza en el S.I. Si la nolinealidad es en rotación, la precarga adimensional se escribe como $\frac{M_0}{m_0 \cdot U_0^2 \cdot L}$, donde M_0 es la precarga con dimensiones de momento en el S.I.

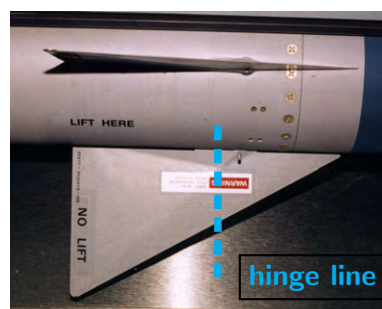
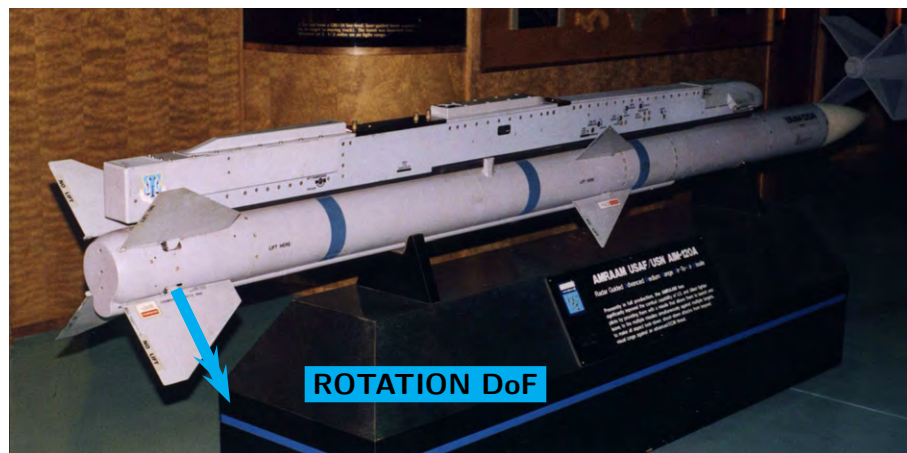
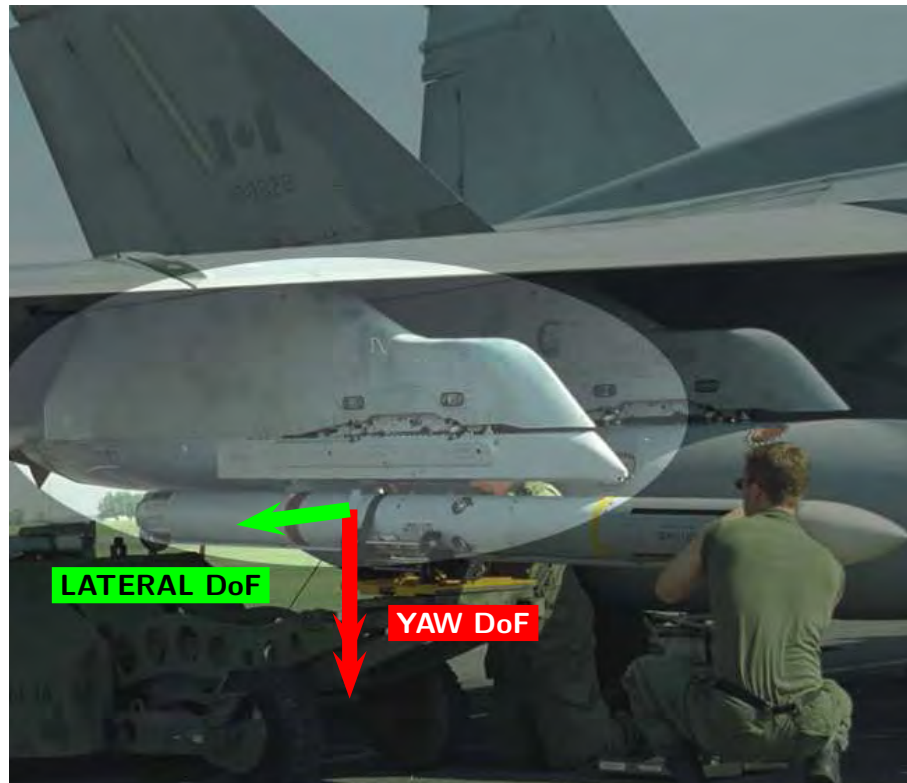


Figura 7.5: Grados de libertad de la configuración rígida **RIG**: **LATERAL** (desplazamiento en flexión lateral del conjunto pilón+misil), **YAW** (guiñada del conjunto pilón+misil) y **ROTATION** (rotación de las aletas respecto su eje de charnela o *hinge line*).

La siguiente tabla detalla las variaciones paramétricas que se ha realizado así como la nomenclatura utilizada para cada una de ellas:

	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	MODO NO LINEAL		
			MODO LATERAL (LAT)	MODO GUIÑADA (YAW)	ROTACIÓN ALETAS (ROT)
S01	Freeplay(F)/Histéresis(H)	Deadband Amplitude (DA)	RIG.S01.LAT.F(H)DA	RIG.S01.YAW.F(H)DA	RIG.S01.ROT.F(H)DA
	Freeplay(F)/Histéresis(H)	Deadband Center (DC)	RIG.S01.LAT.F(H)DC	RIG.S01.YAW.F(H)DC	RIG.S01.ROT.F(H)DC
	Freeplay(F)/Histéresis(H)	Deadband Preload (DP)	RIG.S01.LAT.F(H)DP	RIG.S01.YAW.F(H)DP	RIG.S01.ROT.F(H)DP
	Freeplay(F)/Histéresis(H)	Boundary Conditions (BC)	RIG.S01.LAT.F(H)BC	RIG.S01.YAW.F(H)BC	RIG.S01.ROT.F(H)BC
S02	Freeplay(F)/Histéresis(H)	Deadband Amplitude (DA)	N/A	N/A	RIG(FLE).S02.ROT.F(H)DA
	Freeplay(F)/Histéresis(H)	Deadband Center (DC)	N/A	N/A	RIG(FLE).S02.ROT.F(H)DC
	Freeplay(F)/Histéresis(H)	Deadband Preload (DP)	N/A	N/A	RIG(FLE).S02.ROT.F(H)DP
	Freeplay(F)/Histéresis(H)	Boundary Conditions (BC)	N/A	N/A	RIG(FLE).S02.ROT.F(H)BC

S01	=	Tipo de <u>S</u> oportado #01: Misil instalado en la aeronave colgado de un pilón flexible, de forma que los dos primeros modos propios del conjunto misil+pilón son el desplazamiento lateral a 5 [Hz] y la guiñada o <i>yaw</i> a 10 [Hz].
S02	=	Tipo de <u>S</u> oportado #02: Misil en vuelo libre.
RIG	=	Modelo de misil <u>RÍ</u> Gido.
FLE	=	Modelo de misil <u>FLE</u> xible.
LAT	=	Modo <u>LAT</u> eral.
YAW	=	Modo de guiñada o <u>YAW</u> .
ROT	=	Modo de <u>ROT</u> ación de aletas.
F	=	<u>F</u> reeplay.
H	=	<u>H</u> istéresis.
DA	=	Acrónimo del término inglés <i>Deadband Amplitude</i> .
DP	=	Acrónimo del término inglés <i>Deadband Preload</i> .
DC	=	Acrónimo del término inglés <i>Deadband Center</i> .
BC	=	Acrónimo del término inglés <i>Boundary Conditions</i> .
N/A	=	<u>N</u> o <u>A</u> plicable.

La combinación de las siglas que se detallan en la columna izquierda da lugar a etiquetas del tipo **RIG.S01.ROT.FDA** que corresponde a misil RÍGido, soportado S01, modo no lineal el de ROTación de aletas y parámetro a variar la amplitud del la holgura tipo *freeplay* (Freeplay Deadband Amplitud)

7.8. Presentación de resultados

Una vez elegida el tipo de no linealidad (*freeplay* **F** o *hysteresis* **H**) y el parámetro de la misma que se desea variar (*deadband amplitude* **DA**, *preload* **DP**, *center* **DC** o *boundary conditions* **BC**), los resultados se presentan analizando la variable no lineal (rotación de aletas **ROT**, ángulo de guiñada **YAW**, o desplazamiento lateral del misil **LAT**) mediante los gráficos 2D y la tabla siguientes:

1. Mapa 2D de colores representando el número de frecuencias características de la respuesta (variable no lineal) en función de la velocidad de vuelo U_∞ y el valor del parámetro de la no linealidad elegido (ver ejemplo en la figura 7.8). Un valor reducido de frecuencias características indica respuesta de tipo armónica LCO, mientras que un valor alto de número de frecuencias características es un primer síntoma de respuesta caótica.
2. Figura con tres gráficos representando (ver ejemplo en la figura 7.9):
 - Mapa 2D de colores del punto anterior, i.e., número de frecuencias características de la respuesta en función de la velocidad de vuelo U_∞ y el valor del parámetro.
 - Mapa 2D de colores representando el valor en Hz de la primera frecuencia característica de la respuesta (frecuencia en la que se obtiene el máximo del PSD de la respuesta) en función de la velocidad de vuelo U_∞ y el valor del parámetro.
 - Mapa 2D de colores representando el valor en Hz de la segunda frecuencia característica de la respuesta (frecuencia en la que se alcanza el segundo máximo del PSD de la respuesta) en función de la velocidad de vuelo U_∞ y el valor del parámetro.
3. Figura con tres gráficos representando (ver ejemplo en la figura 7.10):
 - Mapa 2D de colores representando el valor máximo de la respuesta en función de la velocidad de vuelo U_∞ y el valor del parámetro.
 - Mapa 2D de colores representando el valor medio de la respuesta en función de la velocidad de vuelo U_∞ y el valor del parámetro.
 - Mapa 2D de colores representando el valor mínimo de la respuesta en función de la velocidad de vuelo U_∞ y el valor del parámetro.
4. Figura con dos gráficos representando (ver ejemplo en la figura 7.11):
 - Mapa 2D de colores representando el valor medio cuadrático (*root mean square RMS*).
 - Mapa 2D de colores representando la desviación estándar (*Standard Deviation SD*).
5. Diagramas de bifurcación, uno por cada valor del parámetro que se considera, representando la evolución del valor máximo y mínimo de la señal en función de la velocidad de vuelo U_∞ (ver ejemplo en figura 7.12).
6. Tabla resumen con las principales conclusiones extraídas de los gráficos 2D anteriores (ver ejemplo en la tabla 7.3).

Las figuras descritas en los puntos 1 y 2 se disponen en una misma página en la que se adjunta un título descriptivo que detalla el parámetro de la no linealidad que varía. Las figuras de los puntos 3 y 4 se disponen también en una misma página. Por último, todas las páginas incluyen una tabla cabecera con información relevante distribuída en seis campos:

[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Amplitude (DA)	S01.ROT.HDA	1/4

Los campos son:

1. Campo [1]: **CONFIG**. Configuración de estudio que especifica el modelo estructural del misil, i.e., RIG (rígido) o FLE (flexible) y, separado por un punto, el tipo de soportado, i.e., S01 (misil soportado de un pilón) o S02 (misil en vuelo libre).
2. Campo [2]: **Nonlinear DOF**. Grado de libertad no lineal: rotación de aletas del misil (Rotation ROT), guiñada YAW o flexión lateral del conjunto (Lateral LAT).
3. Campo [3]: **NOLINEALIDAD**. Tipo de no linealidad: *Freeplay* o *Hysteresis*.
4. Campo [4]: **PARÁMETRO**. Parámetro de la no linealidad que varía: *Deadband Amplitude DA*, *Deadband Center DC*, *Deadband Preload DP* o *Boundary Conditions BC* (ver figuras 7.6 y 7.7).
5. Campo [5]: **CÓDIGO**. Código descriptivo.
6. Campo [6]: **PAGE**. Número de página sobre el total de páginas en las que se incluyen los resultados.

Por último, las variables que se representan en los *mapas 2D* y en los *mapas de bifurcación* se detallan en la tabla 7.2.

NOLINEALIDAD	VARIABLE EN LOS MAPAS 2D	VARIABLE EN LOS DIAGRAMAS DE BIFURCACIÓN	RELACIÓN
ROT	$\frac{\partial w_{wb}}{\partial x}(x_h; t)$	$\frac{\partial w_{wb}}{\partial x}(x_h; t)$	=
YAW	$\hat{\xi}_2$	$\frac{\partial w_b}{\partial x}(x^{NLR}; t)$	$\hat{\xi}_2 = -\frac{\partial w_b}{\partial x}(x^{NLR}; t)$
LAT	$\hat{\xi}_1$	$\hat{w}_b(x^{NLD}; t) = \frac{w_b(x^{NLD}; t)}{L}$	$\hat{\xi}_1 = \hat{w}_b(x^{NLD}; t)$

$\hat{\xi}_1$: Coordenada generalizada asociada al modo lateral **ROT** / $\hat{\xi}_2$: Coordenada generalizada asociada al modo de guiñada **YAW** / $\hat{w}_b(x^{NLD}; t)$: Desplazamiento lateral del cuerpo en la abscisa x^{NLD} dónde se sitúa el soporte no lineal en desplazamiento / $\partial w_b(x^{NLR}; t)/\partial x$: Rotación del cuerpo en la localización x^{NLR} del soporte no lineal en guiñada / $\partial w_{wb}(x_h; t)/\partial x$: Rotación de las aletas relativa al cuerpo, medida en la abscisa del eje de rotación x_h / L : Longitud de referencia.

Tabla 7.2: Variables que se representan en los *mapas 2D* y los *diagramas de bifurcación*.

VARIACIÓN DE LA AMPLITUD DE LA HOLGURA

CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Amplitude (DA)	S01.ROT.HDA	1/4

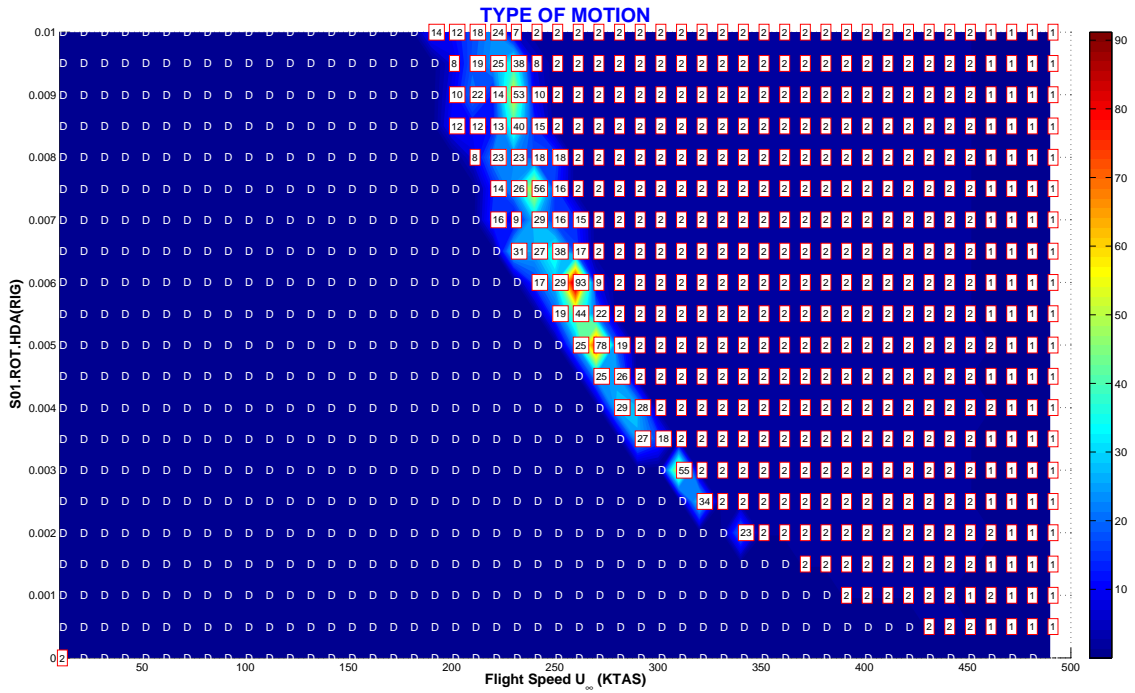


Figura 7.8: Mapa 2D de colores representando el número de frecuencias reducidas en función de la velocidad de vuelo U_∞ (eje x) y el parámetro de la no linealidad que se varía (eje y).

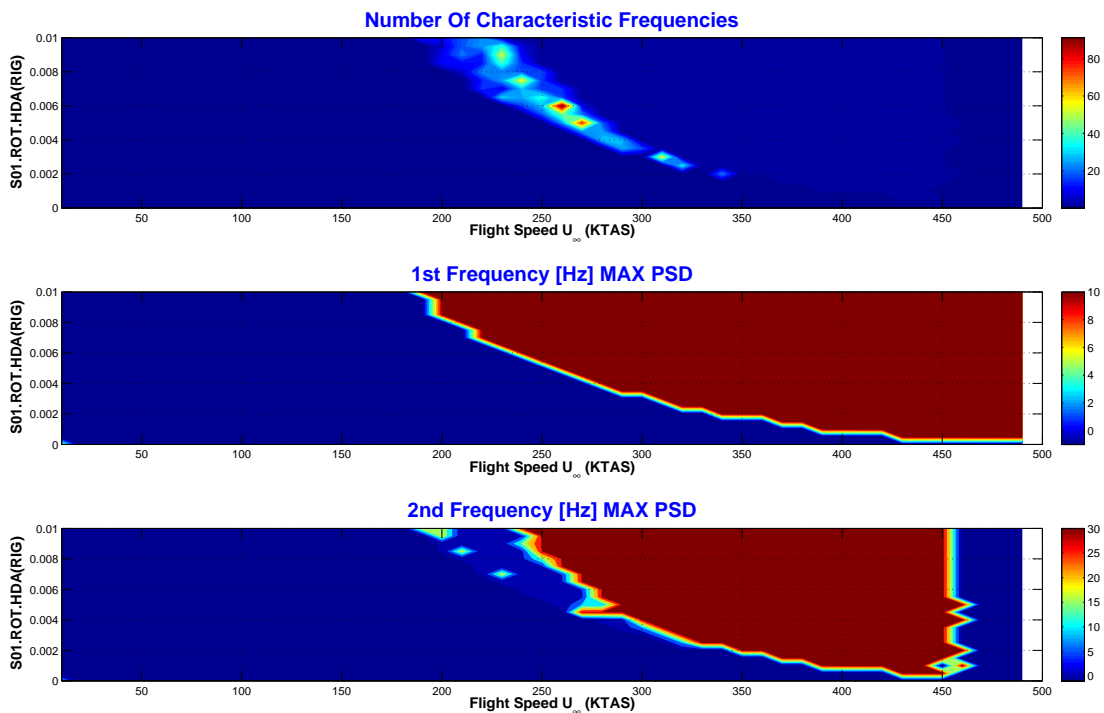


Figura 7.9: Mapas 2D de colores representando, en función de la velocidad de vuelo U_∞ (eje x) y el parámetro de la no linealidad (eje y), los resultados siguientes: (gráfico superior) número de frecuencias reducidas, (gráfico intermedio) valor en Hz de la primera frecuencia característica y (gráfico inferior) valor en Hz de la segunda frecuencia característica.

CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Amplitude (DA)	S01.ROT.HDA	2/4

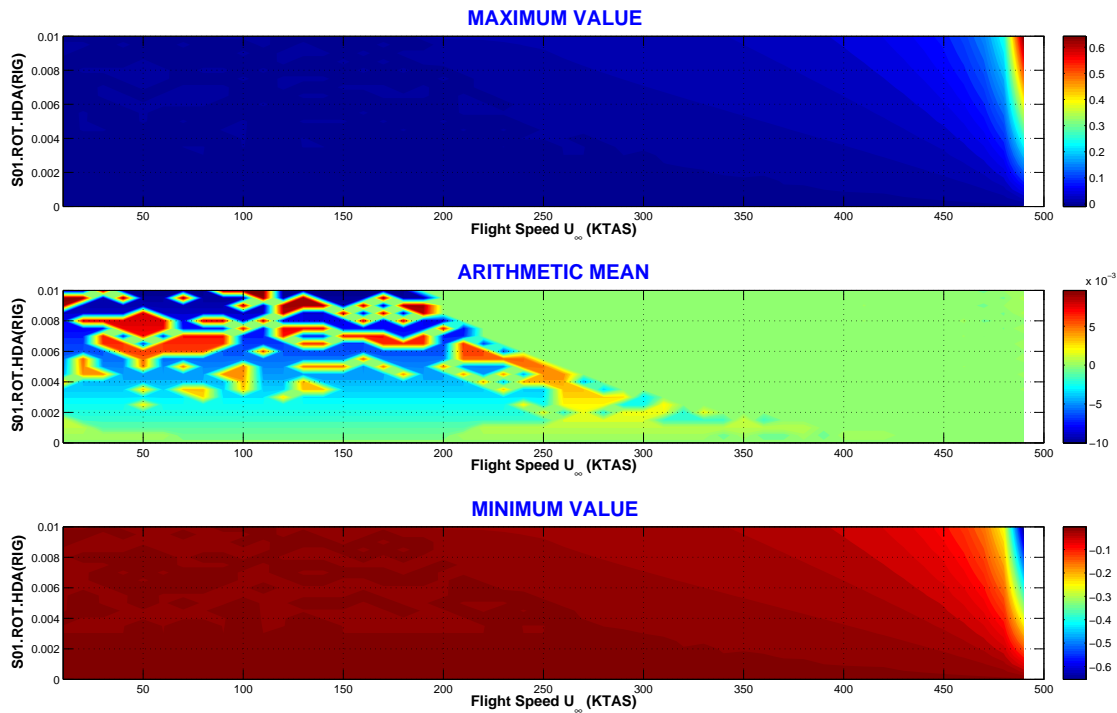


Figura 7.10: Mapa 2D de colores representando, en función de la velocidad de vuelo U_∞ (eje x) y el parámetro de la no linealidad (eje y): (gráfico superior) valor máximo de la respuesta, (gráfico intermedio) valor medio de la respuesta y (gráfico inferior) valor mínimo de la respuesta.

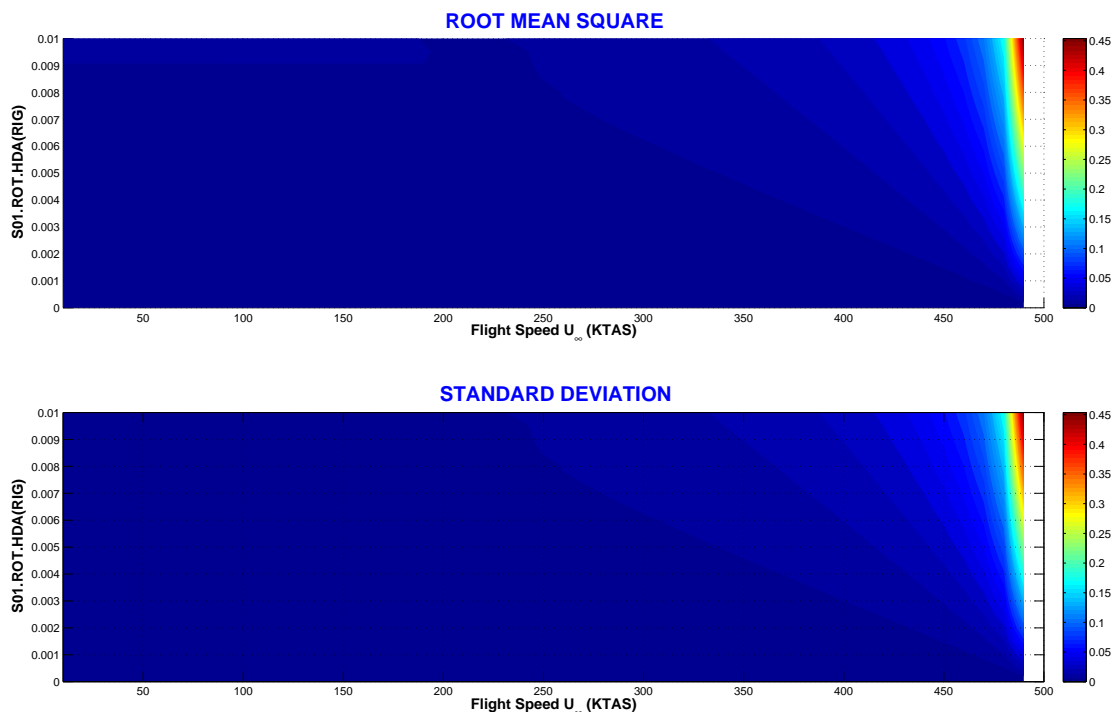


Figura 7.11: Mapas 2D de colores representando, en función de la velocidad de vuelo U_∞ (eje x) y el parámetro de la no linealidad (eje y): (gráfico superior) valor medio cuadrático (*root mean square*) de la respuesta y (gráfico inferior) desviación estándar (*standard deviation*).

CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Amplitude (DA)	S01.ROT.HDA	3/4

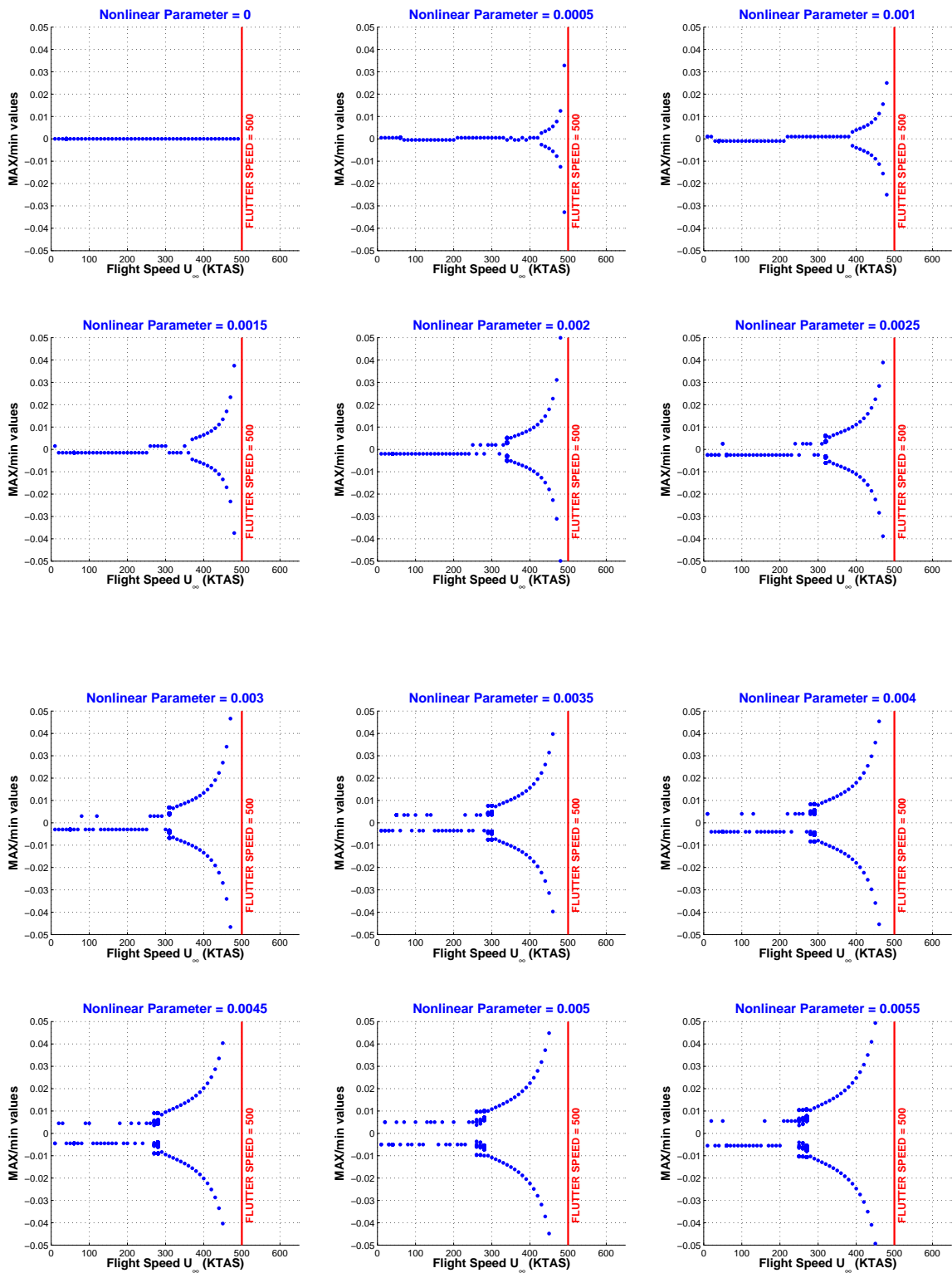


Figura 7.12: Diagramas de bifurcación representando el valor máximo y mínimo de la respuesta en función de la velocidad de vuelo U_∞ (eje x). Cada uno de los gráficos corresponde a un valor del parámetro de la no linealidad.

CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Amplitude (DA)	S01.ROT.HDA	4/4

Tipo de Respuesta	DMP	
	LCO	
	CHA	
	FLT	
Transición entre Tipos de Respuesta		
Velocidad de Flutter	Lineal	
	No Lineal	
Variación de la Amplitud	con U_∞	
	con ROT.HDA	
Bifurcaciones		
Flutter <i>onset</i>		

Tabla 7.3: Tabla resumen con las principales conclusiones de los mapas de colores 2D (figuras 7.8 a 7.12).

7.9. Consideraciones finales

En este capítulo se ha detallado la configuración estelta cuerpo/ala que es objeto de estudio en los siguientes capítulos de la tesis. Se trata de una configuración tipo misil con un cuerpo central de relación de esteltez $\tau = 0,1$ y superficies de control triangulares situadas en la parte trasera. Este misil puede tener las siguientes dos condiciones de contorno:

1. Misil colgado del pílón de un avión plataforma (soportado **S01**): en este caso se estudia los movimientos laterales que son más proclives a introducir LCOs asociados a la presencia del propio misil. El misil se considera rígido (cuerpo y aletas) y el análisis aeroelástico se realiza con tres grados de libertad de sólido rígido: flexión lateral del pílón, guiñada y rotación simétrica de superficies de control. El soportado al avión se modeliza mediante un soporte a desplazamiento y otro en rotación cercanos al centro de gravedad de la configuración.
2. Misil en vuelo libre (soportado **S02**): en este caso se puede considerar el problema *longitudinal* o *lateral*, siempre y cuando impliquen movimiento simétrico de las aletas. Se consideran en este caso dos modelos estructurales:
 - a) Misil rígido (**RIG**): modo de desplazamiento lateral + ángulo de guiñada + rotación simétrica de superficies de control (problema *lateral*) o modo de desplazamiento vertical *heaving* + modo de ángulo de ataque + rotación simétrica de superficies de control (problema *longitudinal*).
 - b) Misil flexible (**FLE**): grados de libertad del misil rígido descritos en el punto anterior añadiendo la primera flexión lateral al problema *lateral* o la primera flexión vertical al problema *longitudinal*. El modo de flexión ha sido obtenido mediante un modelo de elementos finitos en MSC.NASTRAN que se detalla en el capítulo siguiente (sección 8.2).

El modelo inercial se basa en una masa por unidad de longitud distribuida de forma que su integración proporciona masa y momentos de inercia similares a las de un misil convencional, en este caso el misil AMRAAM. Las no linealidades estructurales son del tipo *freeplay* o *hysteresis* y se consideran concentradas en la unión del misil al pílón (caso de soportado **S01**) o en la rotación de las superficies de control (soportado **S01** y **S02**).

Por último, se han descrito todas las variaciones paramétricas que se incluirán posteriormente en los capítulos 9 y 10, que básicamente son:

1. Efecto de la velocidad de vuelo U_∞ .
2. Amplitud de la holgura de la no linealidad (**FDA** en la no linealidad *freeplay* y **HDA** en *hysteresis*)
3. Descentramiento de la holgura (**FDC** en la no linealidad *freeplay* y **HDC** en *hysteresis*)
4. Precarga (**FDP** en la no linealidad *freeplay* y **HDP** en *hysteresis*)
5. Condiciones iniciales (**FBC** en la no linealidad *freeplay* y **HBC** en *hysteresis*)

Sin embargo, antes de obtener resultados no lineales es conveniente caracterizar la aeroelasticidad lineal del vehículo. Esto es precisamente lo que se aborda en el siguiente capítulo.

Capítulo 8

FLUTTER LINEAL

8.1. Introducción

El análisis de la aeroelasticidad asumiendo linealidad es el punto de partida de cualquier análisis aeroelástico no lineal. En no linealidades concentradas del tipo *freeplay* o *histéresis*, la rigidez local asociada a esa no linealidad pasa de cero a rigidez nominal (y viceversa) dependiendo de la deformación local de la estructura. La rigidez local es nula cuando la deformación local entra dentro de la denominada *zona muerta* o *deadband* de la no linealidad *freeplay* o *histéresis*. En esta zona, y si la velocidad de vuelo es mayor que la velocidad de *flutter* del sistema lineal con rigidez local nula, la deformación tiende a diverger hasta que supera los límites o esquinas de la no linealidad, momento en el que la rigidez local cambia a la nominal del sistema.

Para la determinación de la velocidad de flutter no lineal es de gran ayuda estudiar previamente el sistema lineal en dos estados límites: sistema lineal con *rigidez local nula* y sistema con *rigidez local nominal*.

El objetivo fundamental de este capítulo es determinar las velocidades de flutter lineales y comparar los resultados del código **FHSWB** con otros códigos comerciales que se utilizan en la actualidad para el análisis aeroelástico de sistemas lineales como MSC.NASTRAN. El modelo MSC.NASTRAN de la configuración de la tesis se detalla en la sección 8.2.

Se analizan los diagramas V-g y V-f obtenidos con el código MSC.NASTRAN para los dos tipos de soportado: en la sección 8.3 se estudia el soportado **S01** (modos de sólido rígido, es decir, modelo estructural **RIG**) y, en la sección 8.4, se describen los resultados para el soportado **S02** (modos de sólidos rígido, modelo **RIG**, y modos de sólido rígido con primera flexión de cuerpo del misil, i.e, el modelo denominado **FLE**), y se compara el corte por $g=0$ (punto de flutter) con la velocidades de flutter obtenidas con el código **FHSWB** (ver resumen de resultados en la sección 8.5). Las diferencias en velocidad de *flutter* entre MSC.NASTRAN y **FHSWB** se analizan investigando las causas: diferentes modelos aerodinámicos, diferente solución de las ecuaciones de flutter en el dominio de la frecuencia, etc.

8.2. Comparación de resultados: FHSWB vs MSC.NASTRAN

8.2.1. Modelo inercial/estructural MSC.NASTRAN

La figura 8.1 representa el modelo de elementos finitos implementado en el código comercial MSC.NASTRAN. El cuerpo se modeliza con un modelo *viga*, mientras que las aletas se consideran rígidas. La imagen inferior de esta figura 8.1 representa el primer modo de deformación flexible a 25 [Hz] aproximadamente. Debido a las limitaciones del programa de visualización modal, es conveniente representar los modos de deformación en el modelo aerodinámico y esto es lo que se incluye en las figuras 8.2 a 8.5 donde se representan los cuatro primeros modos de deformación para la configuración **S02**, i.e., misil en vuelo libre, la única condición de soportado para la que se considera la flexibilidad del misil.

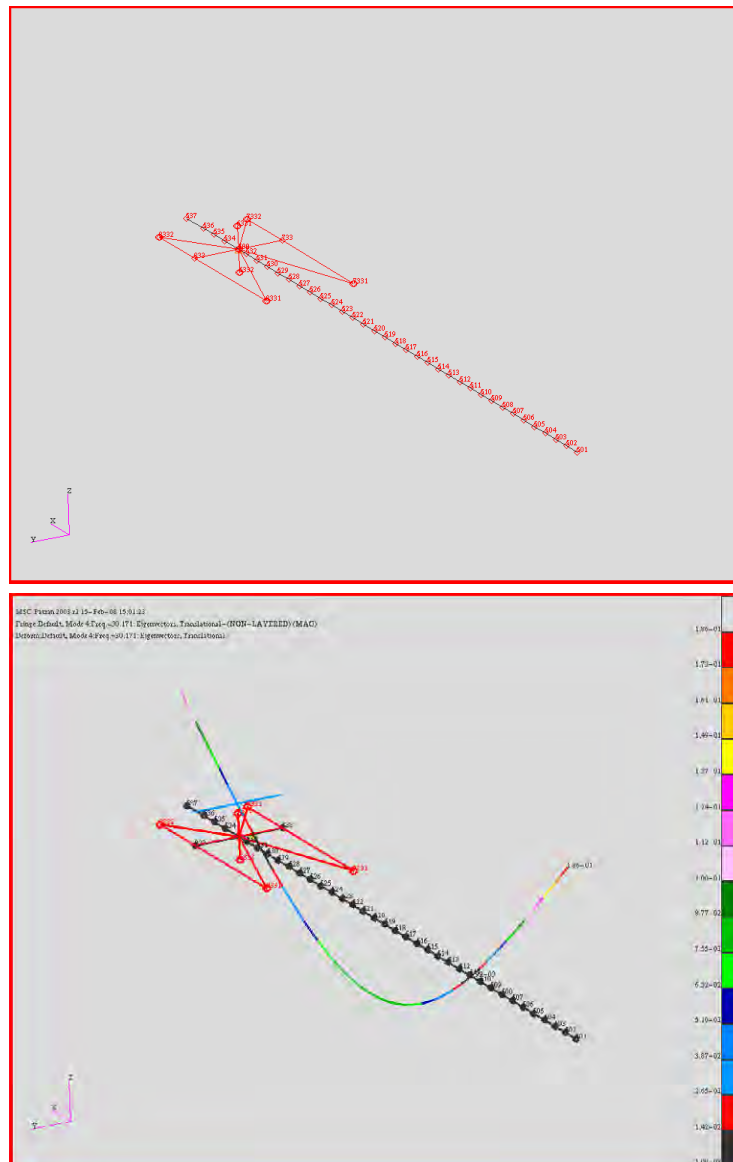


Figura 8.1: (Arriba): Modelo de elementos finitos en MSC.NASTRAN. (Abajo): Primera flexión del vehículo extraída directamente del modelo de elementos finitos MSC.NASTRAN

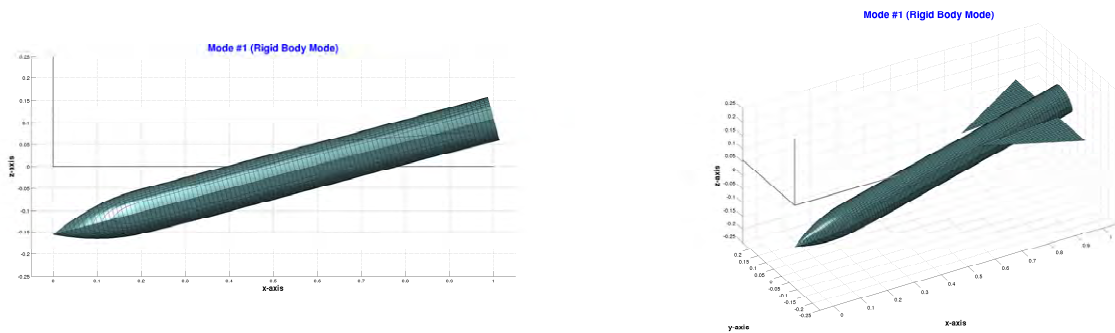


Figura 8.2: 1^{er} modo de deformación de sólido rígido: ángulo de guiñada (YAW) / cabeceo (PITCH).

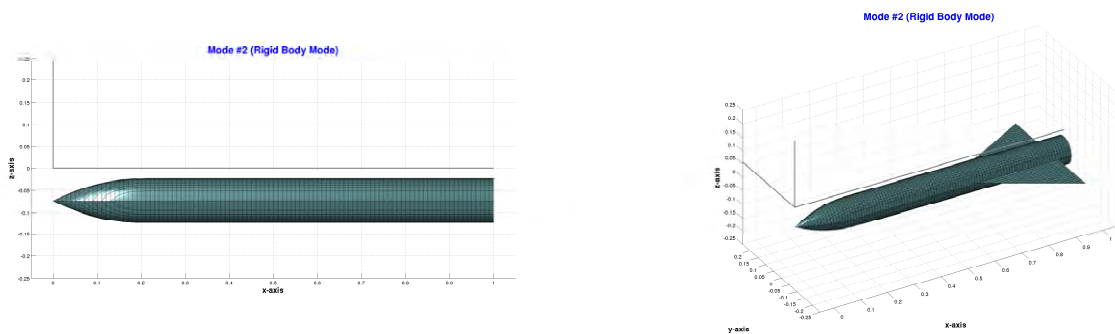


Figura 8.3: 2^o modo de deformación de sólido rígido: desplazamiento lateral / vertical.

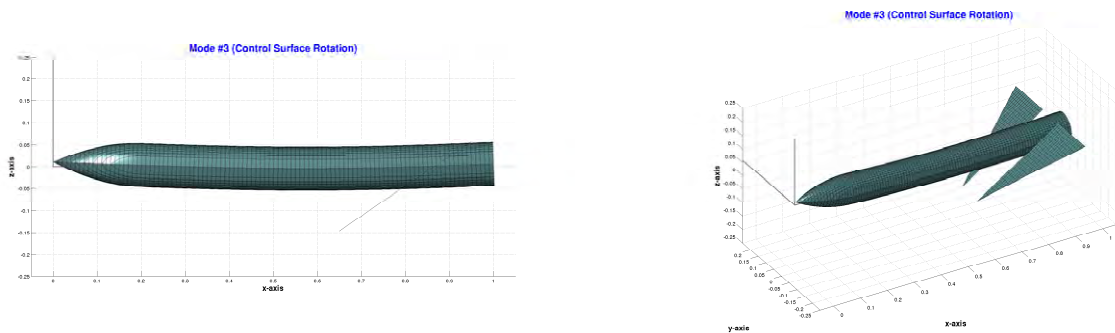


Figura 8.4: 3^{er} modo de deformación: rotación simétrica de aletas.

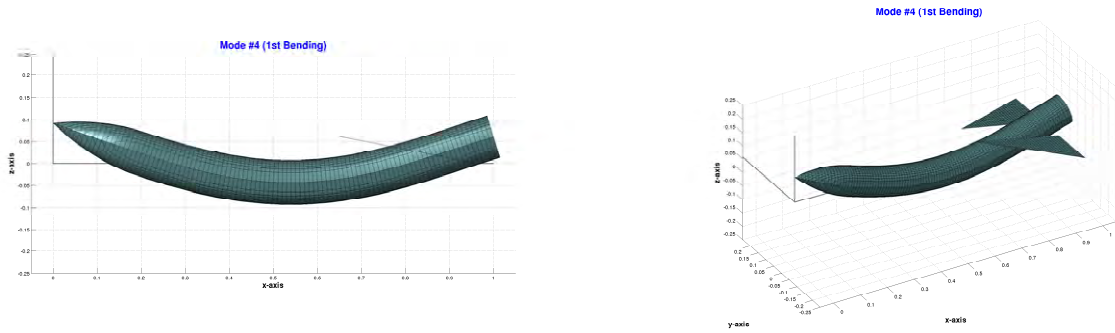


Figura 8.5: 4^o modo de deformación: primera flexión lateral/vertical del cuerpo.

8.2.2. Modelo aerodinámico MSC.NASTRAN

El modelo aerodinámico MSC.NASTRAN considerado para la comparación de este código comercial con el **FHSWB** se muestra en las figura 8.6. El cuerpo del misil se ha modelizado con un cuerpo esbelto mientras que las aletas se modelizan como superficies sustentadoras. La interferencia de las superficies sustentadoras y el cuerpo se realiza a través de un cilindro (representado en 8.6 con contorno azulado) sobre el que se cumple la condición de contorno de impermeabilidad. El lector puede consultar la referencia [Aré98b] para obtener más detalles del funcionamiento de este código y otros similares.

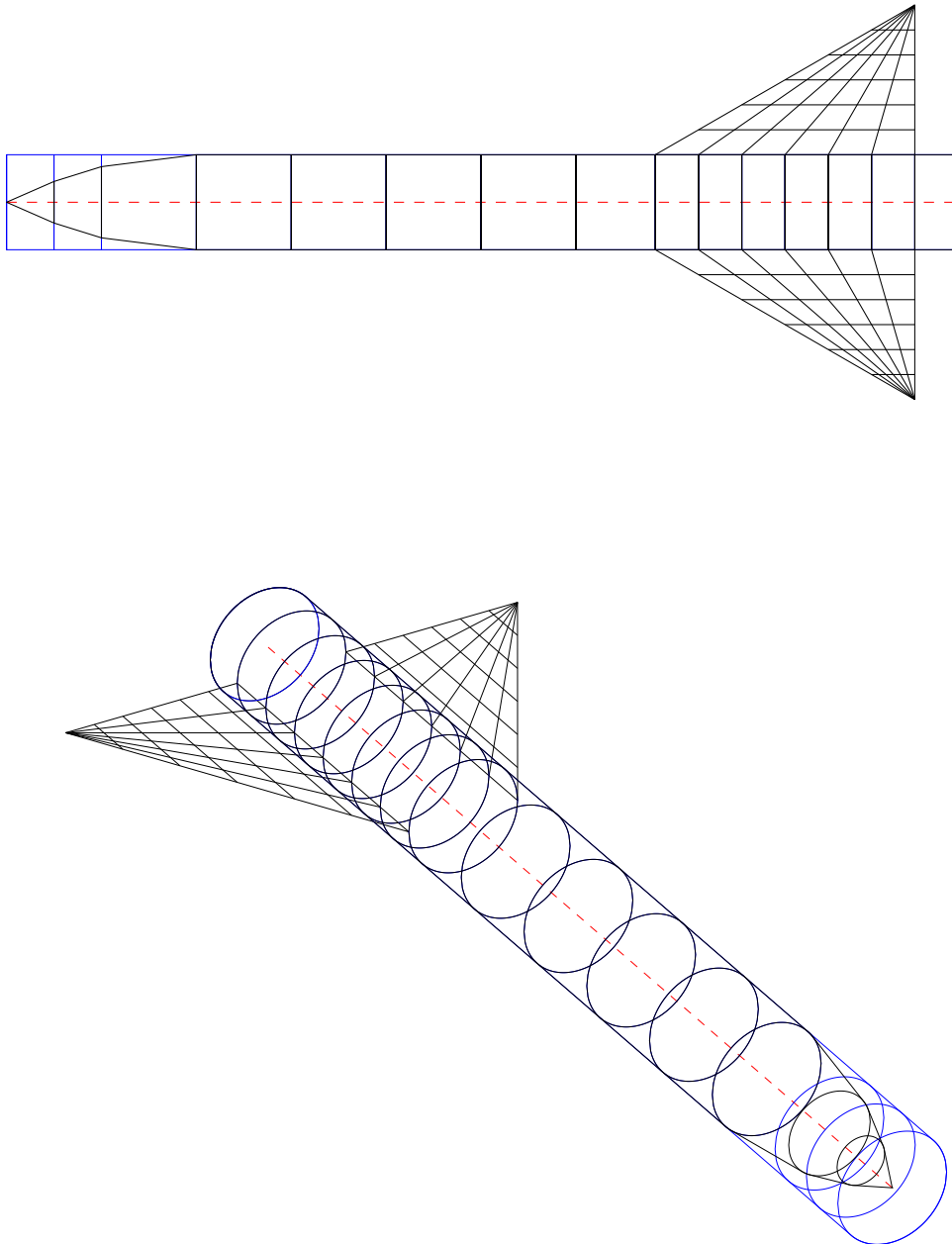


Figura 8.6: Modelo aerodinámico Doublet-Lattice de MSC.NASTRAN incluyendo cuerpo

Por otro lado, se consideran dos tipos de interpolación estructura/aerodinámica:

1. Interpolación estructura/aerodinámica en el cuerpo **ON**: el cuerpo está presente y, para cada modo i , tiene movimiento con la forma modal $\psi_{i,b}(x)$. Por tanto, el cuerpo contribuye a las fuerzas generalizadas.
2. Interpolación estructura/aerodinámica en el cuerpo **OFF**: el cuerpo está presente pero no tiene movimiento con las formas modales $\psi_{i,b}(x)$, por lo que se tiene en cuenta la interferencia cuerpo/ala en el cálculo de las fuerzas generalizadas pero el cuerpo no contribuye a las fuerzas aerodinámicas.

El motivo de utilizar estos dos tipos de interpolación es comparar el efecto del cuerpo en los dos códigos MSC.NASTRAN y **FHSWB**. El cálculo de la aerodinámica del cuerpo en uno y otro es radicalmente distinto; mientras que MSC.NASTRAN se basa en la teoría del Doublet-Lattice y el cilindro de interferencia para imponer la condición de contorno, el código **FHSWB** calcula la aerodinámica con la Teoría del Cuerpo Esbelto imponiendo la condición de contorno de impermeabilidad sobre la superficie física del cuerpo. La aproximación del cilindro de interferencia del método Doublet-Lattice ha sido validada en configuraciones típicas de aviones (ver [Aré98b]), con alas de considerable envergadura y cuerpos esbeltos de radio pequeño frente a las dimensiones del ala o, lo que es lo mismo, con débil interferencia cuerpo-ala. En configuraciones con alas de envergadura comparable al radio del cuerpo, la interferencia cuerpo-ala es mayor y el método de interferencia aproximado debe ser revisado.

8.3. Comparación MSC.NASTRAN vs FHSWB: Configuración S01

La figura 8.7 corresponde al diagrama Vg resultado del método de flutter pK del código comercial MSC.NASTRAN para la configuración **S01** (misil instalado en pilón) e incluyendo la interpolación estructura/aerodinámica del cuerpo (interpolación en el cuerpo ON). La condición de análisis es $M_\infty = 0,0$ (incompresible) y altitud $0[ft]$, es decir, nivel del mar. La velocidad de flutter es $V_{LF(MSC.NASTRAN)} = 486$ KTAS (ver figura superior dentro de la figura 8.7 que representa amortiguamiento modal en función de la velocidad de vuelo en KTAS) y ocurre debido a la coalescencia del modo de guiñada del misil con el de rotación de aletas (ver figura inferior dentro de la figura 8.7 que representa frecuencias de los modos en función de la velocidad de vuelo en KTAS). La misma configuración en idénticas condiciones de vuelo ha sido analizada con el código **FHSWB** obteniéndose una velocidad de flutter $V_{LF(FHSWB)} = 496$ KTAS.

La figura 8.8 muestra el resultado del método pK de MSC.NASTRAN para la configuración **S01** pero sin incluir interpolación en el cuerpo. Las condiciones de análisis son $M_\infty = 0,0$ (incompresible) y vuelo a nivel del mar. La velocidad de flutter obtenida es $V_{LF(MSC.NASTRAN)} = 484$ KTAS. El código **FHSWB** ha proporcionado una velocidad de flutter $V_{LF(FHSWB)} = 470$ KTAS.

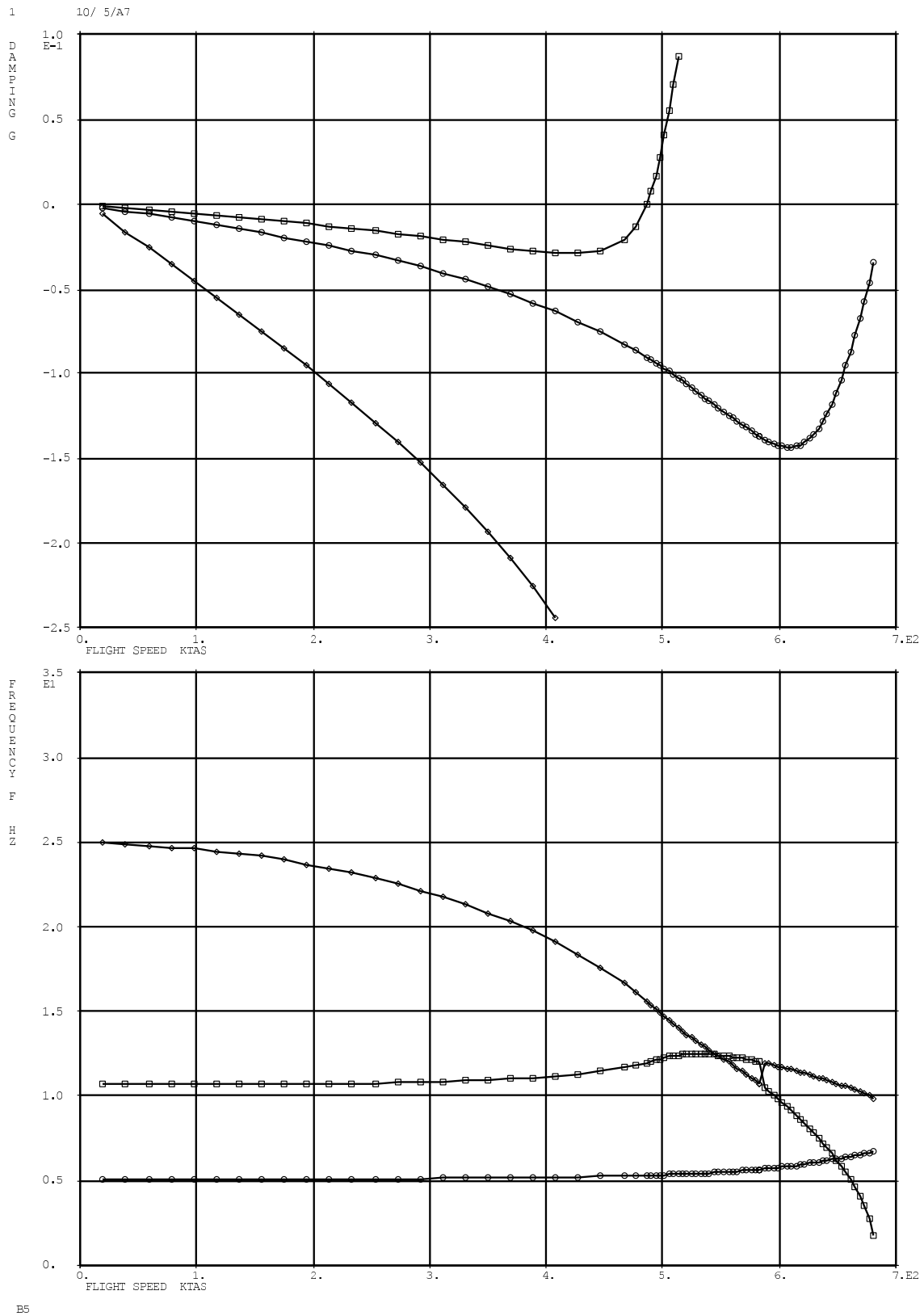


Figura 8.7: Diagrama V_g resultado de MSC.NASTRAN para configuración **S01**, modelo **RIG**. Cuerpo CON aerodinámica.

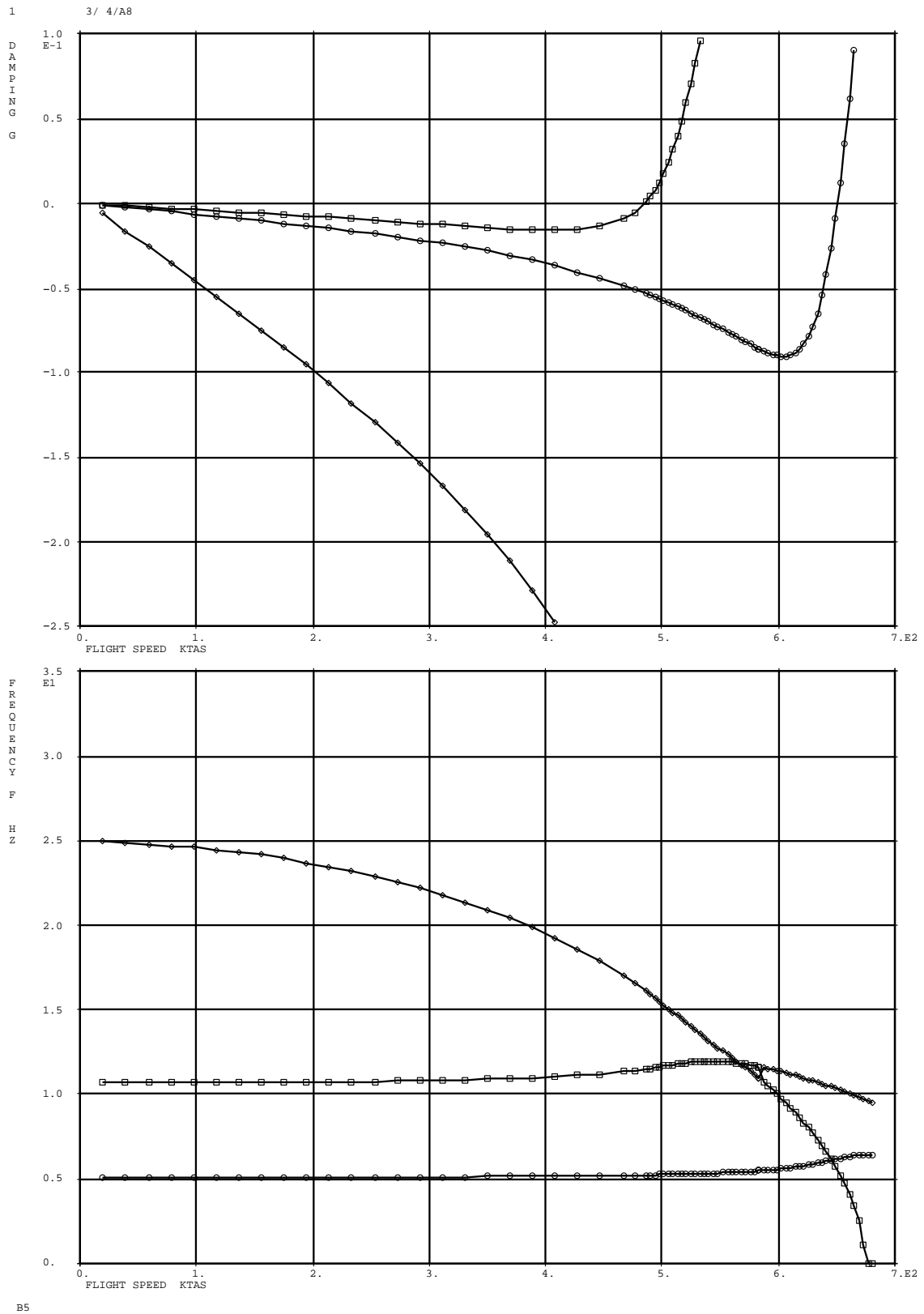


Figura 8.8: Diagrama Vg resultado de MSC.NASTRAN para configuración S01, modelo RIG. Cuerpo sin movimiento.

8.4. Comparación MSC.NASTRAN vs FHSWB: Configuración S02

8.4.1. Configuración S02: modelos RIG y FLE

La configuración **S02** corresponde a *misil en vuelo libre* y su movimiento vendrá caracterizado por los modos de sólido rígido asociados al vuelo libre junto con los modos flexibles de baja frecuencia que afectan al comportamiento aeroelástico del vehículo. Se consideran dos modelos:

- Modelo **RIG**: modelo con 3 modos de sólido rígido. El movimiento se considera *longitudinal* o *lateral*. En el primer caso, el problema *longitudinal*, los modos de sólido rígido son *heaving* (o *plunging*), cabeceo (o *pitching*) y la rotación de aletas horizontales. En el segundo caso, el problema *lateral*, los modos de sólido rígido son el movimiento lateral, la guiñada y la rotación de las aletas verticales.
- Modelo **FLE**: modelo con 3 modos de sólido rígido (los descritos anteriormente en el modelo **RIG**) y el primer modo de flexión del vehículo.

En la configuración **S01** no se consideró el primer modo flexible ya que el tipo de soportado (unido a pílón) provoca que la frecuencia de este modo sea elevada (típicamente mayor de 50 [Hz]) y no afecta al comportamiento aeroelástico del misil a baja frecuencia (por debajo de 30/40 [Hz] aprox.).

A continuación se analiza la configuración **S02** en sus dos modelos **RIG** y **FLE**, comparando los resultados del código comercial MSC.NASTRAN con el código **FHSWB**.

8.4.2. Modos de sólido rígido: modelo RIG

La figura 8.9 muestra el diagrama Vg resultado del código MSC.NASTRAN para la configuración **S02** (vuelo libre), con el modelo **RIG**, e incluyendo la interpolación estructura/aerodinámica del cuerpo (ver figura 8.6). De nuevo, las condiciones de cálculo son $M_\infty = 0,0$ y altitud a nivel del mar. La velocidad de flutter es $V_{LF(MSC.NASTRAN)} = 562$ KTAS.

La misma configuración (incluyendo también aerodinámica en cuerpo) y en idénticas condiciones de vuelo ha sido analizada con el código **FHSWB** obteniéndose una velocidad de flutter $V_{LF(FHSWB)} = 616$ KTAS.

Por otro lado, la figura 8.10 muestra el diagrama Vg resultado del código MSC.NASTRAN para la configuración **S02**, modelo **RIG**, pero sin incluir movimiento en el cuerpo. Las condiciones de análisis son las anteriores, y se obtiene una velocidad de flutter de $V_{LF(MSC.NASTRAN)} = 572$ KTAS. El código **FHSWB** predice en este caso una velocidad de flutter $V_{LF(FHSWB)} = 596$ KTAS.

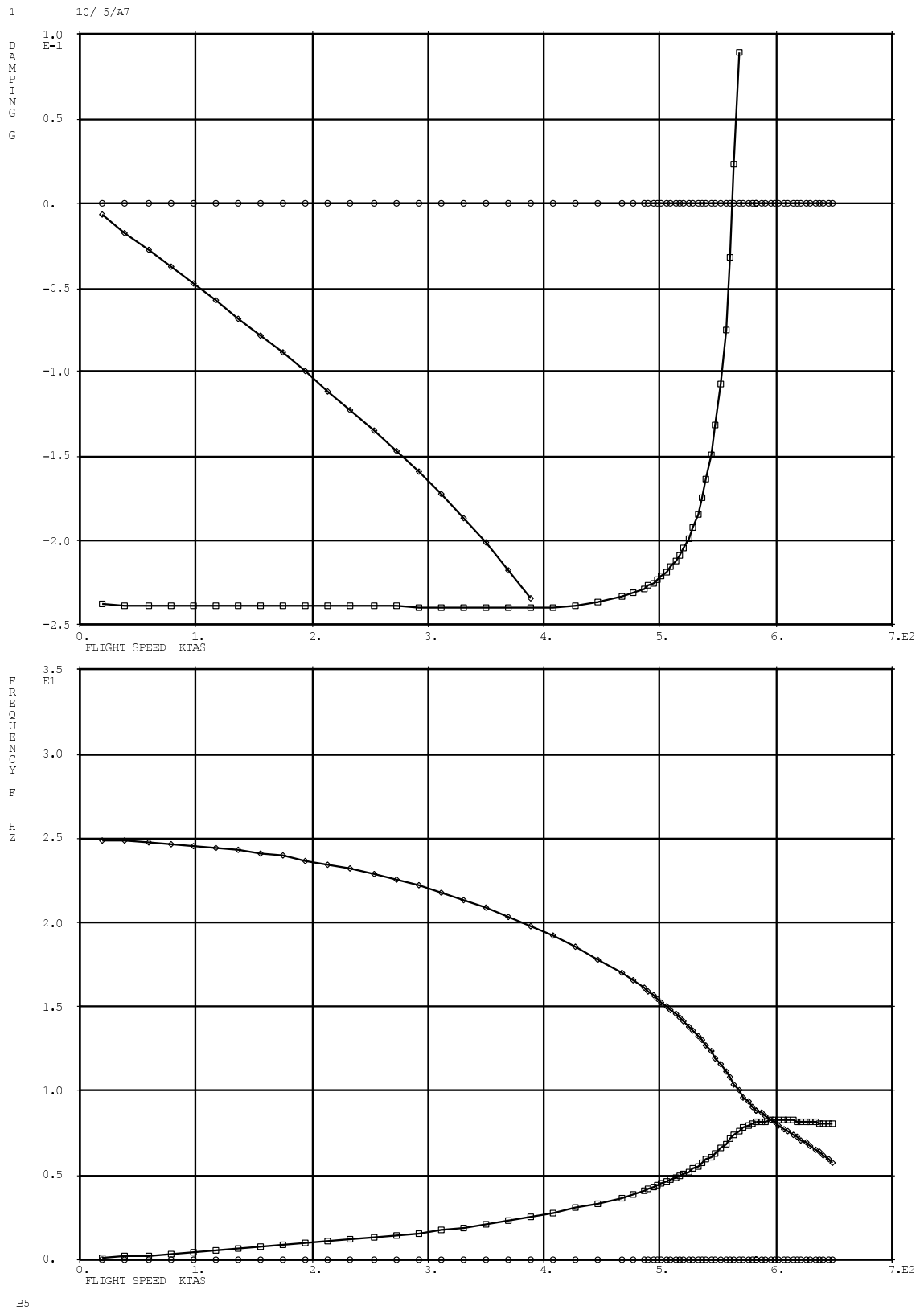


Figura 8.9: Diagrama Vg resultado de MSC.NASTRAN para configuración S02, modelo RIG. Cuerpo CON movimiento.

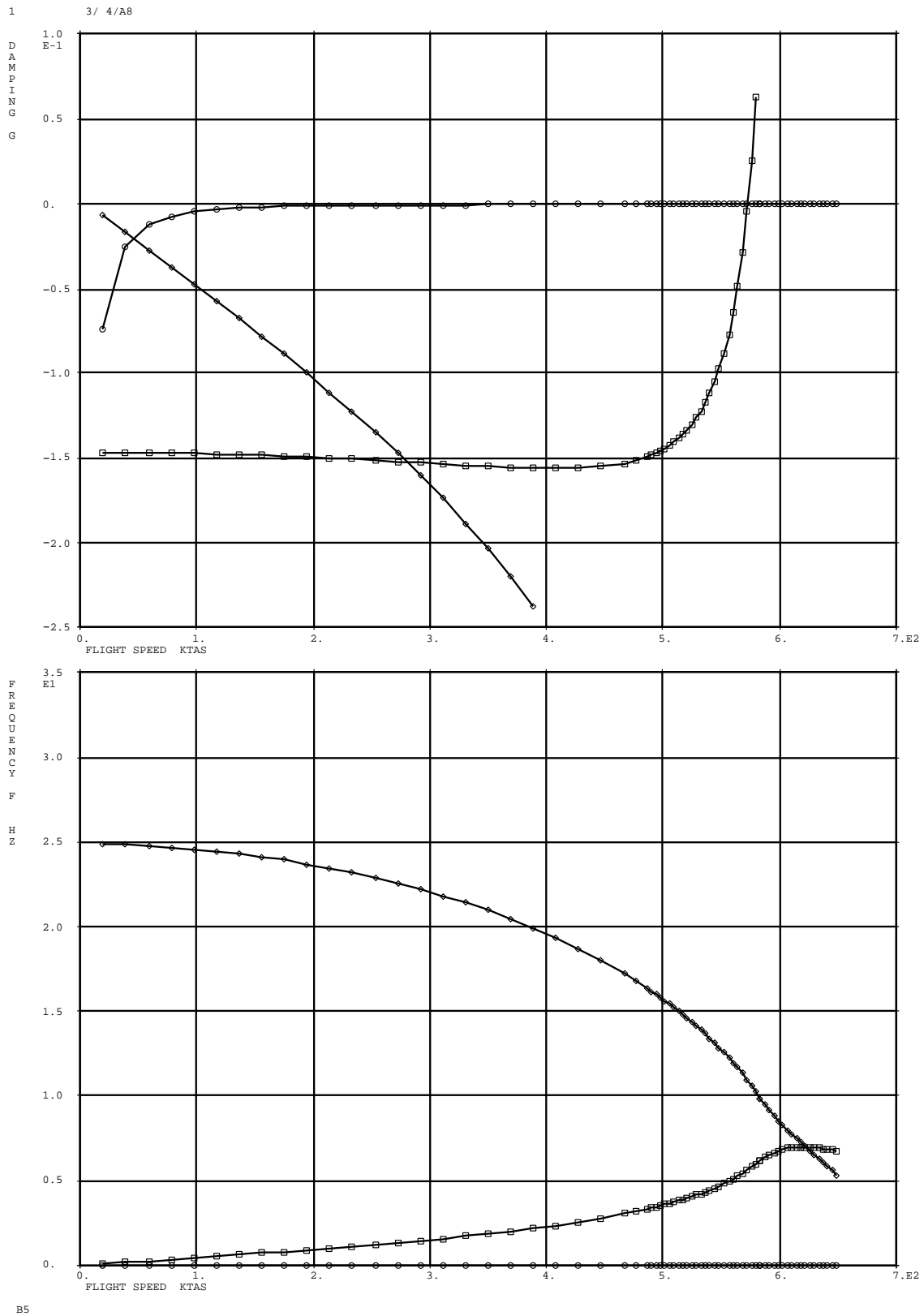


Figura 8.10: Diagrama Vg resultado de MSC.NASTRAN para configuración **S02**, modelo **RIG**. Cuerpo SIN movimiento.

8.4.3. Modos de sólido rígido + 1ª flexión del cuerpo: modelo FLE

La figura 8.11 muestra el diagrama Vg resultado del código MSC.NASTRAN para la configuración S02 (vuelo libre), con el modelo **FLE**, e incluyendo la interpolación estructura/aerodinámica del cuerpo. Las condiciones de cálculo son $M_\infty = 0,0$ y altitud a nivel del mar. La velocidad de flutter es $V_{LF(MSC.NASTRAN)} = 442$ KTAS.

La misma configuración (incluyendo también aerodinámica en cuerpo) y en idénticas condiciones de vuelo ha sido analizada con el código **FHSWB** obteniéndose una velocidad de flutter $V_{LF(FHSWB)} = 241$ KTAS.

Por otro lado, la figura 8.12 muestra el diagrama Vg resultado del código MSC.NASTRAN para la configuración **S02**, modelo **RIG**, pero sin incluir movimiento en el cuerpo. Las condiciones de análisis son las anteriores, y se obtiene una velocidad de flutter de $V_{LF(MSC.NASTRAN)} = 196$ KTAS. El código **FHSWB** predice en este caso una velocidad de flutter $V_{LF(FHSWB)} = 262$ KTAS.

Puede observarse en este caso diferencias importantes entre MSC.NASTRAN y el código **FHSWB**. Esto es debido a que el flutter es del tipo *mild flutter*, es decir, con un amortiguamiento muy bajo, de forma que cualquier diferencia en el modelo aerodinámico da lugar a importantes variaciones de la velocidad de corte con $g = 0$. De hecho, la velocidad de flutter de MSC.NASTRAN varía de 442 KTAS a 196 KTAS por el simple hecho de desactivar la interpolación estructura/aerodinámica en el cuerpo. Sin embargo, este mecanismo de flutter es poco importante ya que el amortiguamiento no cae por debajo del 3% y la mayoría de los modos estructurales tienen amortiguamiento por encima del 3%, por lo que finalmente no existiría *flutter*. De hecho, las aeronaves cumplen los requisitos de certificación a pesar de tener este tipo de *mild flutter*.

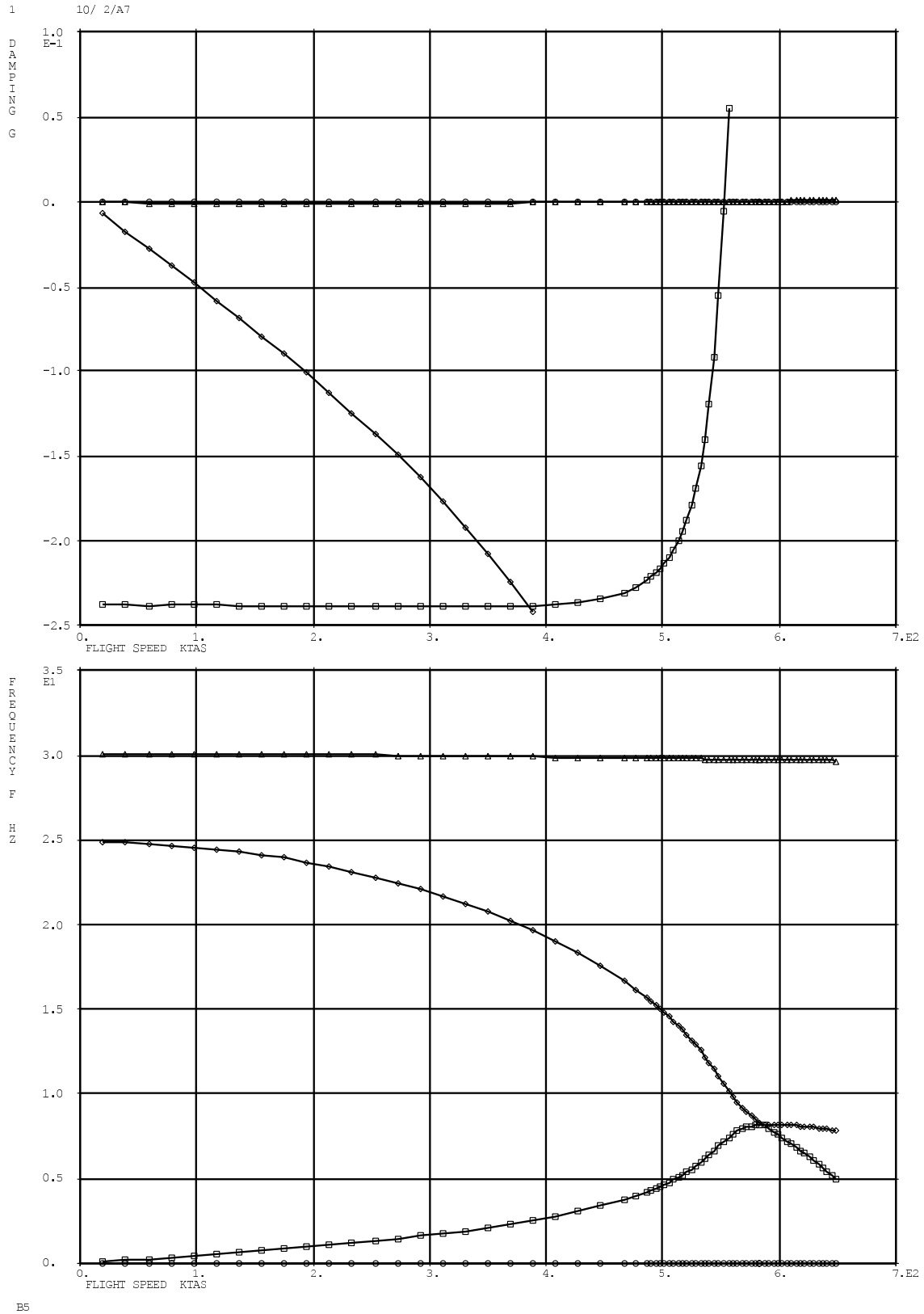


Figura 8.11: Diagrama V_g resultado de MSC.NASTRAN para configuración **S02**, modelo **FLE**. Interpolación estructura/aerodinámica del cuerpo ON.

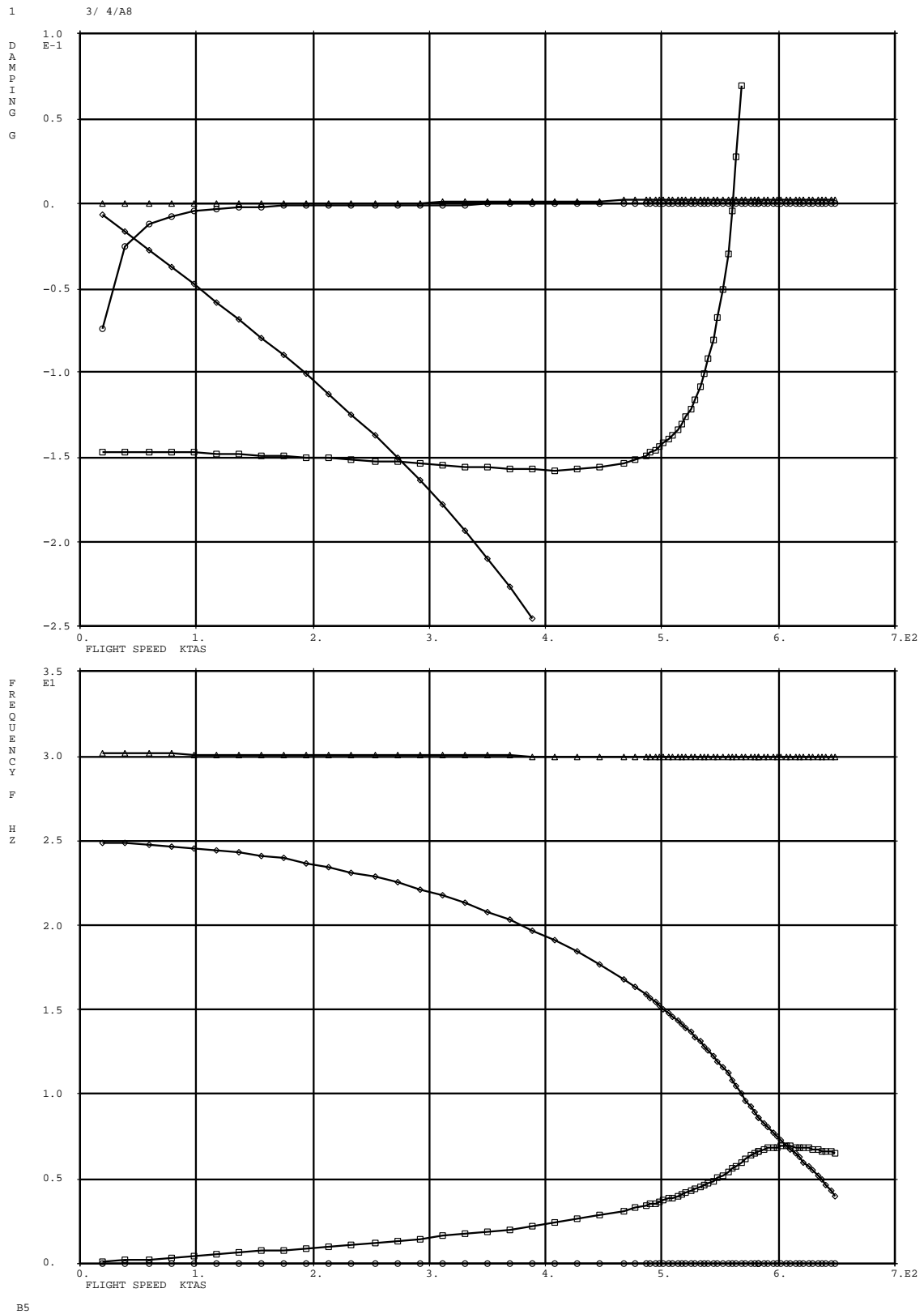


Figura 8.12: Diagrama Vg resultado de MSC.NASTRAN para configuración **S02**, modelo **FLE**. Interpolación estructura/aerodinámica del cuerpo OFF.

8.5. Flutter lineal: resumen de resultados

La tabla 8.1 resume los resultados descritos en los apartados anteriores. En los modelos rígidos (**RIG**), las diferencias entre MSC.NASTRAN y **FHSWB** no supera el 10 % en la velocidad de flutter. Sin embargo, en el modelo flexible (**FLE**), las diferencias son mayores pero están justificadas por el hecho de ser un *mild flutter* con amortiguamiento muy bajo que da lugar a importantes variaciones en el corte por $g = 0,0$ al cambiar el modelo de interpolación aerodinámica/estructura. El modelo aerodinámico del cuerpo en el MSC.NASTRAN no es el más apropiado para calcular la interferencia cuerpo/ala (cilindro de interferencia) en configuraciones esbeltas. Esto explica que al desactivar la interpolación estructura/aerodinámica del cuerpo en MSC.NASTRAN, la velocidad de flutter tiende a ser la predicha por el código **FHSWB**: $V_{LF(MSC.NASTRAN)} = 196$ KTAS en MSC.NASTRAN vs $V_{LF(FHSWB)} = 262$ KTAS en **FHSWB**.

Configuración	Modelo	Interpolación Cuerpo	Velocidad de Flutter (KTAS)		Diferencia[%]
			MSC.NASTRAN	FHSWB	
S01	RIG	ON	486.	496.	2.06
		OFF	484.	470.	2.98
S02	RIG	ON	562.	616.	8.77
		OFF	572.	596.	4.03
	FLE	ON	442.	241.	83.40
		OFF	196.	262.	25.19

Tabla 8.1: Resultados de *flutter* lineal. Comparativa MSC.NASTRAN y **FHSWB**.

Aparte de los resultados anteriores, es interesante calcular las velocidades de *flutter* para la desconexión total en los tres grados de libertad no lineales posibles: [1] rotación de aletas (rigidez de los actuadores $K_{ROT} = 0$), [2] desplazamiento lateral (rigidez del soporte lateral $K_{LAT} = 0$) y [3] rotación en guiñada (rigidez del soporte de guiñada $K_{YAW} = 0$). Estas velocidades, calculadas con el código **FHSWB**, se detallan en la tabla 8.2.

Configuración	Modelo	Velocidad de Flutter (KTAS) (código FHSWB)			
		nominal	$K_{ROT} = 0$	$K_{LAT} = 0$	$K_{YAW} = 0$
S01	RIG	496.	331.	489.	381.
S02	RIG	616.	0.	N/A	N/A
	FLE	241.	0.	N/A	N/A

Tabla 8.2: Resultados de *flutter* lineal. Caso nominal comparado con los casos: [1] $K_{ROT} = 0$, i.e., rotación de aletas libre, [2] $K_{LAT} = 0$, i.e., desplazamiento lateral libre, y [3] $K_{YAW} = 0$, i.e., giro en guiñada libre. Estos resultados han sido obtenidos con el código **FHSWB**.

8.6. Consideraciones Finales

En este capítulo se ha analizado la aeroelasticidad de la configuración de la tesis asumiendo *modelo estructural lineal*. El código **FHSWB** desarrollado en esta tesis se ha comparado con el código comercial MSC.NASTRAN. Los resultados principales de esta comparación son los siguientes:

- Para el soportado **S01**, i.e., misil instalado en un pilón del avión plataforma, la diferencia en la velocidad de *flutter* lineal es del 2% en caso de activar la interpolación aerodinámica/estructura en el cuerpo, y del 3% en caso de desactivar la interpolación estructura/aerodinámica del cuerpo. Diferencias menores del 10% son asumibles debido a los diferentes modelos aerodinámicos (Doublet-Lattice en el MSC.NASTRAN vs Cuerpo Esbelto en el **FHSWB**) y diferente solución de la ecuación de *flutter* en el dominio de la frecuencia.
- Para el soportado **S02** y modelo estructural **RIG**, i.e., misil rígido en vuelo libre, la diferencia de la velocidad de *flutter* lineal es del 9% en el caso de activar la interpolación estructura/aerodinámica en el cuerpo, y del 4% en el caso de desactivar la interpolación en el cuerpo. Al igual que en el caso anterior, diferencias menores del 10% son asumibles debido a los diferentes modelos aerodinámicos y diferente solución de la ecuación de *flutter* en el dominio de la frecuencia.
- Para el soportado **S02** y modelo estructural **FLE**, i.e., misil flexible en vuelo libre, la diferencia de la velocidad de *flutter* lineal es del 83% en caso de activar la interpolación estructura/aerodinámica en el cuerpo, y del 25% en el caso de desactivar la interpolación en el cuerpo. Esta diferencia importante es debido a que el mecanismo de *flutter* realiza un corte muy plano con la línea de amortiguamiento nulo, lo que comúnmente se denomina un *mild flutter*. Este tipo de mecanismo es muy sensible a cualquier cambio en el modelo o las condiciones de cálculo, y el modelo aerodinámico del **FHSWB** se basa en la teoría no estacionario de cuerpos esbeltos, mientras que el código MSC.NASTRAN utiliza el método Doublet-Lattice. Este es el motivo por el que la activación o no de la interpolación en el cuerpo introduce importantes cambios en la solución del modelo MSC.NASTRAN.

Los resultados del código **FHWSB** están en línea con las predicciones del código MSC.NASTRAN aunque, como era lógico debido a los diferentes modelos aerodinámicos de cada uno de los dos códigos, los resultados difieren en el casos de existir un *mild flutter*.

Una vez caracterizada la aeroelasticidad lineal de la configuración, se procede al análisis no lineal aeroelástico en los capítulos 9 y 10, donde se incluyen resultados para la no linealidad tipo *freeplay* e *hysteresis* respectivamente.

Capítulo 9

NOLINEALIDAD DEL TIPO *FREEPLAY*: RESULTADOS

9.1. Introducción

En este capítulo se analiza la estabilidad aeroelástica de la configuración descrita en el capítulo 7 con una no linealidad estructural concentrada del tipo *freeplay*.

La sección 9.2 se dedica al soportado **S01** (misil instalado en el avión plataforma, con modelo estructural rígido **RIG**) y una no linealidad concentrada localizada en uno de los siguientes tres grados de libertad: desplazamiento lateral, guiñada o rotación de aletas. Además, para cada localización de la no linealidad se varían los principales parámetros del *freeplay*: holgura de la zona muerta o *deadband*, descentramiento, precarga y condiciones iniciales.

La sección 9.3 se dedica al soportado **S02** (misil en vuelo libre) con modelo estructural rígido (**RIG**) y una no linealidad concentrada localizada en la rotación de aletas. Se varían los principales parámetros del *freeplay*: holgura de la zona muerta o *deadband*, descentramiento, precarga y condiciones iniciales.

Por último, la sección 9.4 se dedica al soportado **S02** con modelo estructural flexible (**FLE**) y una no linealidad concentrada localizada en la rotación de aletas. De nuevo, se varían los principales parámetros del *freeplay*: holgura de la zona muerta o *deadband*, descentramiento, precarga y condiciones iniciales.

Los resultados para cada caso se presentan en el formato descrito en la sección 7.8 del capítulo 7.

9.2. Estructura (RIG) / Soportado (S01)

En esta sección se detallan los resultados para la configuración de misil con 3 modos de sólido rígido (modo lateral, modo de guiñada y modo de rotación de aletas) e instalado en la plataforma que lo transporta (soportado **S01**), típicamente colgado del pilón de un avión.

La no linealidad de tipo *freeplay* se considera localizada en uno de los 3 modos: **ROT** cuando la no linealidad se localiza en la rotación de aletas, **LAT** si la no linealidad se localiza en el modo lateral y **YAW** en el caso de que la no linealidad se considere localizada en el modo de guiñada.

Por otro lado, y para cada una tres posibles localizaciones de la no linealidad, se varían distintos parámetros del *freeplay*: **FDA** corresponde a la variación de la amplitud de la holgura, **FDC** corresponde a la variación del centro de la no linealidad, **FDP** corresponde a la variación de la precarga de la no linealidad y, por último, **FBC** indica variación de las condiciones iniciales.

La tabla 9.1 resume las configuraciones de estudio y la sección en la que se incluyen los resultados.

SECCIÓN	CONFIGURACIÓN
9.2.1	RIG.S01.ROT.FDA
	RIG.S01.ROT.FDC
	RIG.S01.ROT.FDP
	RIG.S01.ROT.FBC
9.2.2	RIG.S01.LAT.FDA
	RIG.S01.LAT.FDC
	RIG.S01.LAT.FDP
	RIG.S01.LAT.FBC
9.2.3	RIG.S01.YAW.FDA
	RIG.S01.YAW.FDC
	RIG.S01.YAW.FDP
	RIG.S01.YAW.FBC

Tabla 9.1: Configuraciones de estudio para el misil **RIG** (modelo estructural con 3 modos de sólido rígido) con soportado **S01** (instalado en la plataforma que lo transporta).

9.2.1. Nolinealidad en Rotación de Aletas (RIG.S01.ROT)

La figura 9.1 detalla la nolinealidad de tipo *freeplay* con las principales características que se consideran como parámetros en el estudio:

- Amplitud de la holgura (*Deadband Amplitude* **FDA**).
- Centro de la nolinealidad (*Deadband Center* **FDC**).
- Precarga de la nolinealidad (*Deadband Preload* **FDP**).

Aparte de los tres parámetros anteriores, se estudiará el efecto de las condiciones iniciales en la respuesta (**FBC**). La nolinealidad se considera concentrada en el actuador de las aletas, de forma que el giro relativo de la aleta β_A respecto al cuerpo en el eje de charnela x_h , i.e. $\beta_A \simeq \partial w_{wb} / \partial x(x_h; t)$, es la variable nolineal.

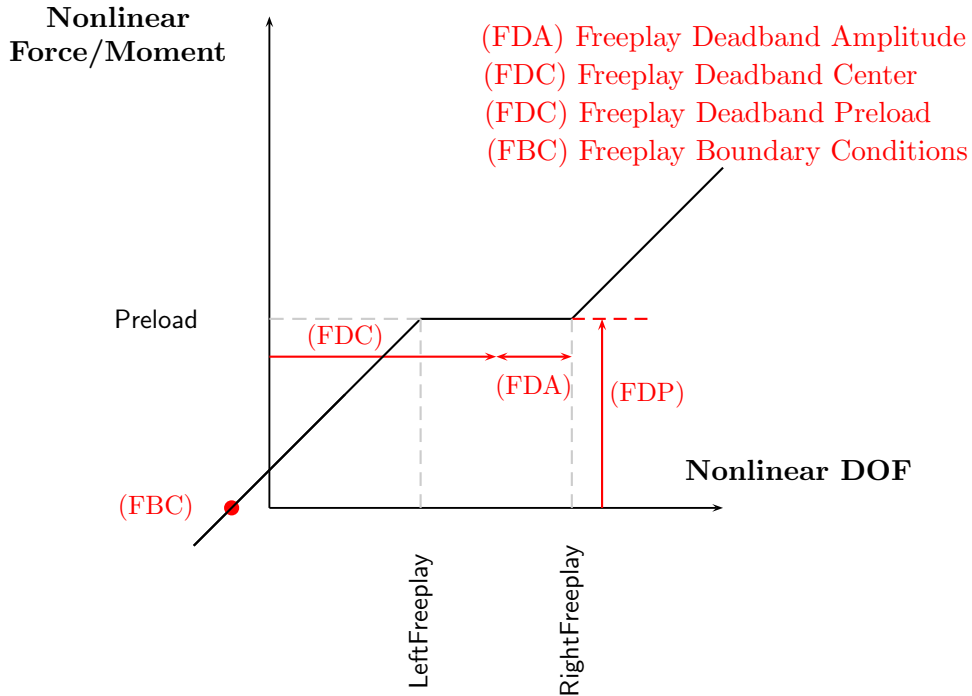


Figura 9.1: Nolinealidad del tipo *freeplay* con los principales parámetros que la definen.

Dada una nolinealidad *freeplay* nominal, de precarga 0,0 [N·m]¹ y amplitud adimensional $\mp 0,005$ ($\mp 0,29^\circ$ aprox.), se varía uno a uno los parámetros mencionados anteriormente.

La condición inicial nominal del vector de estado-espacio $\{x\}$ es:

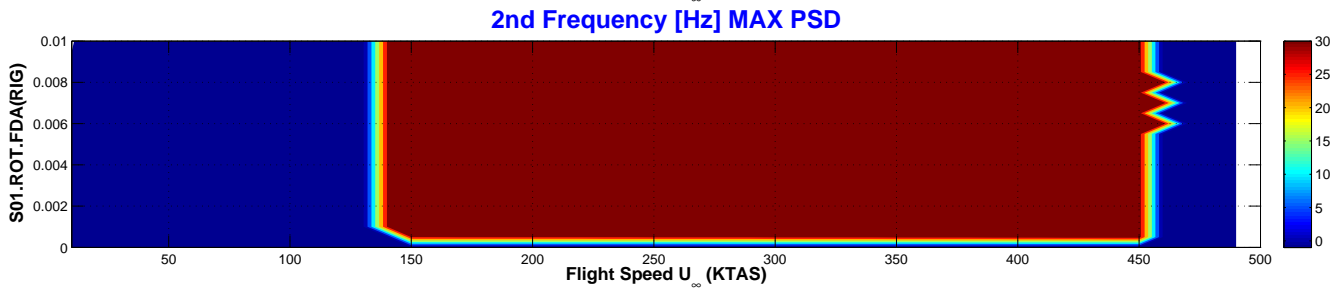
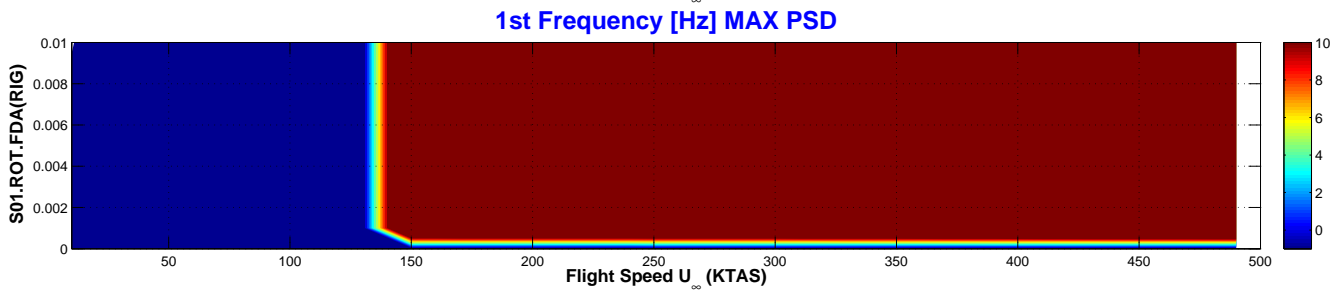
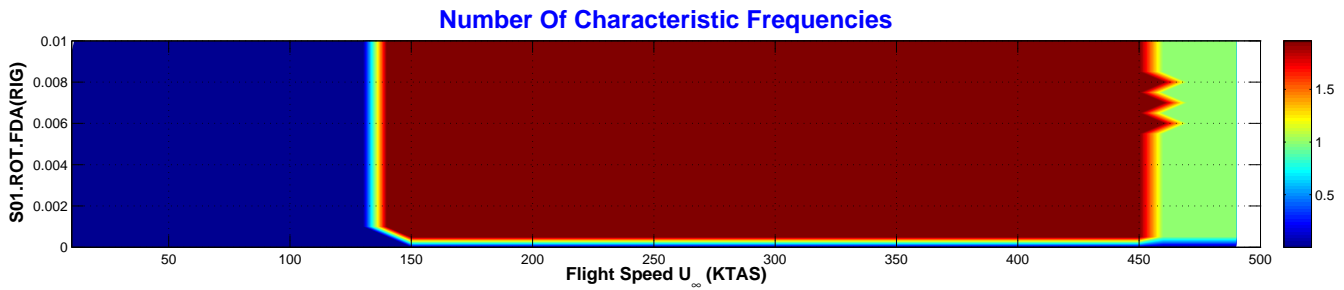
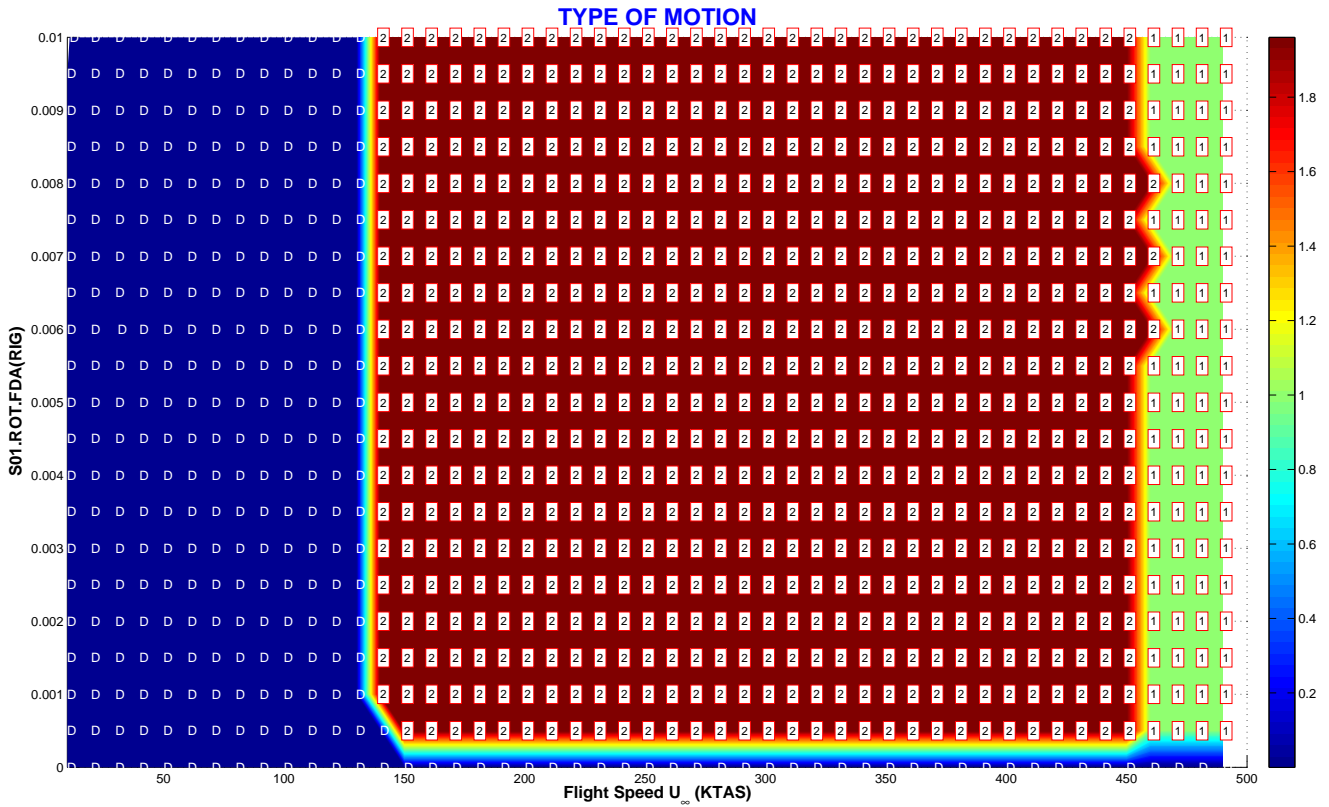
$$\{x(0)\}_{6 \times 1} = \left[\hat{\xi}_1 \quad \hat{\xi}_2 \quad \hat{\xi}_3 \quad \frac{d\hat{\xi}_1}{d\hat{t}} \quad \frac{d\hat{\xi}_2}{d\hat{t}} \quad \frac{d\hat{\xi}_3}{d\hat{t}} \right]^T = \left[+0,015 \quad -0,015 \quad -0,015 \quad 0,0 \quad 0,0 \quad 0,0 \right]^T$$

siendo la coordenada generalizada $\hat{\xi}_3$ (modo de rotación de aletas) y su velocidad generalizada $d\hat{\xi}_3/d\hat{t}$ las que se varían en el estudio de la sensibilidad de la respuesta a las condiciones iniciales (**FBC**).

¹Recuérdese que la precarga adimensional venía dada por $\hat{M}_0^{NLA} = M_0^{NLA} / m_0 U_0^2 L$.

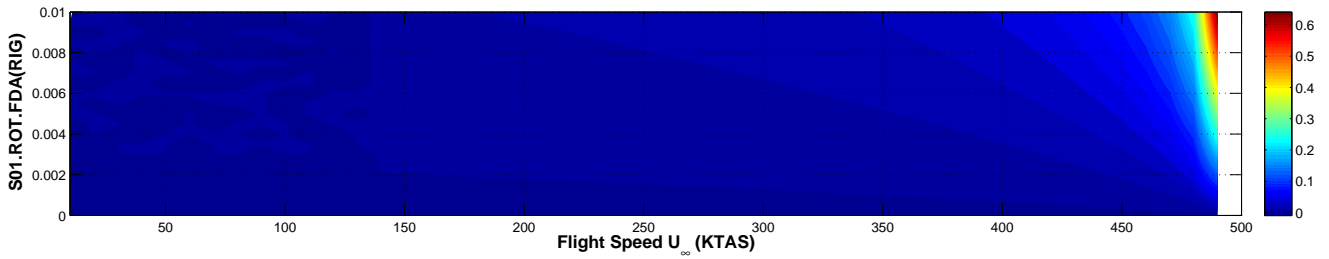
VARIACIÓN DE LA AMPLITUD DE LA HOLGURA

CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Amplitude (DA)	S01.ROT.FDA	1/5

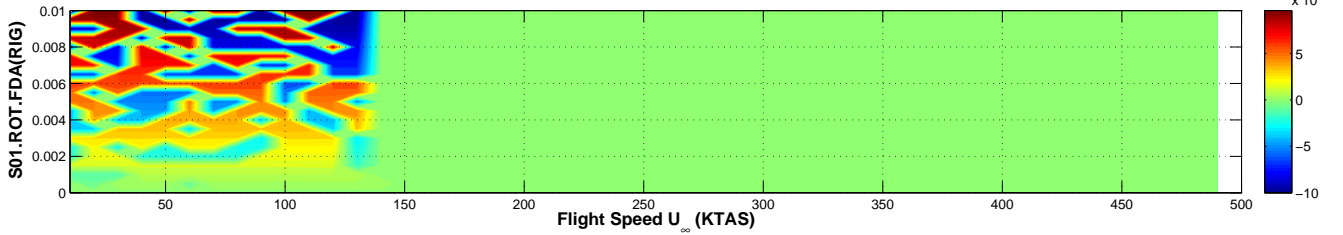


CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Amplitude (DA)	S01.ROT.FDA	2/5

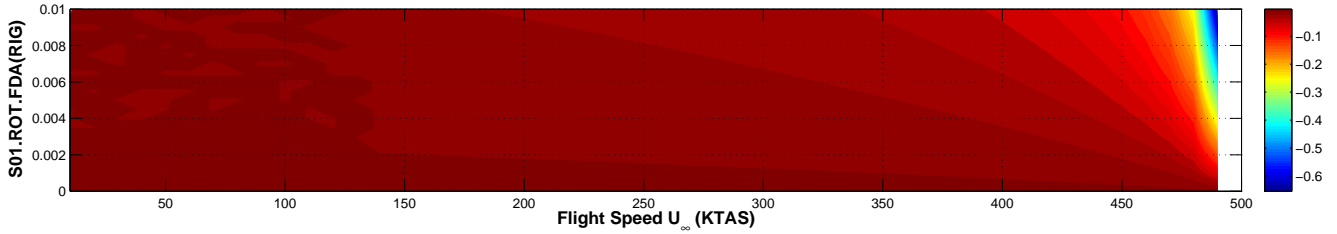
MAXIMUM VALUE



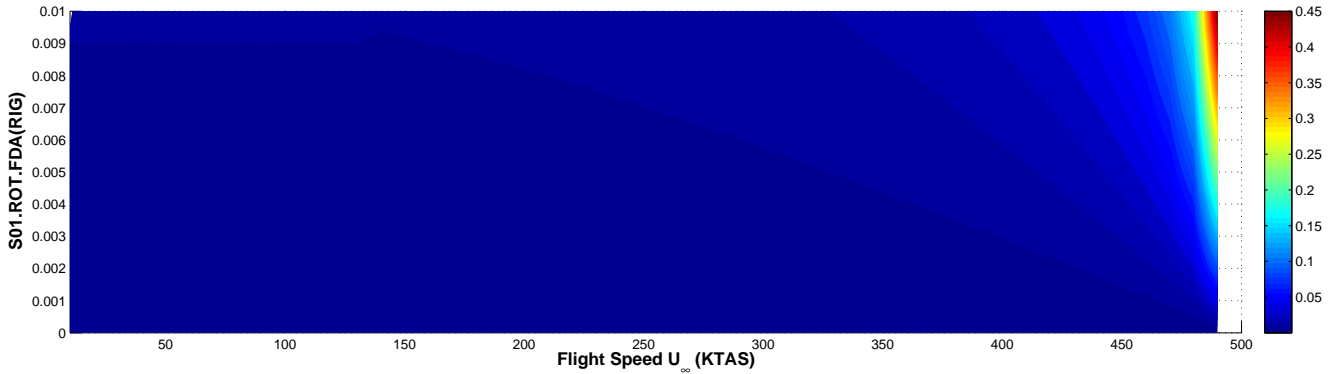
ARITHMETIC MEAN



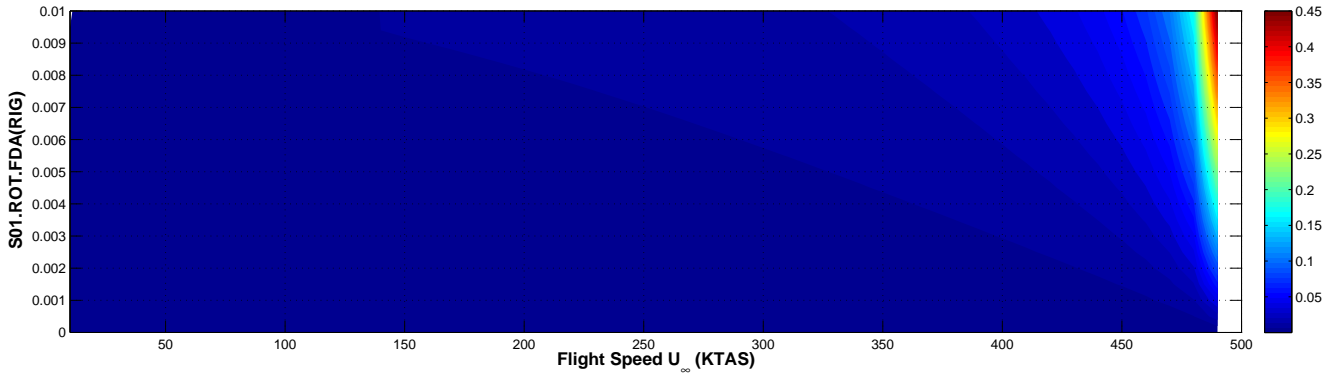
MINIMUM VALUE



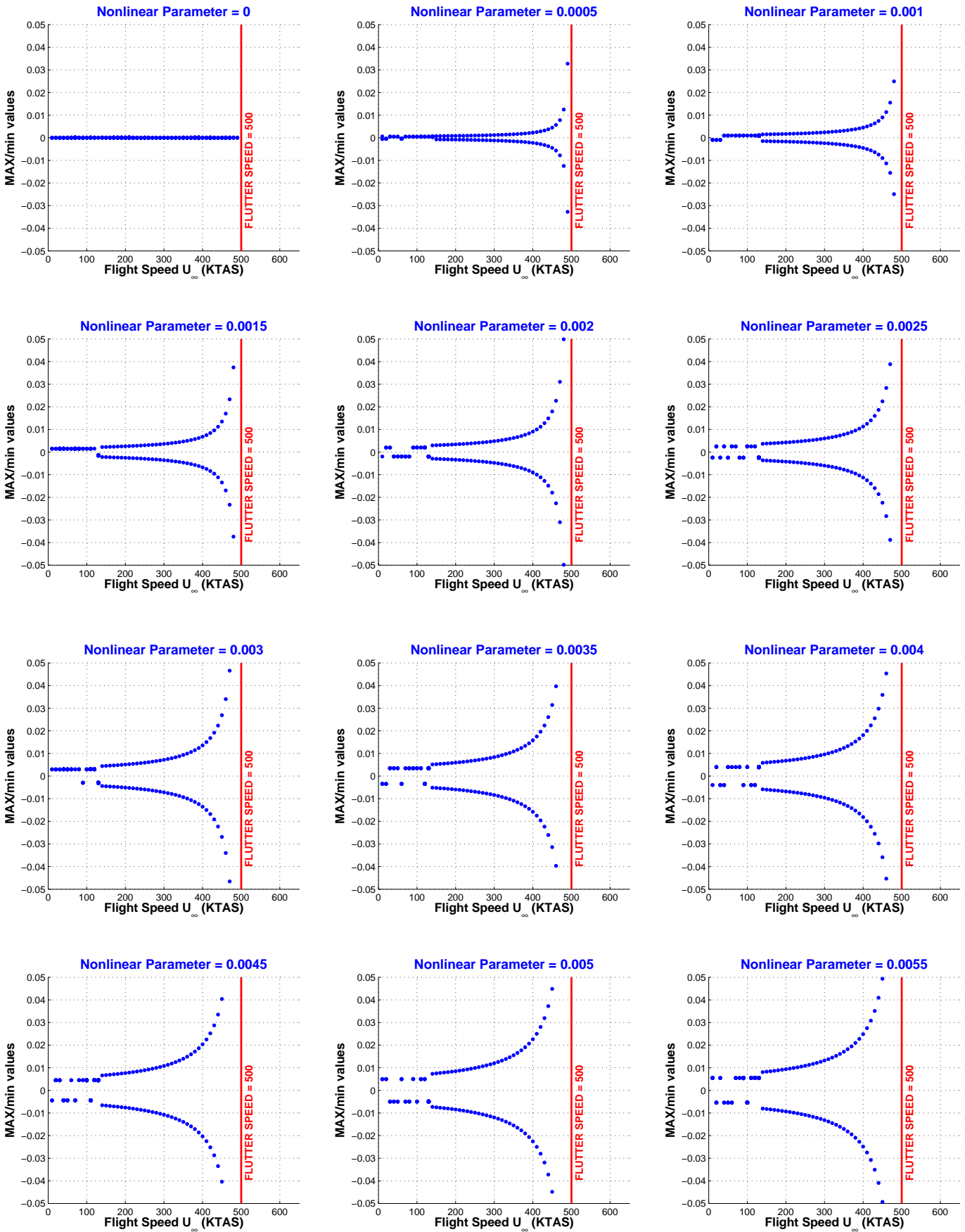
ROOT MEAN SQUARE



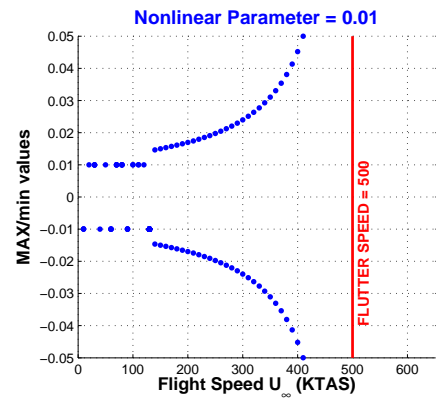
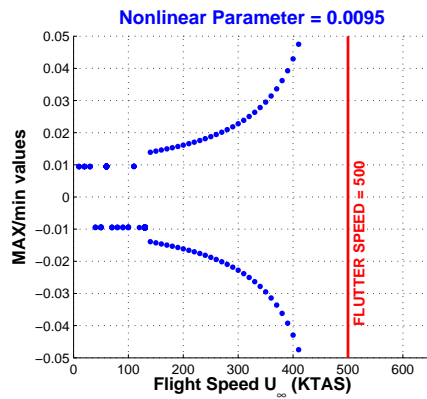
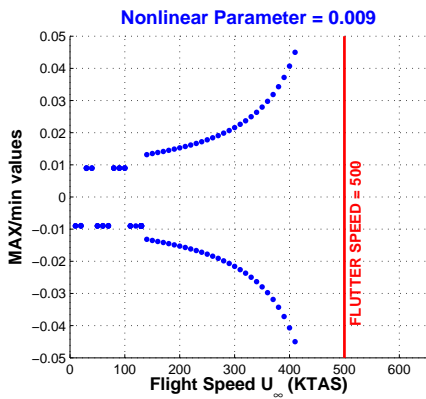
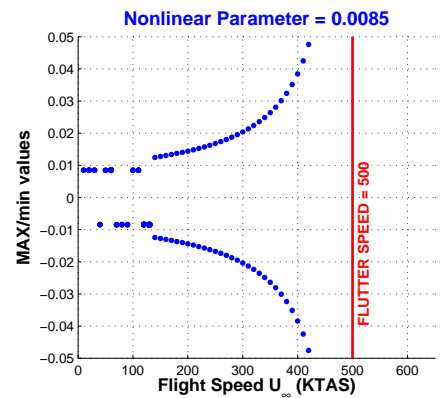
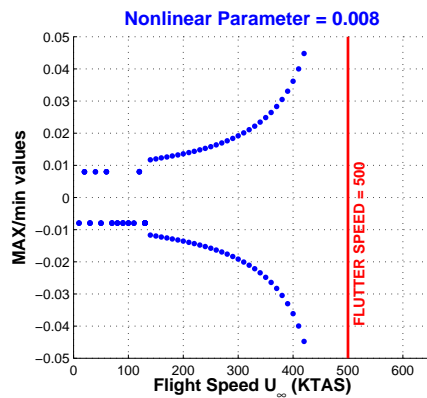
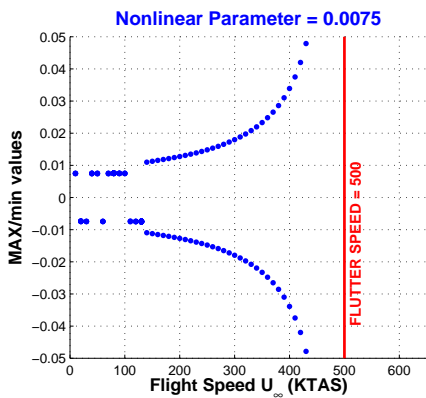
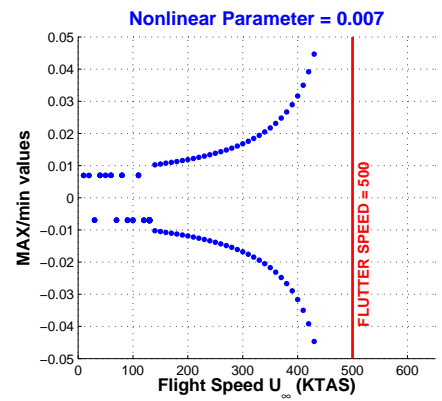
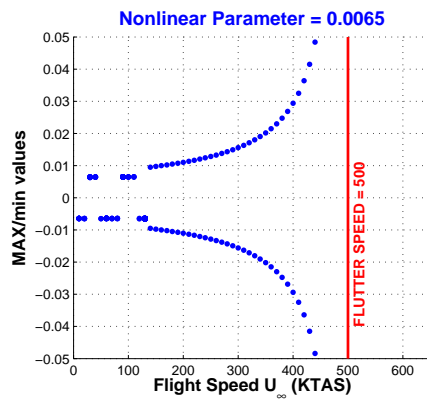
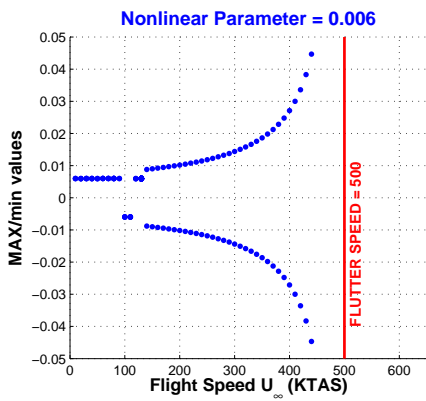
STANDARD DEVIATION



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Amplitude (DA)	S01.ROT.FDA	3/5



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Amplitude (DA)	S01.ROT.FDA	4/5



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Amplitude (DA)	S01.ROT.FDA	5/5

Tipo de Respuesta	DMP	Movimiento amortiguado por debajo de 140 KTAS (aprox.) para todas las amplitudes consideradas.
	LCO	Entre 140 y 450 KTAS aparecen oscilaciones de ciclo límite o <i>LCOs</i> con dos frecuencias características (LCO[2]). A partir de 450 KTAS la respuesta es armónica con una frecuencia característica, la del mecanismo de <i>flutter</i> .
	CHA	No se obtiene respuesta de tipo caótico.
	FLT	La velocidad de <i>flutter</i> es 500 KTAS (approx.) y no depende de la amplitud de la holgura.
Transición entre Tipos de Respuesta	La respuesta evoluciona con la velocidad de la siguiente forma: DMP-LCO-FLT. La transición de movimiento amortiguado DMP a oscilación de ciclo límite LCO ocurre de una forma instantánea aumentando ligeramente la velocidad. Se puede considerar como una transición <i>dura</i> . La aparición de <i>flutter</i> se puede predecir debido a que la amplitud de las oscilaciones LCOs aumenta progresivamente a medida que aumenta la velocidad de vuelo.	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 496. \text{ KTAS} / VF_{(K=0)} = 331. \text{ KTAS}$.
	No Lineal	500 KTAS (aprox.) e independiente de la amplitud de la holgura.
Variación de la Amplitud	con U_∞	La amplitud de la respuesta LCO aumenta con la velocidad.
	con ROT.FDA	La amplitud de la respuesta LCO aumenta con la amplitud de la holgura.
Bifurcaciones	Bifurcación de tipo <i>Hopf</i> al pasar de movimiento amortiguado (DMP) a oscilación de ciclo límite (LCO).	
Flutter onset	Las oscilaciones divergentes o <i>flutter</i> ocurren a velocidades mayores o igual a 500 KTAS (aprox.). Antes de entrar en <i>flutter</i> , el movimiento es de tipo armónico (LCO) con una amplitud mayor a medida que aumenta la velocidad. Este aumento de la amplitud se puede considerar como un indicio del <i>flutter</i> , por lo que la entrada en <i>flutter</i> puede considerarse <i>suave</i> .	

NOTA:

El sistema con *actuador desconectado* ($K = 0$, i.e., dentro de la zona *deadband*) es inestable con un único autovalor de parte real positiva² desde velocidad nula hasta 331 KTAS. A partir de 331 KTAS, el sistema con actuador desconectado tiene un par de autovalores conjugados con parte real positiva, que indican la entrada en *flutter* a esa velocidad. Por tanto, el rango 140 a 331 KTAS corresponde a *LCOs* asociados a la existencia de un único autovalor de parte real positiva, y que físicamente corresponde a rotación de la aleta dentro de la zona *deadband* debido al momento aerodinámico. Por debajo de 140 KTAS, las fuerzas aerodinámicas no son suficientes para desencadenar un *LCO* y el amortiguamiento aerodinámico acaba por reducir la respuesta a un punto de equilibrio en torno a una de las dos esquinas de la no linealidad. Sin embargo, el rango de 331 a 500 KTAS (aprox.) corresponde a *LCOs* asociados a la existencia de *flutter* del sistema con actuador desconectado, i.e., dentro de la holgura.

En el rango de 140 a 331 KTAS se ha comprobado que determinadas condiciones iniciales, incluso con el sistema dentro de la zona *deadband*, da lugar a movimiento amortiguado. Físicamente corresponde a un punto de equilibrio entre el momento aerodinámico y el momento del actuador de la aleta. Sin embargo, la inestabilidad entre 331 y 500 KTAS corresponde a *flutter* dentro de la zona *deadband* y cualquier condición inicial dentro de esta zona diverge hasta que la rotación de la aleta alcanza la zona lineal del *freeplay*, instante en el que actúa el actuador de la aleta y se opone a la divergencia devolviendo a la aleta dentro de la zona *deadband*. Este mecanismo provoca el *LCO*. Sin embargo, y debido a que la velocidad de *flutter* del sistema lineal es 496 KTAS (aprox.), pueden existir condiciones iniciales fuera de la zona *deadband* que den lugar a un equilibrio estático entre momento aerodinámico y momento de actuador.

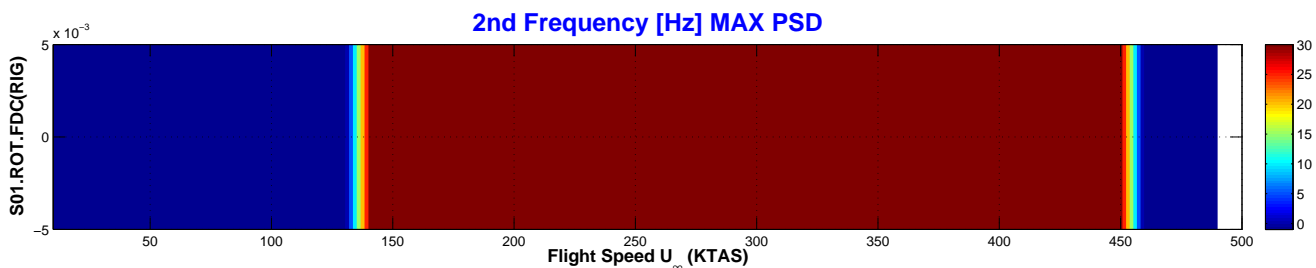
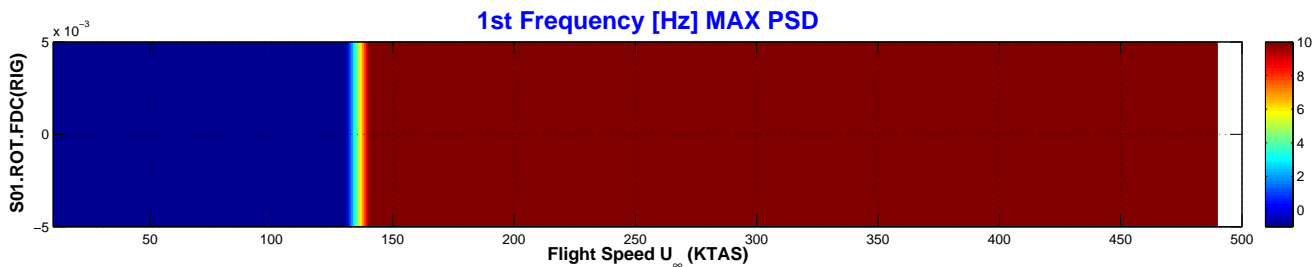
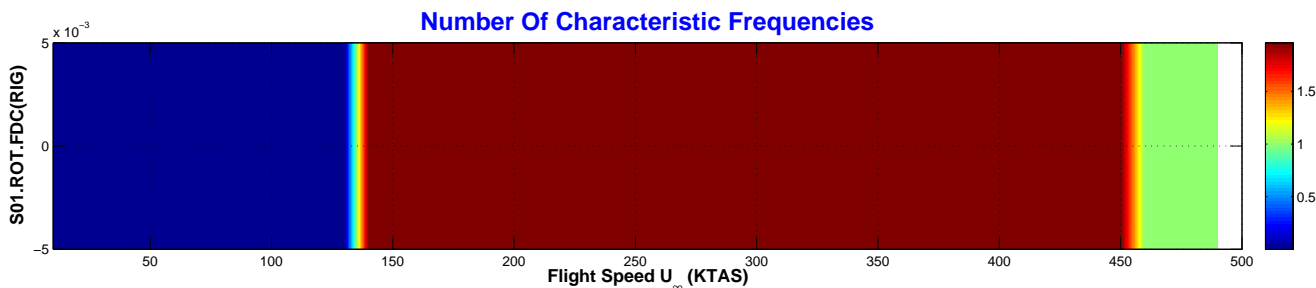
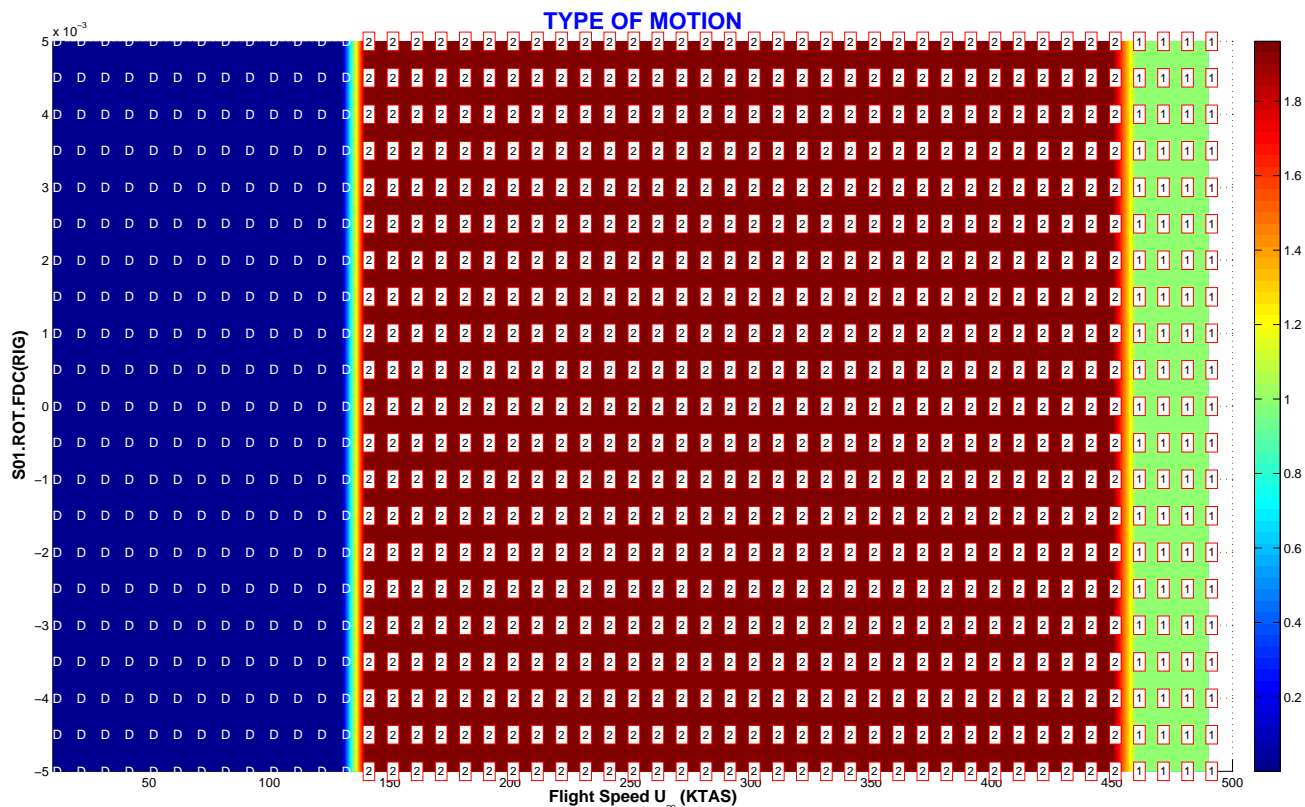
Por tanto, a la velocidad de 140 KTAS se produce una bifurcación de tipo *Hopf*³ pero sin cambio de autovalores del sistema, mientras que a la velocidad de 331 KTAS (aprox.) aparece una segunda bifurcación con aparición de dos autovalores conjugados con parte real nula (*flutter*).

²Este autovalor depende de la posición del eje de charnela respecto al centro de presiones aerodinámico.

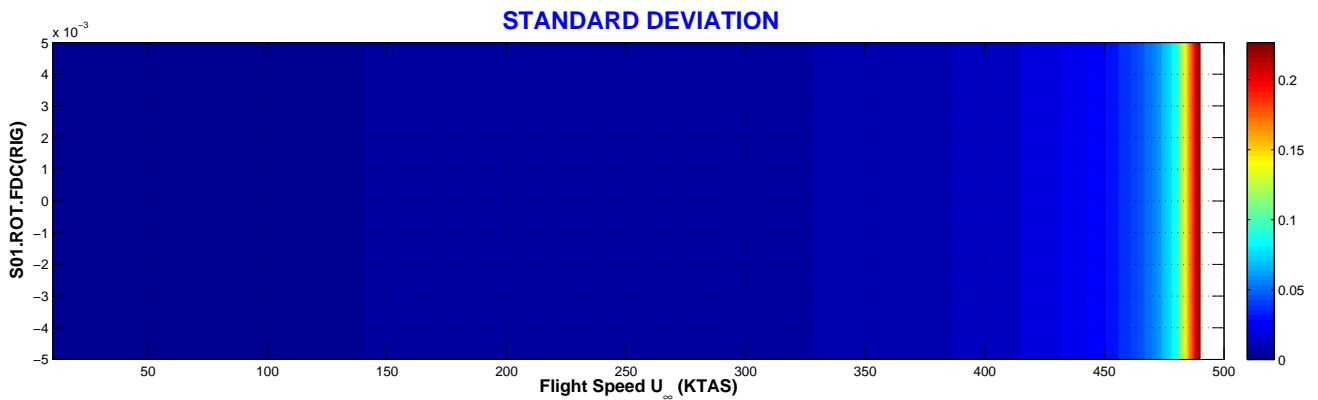
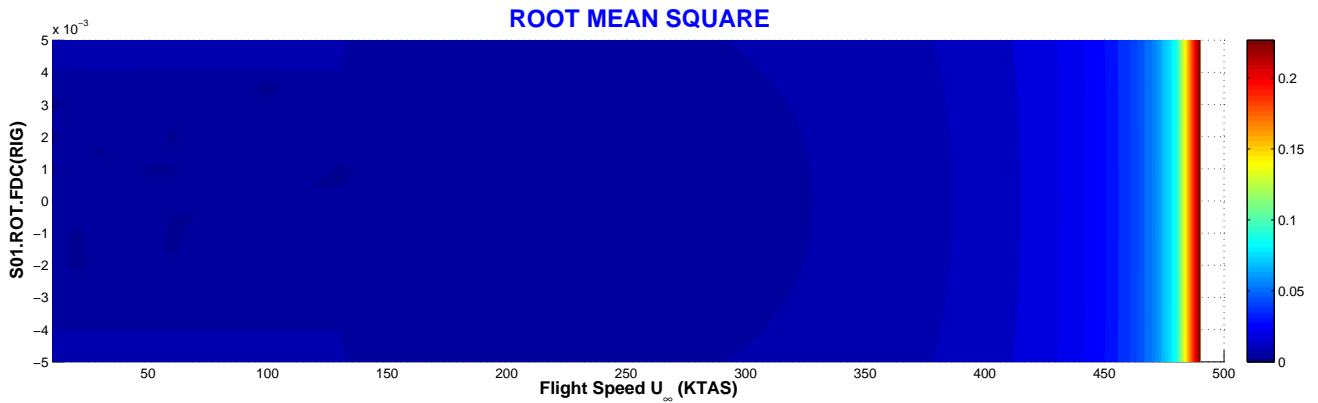
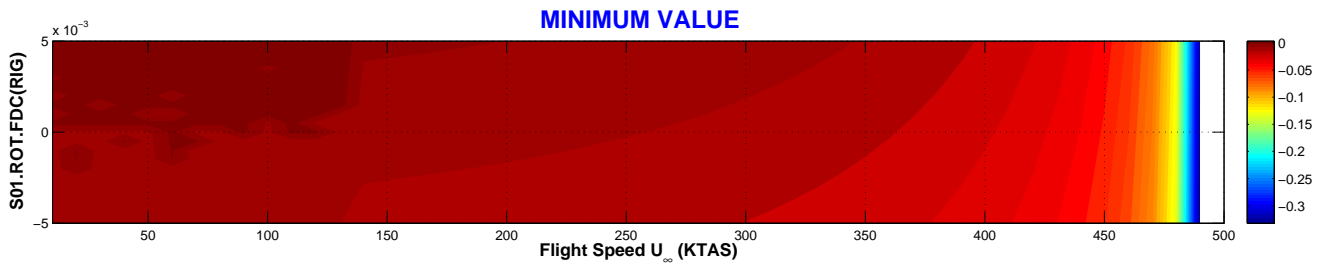
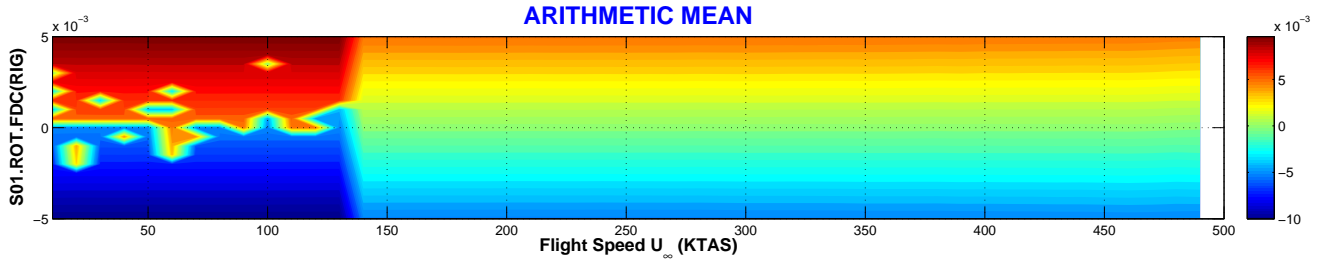
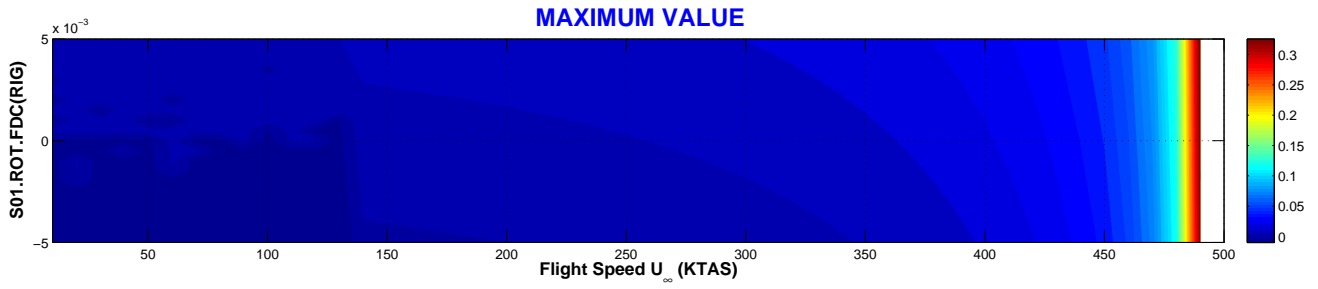
³En esta tesis se acepta la definición dada en la referencia [Sey94] como bifurcación de Hopf: *The type of bifurcation that connects equilibria with periodic motion is Hopf bifurcation. Hopf bifurcation is the door that opens from the small room of equilibria to the large hall of periodic solutions, which in turn is just a small part of the realm of functions.*

VARIACIÓN DE LA POSICIÓN DEL CENTRO DE LA NOLINEALIDAD

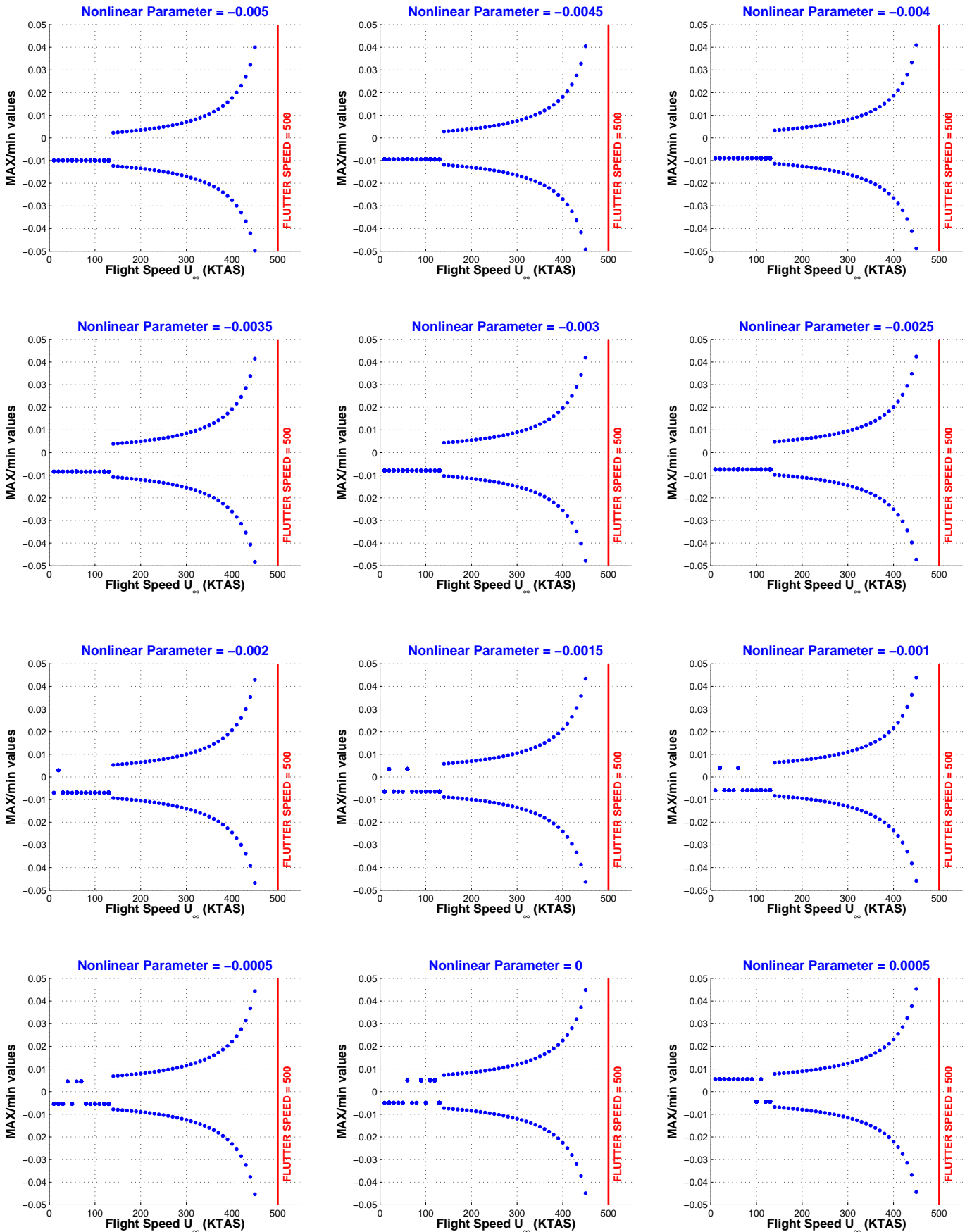
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Center (DC)	S01.ROT.FDC	1/5



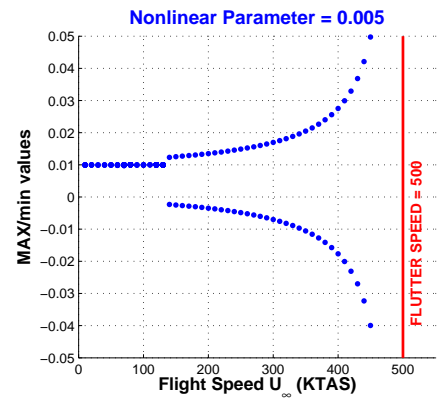
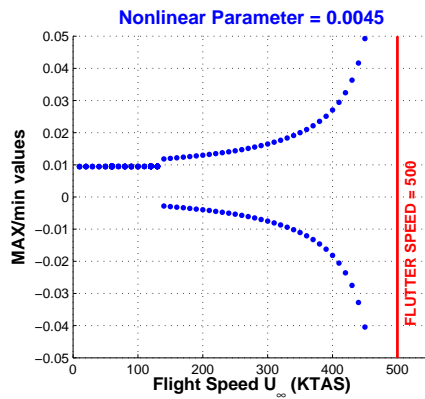
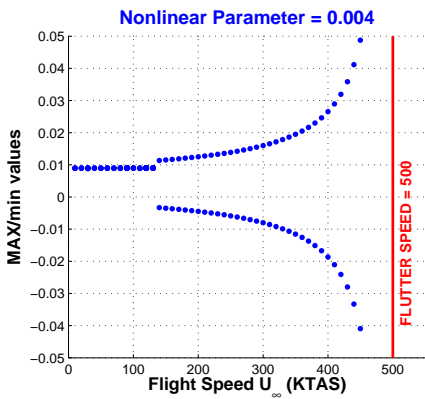
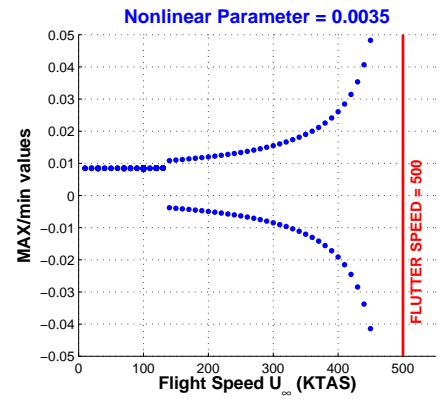
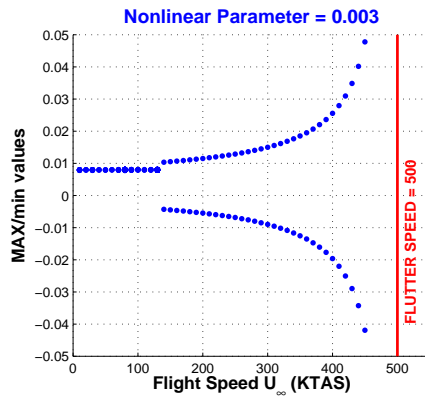
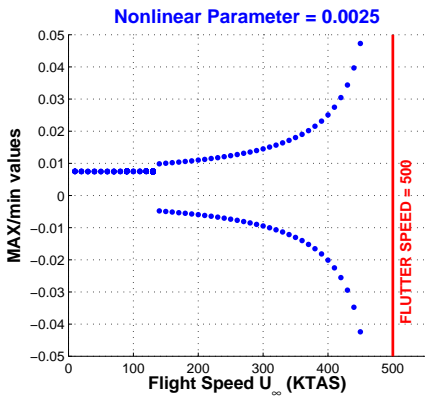
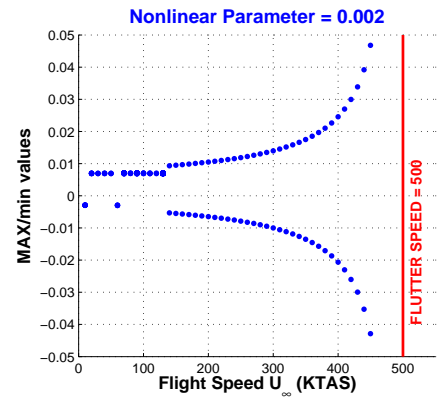
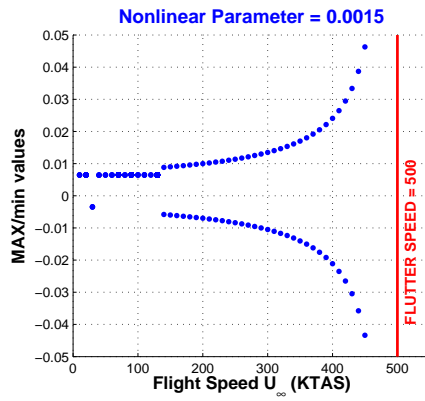
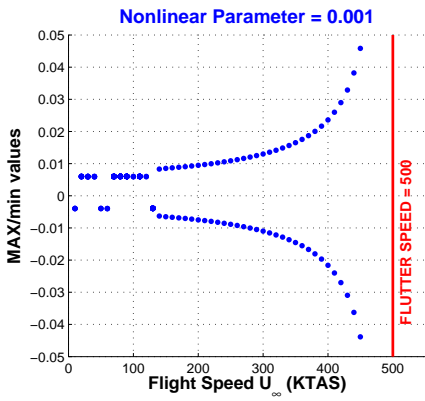
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Center (DC)	S01.ROT.FDC	2/5



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Center (DC)	S01.ROT.FDC	3/5



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Center (DC)	S01.ROT.FDC	4/5

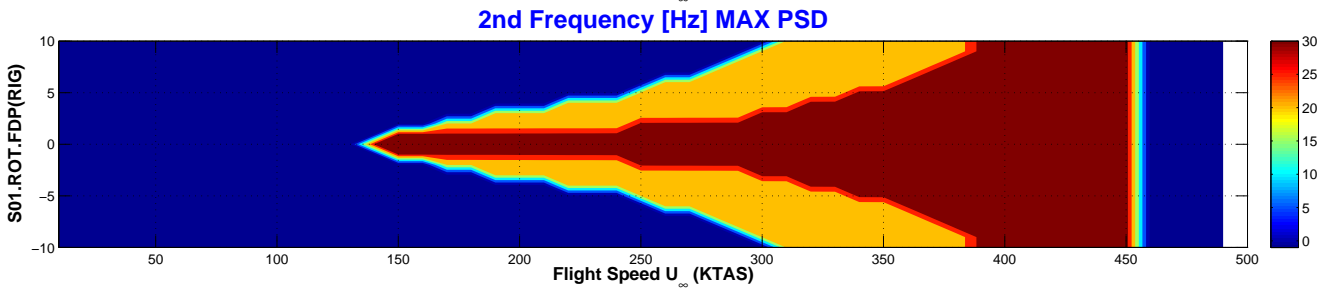
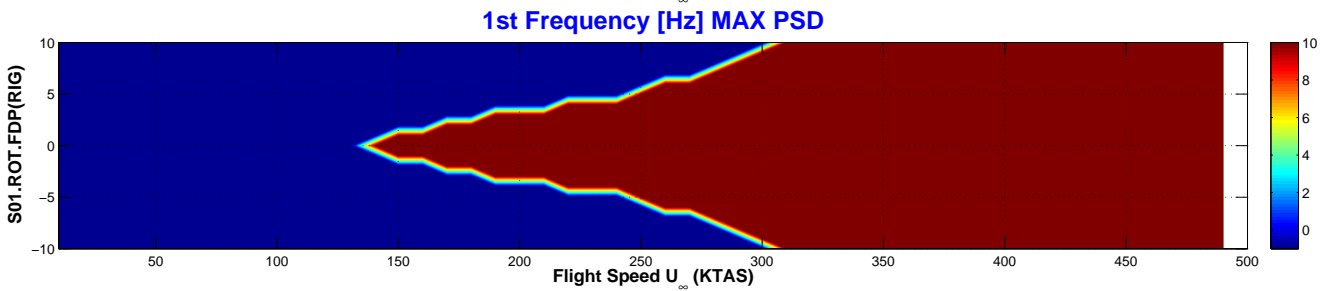
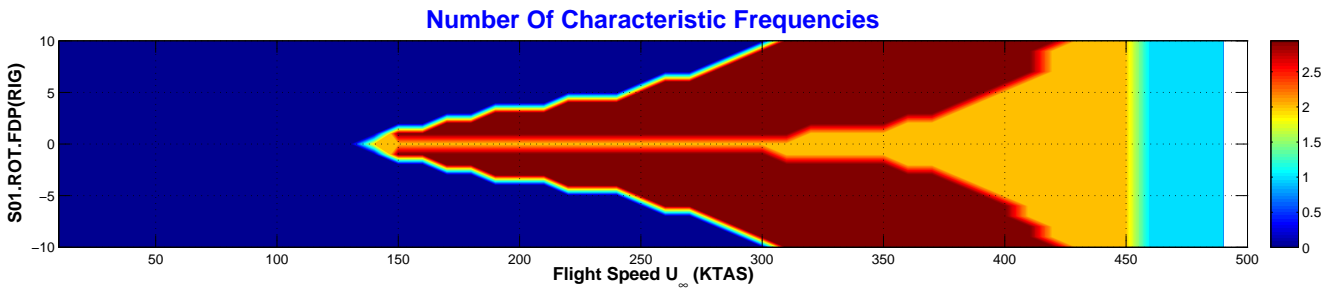
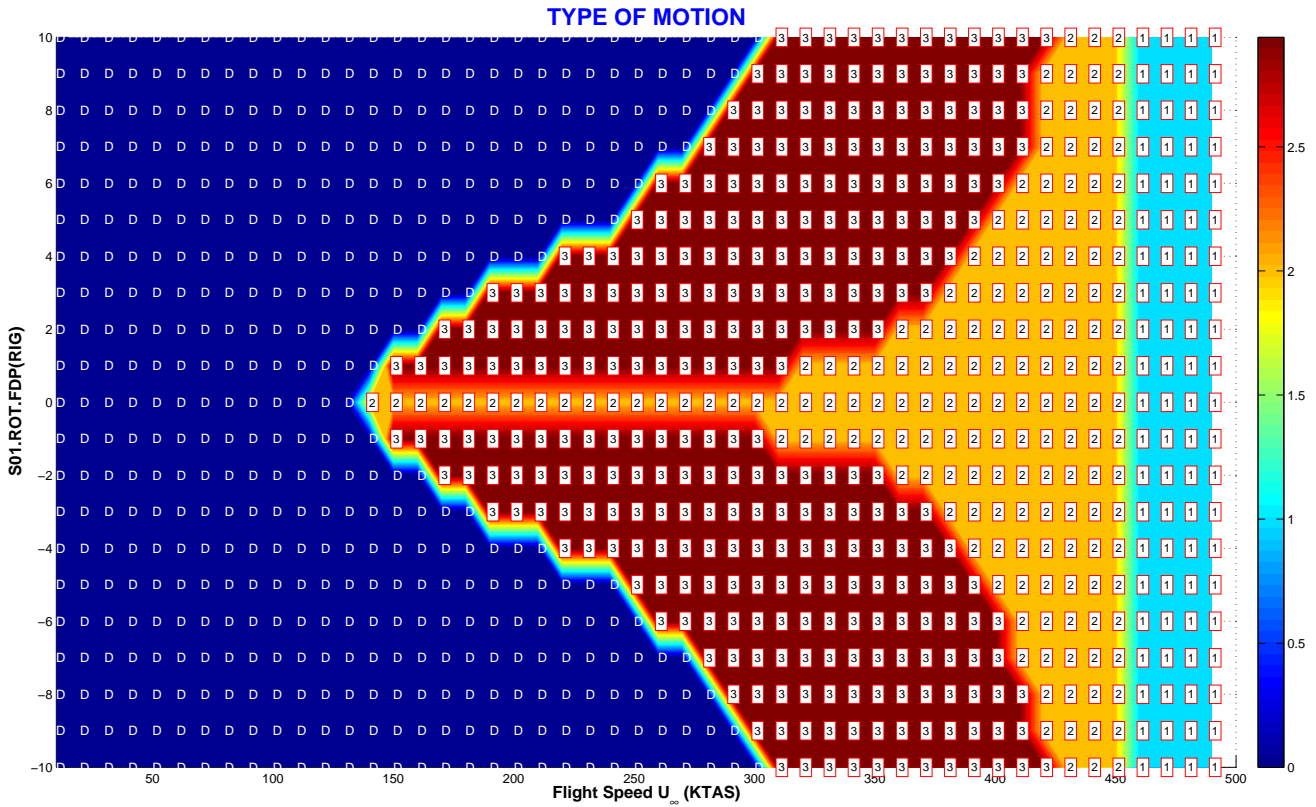


CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Amplitude (DC)	S01.ROT.FDC	5/5

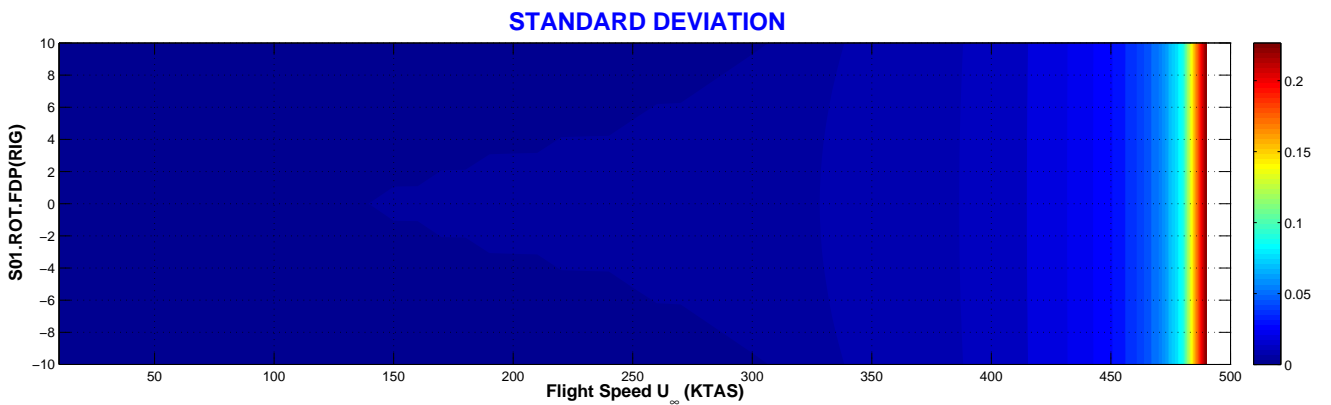
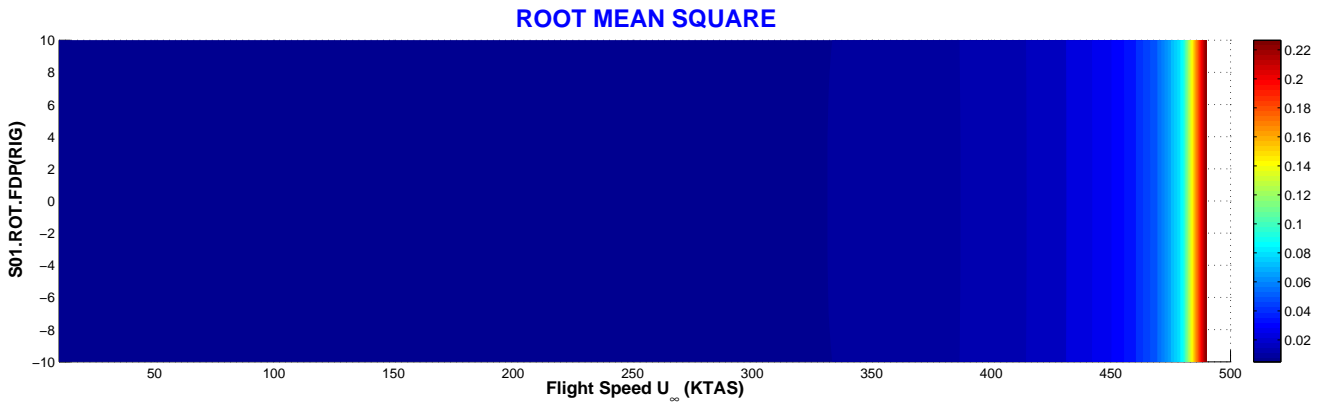
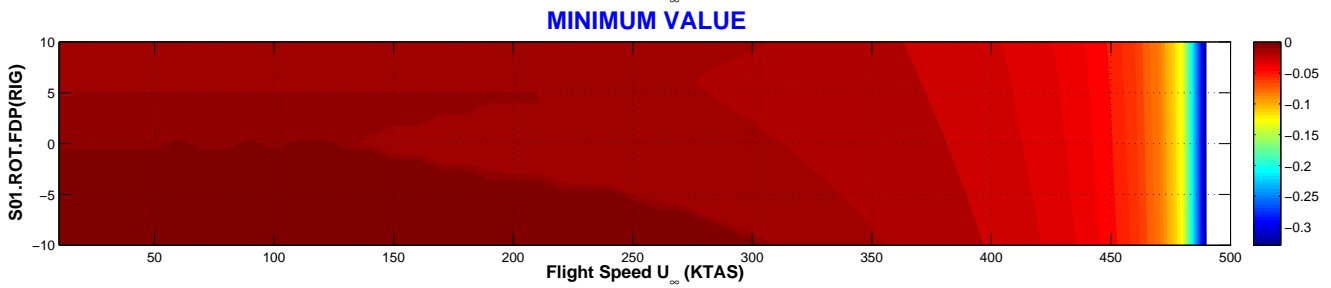
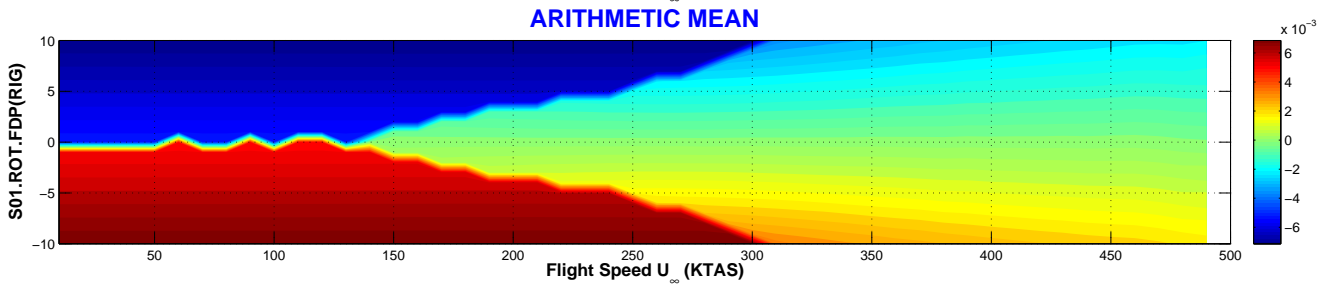
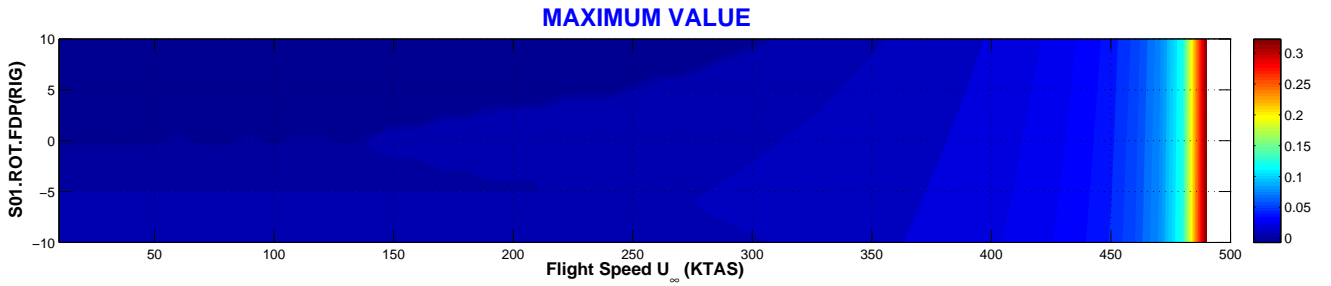
Tipo de Respuesta	DMP	Movimiento amortiguado a bajas velocidades hasta 140 KTAS.
	LCO	Movimiento de tipo LCO a partir de 140 KTAS hasta alcanzar la velocidad de <i>flutter</i> . A la velocidad de 140 KTAS existe una transición de respuesta amortiguada a LCO con dos frecuencias características. Este tipo de LCO permanece hasta la velocidad de 450 KTAS (aprox.) en el que la respuesta pasa a tener una frecuencia característica (la del mecanismo de <i>flutter</i>).
	CHA	No existe respuesta de tipo caótica.
	FLT	La velocidad de <i>flutter</i> es 500 KTAS (approx.) y no depende de la amplitud de la holgura.
Transición entre Tipos de Respuesta	La respuesta evoluciona con la velocidad de la siguiente forma: DMP-LCO-FLT. La transición de movimiento amortiguado DMP a oscilación de ciclo límite LCO ocurre de una forma instantánea al aumentar ligeramente la velocidad. Se puede considerar como una transición <i>dura</i> . La aparición de <i>flutter</i> se puede predecir debido a que la amplitud de las oscilaciones LCOs aumenta progresivamente a medida que aumenta la velocidad de vuelo.	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 496. \text{ KTAS} / VF_{(K=0)} = 331. \text{ KTAS}$
	No Lineal	500 KTAS (aprox.) e independiente de la amplitud de la holgura.
Variación de la Amplitud	con U_∞	A velocidades bajas (movimiento amortiguado), el sistema está amortiguado y la aletas giran hasta encontrarse con la zona lineal en la que la rigidez del actuador puede compensar el momento de las fuerzas aerodinámicas. Este giro depende del valor de la <i>esquina</i> de la no linealidad <i>freeplay</i> y por tanto varía con el centro de la no linealidad, como lo demuestran los diagramas de bifurcación anteriores. A partir de 140 KTAS comienza la respuesta no amortiguada de tipo armónica (LCOs) y la amplitud de la rotación de las aletas aumenta a medida que se incrementa la velocidad.
	con ROT.FDC	Al variar el centro de la no linealidad, varía el valor medio de la respuesta, aunque el tipo de movimiento y las amplitudes no dependen de dónde se sitúe el centro del <i>freeplay</i> .
Bifurcaciones	Bifurcación de tipo <i>Hopf</i> a la velocidad de 140 KTAS, en la que existe una transición de movimiento amortiguado a LCO.	
Flutter onset	La entrada en <i>flutter</i> se puede considerar <i>suave</i> ya que la amplitud del movimiento ha estado progresivamente aumentado a velocidades inferiores, y la monitorización del diagrama de bifurcación predice de forma evidente la divergencia de la respuesta a medida que se aumenta la velocidad.	

VARIACIÓN DE LA PRECARGA

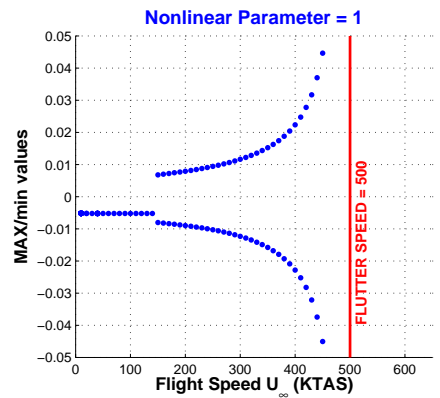
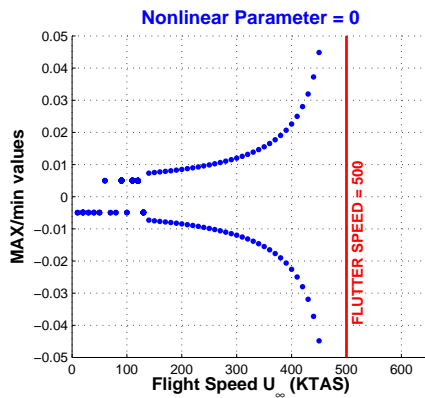
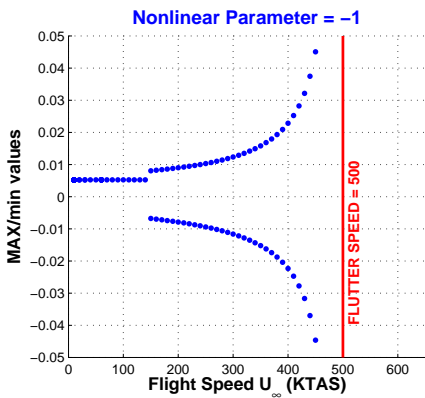
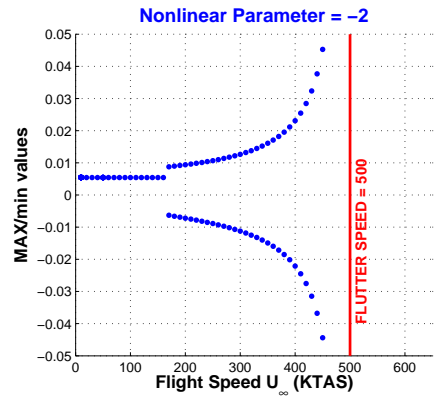
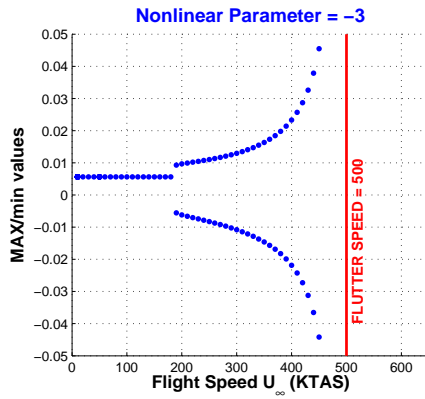
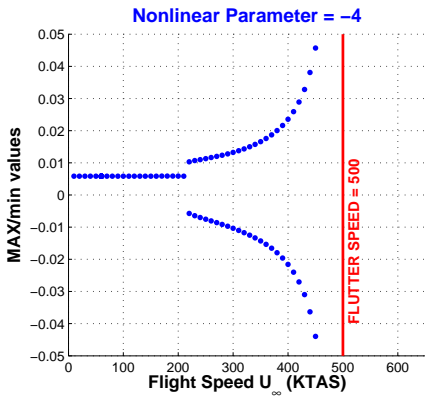
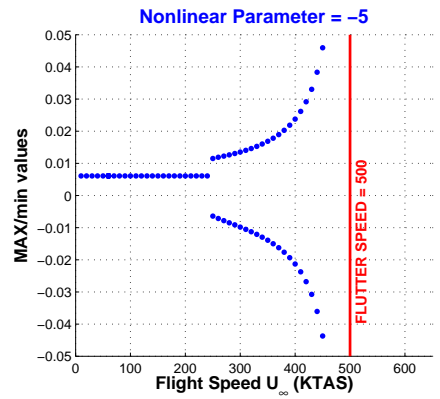
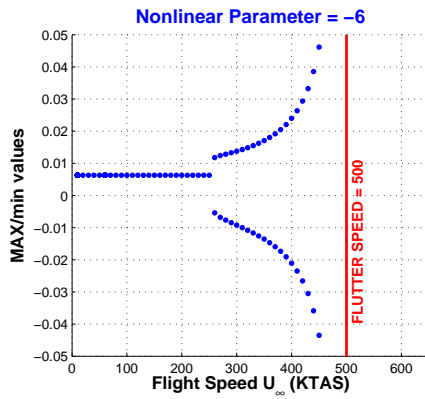
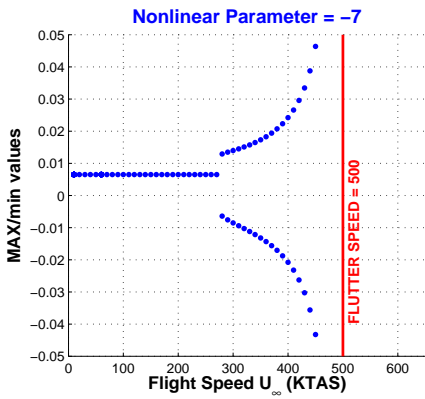
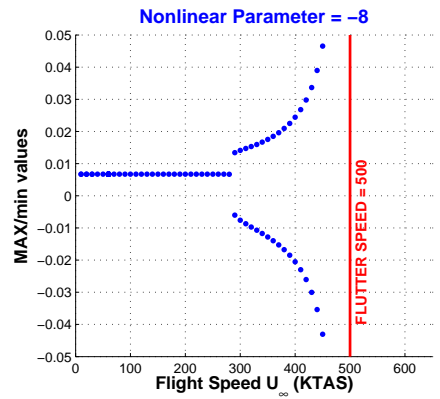
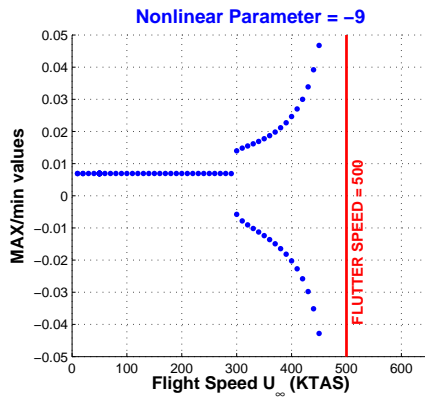
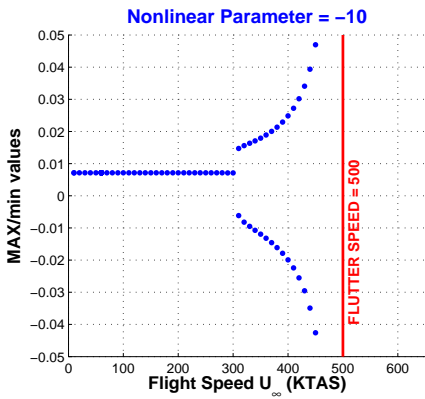
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Preload (DP)	S01.ROT.FDP	1/5



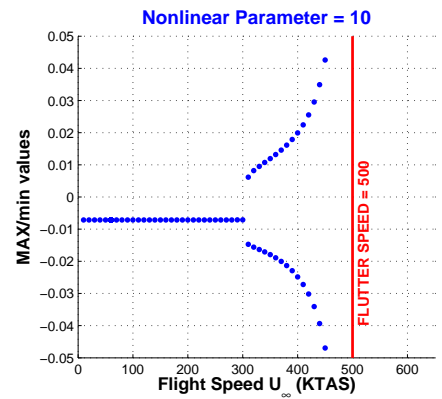
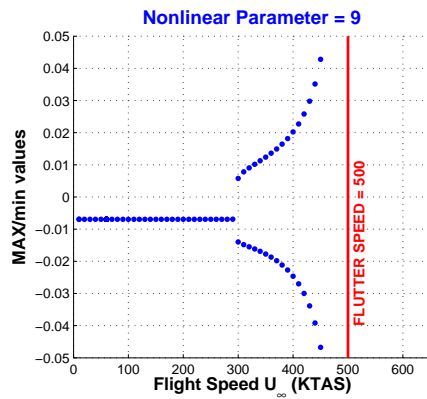
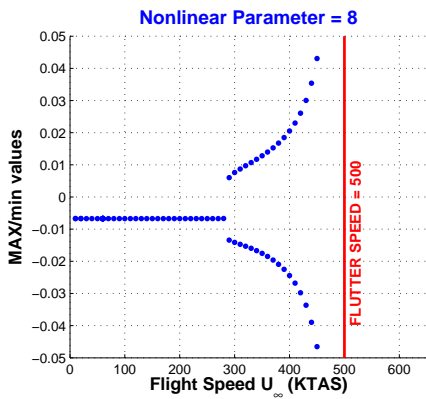
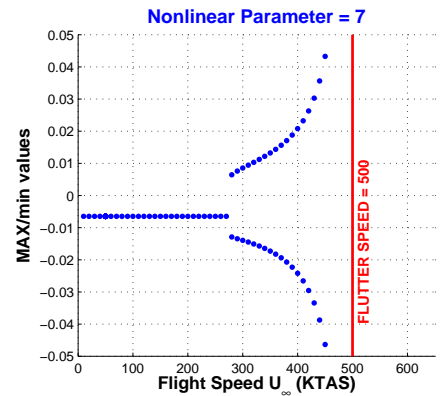
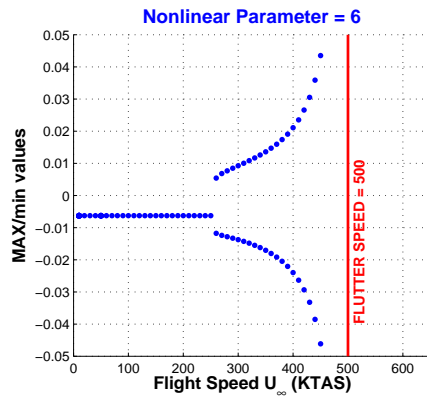
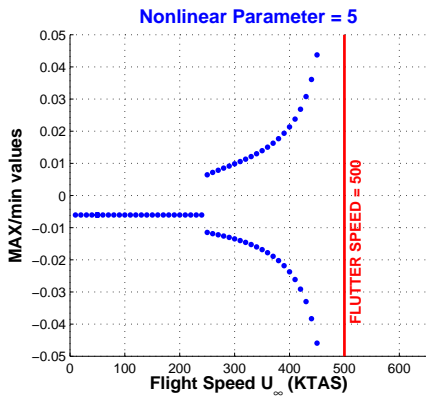
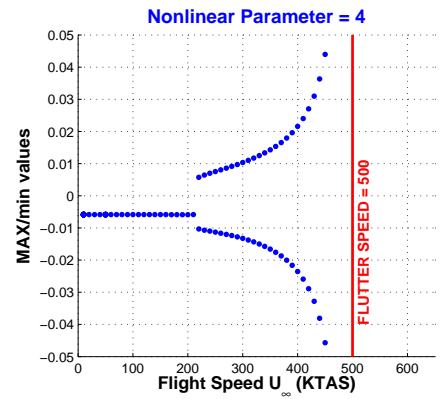
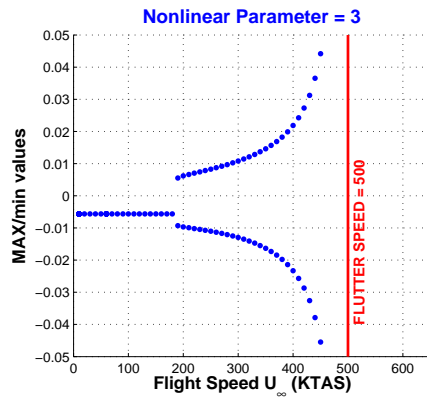
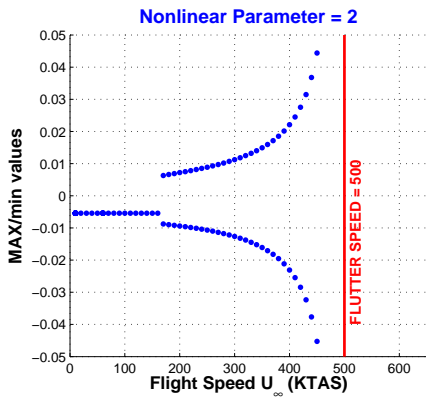
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Preload (DP)	S01.ROT.FDP	2/5



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Preload (DP)	S01.ROT.FDP	3/5



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Preload (DP)	S01.ROT.FDP	4/5

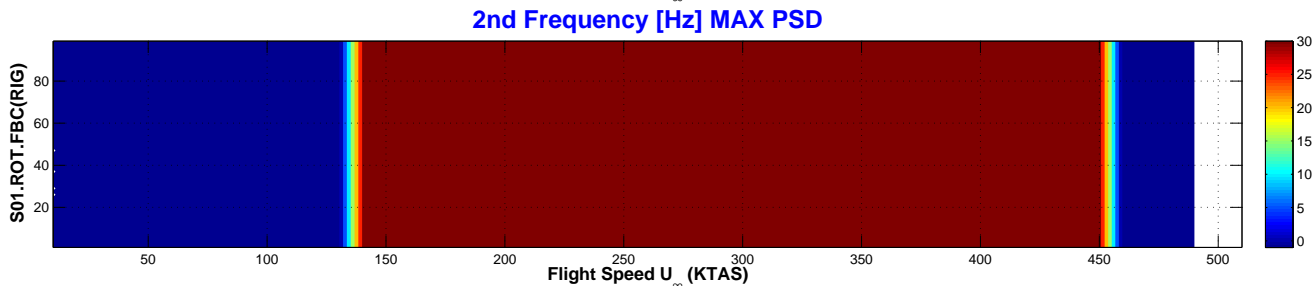
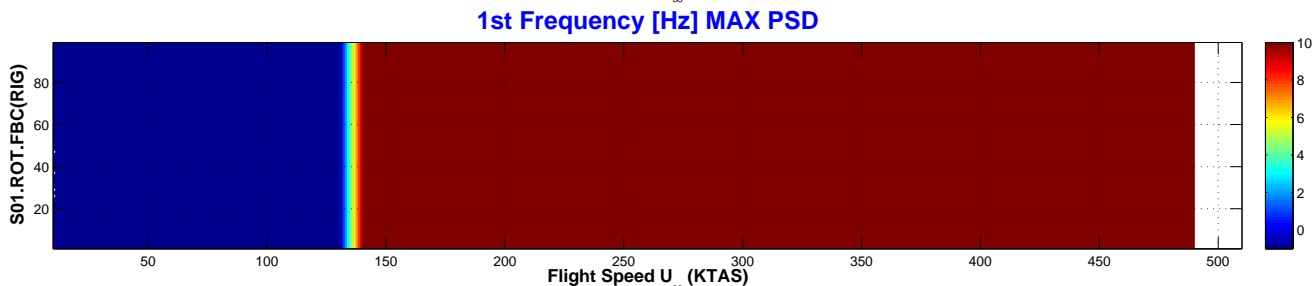
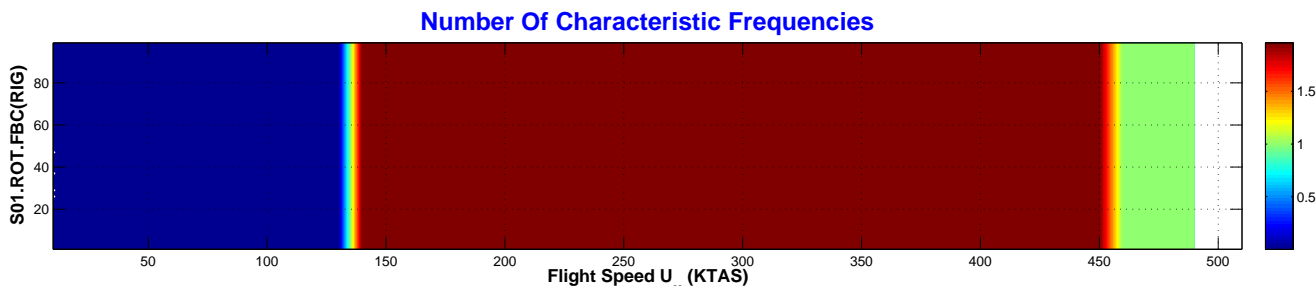
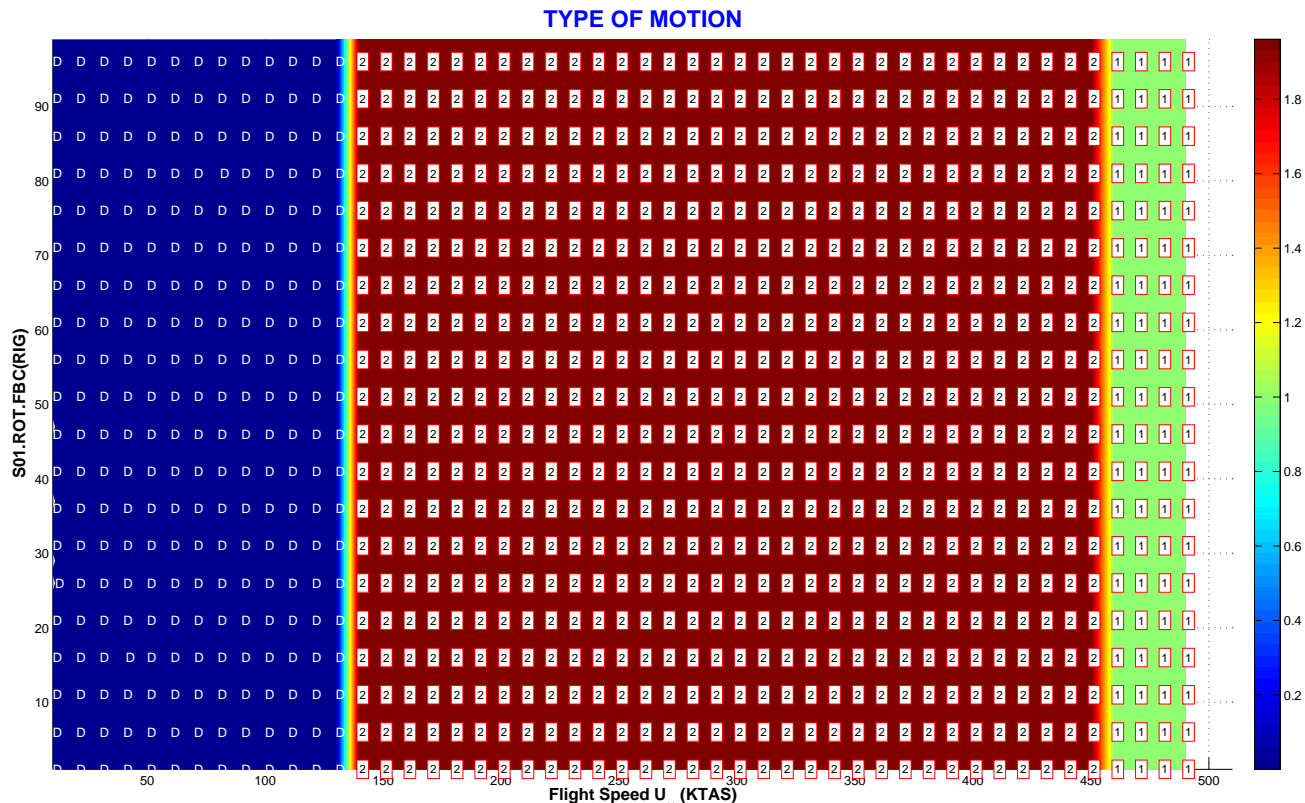


CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Amplitude (DP)	S01.ROT.FDP	5/5

Tipo de Respuesta	DMP	Movimiento amortiguado a baja velocidad de vuelo U_∞ , en un rango de velocidades que depende de la precarga.
	LCO	La respuesta amortiguada se mantiene hasta velocidades en las que aparecen movimientos armónicos no amortiguados (LCOs) con 3, 2 y finalmente 1 frecuencia característica, la del mecanismo del <i>flutter</i> . La velocidad de vuelo a la que aparecen de los LCOs y el tipo de LCO depende de la precarga. Sin embargo, la respuesta es la misma para una precarga positiva y su equivalente negativa, es decir, el sistema presenta simetría respecto de la precarga nula.
	CHA	No se obtiene respuesta caótica.
	FLT	La velocidad de <i>flutter</i> es de 500 KTAS independiente de la precarga.
Transición entre Tipos de Respuesta	La respuesta evoluciona con la velocidad de la siguiente forma: DMP-LCO[3]-LCO[2]-LCO[1]-FLT, indicando con LCO[n] un movimiento armónico con n frecuencias características. La transición de movimiento amortiguado DMP a oscilación de ciclo límite LCO[3] ocurre de una forma instantánea al aumentar ligeramente la velocidad de vuelo. Se puede considerar como una transición <i>dura</i> . Esta velocidad de transición DMP-LCO[3] es mayor a medida que aumenta el valor de la precarga. La transición LCO[3] a LCO[2] ocurre también a velocidades mayores a medida que aumenta la precarga. La aparición de menos frecuencias características (de 3 a 2 en este caso) está asociada a que la amplitud del movimiento es cada vez mayor y el sistema está menos tiempo dentro de la holgura asociada a la no linealidad. Por tanto, los actuadores de las aletas están trabajando cada vez más tiempo en la zona lineal. El rango de velocidades en el que se mantiene el movimiento armónico LCO[3] es prácticamente independiente de la precarga. Por último, la transición del LCO[2] a LCO[1], este último con la frecuencia del mecanismo de <i>flutter</i> , ocurre a una velocidad aproximada de 450 KTAS e independiente de la precarga. La aparición de <i>flutter</i> se puede predecir debido a que la amplitud de las oscilaciones LCOs aumenta progresivamente a medida que aumenta la velocidad de vuelo.	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 496$. KTAS / $VF_{(K=0)} = 331$. KTAS
	No Lineal	500 KTAS (aprox.) e independiente de la amplitud de la precarga.
Variación de la Amplitud	con U_∞	En los rangos de velocidad para los que aparecen los LCOs (LCO[1], LCO[2] o LCO[3]) la amplitud de la respuesta es mayor al aumentar la velocidad de vuelo.
	con ROT.FDP	El tipo de respuesta depende de la precarga.
Bifurcaciones	Bifurcación de tipo <i>Hopf</i> en la transición DMP-LCO[3].	
Flutter onset	La entrada en <i>flutter</i> se puede considerar <i>suave</i> ya que la amplitud del movimiento ha estado progresivamente aumentado a velocidades inferiores, y la monitorización del diagrama de bifurcación predice de forma evidente la divergencia de la respuesta a medida que se aumenta la velocidad.	

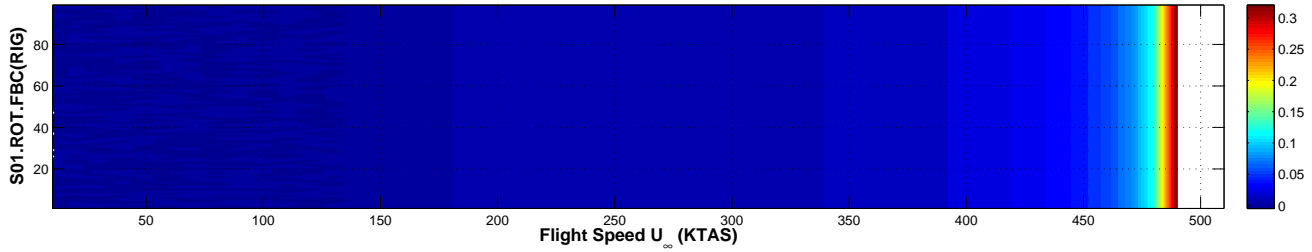
VARIACIÓN DE LAS CONDICIONES INICIALES

CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Boundary Conditions (BC)	S01.ROT.FBC	1/3

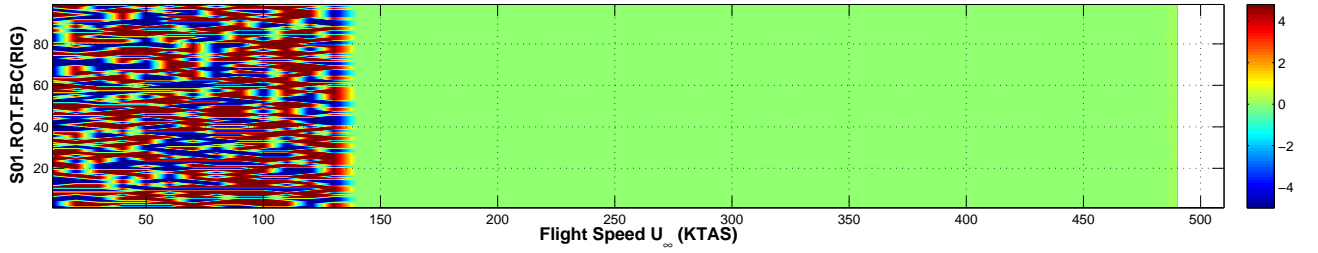


CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Boundary Conditions (BC)	S01.ROT.FBC	2/3

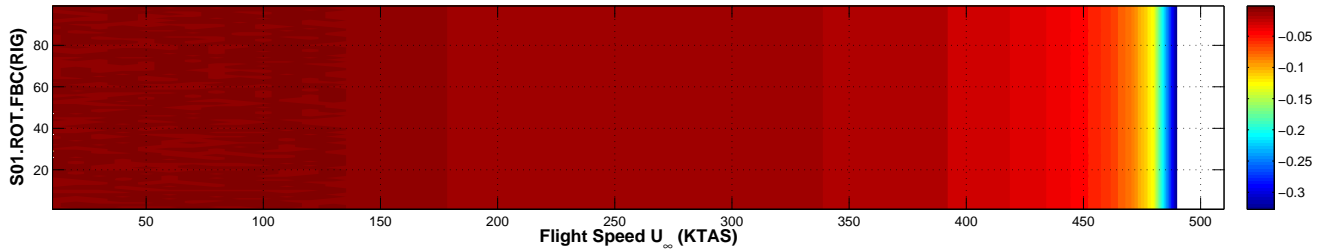
MAXIMUM VALUE



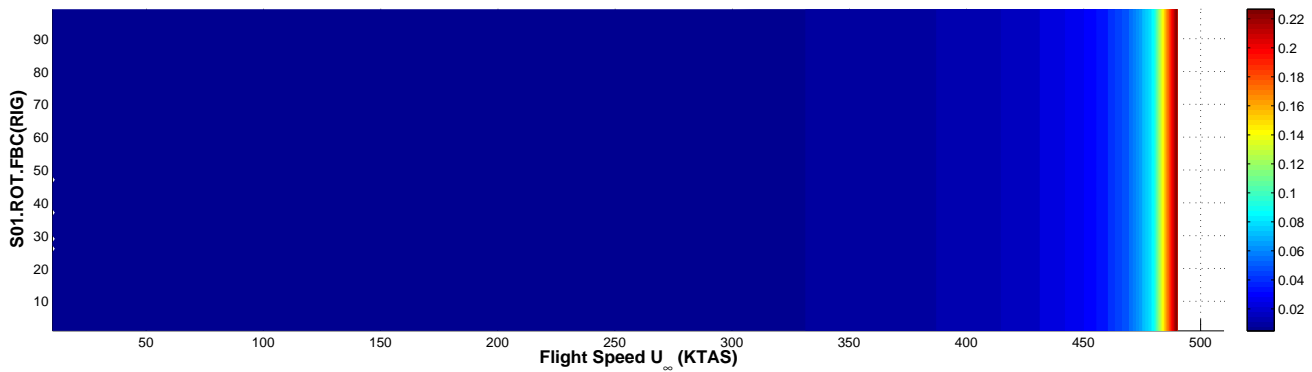
ARITHMETIC MEAN



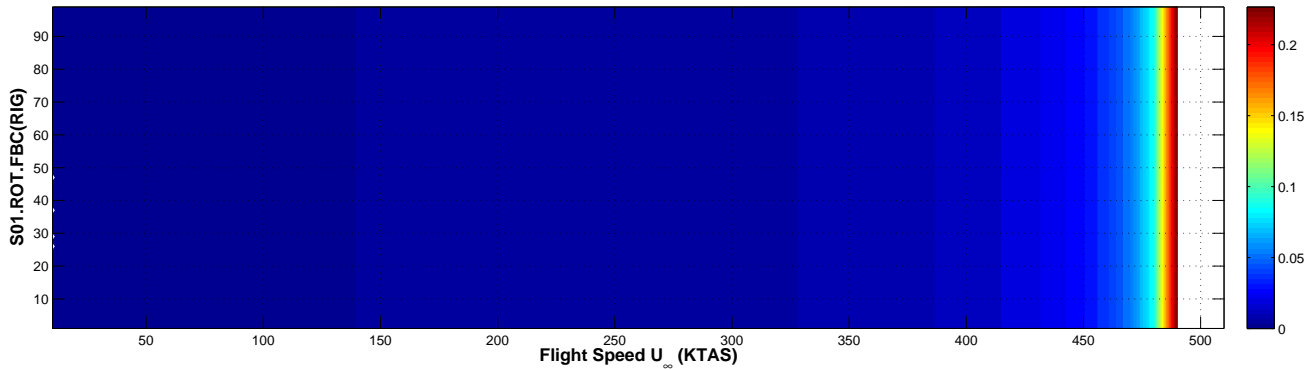
MINIMUM VALUE



ROOT MEAN SQUARE



STANDARD DEVIATION



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Lateral (LAT)	Freeplay (F)	Boundary Conditions (BC)	S01.ROT.FBC	3/3

Tipo de Respuesta	DMP	Respuesta amortiguada a velocidades inferiores a 140 KTAS (aprox.); independiente de las condiciones iniciales.
	LCO	Respuesta armónica (dos/una frecuencias características) desde 140 KTAS a 450 KTAS; independiente de las condiciones iniciales.
	CHA	No existe respuesta caótica.
	FLT	Velocidad de <i>flutter</i> aproximada: 490 KTAS; independiente de las condiciones iniciales.
Transición entre Tipos de Respuesta	La respuesta evoluciona de la siguiente forma: DMP-LCO[2]-LCO[1]-FLT. A velocidades inferiores a 140 KTAS la respuesta es amortiguada. A la velocidad de 140 KTAS ocurre una bifurcación de tipo <i>Hopf</i> , con un salto brusco de respuesta amortiguada a armónica de tipo LCO[2] (lo que se denomina <i>hard Hopf bifurcation</i>). Esta respuesta LCO[2] (con dos frecuencias características) evoluciona a una respuesta con una frecuencia característica (LCO[1]), la del mecanismo de <i>flutter</i> . Esta respuesta LCO[1] permanece hasta llegar a la velocidad de <i>flutter</i> (490 KTAS aprox.). Todo lo anterior es independiente de las condiciones iniciales.	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 496. \text{ KTAS} / VF_{(K=0)} = 331. \text{ KTAS}$.
	No Lineal	490 KTAS aprox., independiente de las condiciones iniciales.
Variación de la Amplitud	con U_∞	Una vez iniciada la oscilación de ciclo límite LCO[2], la amplitud aumenta exponencialmente con la velocidad de vuelo U_∞ .
	con LAT.FBC	La respuesta no depende de las condiciones iniciales.
Bifurcaciones	Bifurcación de tipo <i>Hopf</i> en la transición de respuesta amortiguada a oscilación de ciclo límite (DMP-LCO[2]), que ocurre a una velocidad de vuelo aproximada de $U_\infty = 130 - 140 \text{ KTAS}$.	
Flutter onset	La entrada en <i>flutter</i> es previsible a la vista del aumento progresivo de la amplitud de oscilación a medida que la velocidad se acerca a la de <i>flutter</i> . La velocidad de <i>flutter</i> no lineal es independiente de las condiciones iniciales.	

NOTA:

Las condiciones iniciales son:

$$\{x(0)\} = \left[+0,015 \quad -0,015 \quad \hat{\xi}_3 \quad 0,0 \quad 0,0 \quad \frac{d\hat{\xi}_3}{dt} \right]$$

donde $\hat{\xi}_3$ y $d\hat{\xi}_3/dt$ se varían aleatoriamente dando un total de 99 condiciones iniciales distintas.

9.2.2. Nolinealidad en Flexión Lateral de Pilón (RIG.S01.LAT)

La figura 9.2 detalla la nolinealidad tipo *freeplay* con las principales características que se consideran como parámetros en el estudio:

- Amplitud de la holgura (*Deadband Amplitude FDA*).
- Centro de la nolinealidad (*Deadband Center FDC*).
- Precarga de la nolinealidad (*Deadband Preload FDP*).

Aparte de los tres parámetros anteriores, se estudiará el efecto de las condiciones iniciales (**FBC**) en la respuesta. La nolinealidad se considera concentrada en el soporte que modeliza la flexión lateral del conjunto pílón+misil, de forma que el desplazamiento adimensional $w_b(x^{NLD}; t)/L$ en la coordenada del soporte nolineal x^{NLD} es la variable nolineal.

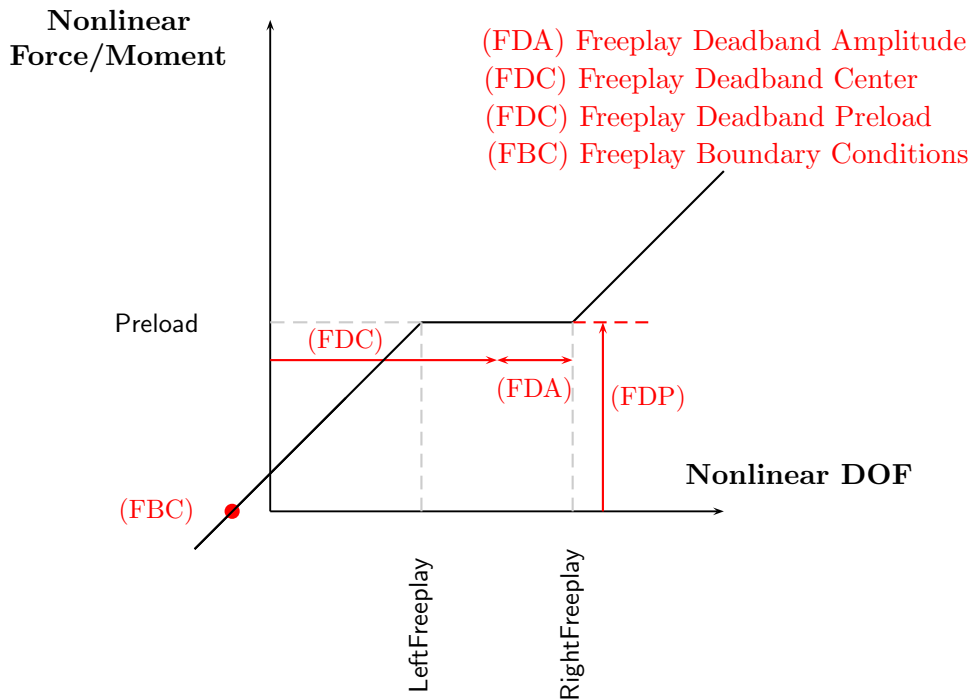


Figura 9.2: Nolinealidad del tipo *freeplay* con los principales parámetros que la definen.

Dada una nolinealidad tipo *freeplay* nominal, de precarga 0,0 [N.m]⁴ y amplitud $\mp 5,0$ [mm], se varía uno a uno los parámetros mencionados anteriormente.

La condición inicial nominal del vector de estado-espacio $\{x\}$ es:

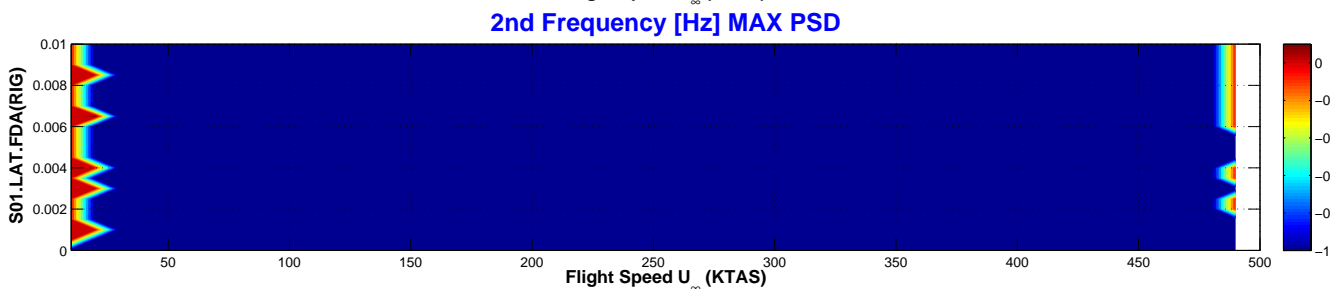
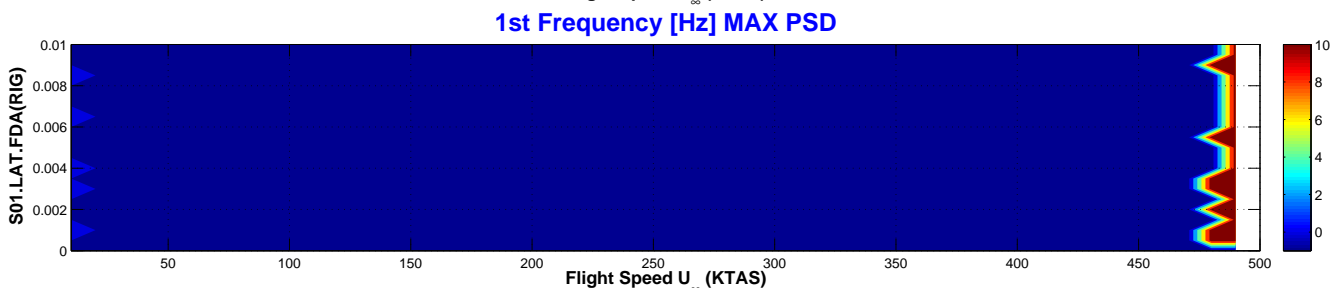
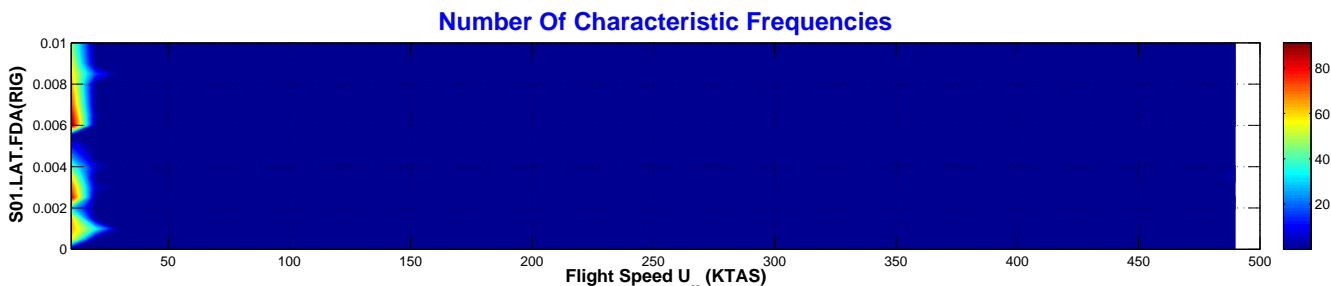
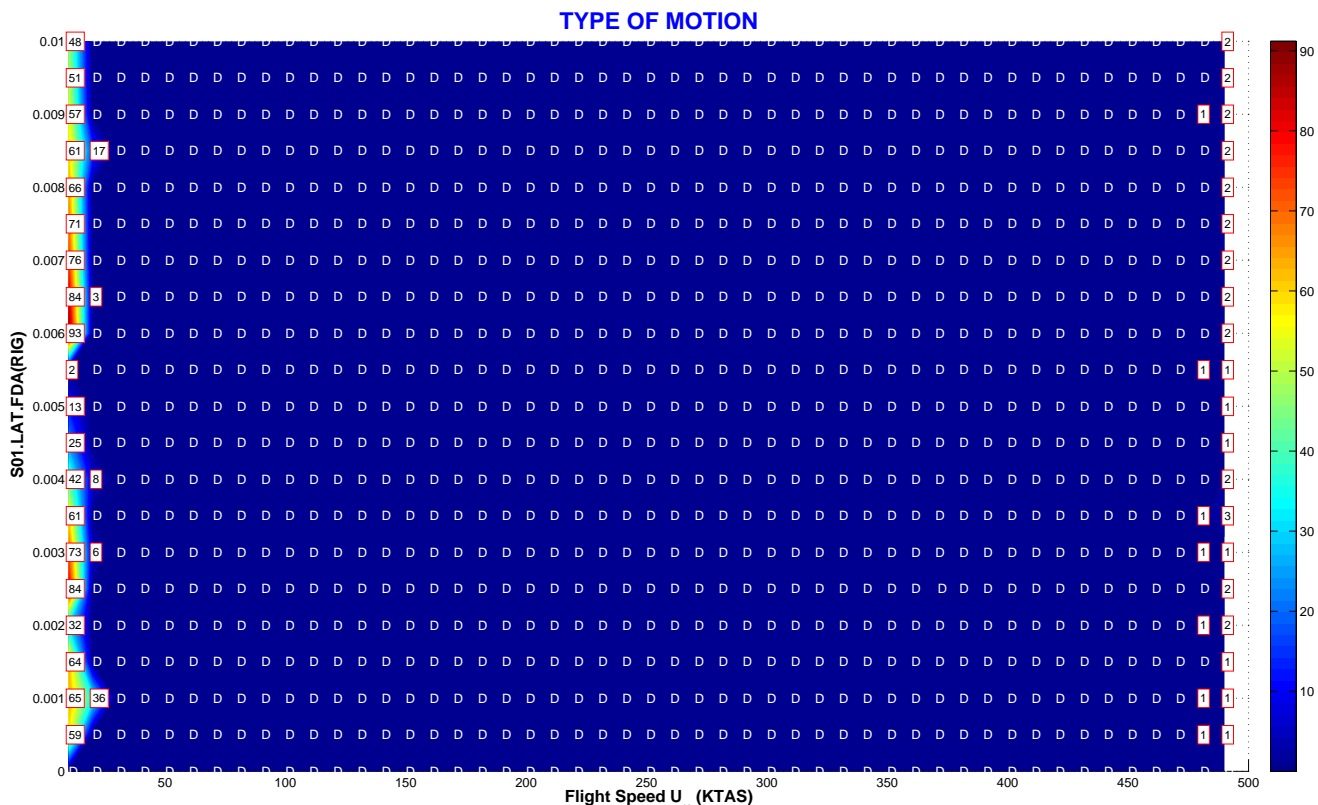
$$\{x(0)\}_{6 \times 1} = \left[\hat{\xi}_1 \quad \hat{\xi}_2 \quad \hat{\xi}_3 \quad \frac{d\hat{\xi}_1}{d\hat{t}} \quad \frac{d\hat{\xi}_2}{d\hat{t}} \quad \frac{d\hat{\xi}_3}{d\hat{t}} \right]^T = \left[+0,015 \quad -0,015 \quad -0,015 \quad 0,0 \quad 0,0 \quad 0,0 \right]^T$$

siendo la coordenada generalizada $\hat{\xi}_1$ (modo lateral) y su velocidad generalizada $d\hat{\xi}_1/d\hat{t}$ las que se varían en el estudio de la sensibilidad de la respuesta a las condiciones iniciales (**FBC**).

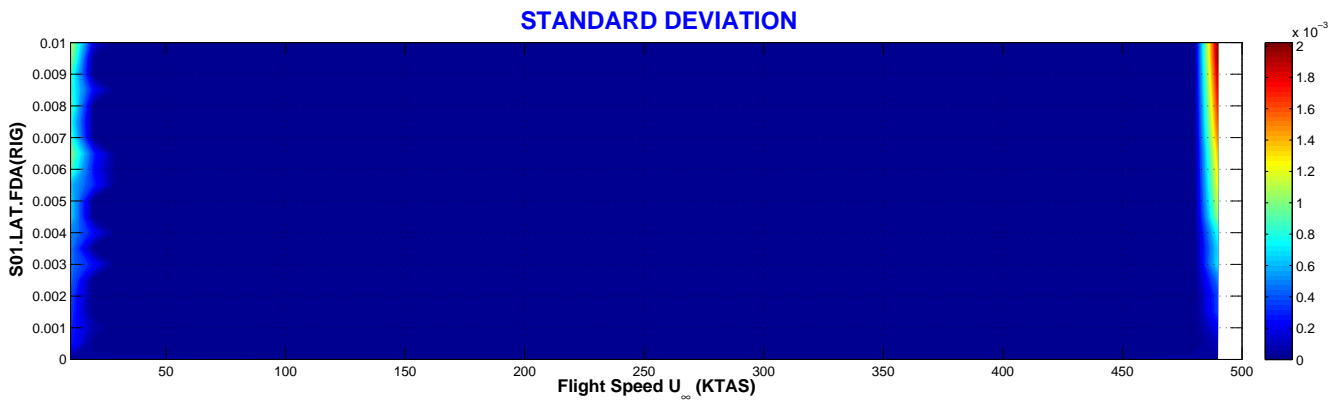
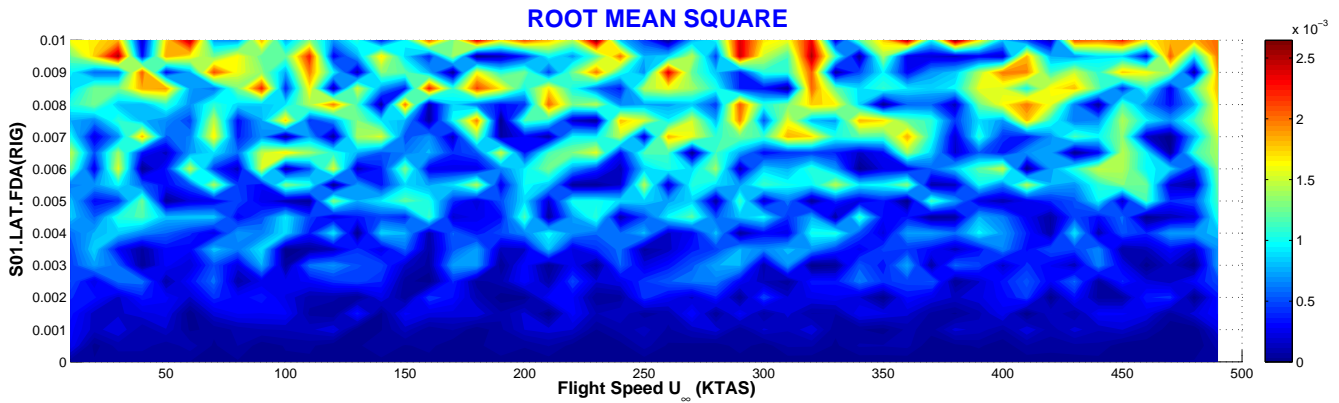
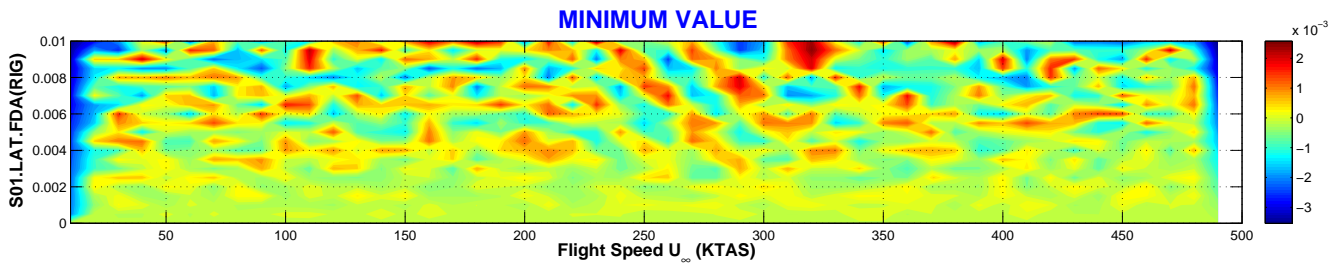
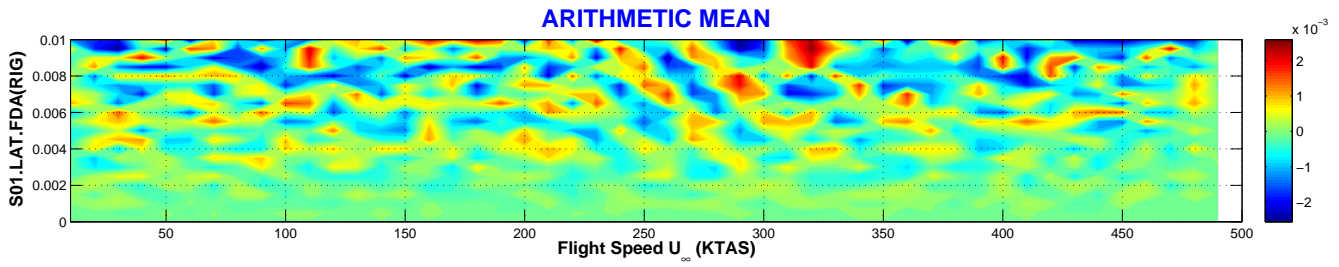
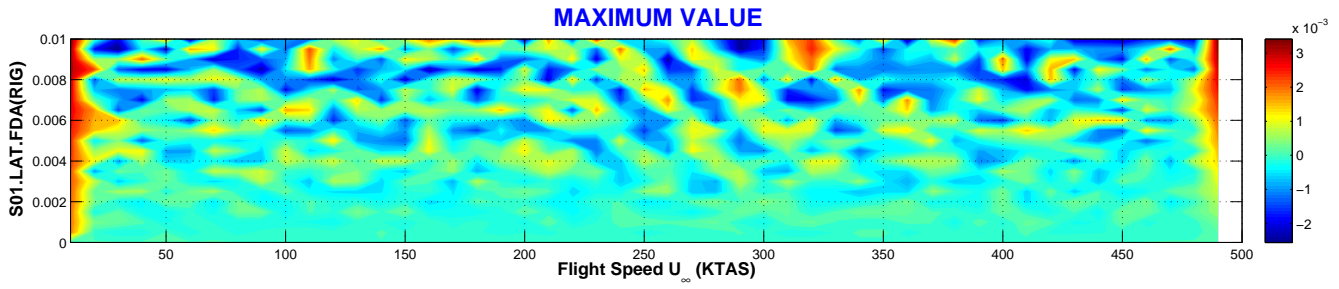
⁴Recuérdese que la precarga adimensional venía dada por $\hat{F}_0^{NLD} = F_0^{NLD}/m_0U_0^2$.

VARIACIÓN DE LA AMPLITUD DE LA HOLGURA

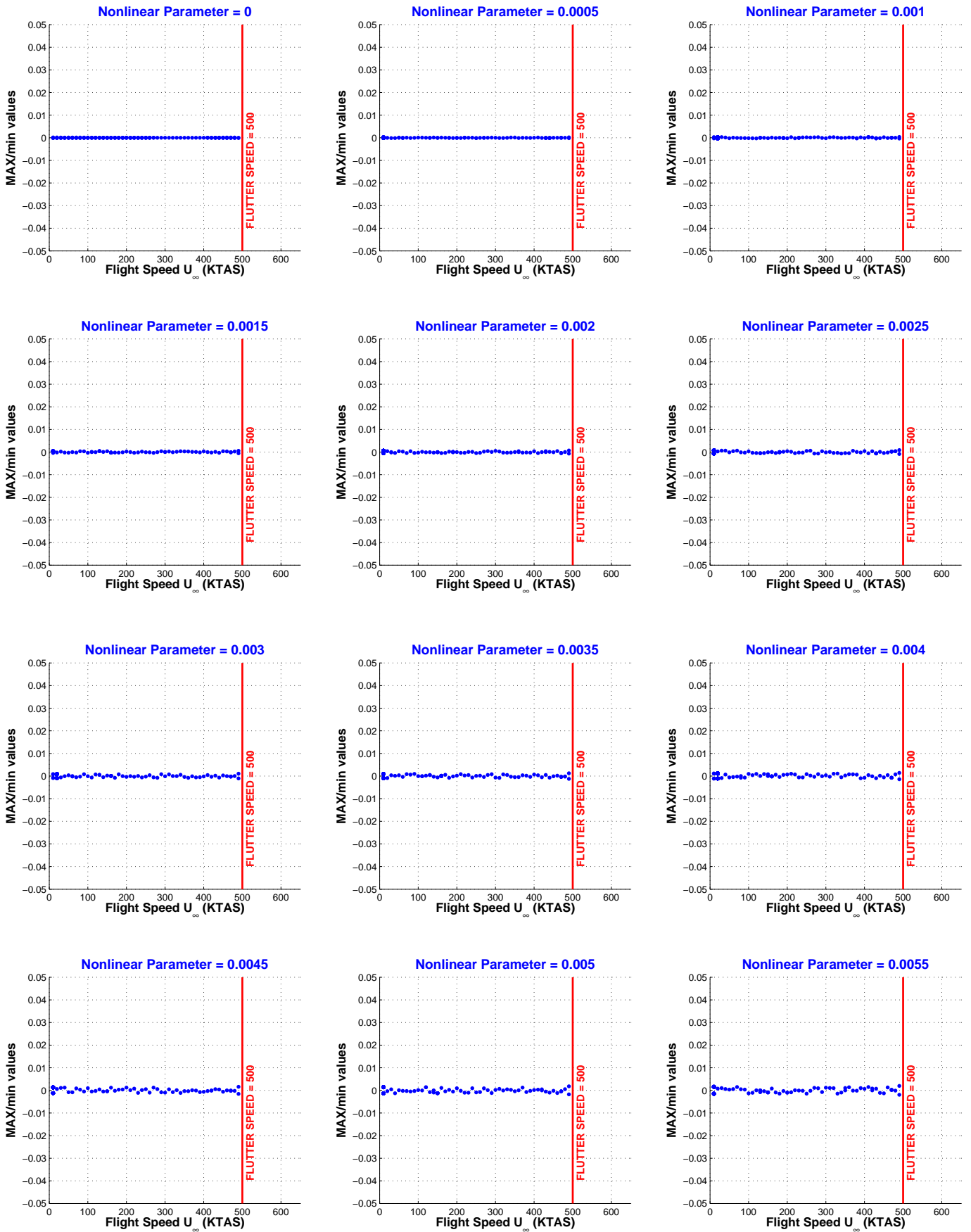
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Lateral (LAT)	Freeplay (F)	Deadband Amplitude (DA)	S01.LAT.FDA	1/5



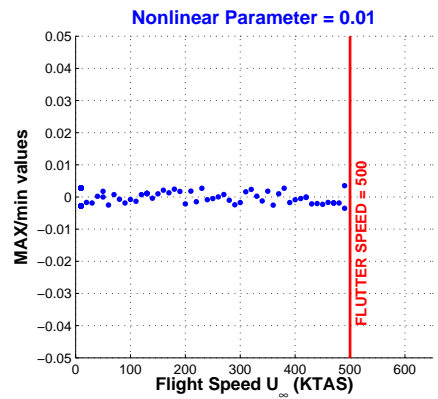
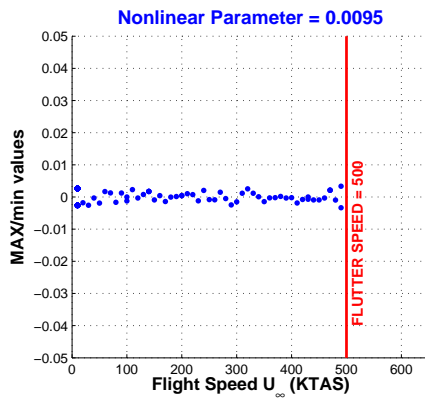
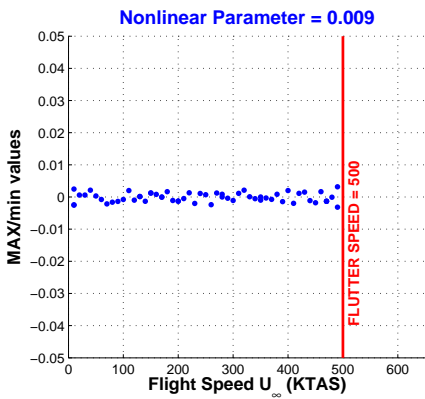
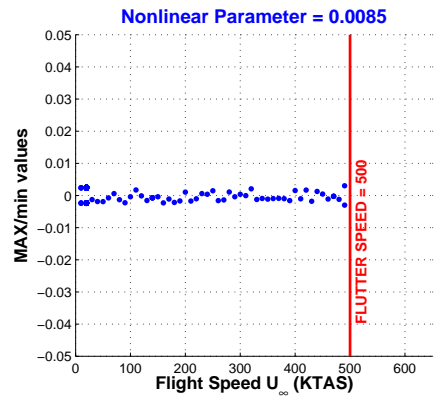
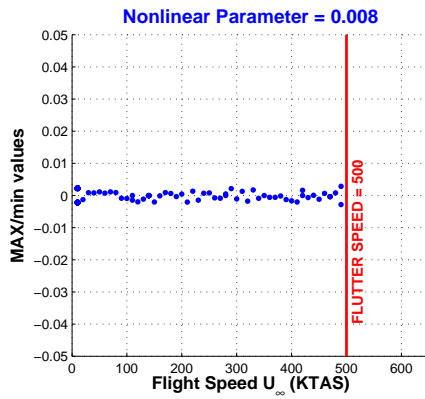
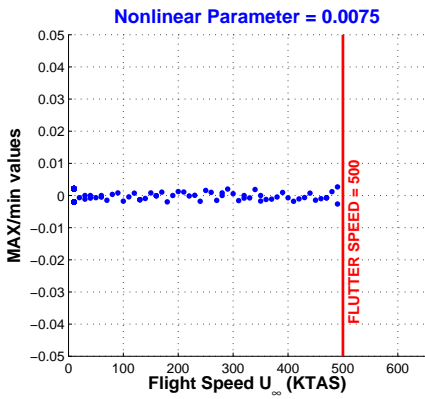
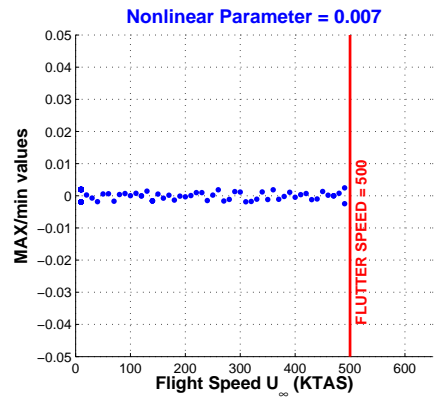
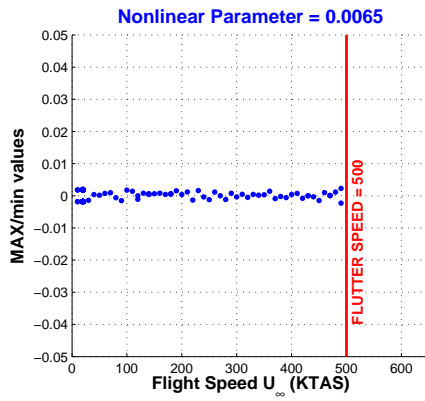
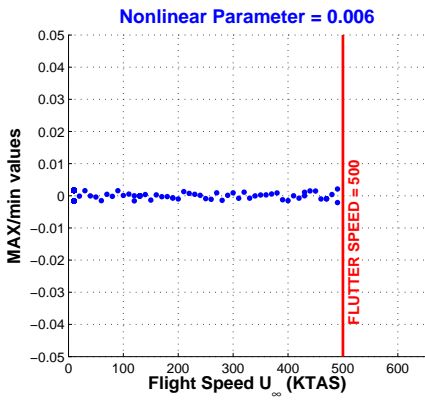
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Lateral (LAT)	Freeplay (F)	Deadband Amplitude (DA)	S01.LAT.FDA	2/5



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Lateral (LAT)	Freeplay (F)	Deadband Amplitude (DA)	S01.LAT.FDA	3/5



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Lateral (LAT)	Freeplay (F)	Deadband Amplitude (DA)	S01.LAT.FDA	4/5



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Lateral (LAT)	Freeplay (F)	Deadband Amplitude (DA)	S01.LAT.FDA	5/5

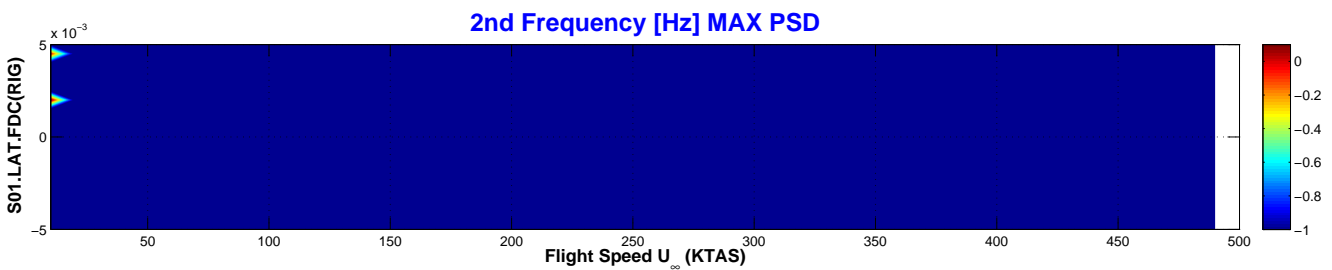
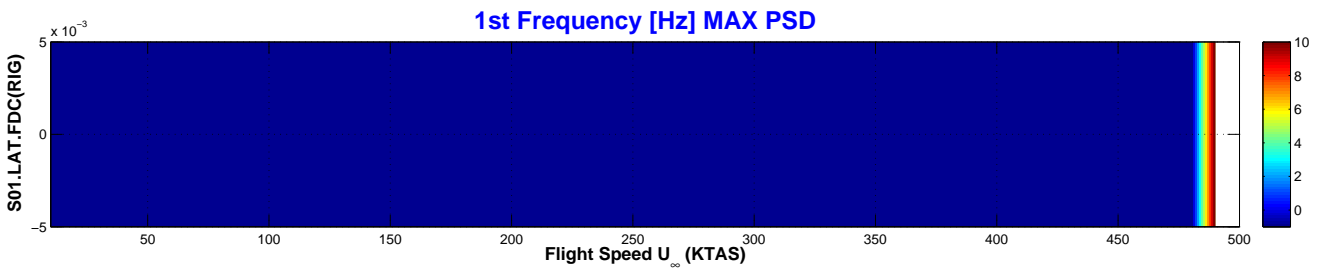
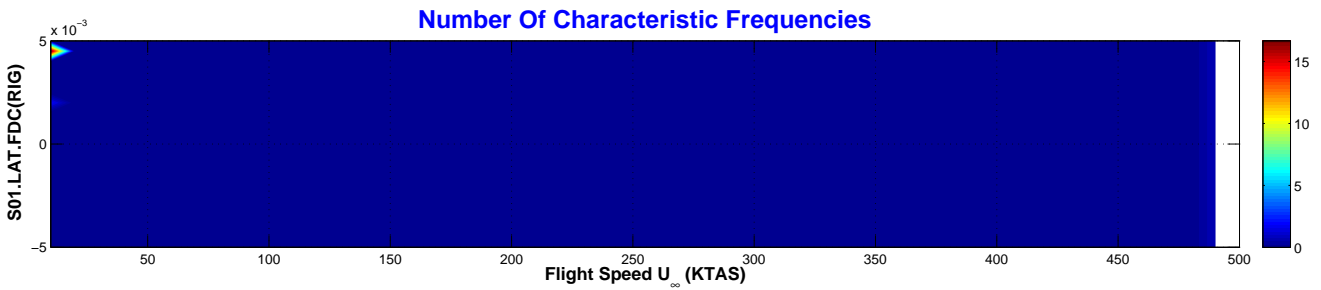
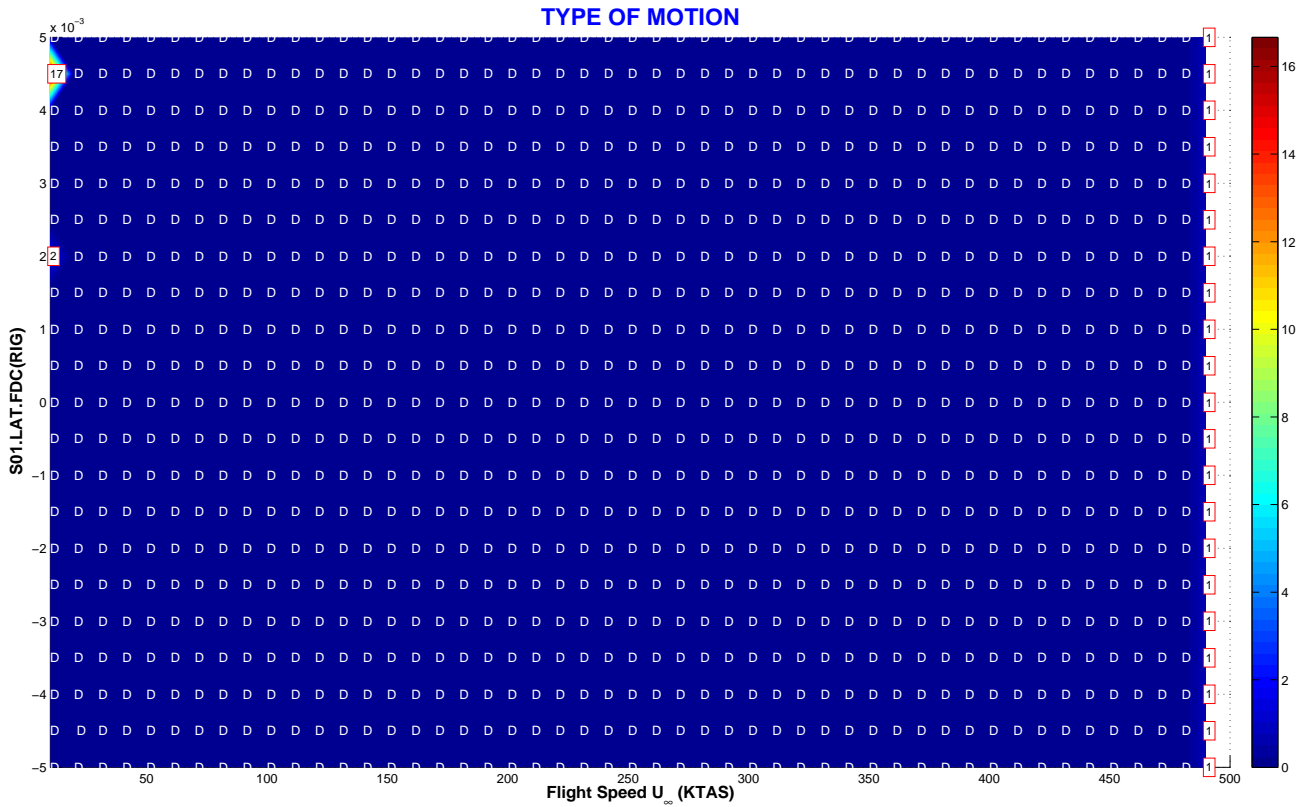
Tipo de Respuesta	DMP	Movimiento amortiguado hasta la velocidad de vuelo U_∞ de 490 KTAS. La respuesta no depende de la amplitud de la holgura.
	LCO	La respuesta armónica no amortiguada aparece a la velocidad U_∞ de 490 KTAS, independiente de la amplitud de la holgura.
	CHA	El sistema no tiene respuesta de tipo caótico.
	FLT	La respuesta divergente de <i>flutter</i> aparece a la velocidad de 495 KTAS aproximadamente. Esta velocidad es independiente de la amplitud de la holgura.
Transición entre Tipos de Respuesta	La respuesta evoluciona con la velocidad de la siguiente forma: DMP-LCO[1]-FLT, indicando con LCO[1] un movimiento armónico con una frecuencia característica, en este caso la frecuencia del mecanismo de <i>flutter</i> ya que este LCO ocurre tan solo 5 KTAS antes de la velocidad de <i>flutter</i> (495 KTAS). La transición de movimiento amortiguado DMP a oscilación de ciclo límite LCO[1] ocurre de una forma instantánea al aumentar ligeramente la velocidad de vuelo. Se puede considerar como una transición <i>dura</i> .	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 496$. KTAS / $VF_{(K=0)} = 489$. KTAS.
	No Lineal	495 KTAS (aprox.) e independiente de la amplitud de la precarga.
Variación de la Amplitud	con U_∞	El movimiento es amortiguado hasta la velocidad de vuelo U_∞ de 490 KTAS. En el intervalo de 490 a 495 KTAS existe un movimiento LCO con la frecuencia del mecanismo de <i>flutter</i> y una amplitud mayor a medida que aumenta la velocidad de vuelo.
	con LAT.FDA	La amplitud del movimiento no depende de la amplitud de la holgura.
Bifurcaciones	Bifurcación de tipo <i>Hopf</i> en la transición DMP-LCO[1].	
Flutter <i>onset</i>	La respuesta divergente de <i>flutter</i> aparece de forma poco previsible. En general, el sistema se comporta como lineal: amortiguado a velocidades menores que la de <i>flutter</i> y divergente a velocidades mayores que la de <i>flutter</i> .	

NOTA:

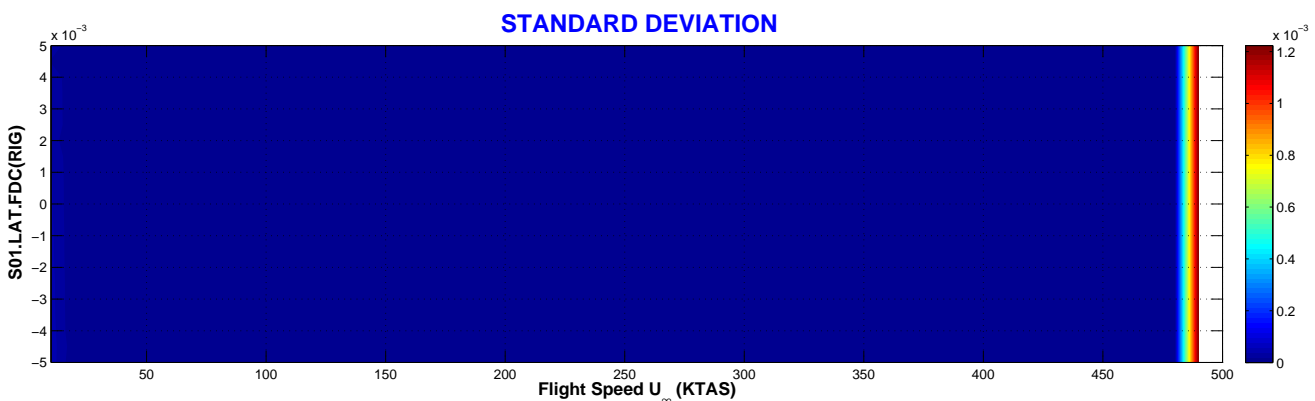
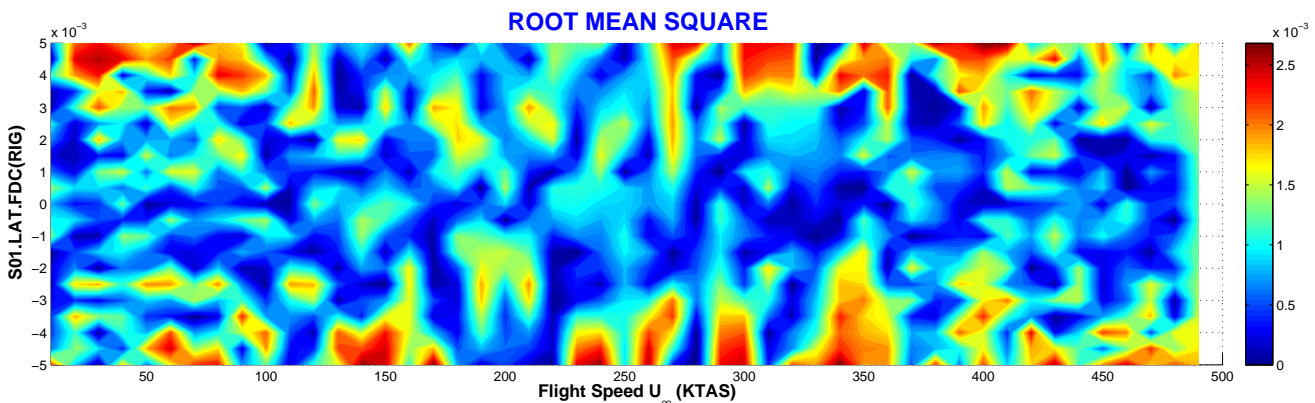
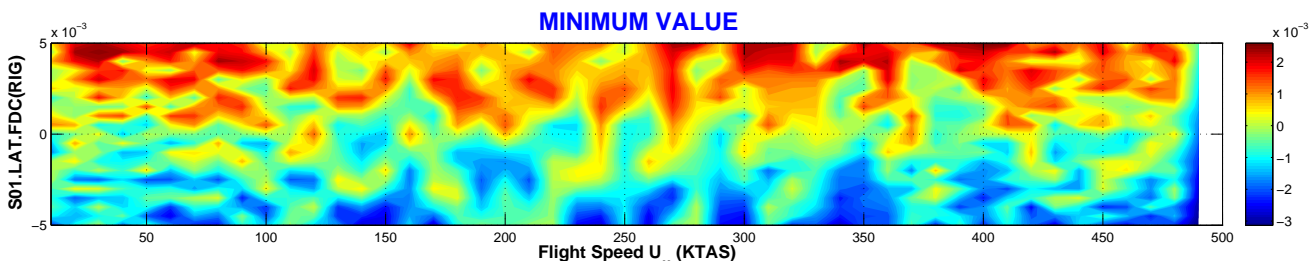
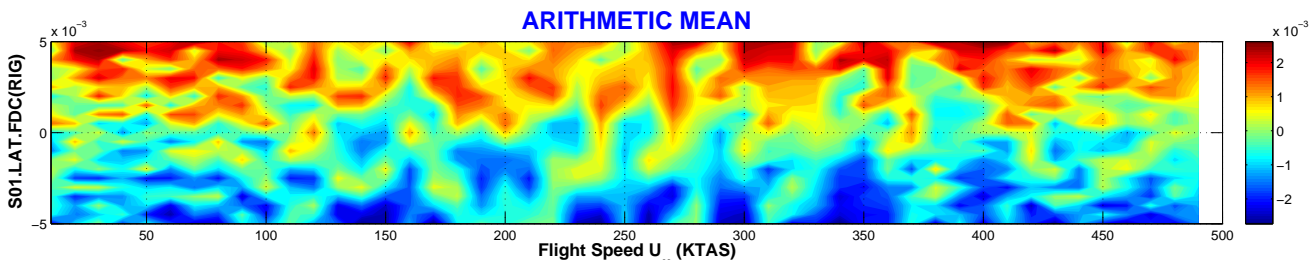
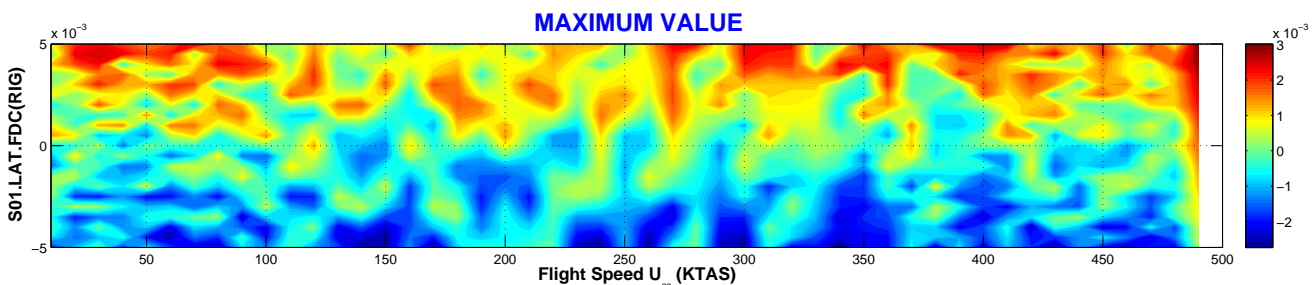
A velocidades en las que la respuesta está amortiguada, el valor de la coordenada generalizada ξ_1 (desplazamiento lateral) en el estado estacionario final depende de las condiciones iniciales y la velocidad de vuelo. En esta situación el misil está en equilibrio dentro de la zona *deadband* debido a que los ángulos de guiñada (modo ξ_2) y rotación de aletas (modo ξ_3) son nulos.

VARIACIÓN DEL CENTRO DE LA NOLINEALIDAD

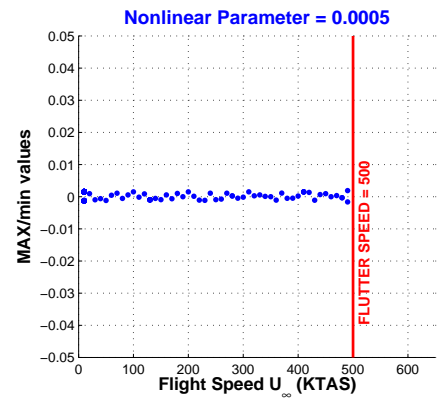
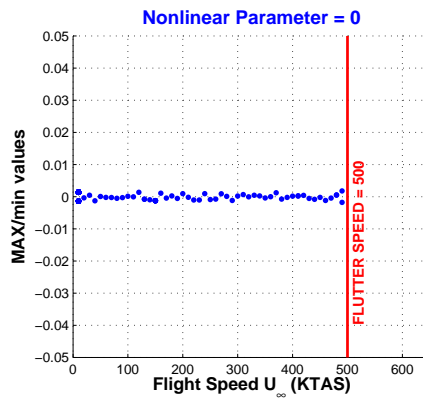
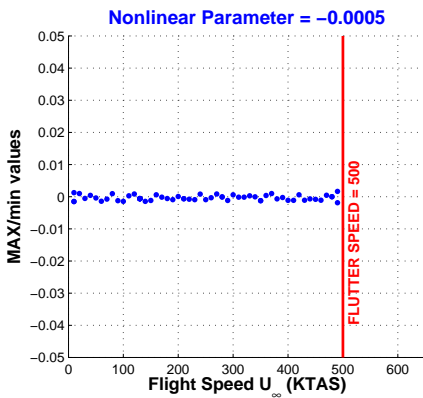
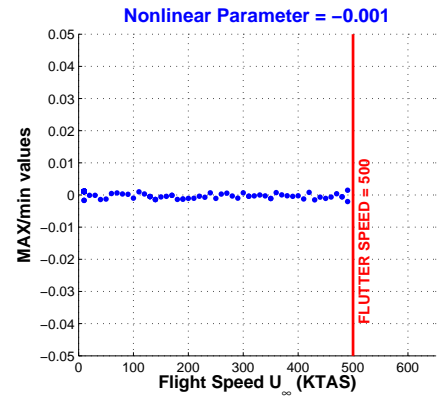
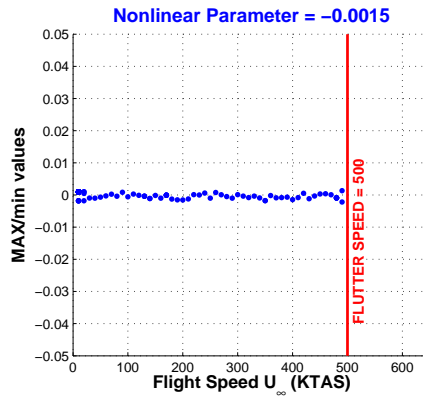
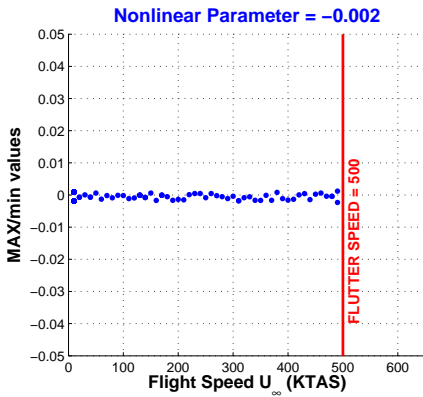
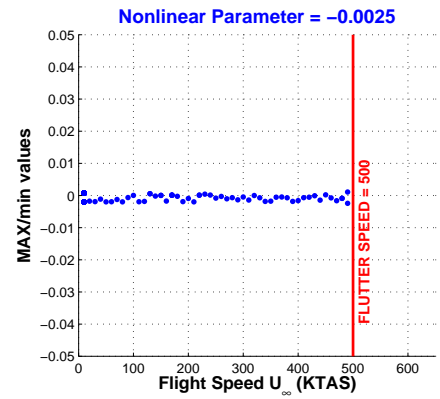
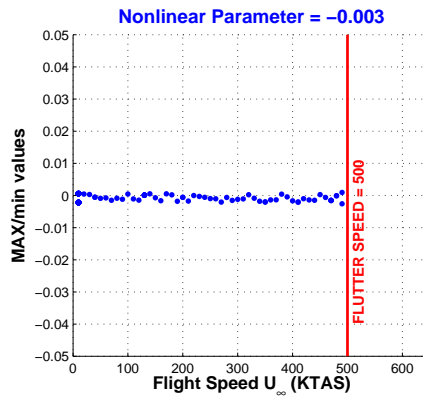
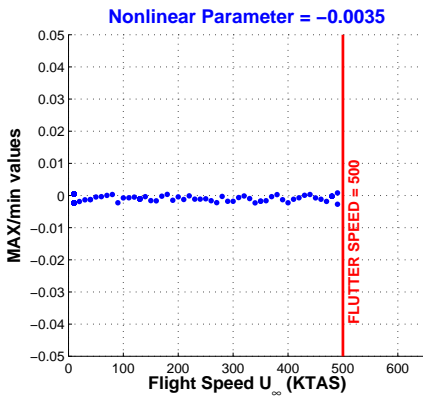
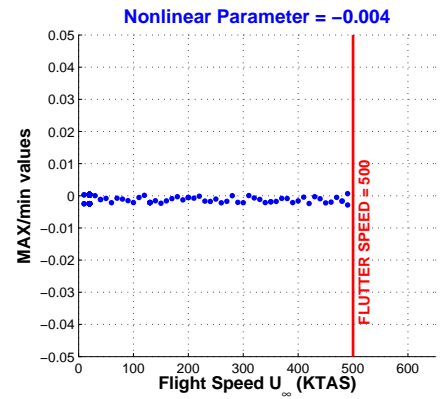
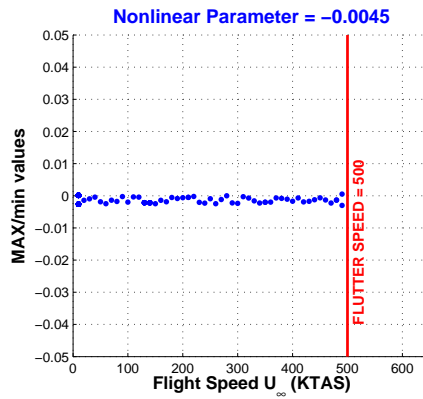
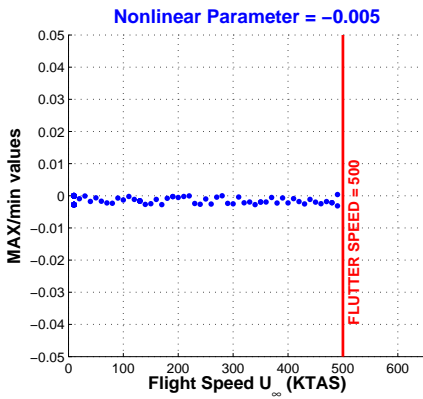
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Lateral (LAT)	Freeplay (F)	Deadband Center (DC)	S01.LAT.FDC	1/5



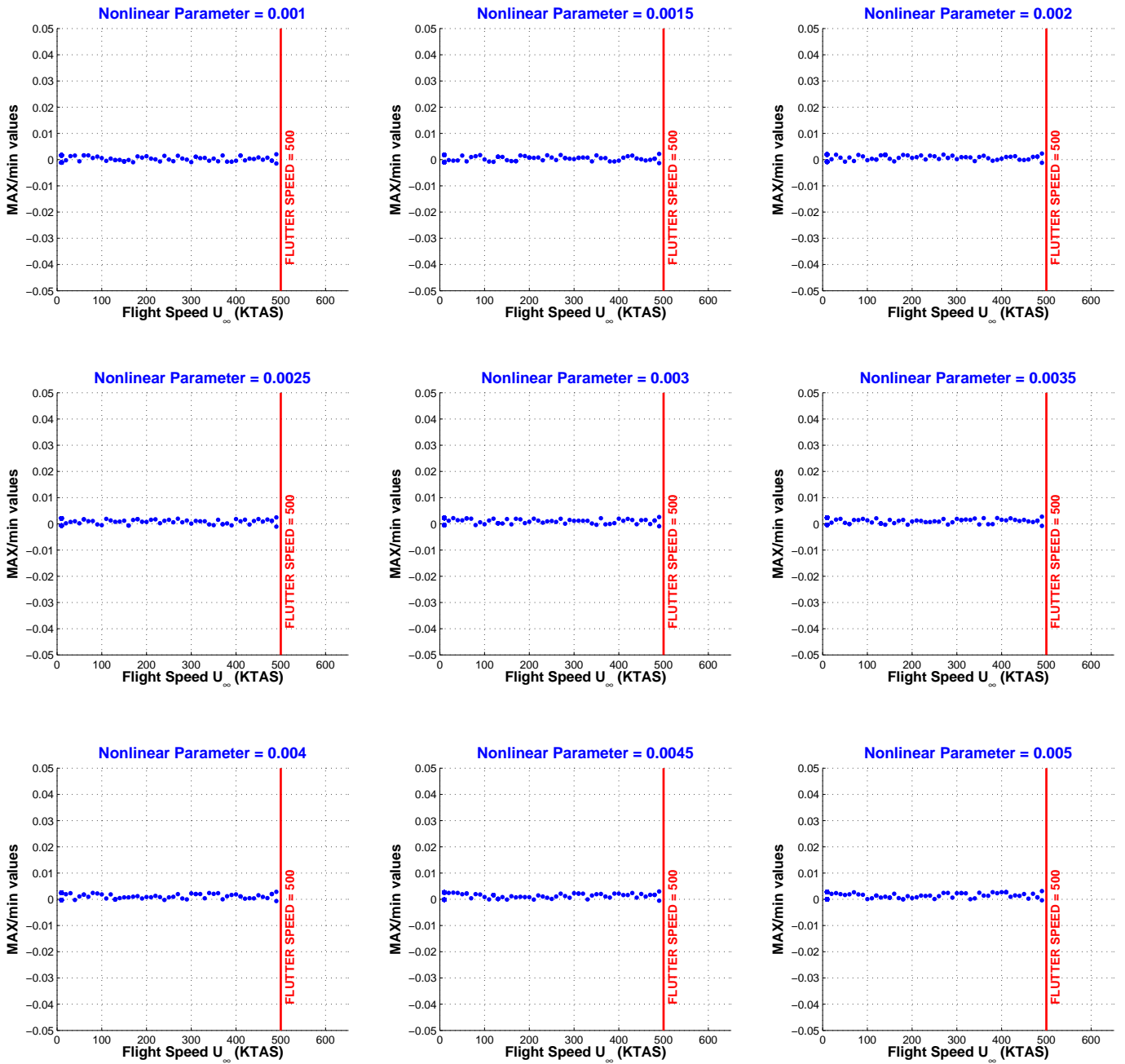
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Lateral (LAT)	Freeplay (F)	Deadband Center (DC)	S01.LAT.FDC	2/5



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Lateral (LAT)	Freeplay (F)	Deadband Center (DC)	S01.LAT.FDC	3/5



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Lateral (LAT)	Freeplay (F)	Deadband Center (DC)	S01.LAT.FDC	4/5



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Lateral (LAT)	Freeplay (F)	Deadband Amplitude (DC)	S01.LAT.FDC	5/5

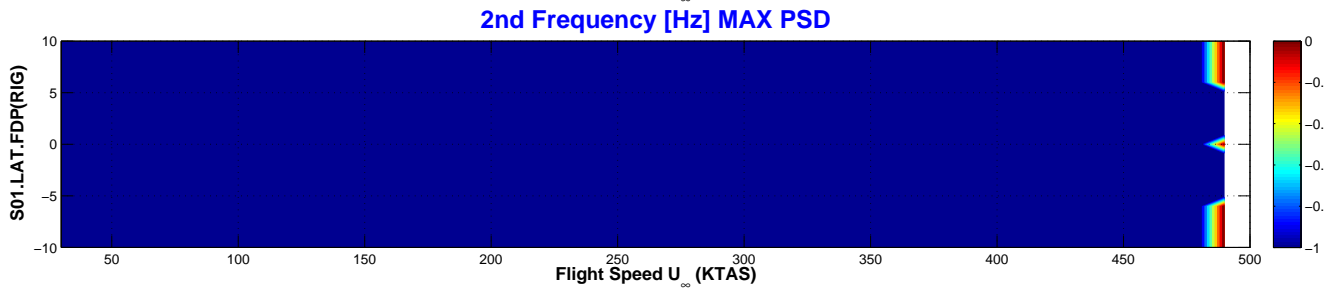
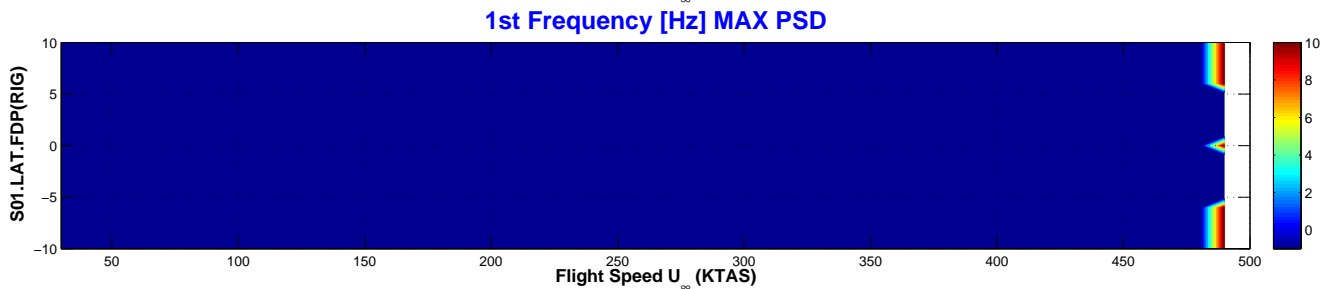
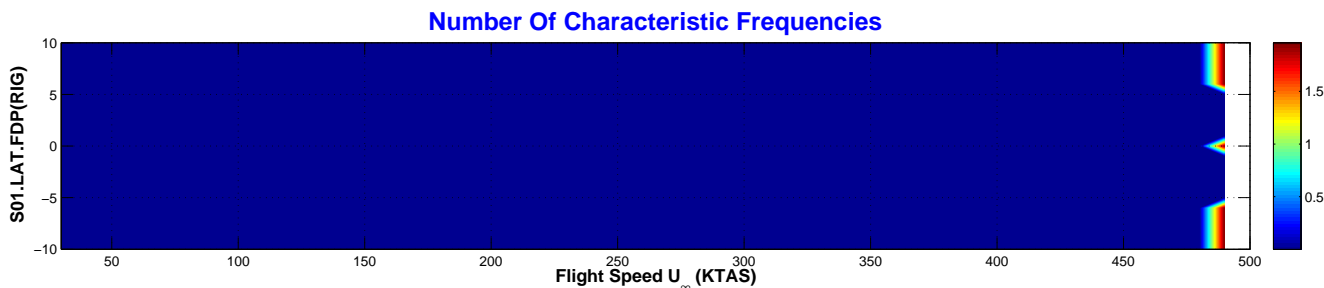
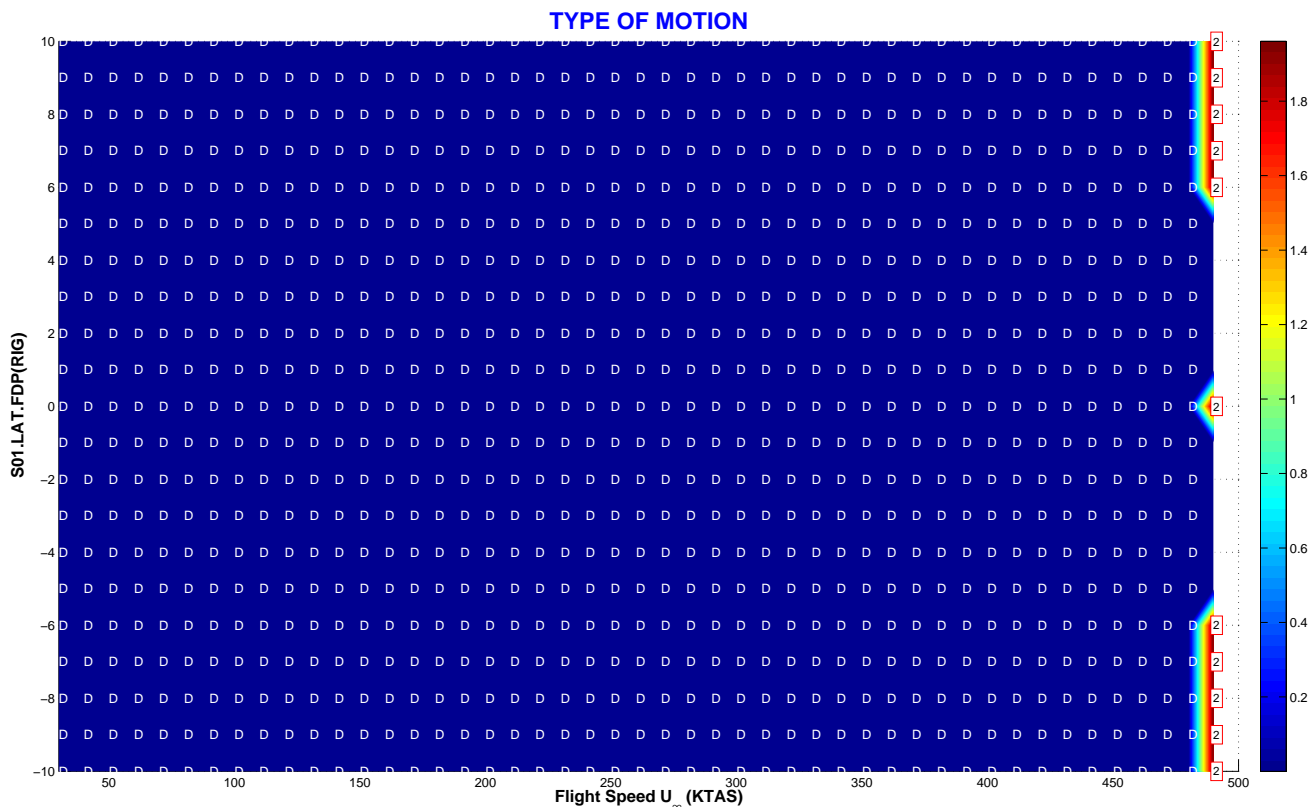
Tipo de Respuesta	DMP	Movimiento amortiguado a cualquier velocidad de vuelo por debajo de la velocidad de <i>flutter</i> lineal (500 KTAS aprox.).
	LCO	No existe movimiento de tipo LCO.
	CHA	No existe respuesta de tipo caótica.
	FLT	Respuesta divergente por encima de la velocidad de <i>flutter</i> lineal.
Transición entre Tipos de Respuesta	La respuesta pasa de amortiguada (DMP) a divergente a la velocidad de <i>flutter</i> lineal. Es una entrada en <i>flutter</i> clásica.	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 496. \text{ KTAS} / VF_{(K=0)} = 489. \text{ KTAS}.$
	No Lineal	Velocidad de <i>flutter</i> no lineal idéntica a la velocidad de <i>flutter</i> lineal.
Variación de la Amplitud	con U_∞	Respuesta amortiguada por debajo de la velocidad de <i>flutter</i> lineal, oscilatoria no amortiguada justo a la velocidad de <i>flutter</i> lineal, y divergente por encima de esta velocidad. Es una entrada en <i>flutter</i> clásica.
	con LAT.FDC	No depende del centro de la no linealidad.
Bifurcaciones	Bifurcación de tipo <i>Hopf</i> en la transición de amortiguado a LCO a 490 KTAS (aprox.).	
Flutter onset	Entrada en <i>flutter</i> clásica.	

NOTA:

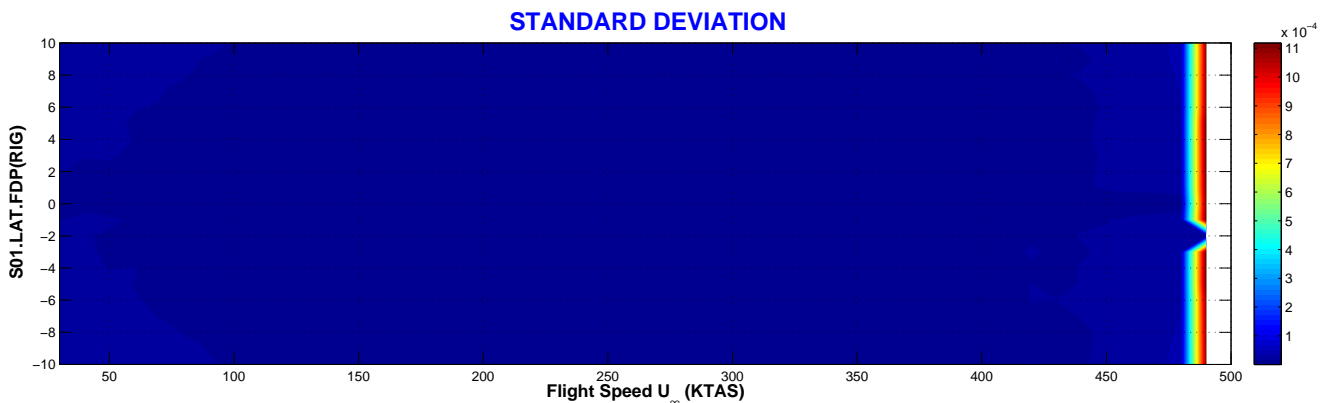
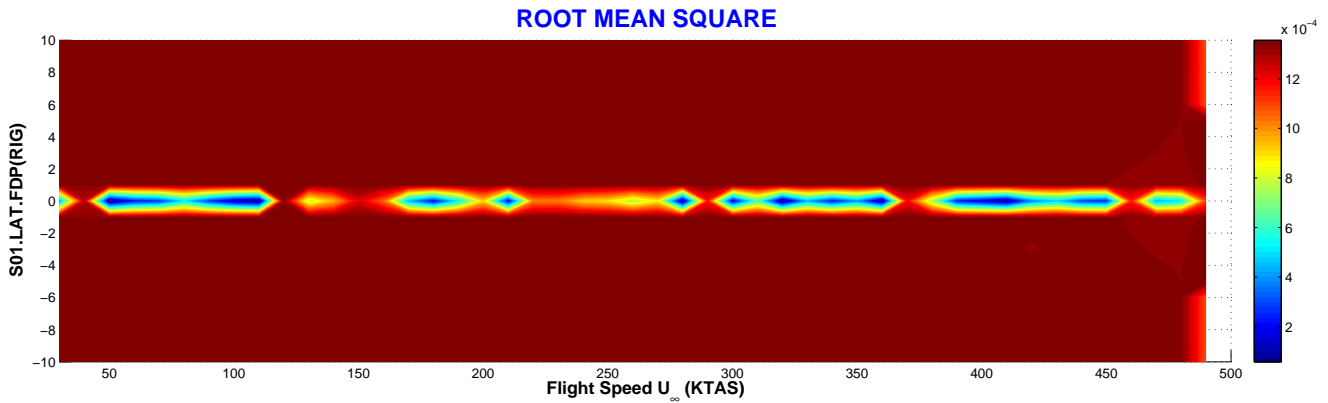
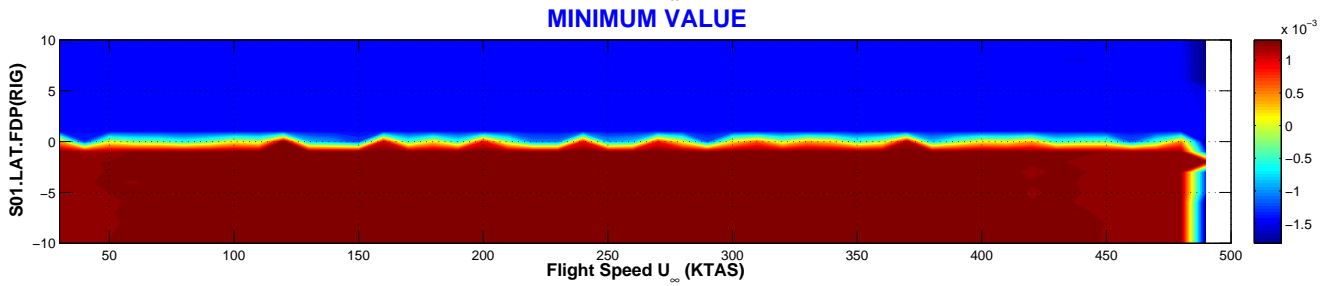
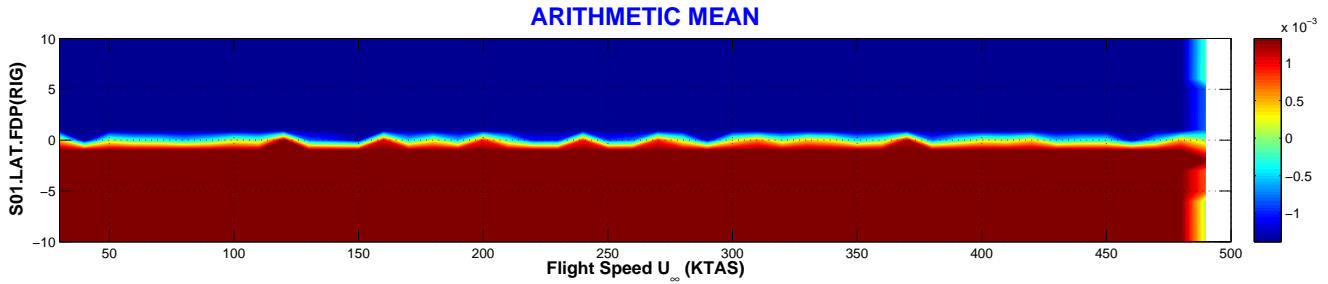
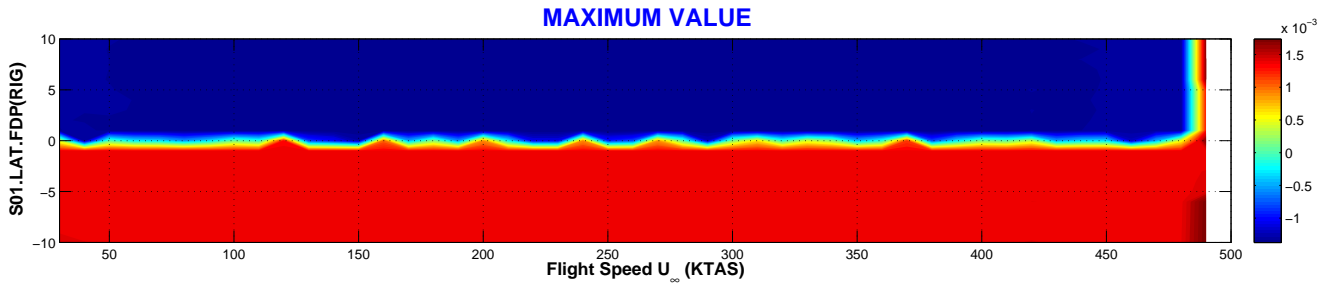
A la velocidad de 10 KTAS aparecen dos respuestas identificadas como armónicas. Sin embargo, se trata de respuestas poco amortiguadas que, habiendo integrado más tiempo, habrían resultado amortiguadas.

VARIACIÓN DE LA PRECARGA

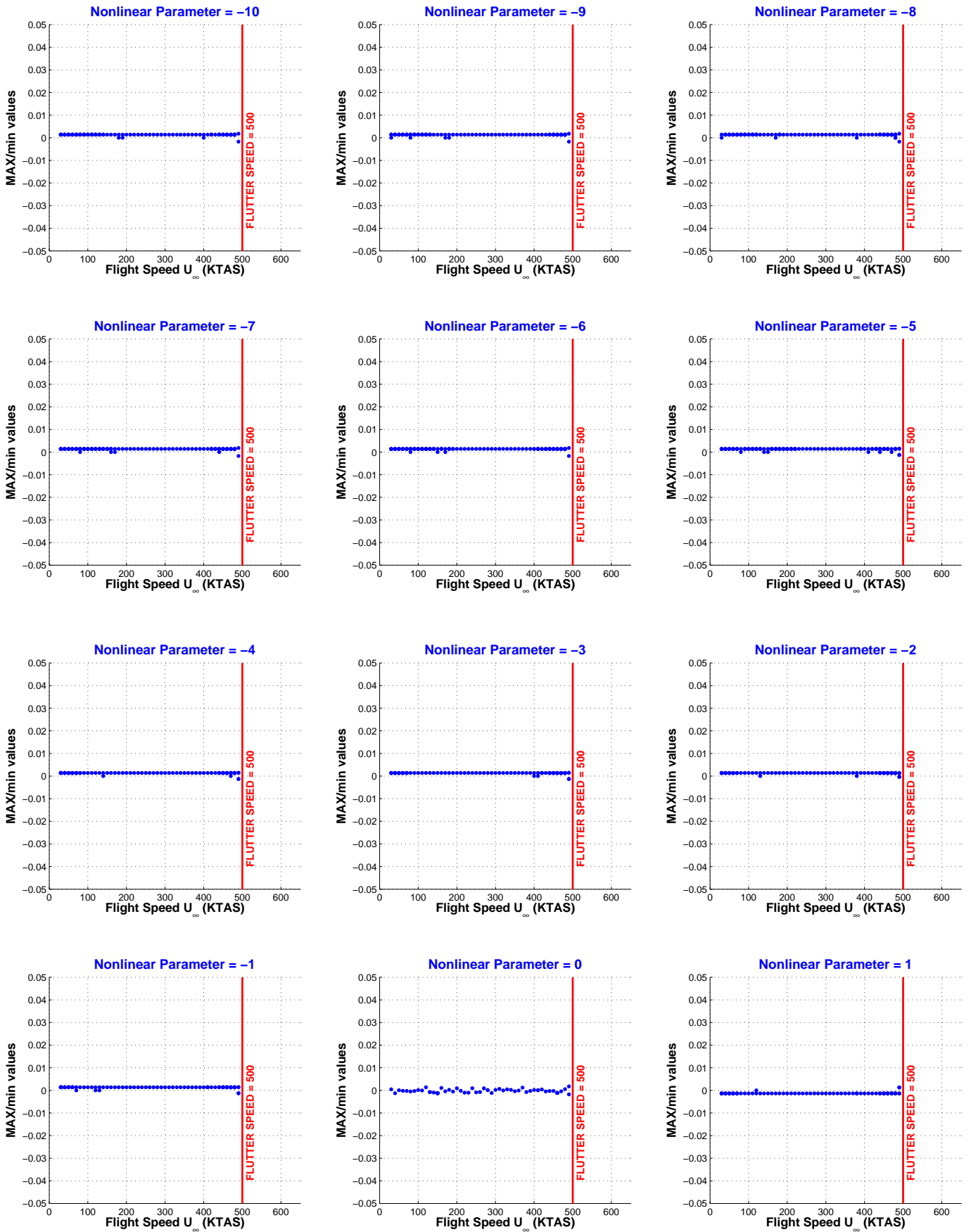
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Lateral (LAT)	Freeplay (F)	Deadband Preload (DP)	S01.LAT.FDP	1/5



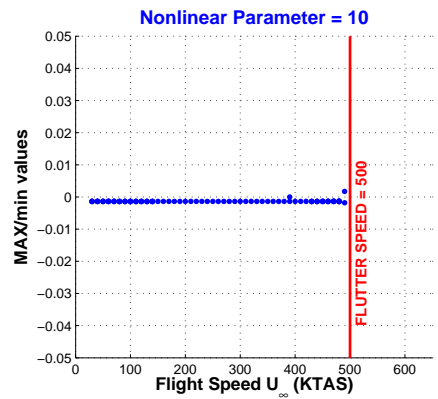
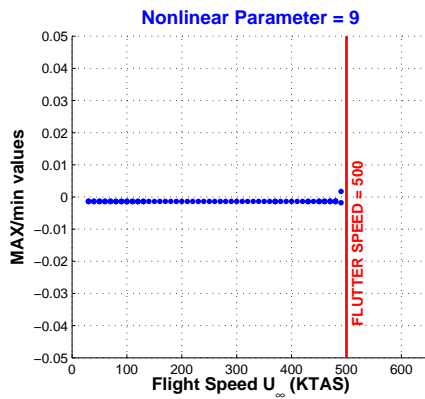
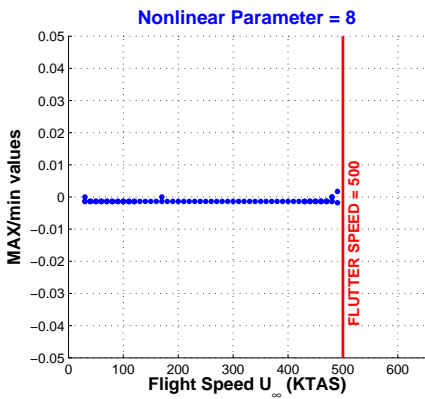
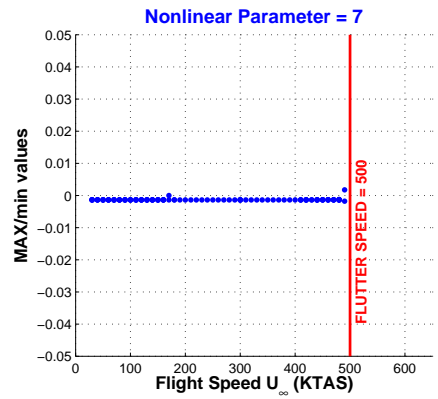
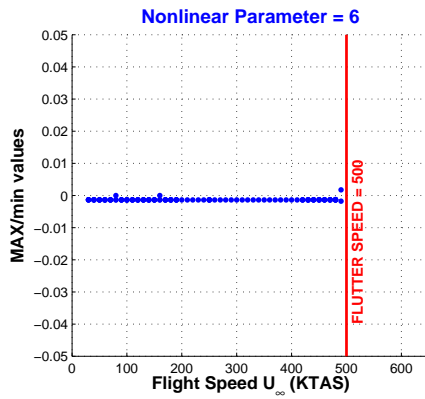
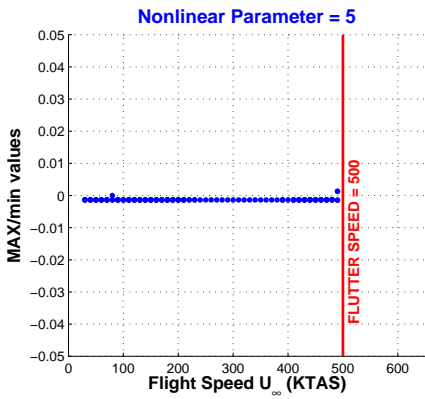
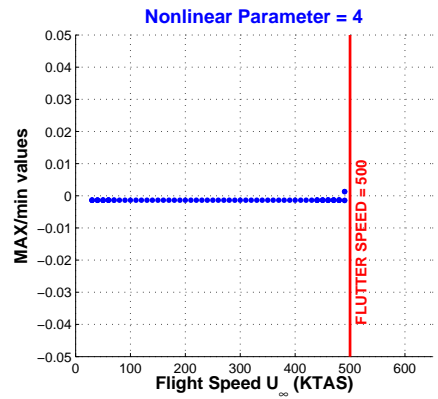
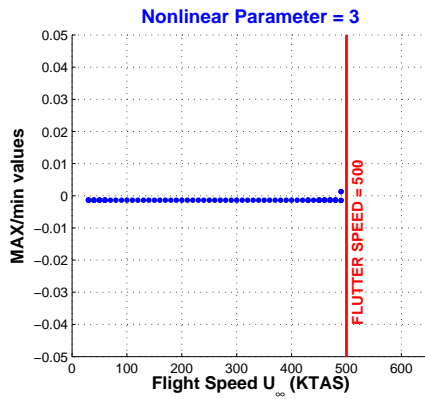
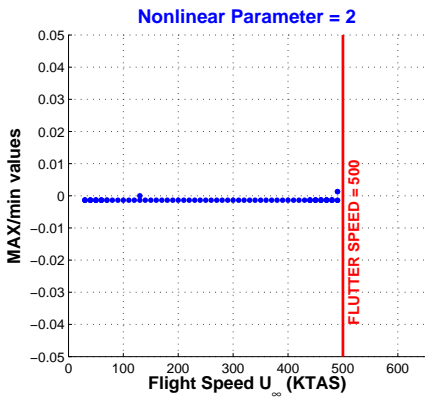
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Lateral (LAT)	Freeplay (F)	Deadband Preload (DP)	S01.LAT.FDP	2/5



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Lateral (LAT)	Freeplay (F)	Deadband Preload (DP)	S01.LAT.FDP	3/5



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Lateral (LAT)	Freeplay (F)	Deadband Preload (DP)	S01.LAT.FDP	3/5

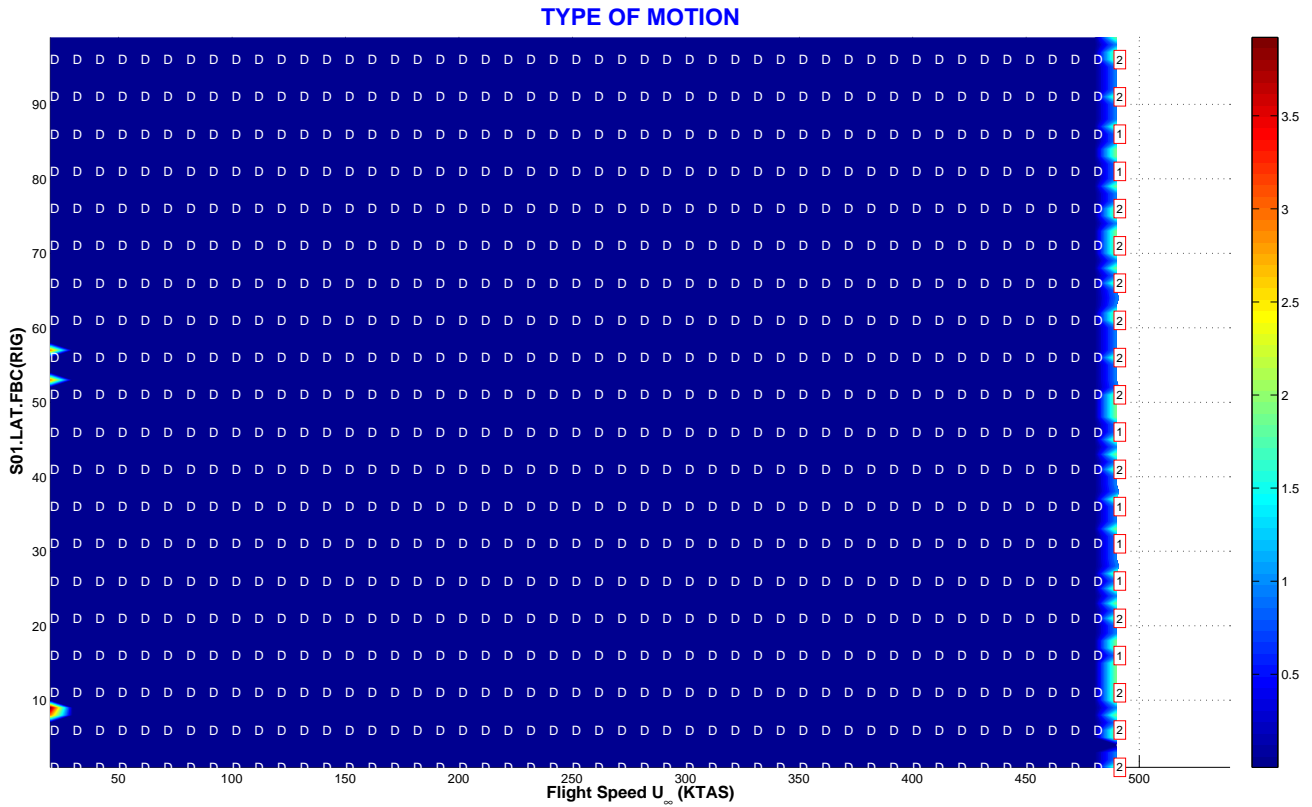


CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Lateral (LAT)	Freeplay (F)	Deadband Amplitude (DP)	S01.LAT.FDP	5/5

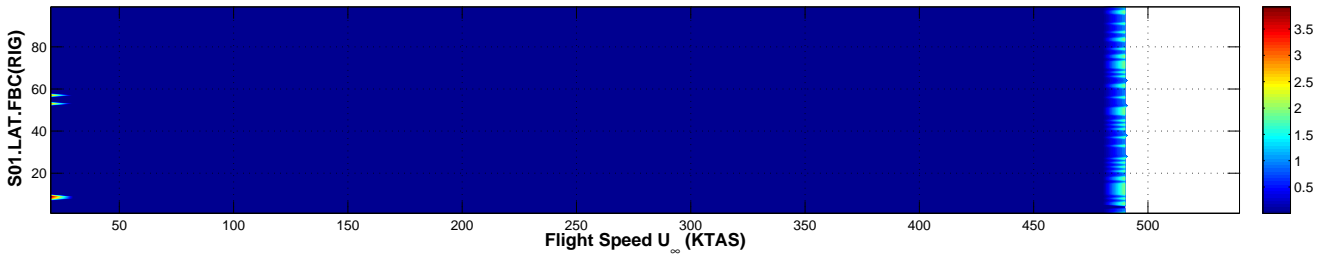
Tipo de Respuesta	DMP	Movimiento amortiguado hasta la velocidad de <i>flutter</i> (490 KTAS aprox.).
	LCO	No existe respuesta de tipo LCO, excepto justo a la velocidad de <i>flutter</i> .
	CHA	No existe respuesta caótica.
	FLT	Respuesta divergente a la velocidad de vuelo U_∞ de 490 KTAS (aprox.). Esta velocidad es independiente de la precarga de la no linealidad <i>freeplay</i> .
Transición entre Tipos de Respuesta	La respuesta evoluciona con la velocidad de la siguiente forma: DMP-FLT. Para valores altos de la precarga, existe un estrecho intervalo de velocidades con respuesta LCO[2] justo antes de la velocidad de <i>flutter</i> .	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 496. \text{ KTAS} / VF_{(K=0)} = 489. \text{ KTAS}$.
	No Lineal	495 KTAS (aprox.) e independiente de la amplitud de la precarga.
Variación de la Amplitud	con U_∞	La respuesta es amortiguada hasta la velocidad de <i>flutter</i> .
	con LAT.FDP	La respuesta no depende de la precarga, excepto para valores altos de la precarga en los que aparece un estrecho intervalo de velocidades de vuelo con respuesta no amortiguada LCO[2]. Sin embargo, debido al estrecho margen con la velocidad de <i>flutter</i> se puede considerar como la entrada en <i>flutter</i> .
Bifurcaciones	Bifurcación de tipo <i>Hopf</i> en la transición de amortiguado a LCO a 490 KTAS (aprox.).	
Flutter <i>onset</i>	Comportamiento como sistema lineal: amortiguado a velocidades menores que la de <i>flutter</i> (en este caso 490 KTAS aproximadamente), armónico no amortiguado justo a la velocidad de <i>flutter</i> , y divergente a velocidades mayores.	

VARIACIÓN DE LAS CONDICIONES INICIALES

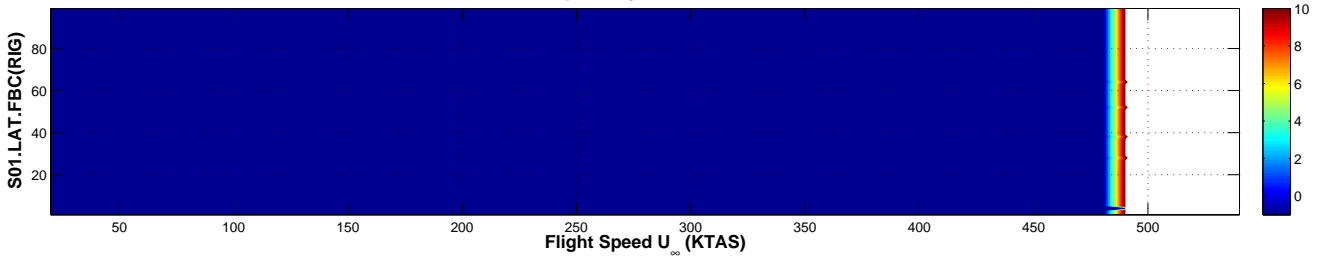
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Lateral (LAT)	Freeplay (F)	Boundary Conditions (BC)	S01.LAT.FBC	1/3



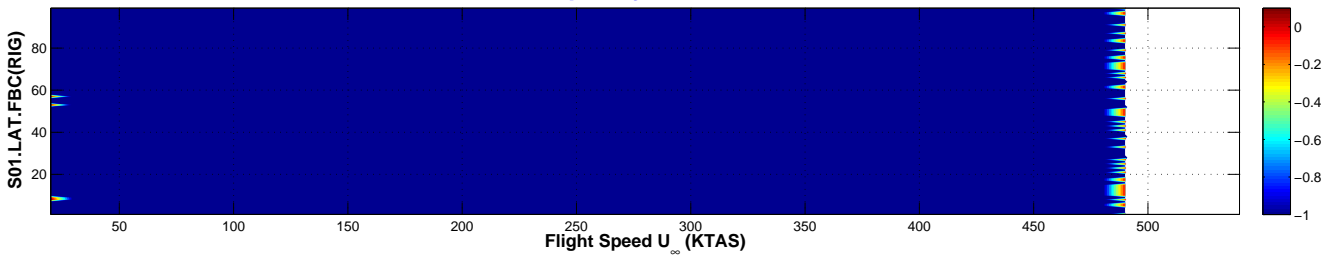
Number Of Characteristic Frequencies



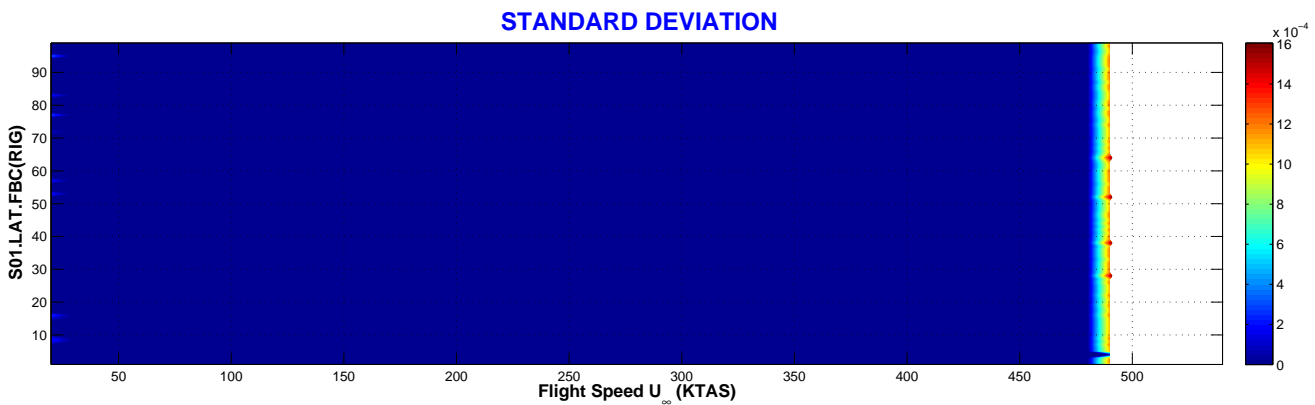
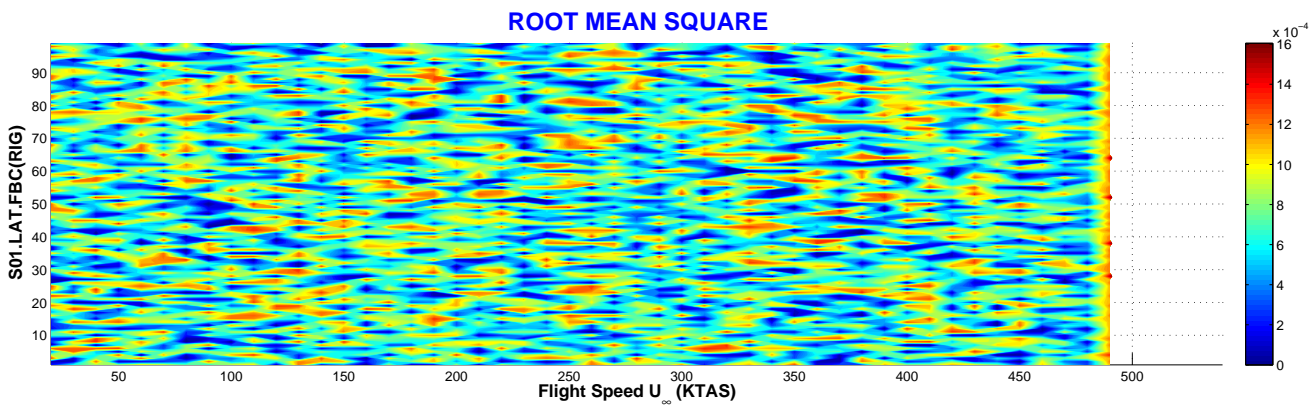
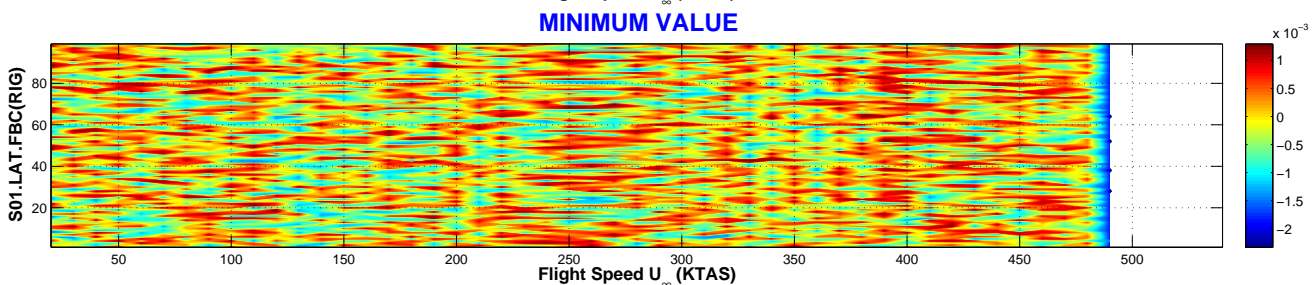
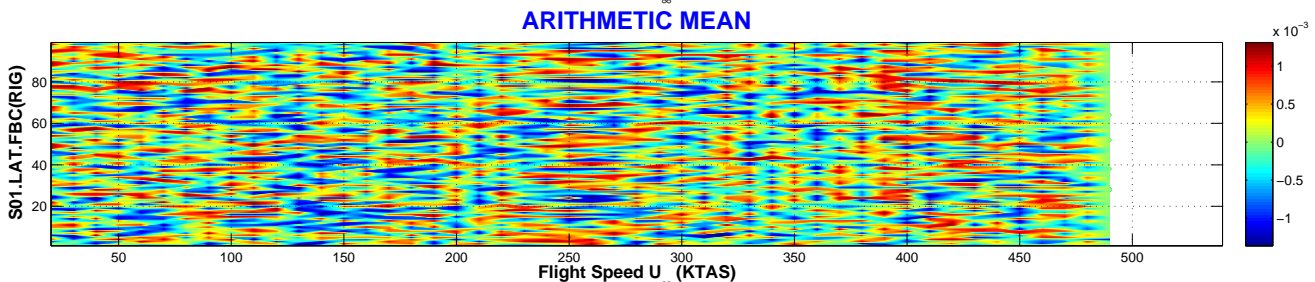
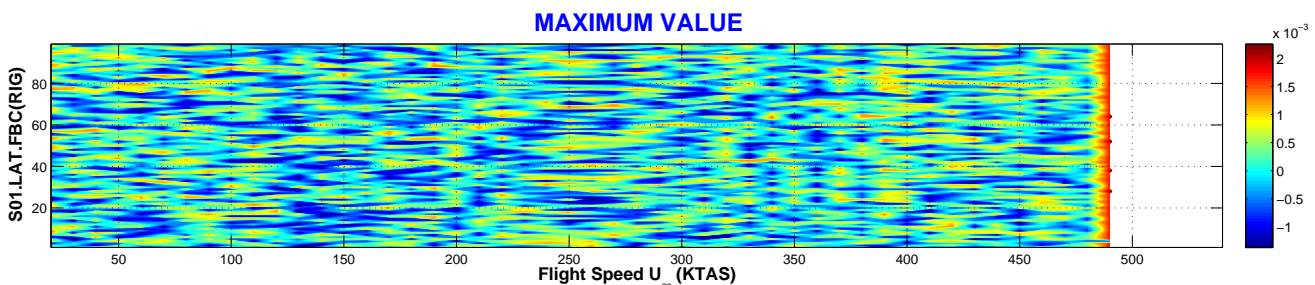
1st Frequency [Hz] MAX PSD



2nd Frequency [Hz] MAX PSD



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Lateral (LAT)	Freeplay (F)	Boundary Conditions (BC)	S01.LAT.FBC	2/3



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Lateral (LAT)	Freeplay (F)	Deadband Amplitude (DP)	S01.LAT.FBC	3/3

Tipo de Respuesta	DMP	Respuesta amortiguada a velocidades inferiores a la velocidad de <i>flutter</i> .
	LCO	Oscilaciones de ciclo límite a la velocidad de <i>flutter</i> (490 KTAS aprox.).
	CHA	No existe respuesta de tipo caótica.
	FLT	Velocidad de <i>flutter</i> en torno a 490 KTAS, independiente de las condiciones iniciales.
Transición entre Tipos de Respuesta	La respuesta evoluciona según la secuencia DMP-FLT.	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 496. \text{ KTAS} / VF_{(K=0)} = 489. \text{ KTAS}$.
	No Lineal	490 KTAS (aprox.).
Variación de la Amplitud	con U_∞	La amplitud de la respuesta permanece muy baja y poco dependiente de la velocidad de vuelo U_∞ .
	con LAT.FBC	Amplitud de la respuesta amortiguada pequeña y poco dependiente de las condiciones iniciales.
Bifurcaciones	Bifurcación de tipo <i>Hopf</i> en la transición de amortiguado a <i>flutter</i> , i.e., DMP-FLT.	
Flutter <i>onset</i>	Entrada en <i>flutter</i> abrupta y no previsible ya que no existían indicios de aumento de amplitud a velocidades anteriores a la de <i>flutter</i> .	

NOTA:

Las condiciones iniciales son:

$$\{x(0)\} = \left[\hat{\xi}_1 \quad -0,015 \quad -0,015 \quad \frac{d\hat{\xi}_1}{dt} \quad 0,0 \quad 0,0 \right]$$

donde $\hat{\xi}_1$ y $d\hat{\xi}_1/dt$ se varían aleatoriamente dando un total de 99 condiciones iniciales distintas.

9.2.3. Nolinealidad en Guiñada de Pílon (YAW)

La figura 9.3 detalla la nolinealidad de tipo *freeplay* con las principales características que se consideran como parámetros en el estudio:

- Amplitud de la holgura (*Deadband Amplitude FDA*).
- Centro de la nolinealidad (*Deadband Center FDC*).
- Precarga de la nolinealidad (*Deadband Preload FDP*).

Aparte de los tres parámetros anteriores, se estudiará el efecto de las condiciones iniciales en la respuesta (**FBC**). La nolinealidad se considera concentrada en el soporte que modeliza el movimiento de guiñada del misil, de forma que el giro local del misil γ en la localización del soporte x^{NLR} , i.e. $\gamma \simeq \partial w_b / \partial x (x^{NLR}; t)$, es la variable nolineal.

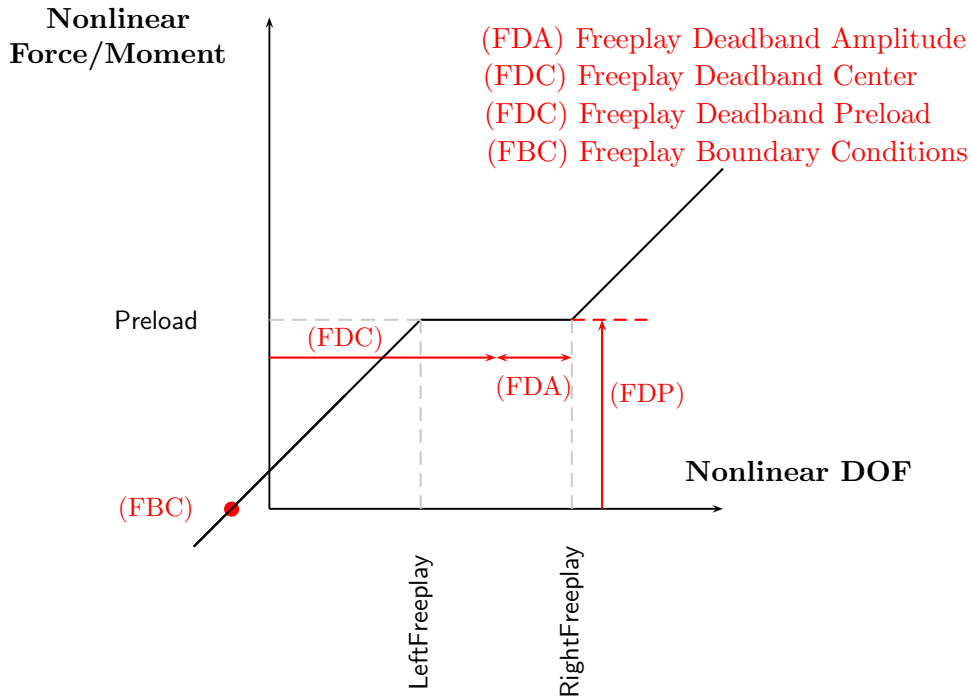


Figura 9.3: Nolinealidad del tipo *hysteresis* con los principales parámetros que la definen.

Dada una nolinealidad tipo *freeplay* nominal, de precarga 0,0 [N.m]⁵ y amplitud adimensional $\mp 0,005$ ($\mp 0,29^\circ$ aprox.), se varía uno a uno los parámetros mencionados anteriormente.

La condición inicial nominal del vector de estado-espacio $\{x\}$ es:

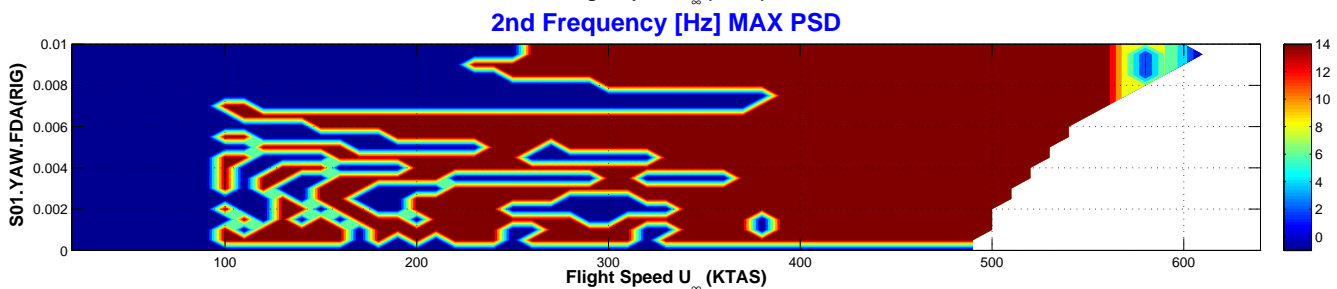
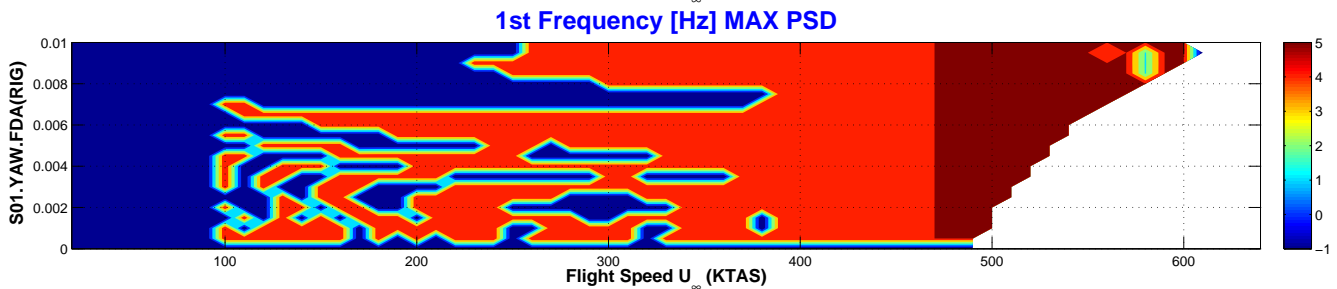
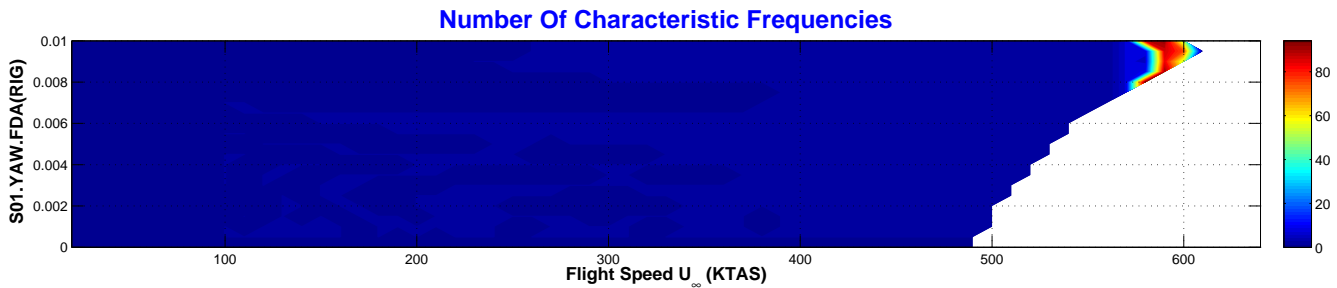
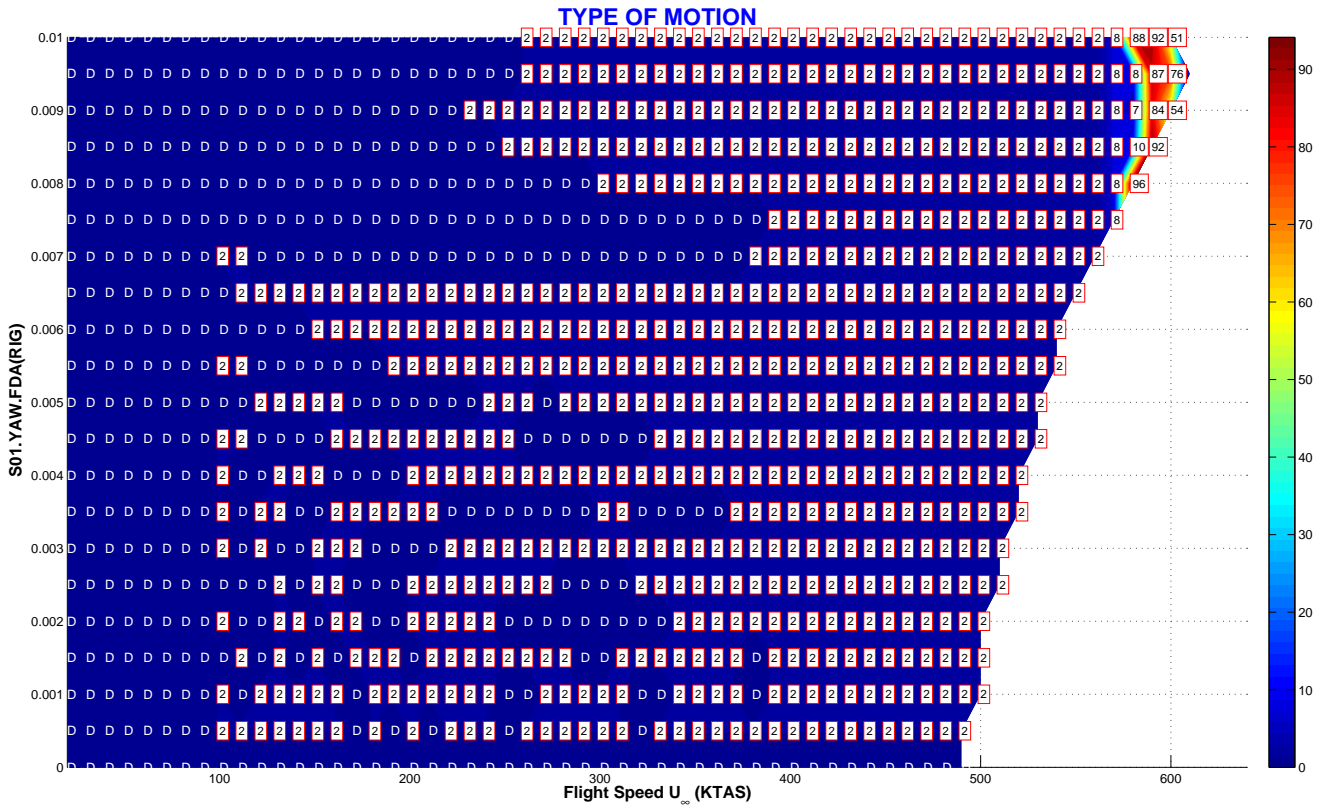
$$\{x(0)\}_{6 \times 1} = \left[\hat{\xi}_1 \quad \hat{\xi}_2 \quad \hat{\xi}_3 \quad \frac{d\hat{\xi}_1}{dt} \quad \frac{d\hat{\xi}_2}{dt} \quad \frac{d\hat{\xi}_3}{dt} \right]^T = \left[+0,015 \quad -0,015 \quad -0,015 \quad 0,0 \quad 0,0 \quad 0,0 \right]^T$$

siendo la coordenada generalizada $\hat{\xi}_2$ (modo de guiñada) y su velocidad generalizada $d\hat{\xi}_2/dt$ las que se varían en el estudio de la sensibilidad de la respuesta a las condiciones iniciales (**FBC**).

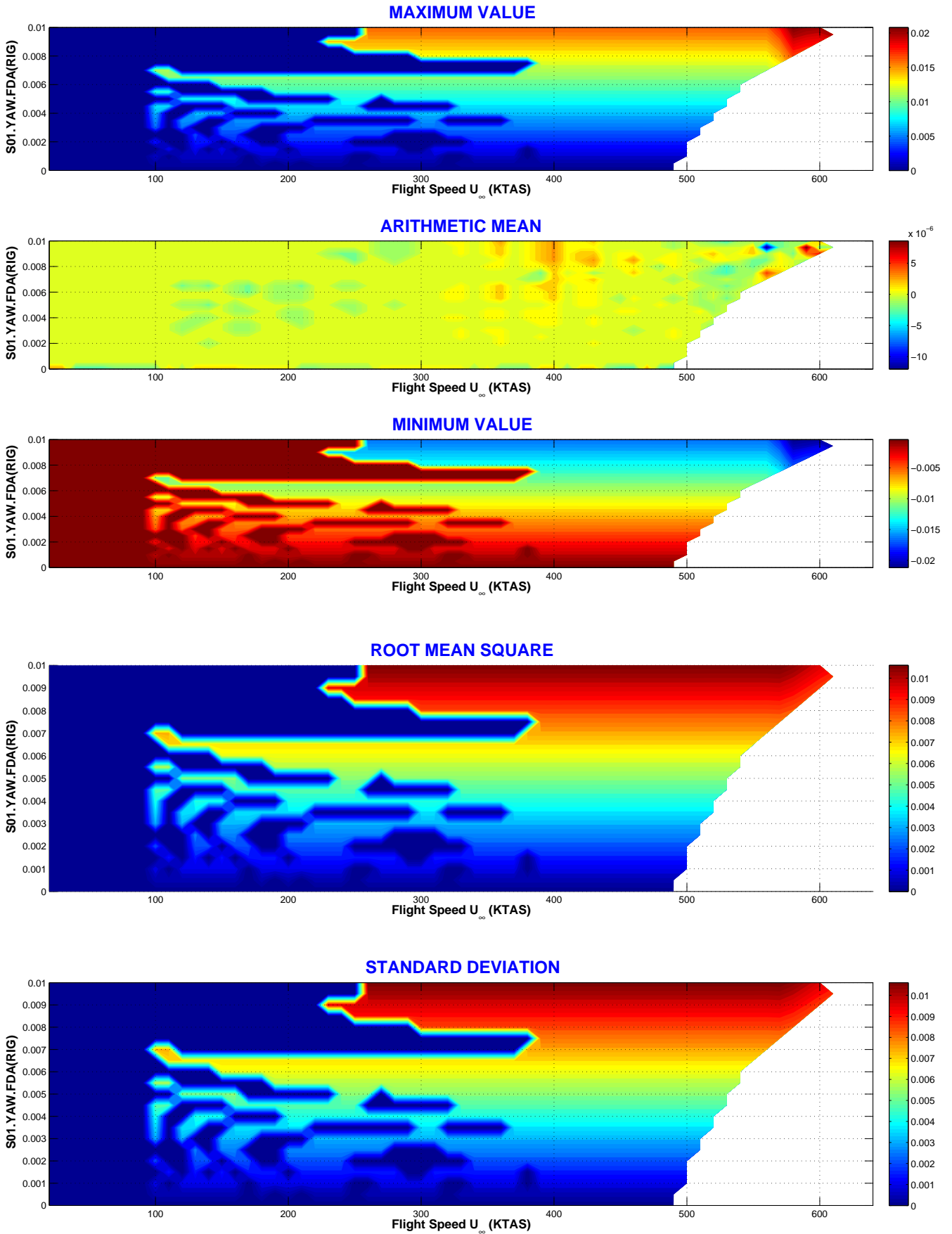
⁵Recuérdese que la precarga adimensional venía dada por $\hat{M}_0^{NLR} = M_0^{NLR} / m_0 U_0^2 L$.

VARIACIÓN DE LA AMPLITUD DE LA HOLGURA

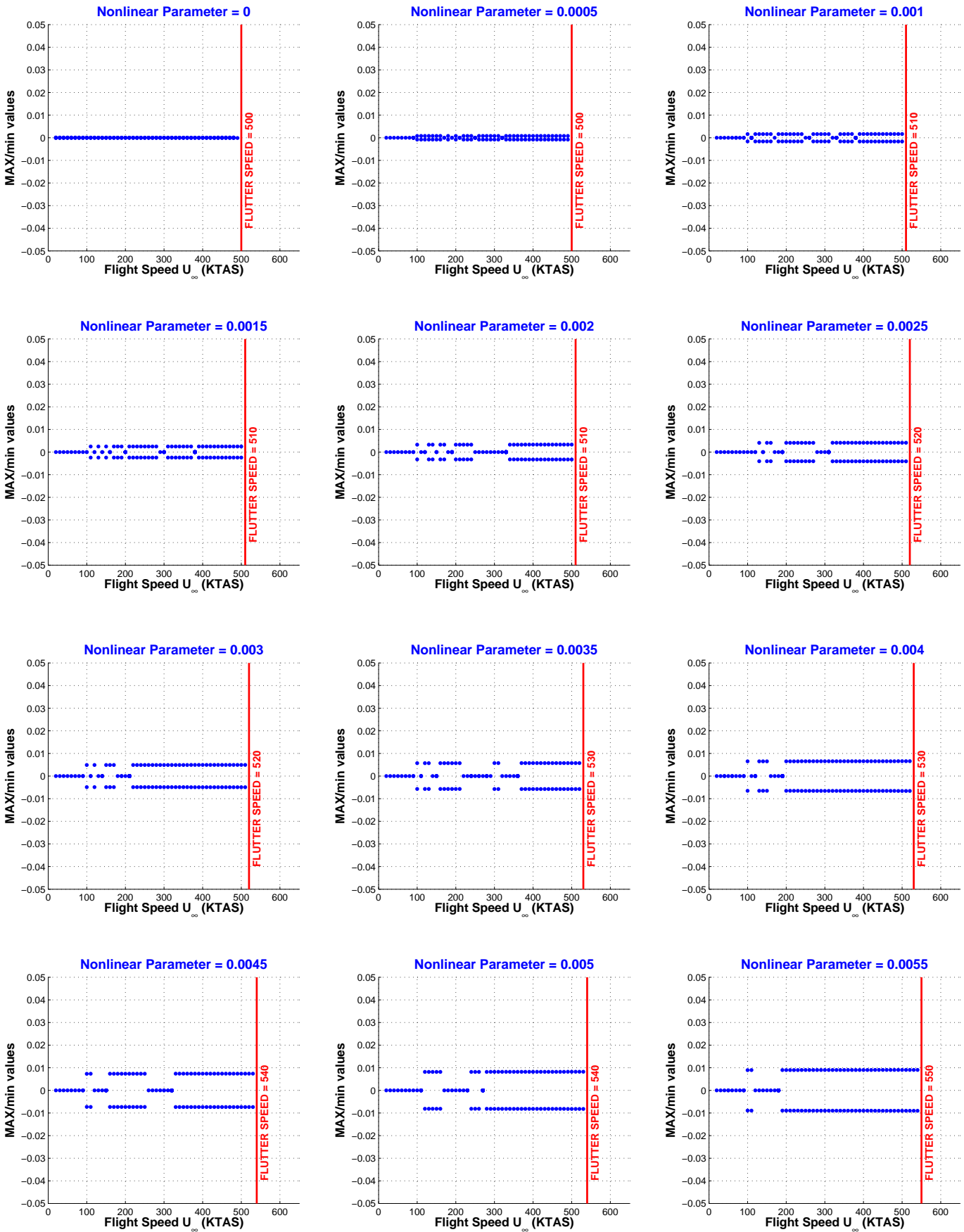
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Guiñada (YAW)	Freeplay (F)	Deadband Amplitude (DA)	S01.YAW.FDA	1/5



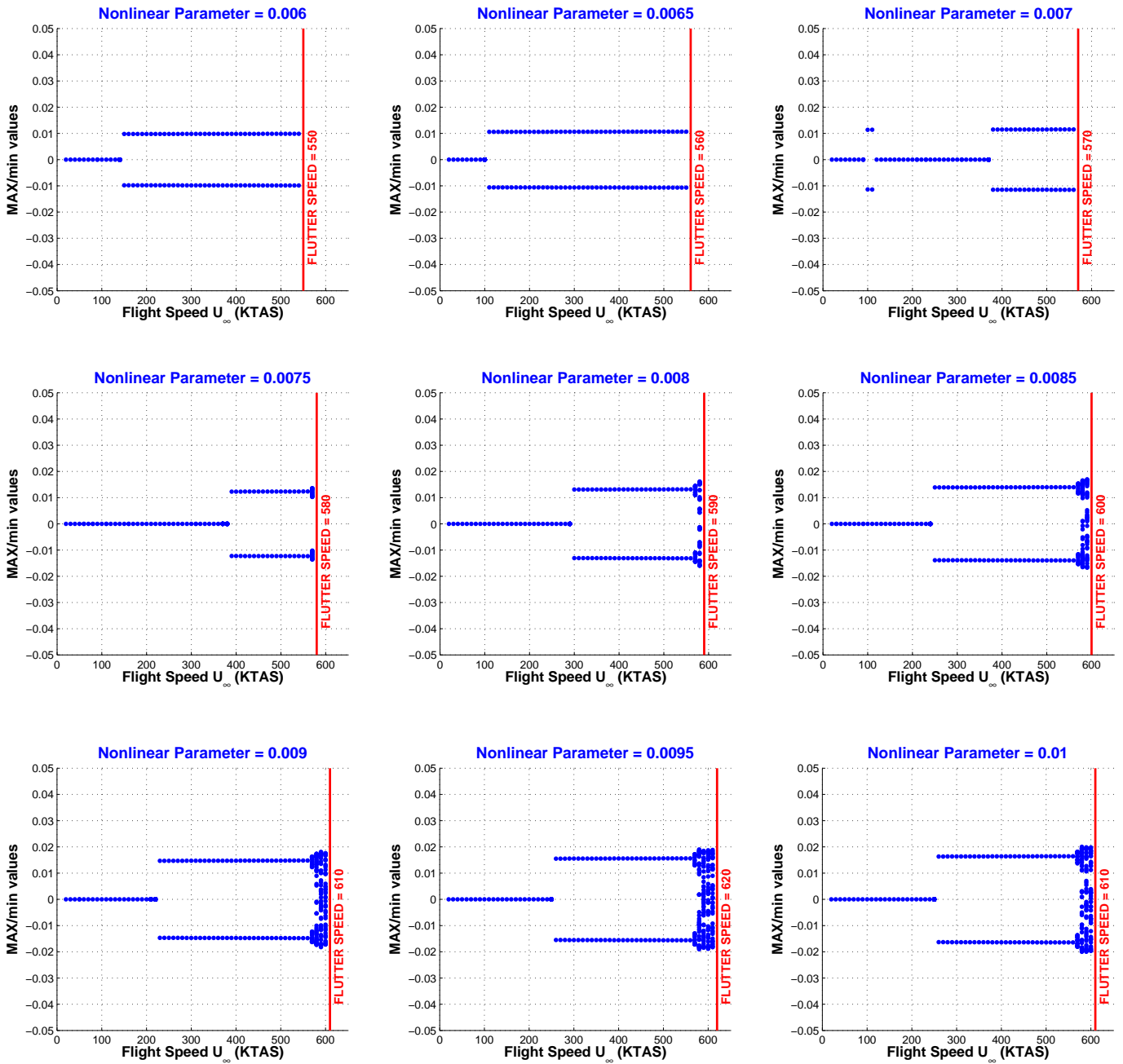
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Guiñada (YAW)	Freeplay (F)	Deadband Amplitude (DA)	S01.YAW.FDA	2/5



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Guiñada (YAW)	Freeplay (F)	Deadband Amplitude (DA)	S01.YAW.FDA	3/5



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Guiñada (YAW)	Freeplay (F)	Deadband Amplitude (DA)	S01.YAW.FDA	4/5

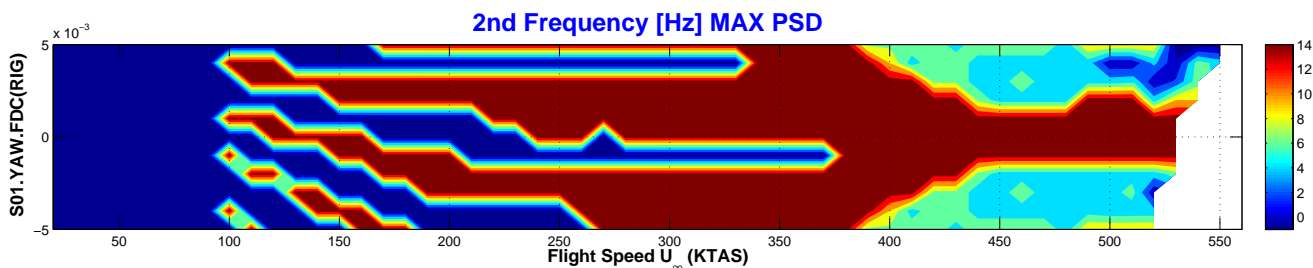
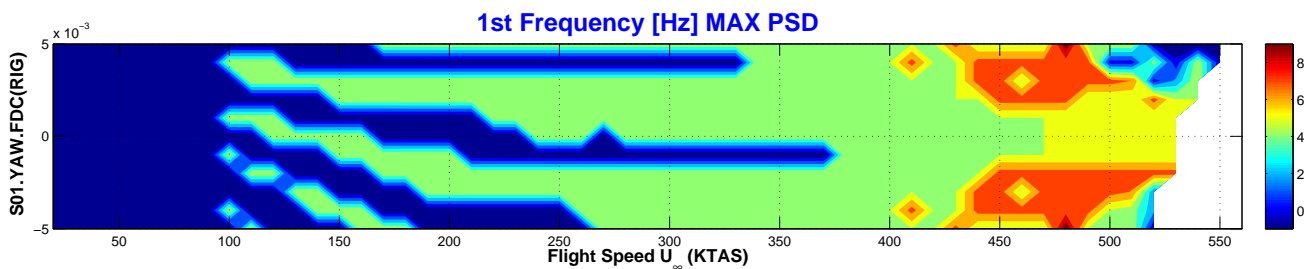
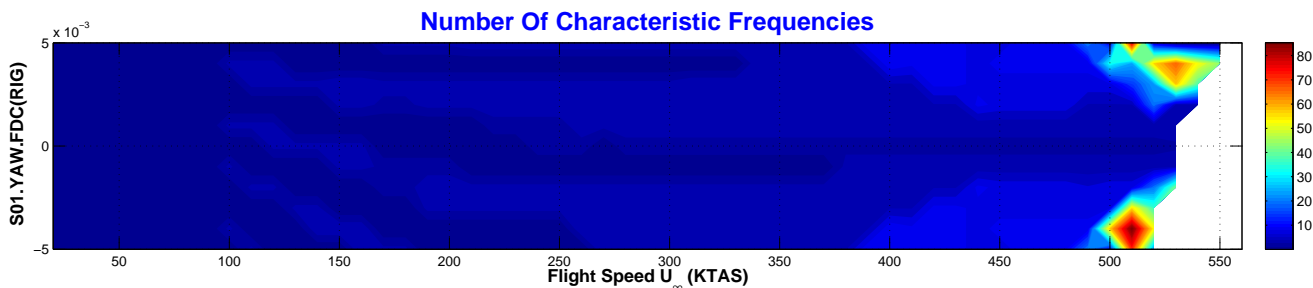
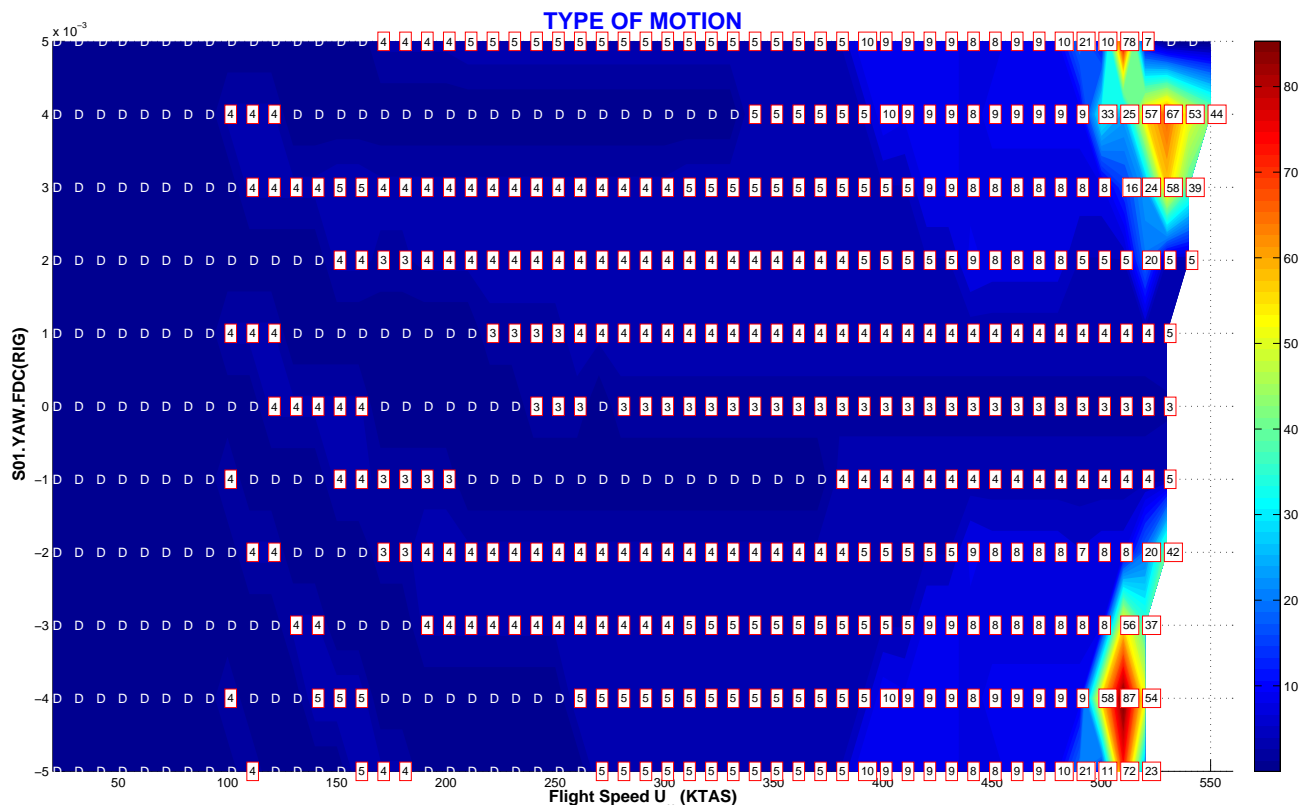


CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Guiñada (YAW)	Freeplay (F)	Deadband Amplitude (DA)	S01.YAW.FDA	5/5

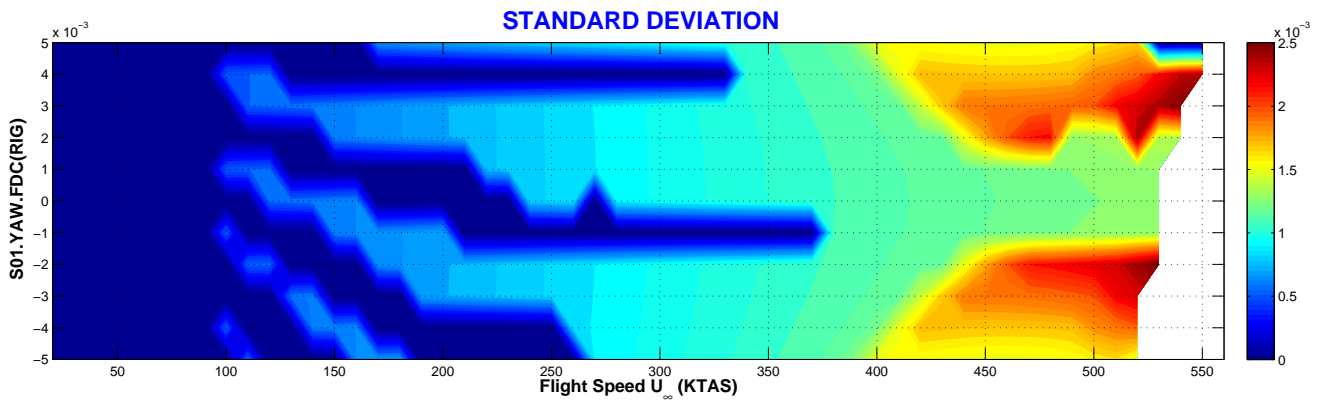
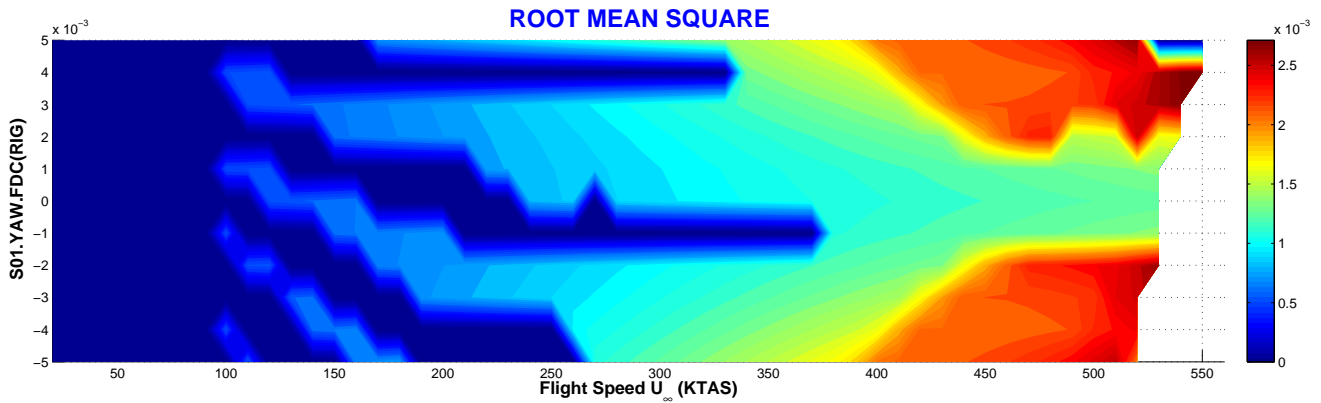
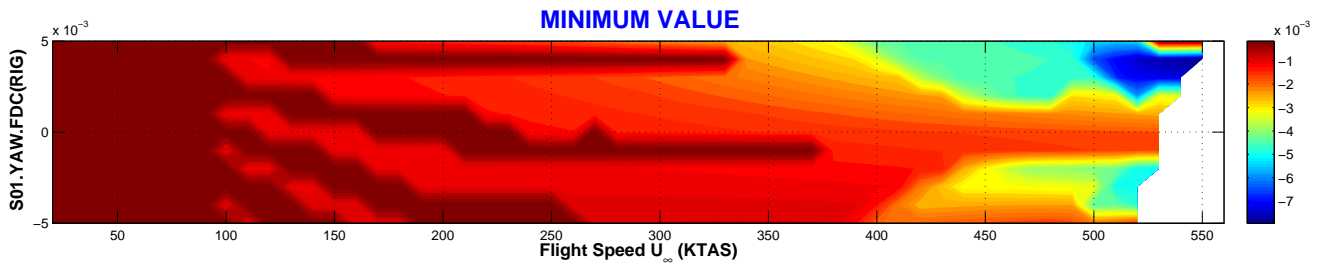
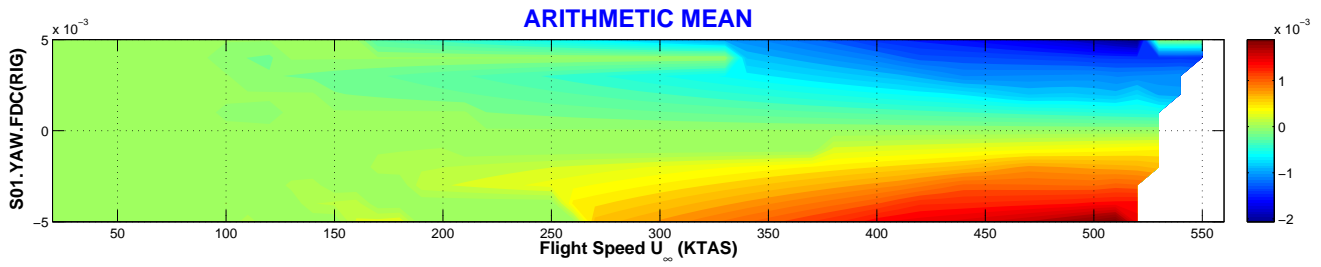
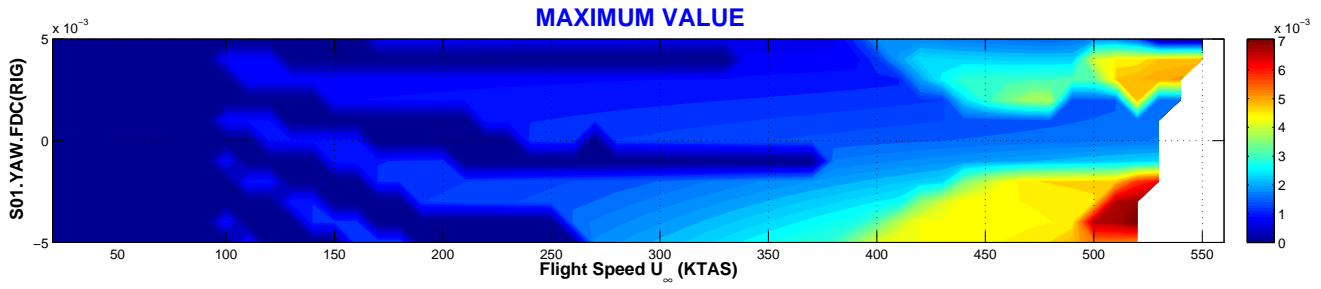
Tipo de Respuesta	DMP	Movimiento amortiguado por debajo de una velocidad que depende de la amplitud de la holgura. Luego se verá que esta velocidad depende no sólo de la holgura sino también de las condiciones iniciales.
	LCO	La respuesta pasa de amortiguada (DMP) a LCO mediante una bifurcación de tipo <i>Hopf</i> . Este LCO se mantiene hasta la entrada en <i>flutter</i> .
	CHA	Respuesta caótica a alta velocidad y holguras superiores a 0,008 (adimensional).
	FLT	La velocidad de <i>flutter</i> no lineal es mayor para valores mayores de la holgura de la no linealidad.
Transición entre Tipos de Respuesta	Para holguras menores a 0,008 (adimensional), la respuesta evoluciona según DMP-LCO[2]-FLT, mientras que para valores mayores de la holgura, la evolución de la respuesta sigue el patrón DMP-LCO[2]-LCO[8]-CHA-FLT. La respuesta transiciona de amortiguada (DMP) a movimiento oscilatorio no amortiguado (LCO) mediante una bifurcación de tipo <i>Hopf</i> .	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 496. \text{ KTAS} / VF_{(K=0)} = 381. \text{ KTAS}$.
	No Lineal	Depende de la amplitud de la holgura: velocidad de <i>flutter</i> no lineal mayor a medida que aumenta la amplitud de la holgura de la no linealidad.
Variación de la Amplitud	con U_∞	La amplitud de la respuesta LCO no depende de la velocidad de vuelo U_∞ .
	con YAW.FDA	Amplitud del LCO mayor a medida que aumenta la amplitud de la holgura.
Bifurcaciones	Bifurcación de tipo <i>Hopf</i> en la transición de amortiguado (DMP) a oscilatorio armónico de dos frecuencias características LCO[2].	
Flutter onset	Entrada en <i>flutter</i> abrupta pasando de un LCO de amplitud constante (a velocidades inferiores a la velocidad de <i>flutter</i> no lineal) a una respuesta divergente a partir de la velocidad de <i>flutter</i> .	

VARIACIÓN DEL CENTRO DE LA NOLINEALIDAD

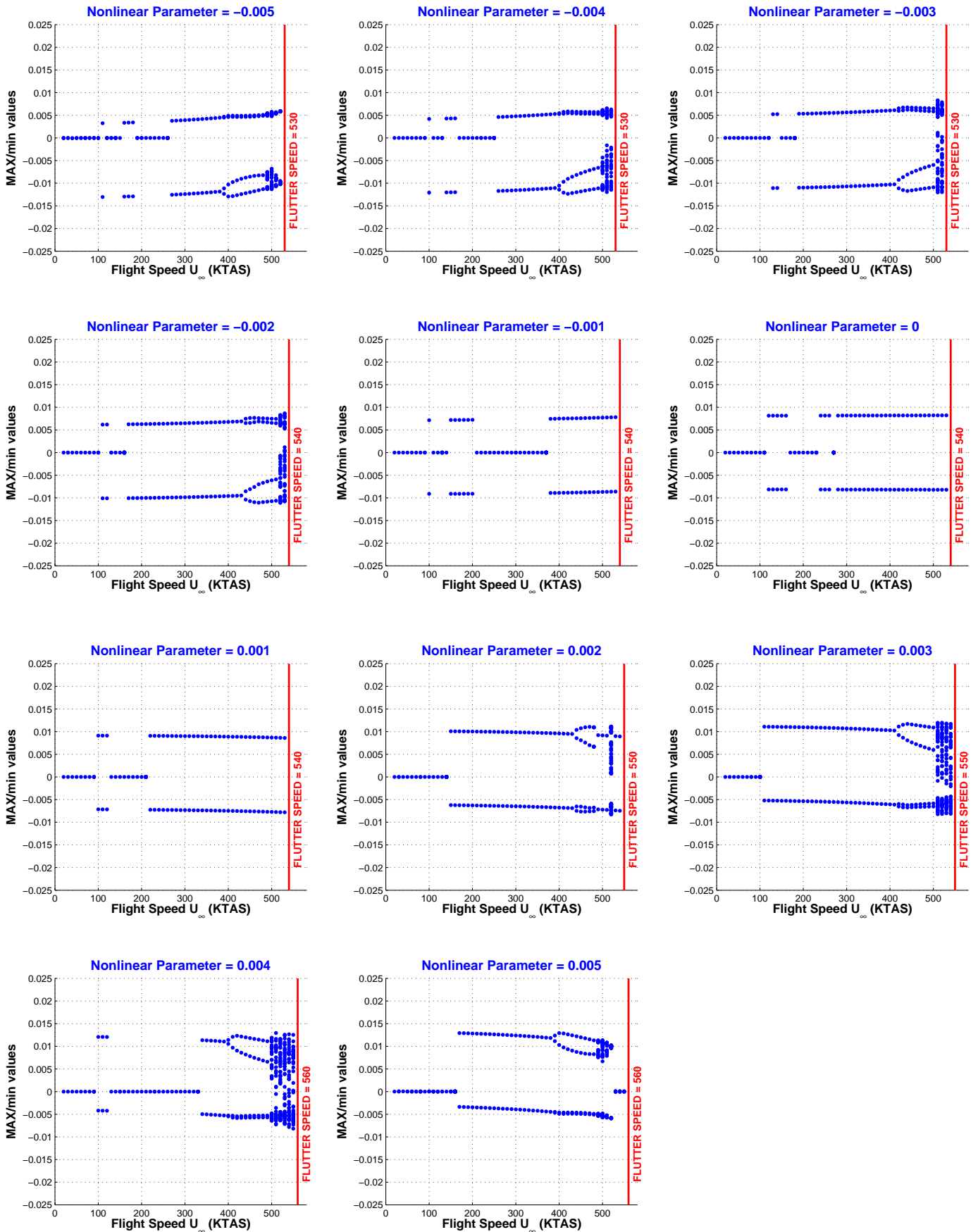
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Guiñada (YAW)	Freeplay (F)	Deadband Center (DC)	S01.YAW.FDC	1/4



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Guiñada (YAW)	Freeplay (F)	Deadband Center (DC)	S01.YAW.FDC	2/4



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Guiñada (YAW)	Freeplay (F)	Deadband Center (DC)	S01.YAW.FDC	3/4

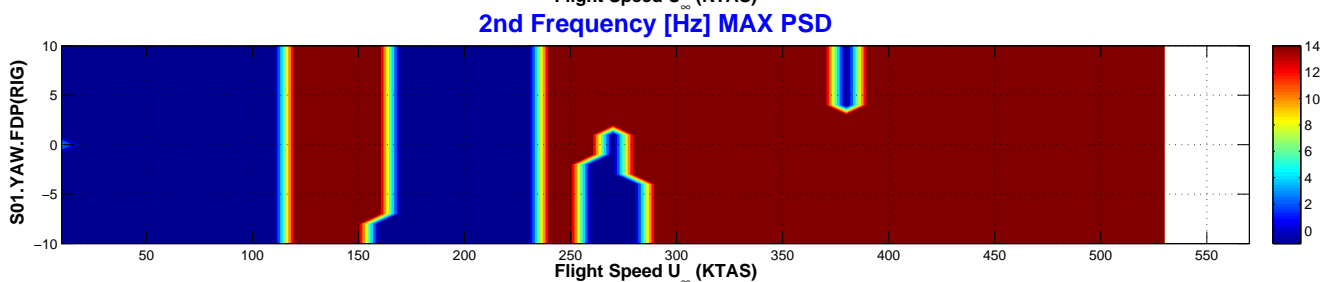
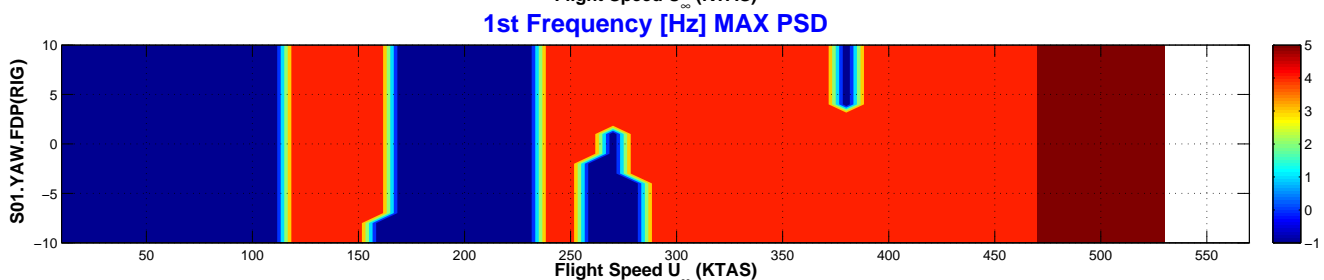
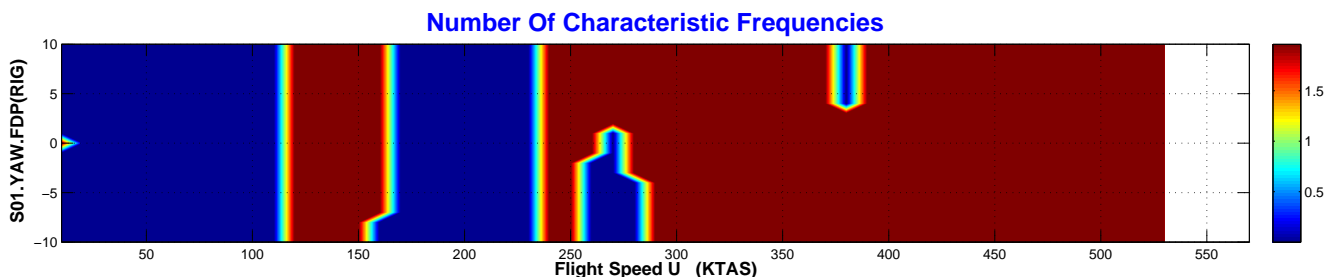
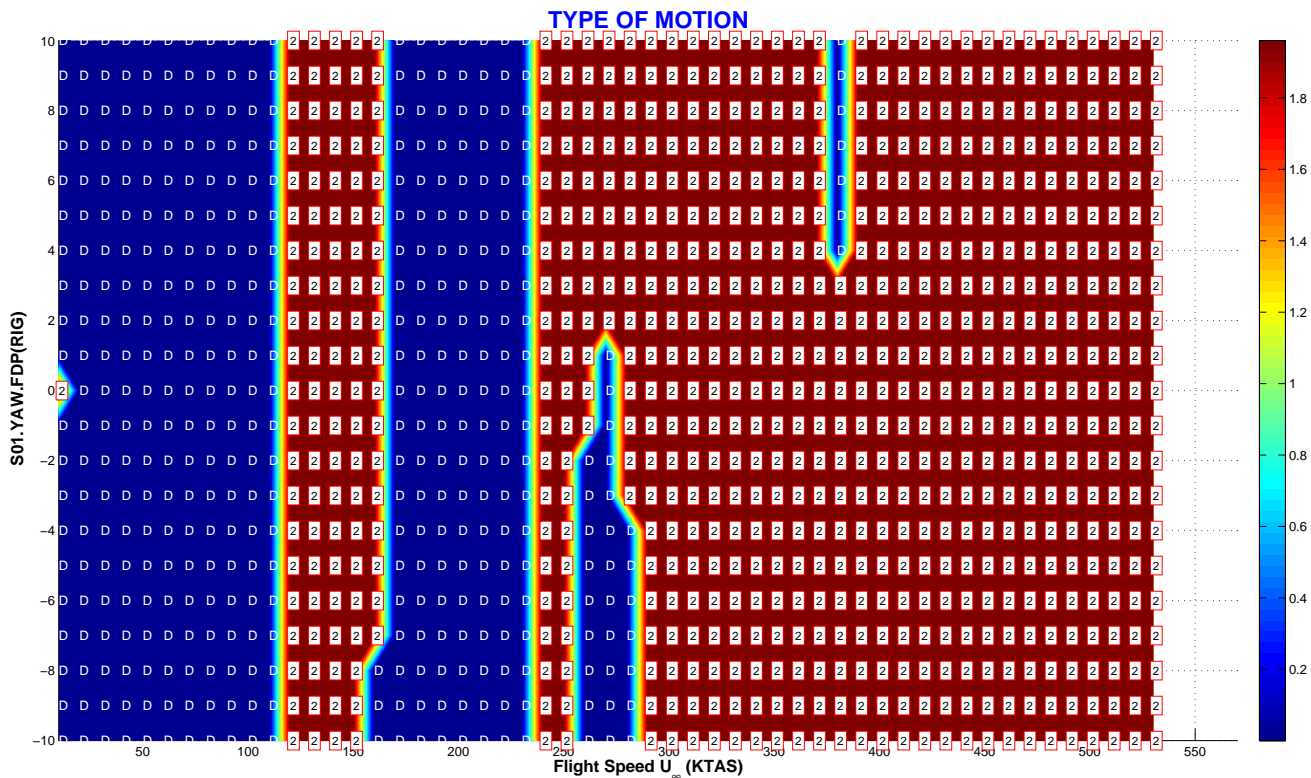


CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Guiñada (YAW)	Freeplay (F)	Deadband Amplitude (DC)	S01.YAW.FDC	4/4

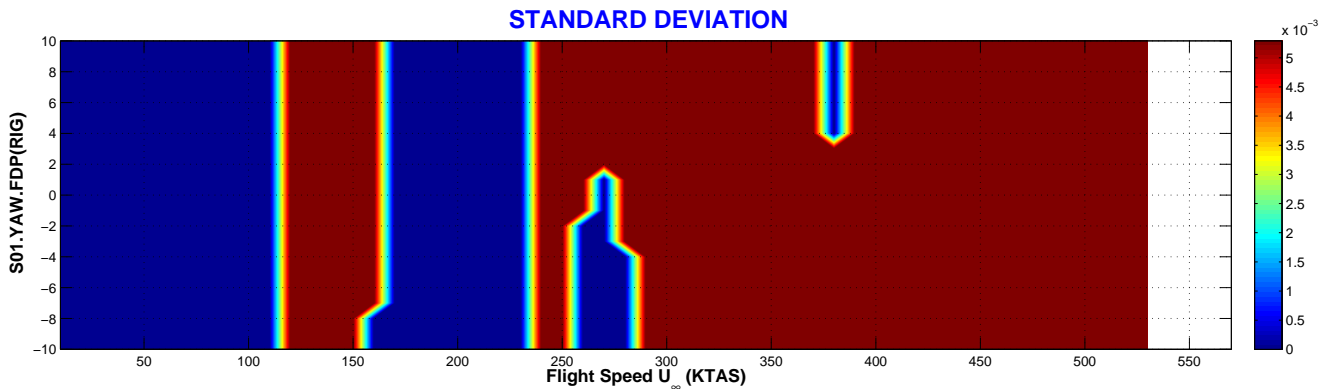
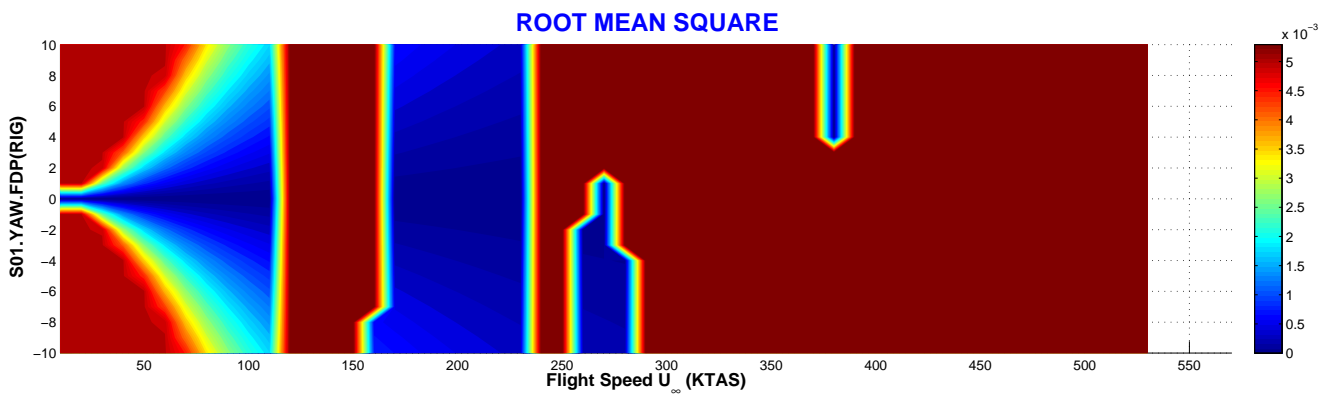
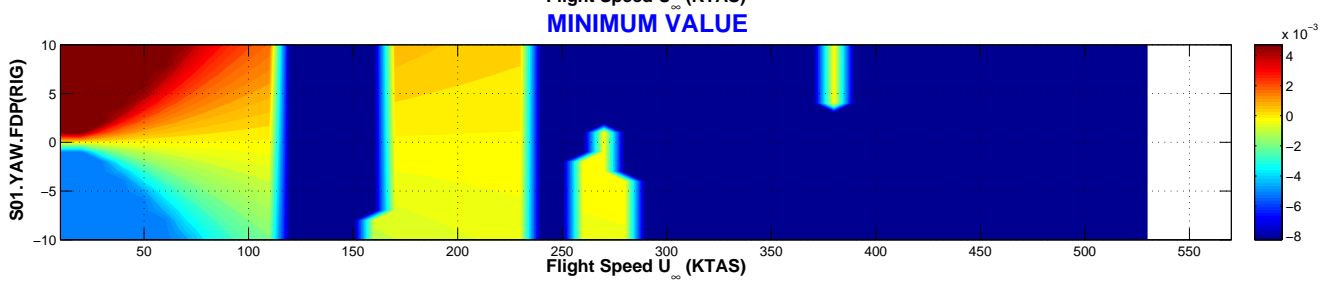
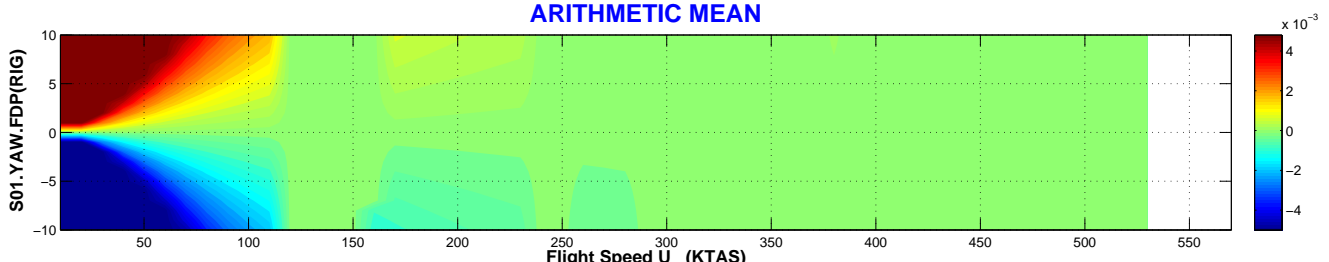
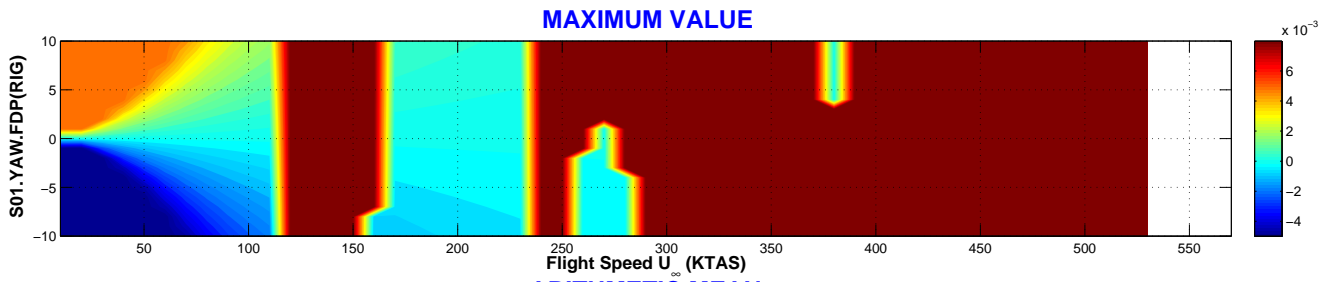
Tipo de Respuesta	DMP	Movimiento amortiguado a bajas velocidades.
	LCO	Movimiento no amortiguado oscilatorio (LCO) con distintas frecuencias características.
	CHA	Respuesta caótica para valores altos de descentramiento de la no linealidad.
	FLT	Velocidad de <i>flutter</i> no lineal a una velocidad contate de 525 KCAS (approx.).
Transición entre Tipos de Respuesta	Distinta evolución de la respuesta con la velocidad dependiendo del descentramiento: para valores del descentramiento pequeños (entre $-0,001$ y $0,001$ adimensional) la respuesta evoluciona según el siguiente patrón DMP-LCO[3-4]-FLT, mientras que para valores mayores la respuesta incluye caos y el patrón es DMP-LCO[4-5]-LCO[9-10]-CHA-FLT.	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 496. \text{ KTAS} / VF_{(K=0)} = 381. \text{ KTAS}$.
	No Lineal	La velocidad de <i>flutter</i> no lineal es 525 KTAS aproximadamente.
Variación de la Amplitud	con U_∞	La amplitud del movimiento es independiente de la velocidad de vuelo U_∞ para LCOs simples con 3-4 frecuencias características. Para LCOs complejos con 9-10 frecuencias características, la amplitud aumenta ligeramente con la velocidad de vuelo hasta que transiciona a caos (CHA) y luego a <i>flutter</i> (FLT).
	con YAW.FDC	La amplitud de la respuesta no depende del descentramiento de la no linealidad, aunque el valor medio de la respuesta acompaña al descentramiento.
Bifurcaciones	Bifurcación de tipo <i>Hopf</i> en la transición de amortiguado (DMP) a oscilatorio LCO[3-4].	
Flutter onset	Entrada en <i>flutter</i> abrupta pasando de amplitud constante e independiente de la velocidad de vuelo U_∞ a un movimiento divergente a velocidades mayores a la de <i>flutter</i> .	

VARIACIÓN DE LA PRECARGA

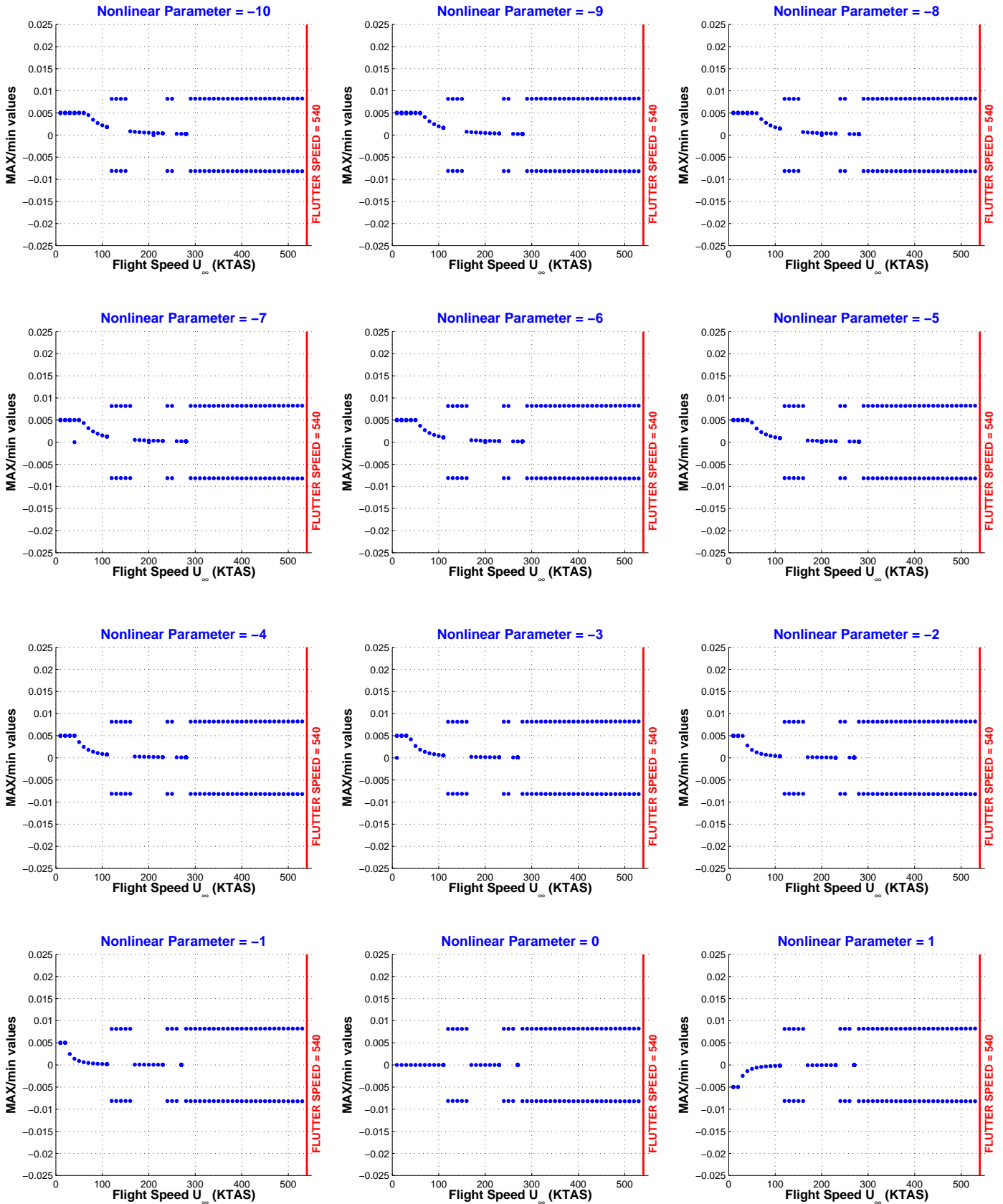
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Guiñada (YAW)	Freeplay (F)	Deadband Preload (DP)	S01.YAW.FDP	1/5



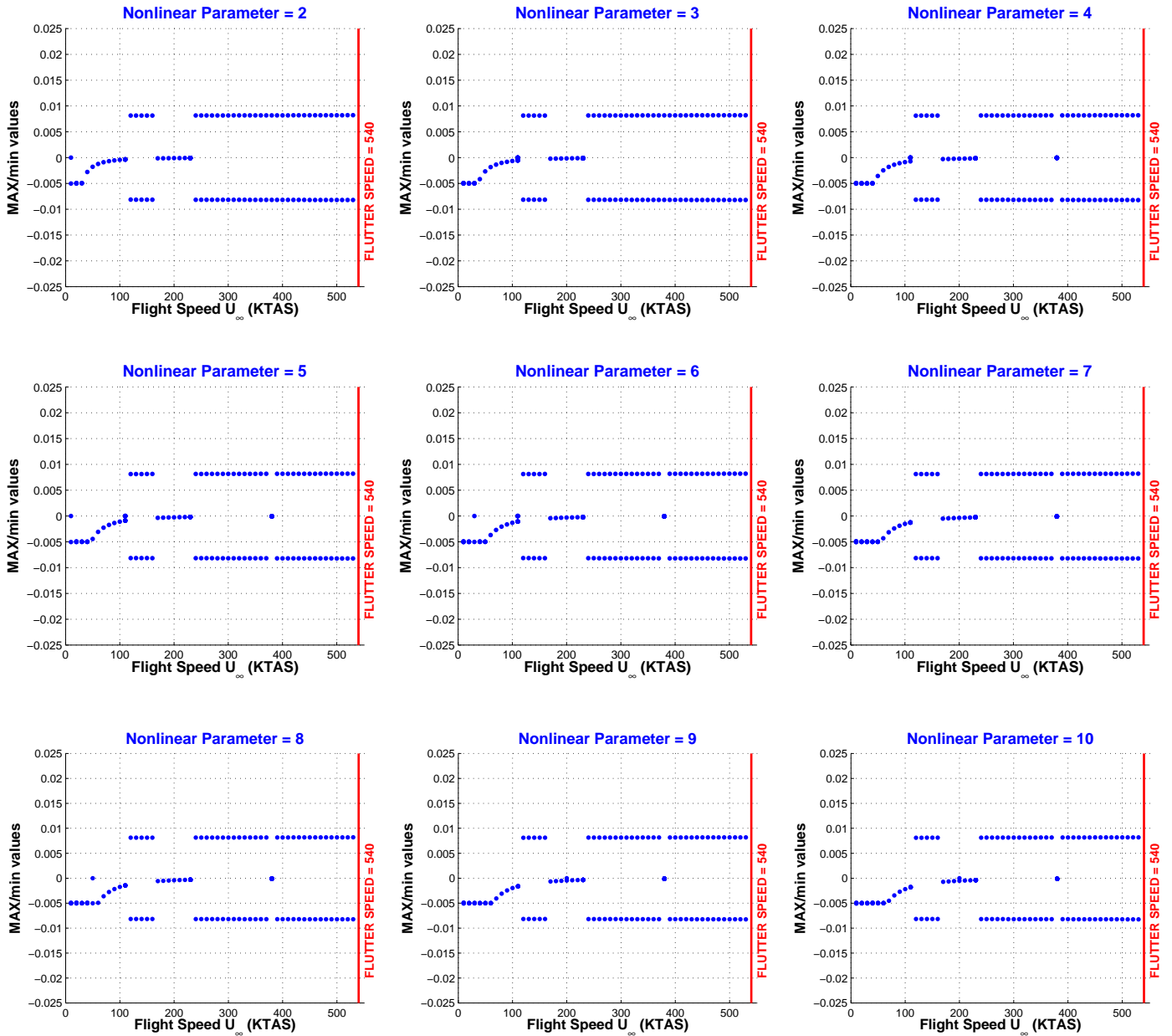
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Guiñada (YAW)	Freeplay (F)	Deadband Preload (DP)	S01.YAW.FDP	2/5



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Guiñada (YAW)	Freeplay (F)	Deadband Preload (DP)	S01.YAW.FDP	3/5



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Guiñada (YAW)	Freeplay (F)	Deadband Preload (DP)	S01.YAW.FDP	4/5



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Guiñada (YAW)	Freeplay (F)	Deadband Preload (DP)	S01.YAW.FDP	5/5

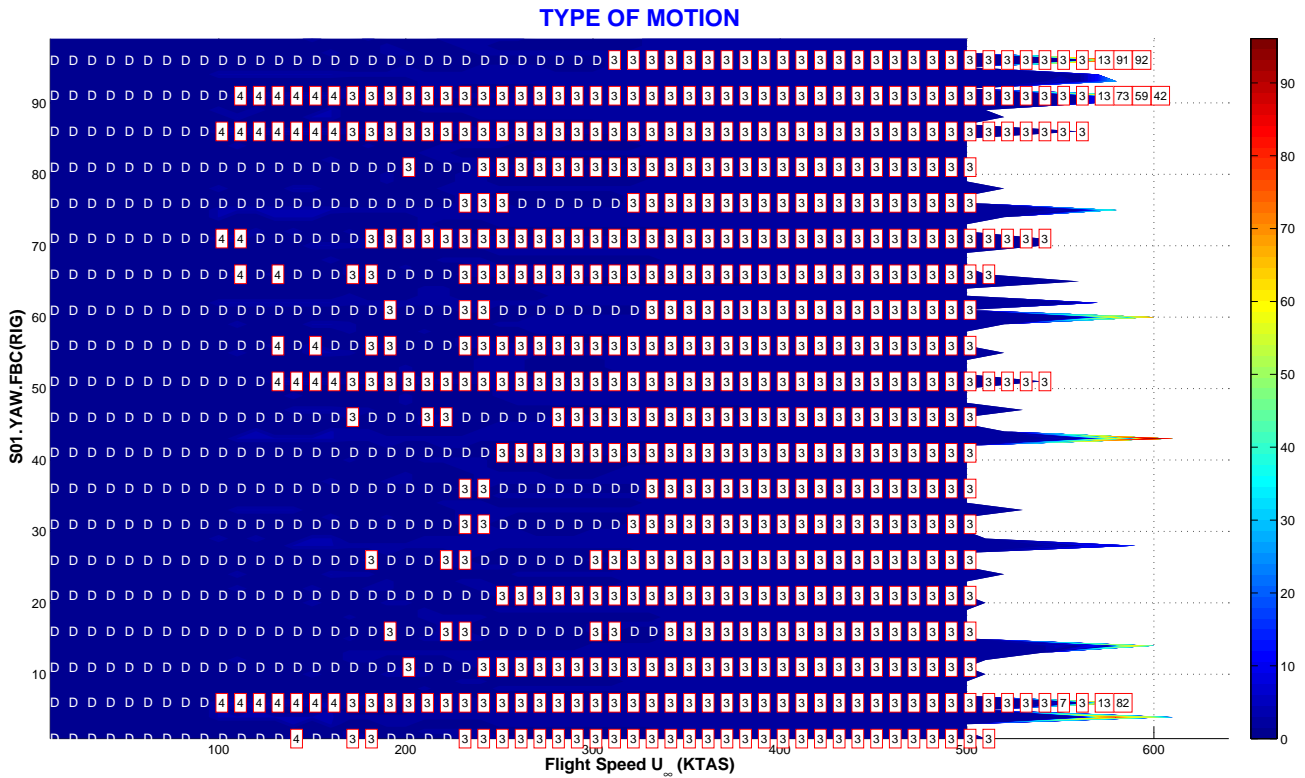
Tipo de Respuesta	DMP	Movimiento amortiguado a bajas velocidades de vuelo.
	LCO	Respuesta armónica no amortiguada (LCO) entre 110 y 150 KTAS y desde 250 KTAS (aprox.) hasta la entrada en <i>flutter</i>
	CHA	No existe respuesta caótica.
	FLT	Velocidad de <i>flutter</i> independiente de la precarga.
Transición entre Tipos de Respuesta	La respuesta evoluciona con la velocidad de vuelo según el patrón DMP-LCO[2]-DMP-LCO[2]-FLT. Sin embargo, se comprueba que la respuesta DMP y LCO[2] es dependiente a las condiciones iniciales, al menos por debajo de la velocidad de <i>flutter</i> con soporte en guiñada desconectado, i.e., con $K_{yaw} = 0$, que es $VF_{(K=0)} = 381$. KTAS.	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 496$. KTAS / $VF_{(K=0)} = 381$. KTAS.
	No Lineal	530 KTAS aprox. e independiente de la precarga de la no linealidad.
Variación de la Amplitud	con U_{∞}	La amplitud de la respuesta LCO[2] no depende de la velocidad de vuelo U_{∞} .
	con YAW.FDC	La amplitud de la respuesta LCO[2] no depende de la precarga.
Bifurcaciones	Bifurcación de tipo <i>Hopf</i> en la transición de amortiguado DMP a LCO[2].	
Flutter onset	Entrada en <i>flutter</i> abrupta ya que la respuesta transiciona de un LCO[2] (con dos frecuencias características) con amplitud constante e independiente de la velocidad de vuelo U_{∞} a un movimiento divergente a partir de la velocidad de <i>flutter</i> no lineal.	

NOTAS:

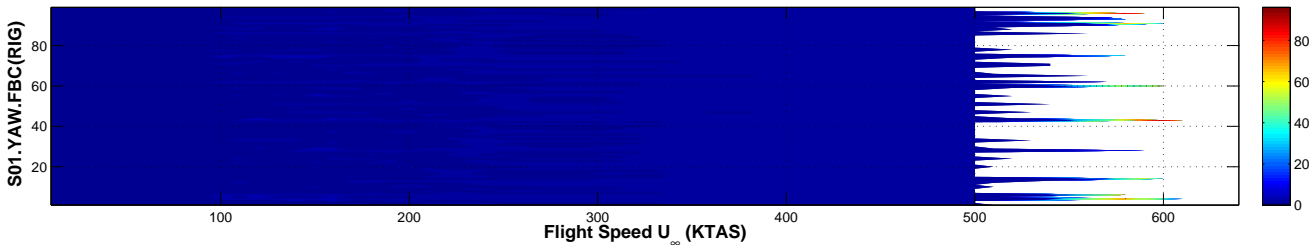
1. A bajas velocidades, el valor de la precarga del soporte en guiñada hace rotar al misil hasta la esquina de la no linealidad ($\mp 0,005$, i.e., $\mp 0,29$ [deg]). A medida que aumenta la velocidad, las fuerzas aerodinámicas sobre las aletas empiezan a compensar la precarga del soporte en guiñada y la posición de equilibrio ocurre dentro de la holgura de la no linealidad (ver por ejemplo los resultados para el valor de la guiñada entre 60 y 110 KTAS y con precarga -8 [N.m]).
2. A velocidad de 10 KTAS y holgura nula se identifica un LCO con dos frecuencias características (ver mapa de frecuencias características). Sin embargo, se trata de una identificación de un movimiento poco amortiguado pero de amplitud del orden de 10^{-5} [rad], es decir, amplitud nula. Por tanto, se puede considerar respuesta amortiguada.
3. Los resultados para esta no linealidad indican que es posible la aparición de LCOs por debajo de la velocidad de *flutter* con rigidez nula, i.e., con soporte en guiñada desconectado $K_{yaw} = 0$, que corresponde al sistema cuando la rotación de guiñada está dentro de la zona *deadband*. Sin embargo, el hecho de que la velocidad de *flutter* con $K_{yaw} = 0$ sea de 489 KTAS hace que sea posible encontrar, por debajo de esta velocidad, condiciones iniciales que den lugar a una respuesta amortiguada en lugar de LCOs. Por ejemplo, obsérvese el diagrama de bifurcación para precarga de -8 [N.m], en el que se intercalan varias respuestas amortiguadas entre LCOs.

VARIACIÓN DE LAS CONDICIONES INICIALES

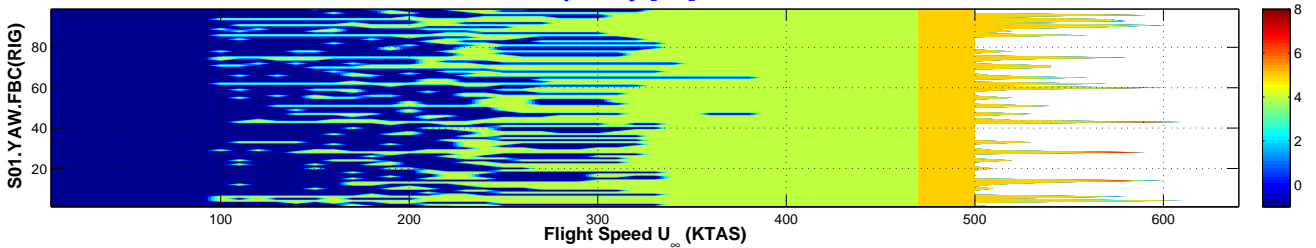
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Guiñada (YAW)	Freeplay (F)	Boundary Conditions (BC)	S01.YAW.FBC	1/3



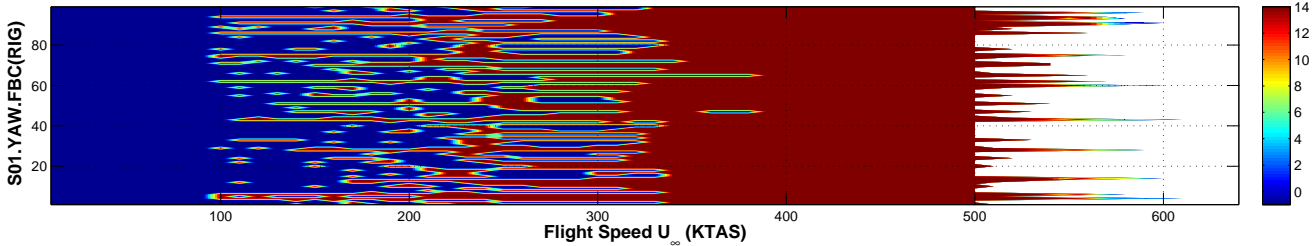
Number Of Characteristic Frequencies



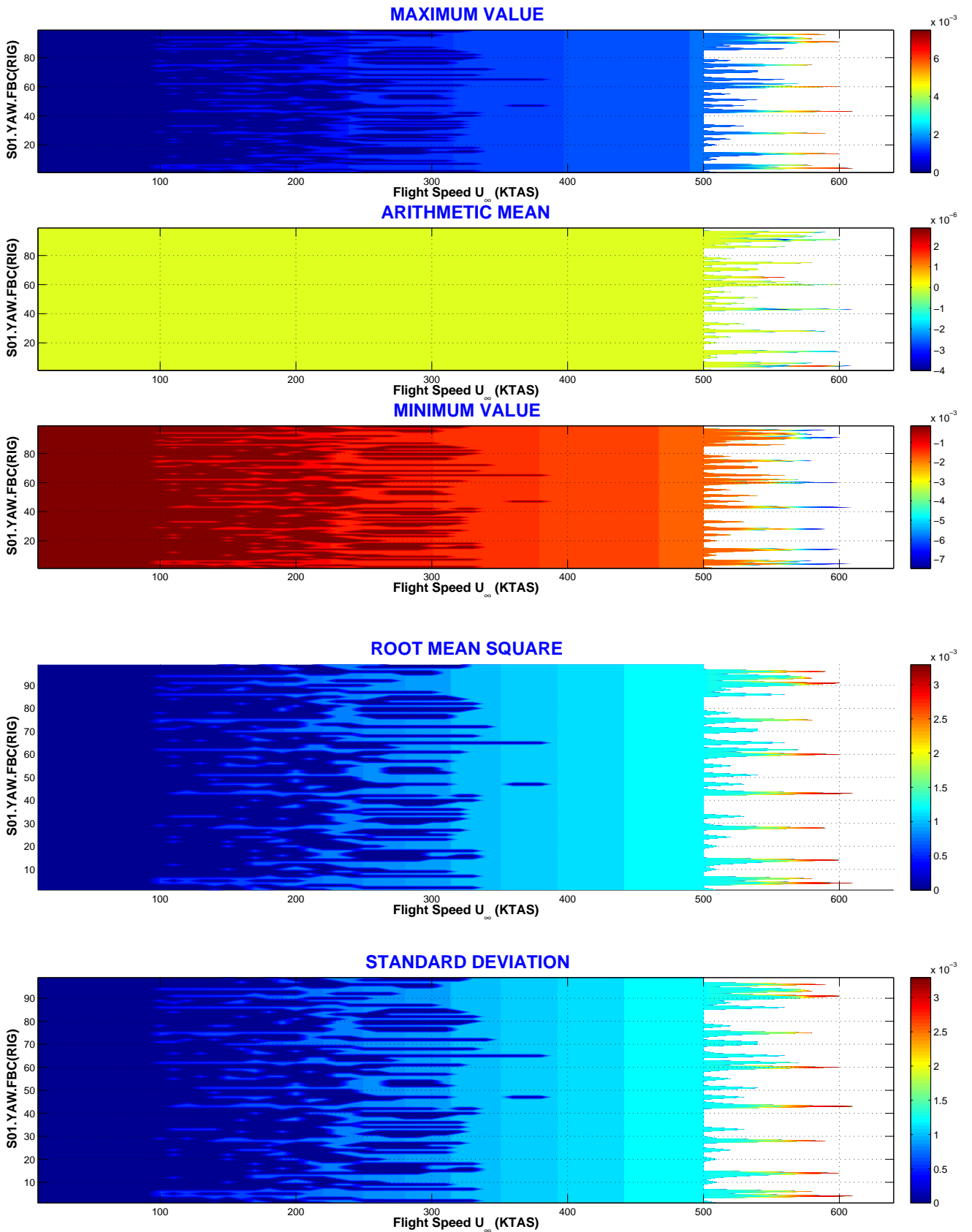
1st Frequency [Hz] MAX PSD



2nd Frequency [Hz] MAX PSD



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Guiñada (YAW)	Freeplay (F)	Boundary Conditions (BC)	S01.YAW.FBC	2/3



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Guiñada (YAW)	Freeplay (F)	Boundary Conditions (BC)	S01.YAW.FBC	3/3

Tipo de Respuesta	DMP	Respuesta amortiguada a velocidades bajas.
	LCO	Oscilaciones de ciclo límite (LCO) a partir de una velocidad de vuelo U_∞ que depende de las condiciones iniciales. La respuesta LCO tiene tres (LCO[3]) o cuatro (LCO[4]) frecuencias características.
	CHA	No existe respuesta de tipo caótica.
	FLT	Velocidad de flutter 500 KTAS (aprox.), aunque aumenta a 600 KTAS para algunas condiciones iniciales.
Transición entre Tipos de Respuesta	La respuesta evoluciona según la secuencia DMP-LCO[4]-LCO[3]-FLT. Las velocidades de transición entre los distintos tipos de respuesta depende de las condiciones iniciales.	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 496$. KTAS / $VF_{(K=0)} = 489$. KTAS.
	No Lineal	Velocidad de <i>flutter</i> es 500 KTAS, aunque aumenta a 600 KTAS para algunas condiciones de contorno.
Variación de la Amplitud	con U_∞	Una vez iniciada la oscilación de ciclo límite LCO, la amplitud de la respuesta permanece constante e independiente de la velocidad de vuelo U_∞ .
	con YAW.FBC	La amplitud de la respuesta, una vez iniciadas las oscilaciones de ciclo límite, no depende de las condiciones iniciales.
Bifurcaciones	Bifurcación de tipo <i>Hopf</i> en la transición de amortiguado a oscilación de ciclo límite (DMP-LCO[4] ó DMP-LCO[3]).	
Flutter onset	Entrada en <i>flutter</i> violenta y no previsible, teniendo en cuenta la amplitud constante de la respuesta a velocidades inferiores a la de <i>flutter</i> .	

NOTA:

Las condiciones iniciales son:

$$\{x(0)\} = \left[+0,015 \quad \hat{\xi}_2 \quad -0,015 \quad 0,0 \quad \frac{d\hat{\xi}_2}{dt} \quad 0,0 \right]$$

donde $\hat{\xi}_2$ y $d\hat{\xi}_2/dt$ se varían aleatoriamente dando un total de 99 condiciones iniciales distintas.

9.3. Estructura (RIG) / Soportado (S02)

En esta sección se detallan los resultados para la configuración del misil con 3 modos de sólido rígido (modo lateral, modo de guiñada y modo de rotación de aletas) y con condiciones de contorno correspondientes a vuelo equilibrado (**S02**).

La no linealidad de tipo *freeplay* se considera localizada en la rotación de las aletas (**ROT**). Por otro lado, se varían distintos parámetros del *freeplay*: **FDA** corresponde a la variación de la amplitud de la holgura, **FDC** corresponde a la variación del centro de la no linealidad, **FDP** corresponde a la variación de la precarga de la no linealidad y, por último, **FBC** indica variación de las condiciones iniciales.

La tabla 9.2 resume las configuraciones de estudio y la sección en la que se incluyen los resultados.

SECCIÓN	CONFIGURACIÓN
9.3	RIG.S02.ROT.FDA
	RIG.S02.ROT.FDC
	RIG.S02.ROT.FDP
	RIG.S02.ROT.FBC

Tabla 9.2: Configuraciones de estudio para el misil **RIG** (modelo estructural con 3 modos de sólido rígido) con soportado **S02** (vuelo equilibrado).

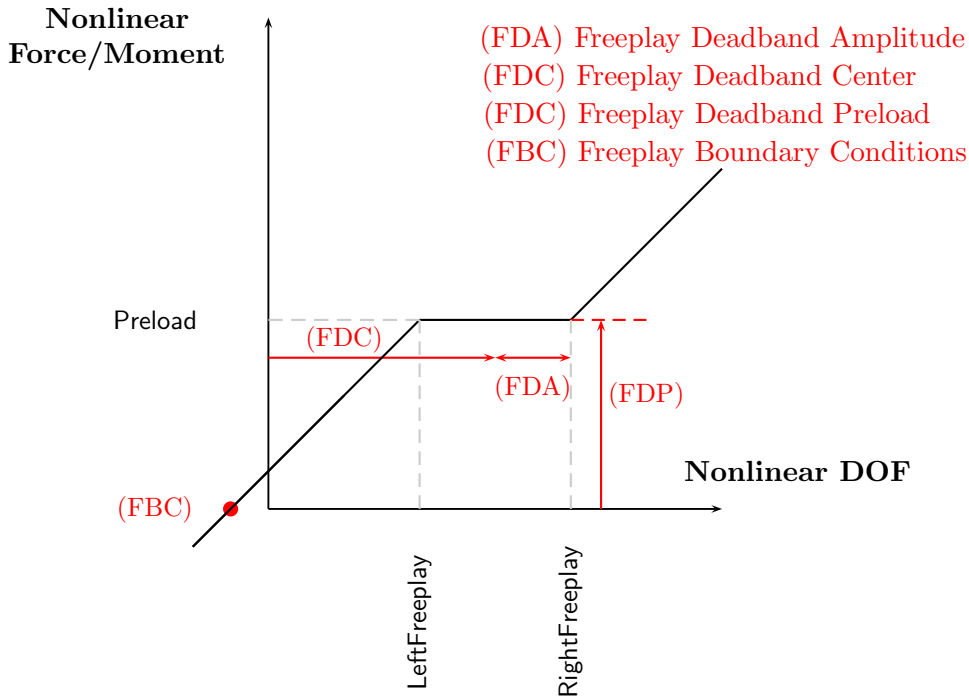


Figura 9.4: Nolinealidad del tipo *freeplay* con los principales parámetros que la definen.

Dada una no linealidad de tipo *freeplay* nominal, de precarga 0,0 [N.m]⁶ y amplitud adimensional $\mp 0,005$ ($\mp 0,29^\circ$ aprox.), se varía uno a uno los parámetros mencionados anteriormente.

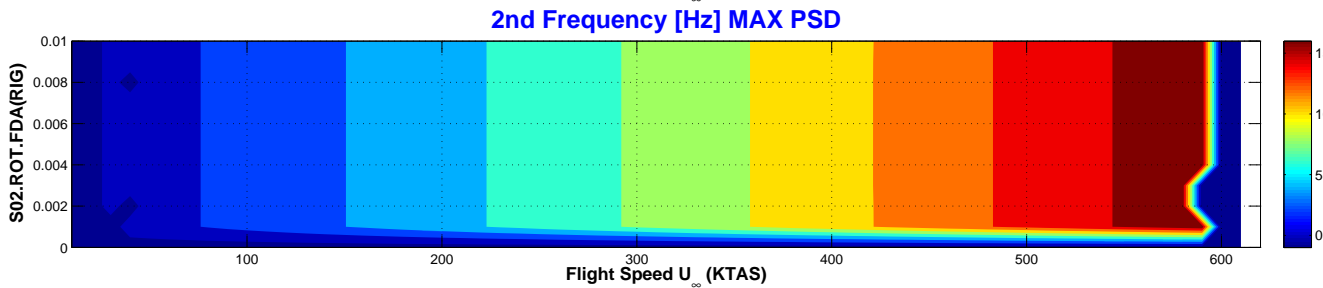
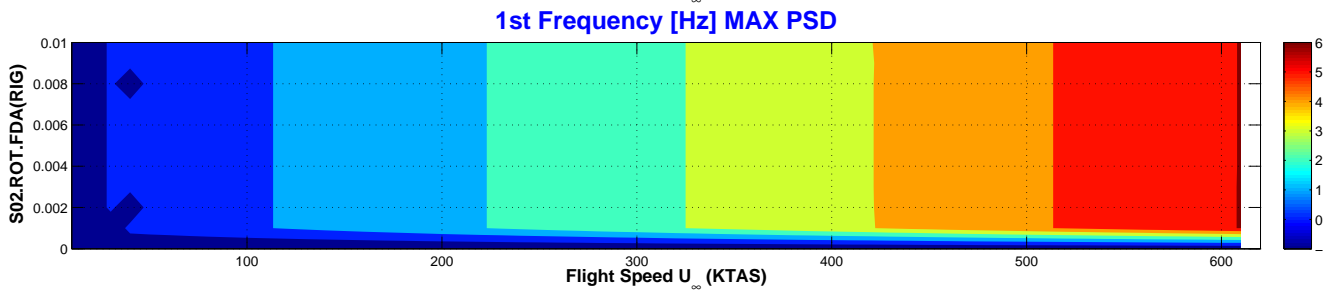
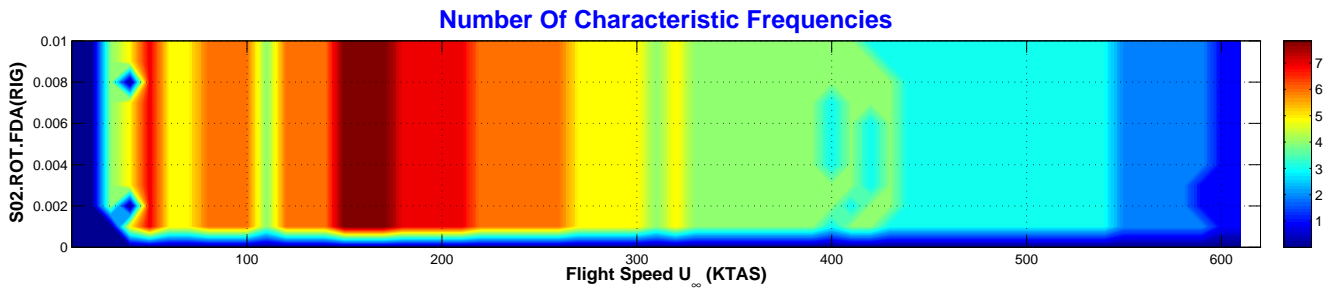
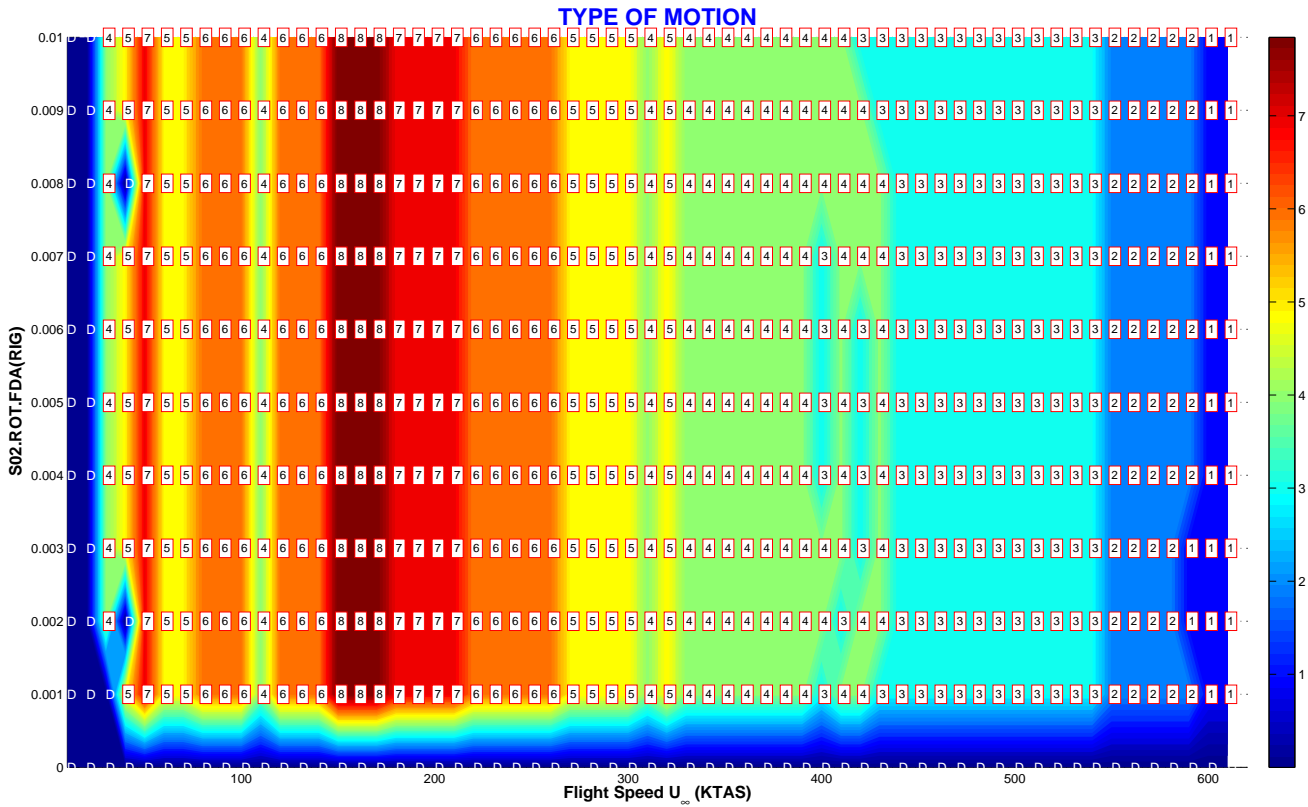
La condición inicial nominal del vector de estado-espacio $\{x\}$ es:

$$\{x(0)\}_{6 \times 1} = \left[\hat{\xi}_1 \quad \hat{\xi}_2 \quad \hat{\xi}_3 \quad \frac{d\hat{\xi}_1}{dt} \quad \frac{d\hat{\xi}_2}{dt} \quad \frac{d\hat{\xi}_3}{dt} \right]^T = \left[+0,015 \quad -0,015 \quad -0,015 \quad 0,0 \quad 0,0 \quad 0,0 \right]^T$$

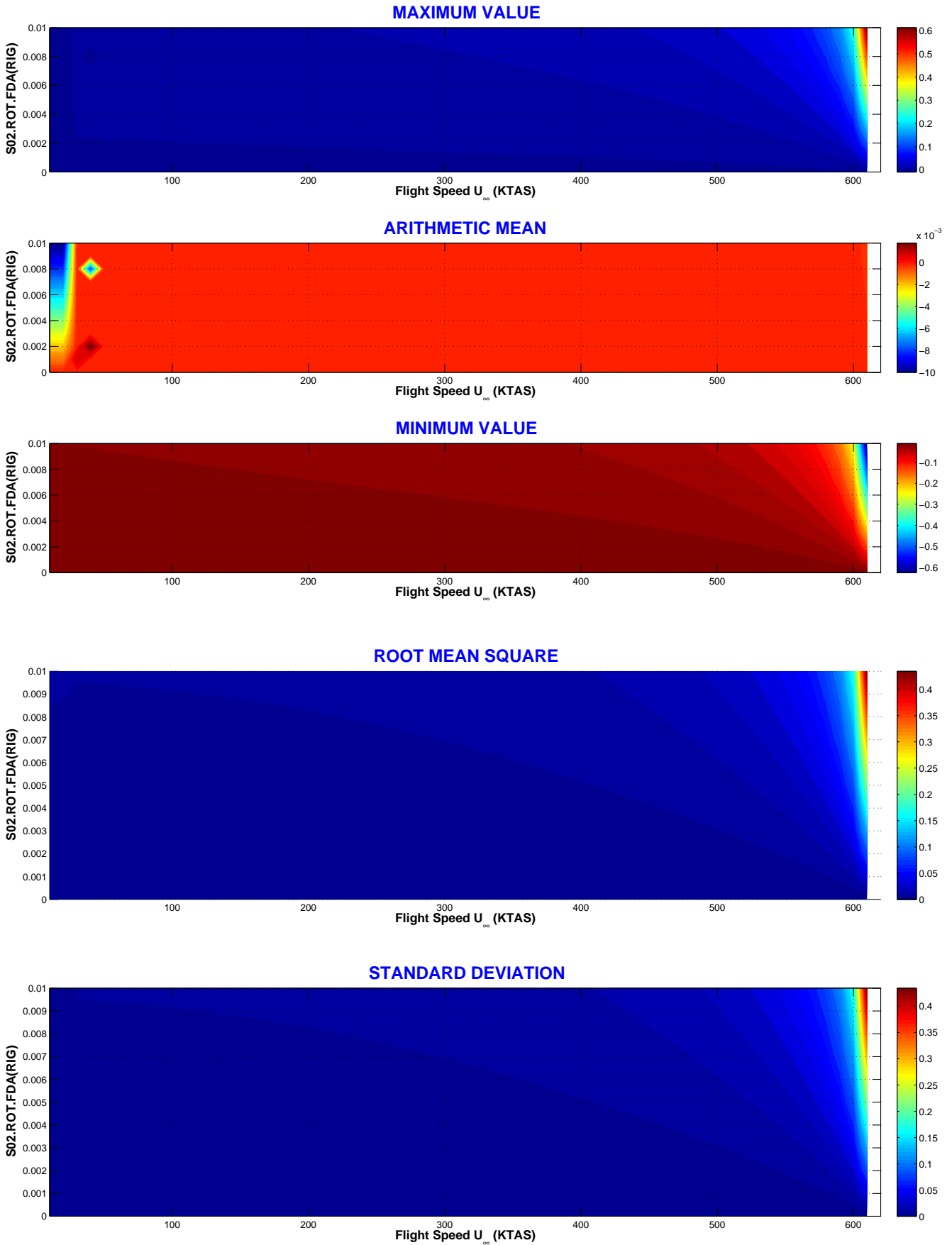
⁶Recuérdese que la precarga adimensional venía dada por $\hat{M}_0^{NLR} = M_0^{NLR} / m_0 U_0^2 L$.

VARIACIÓN DE LA AMPLITUD DE LA HOLGURA

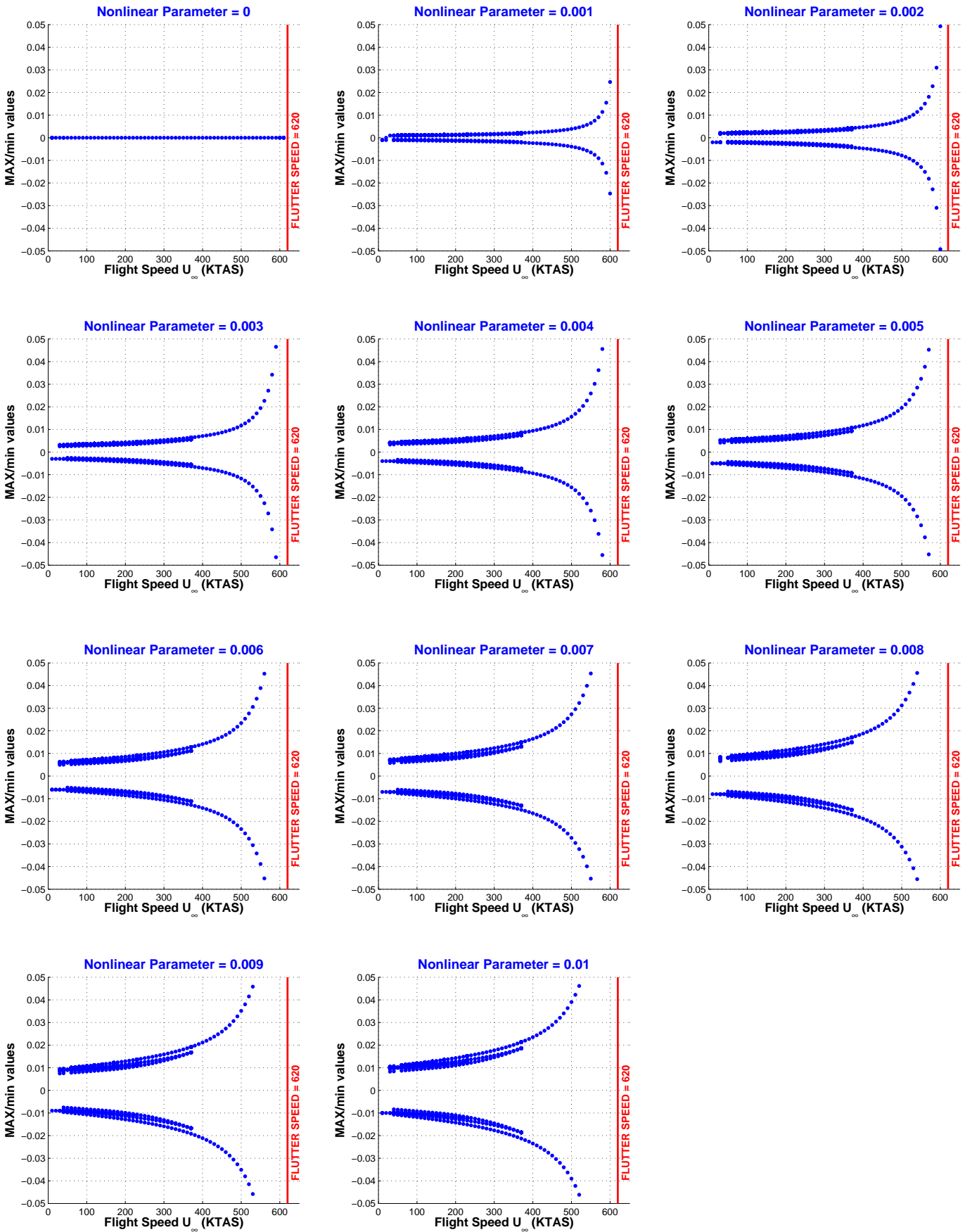
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S02	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Amplitude (DA)	S02.ROT.FDA	1/4



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S02	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Amplitude (DA)	S02.ROT.FDA	2/4



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S02	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Amplitude (DA)	S02.ROT.FDA	3/4

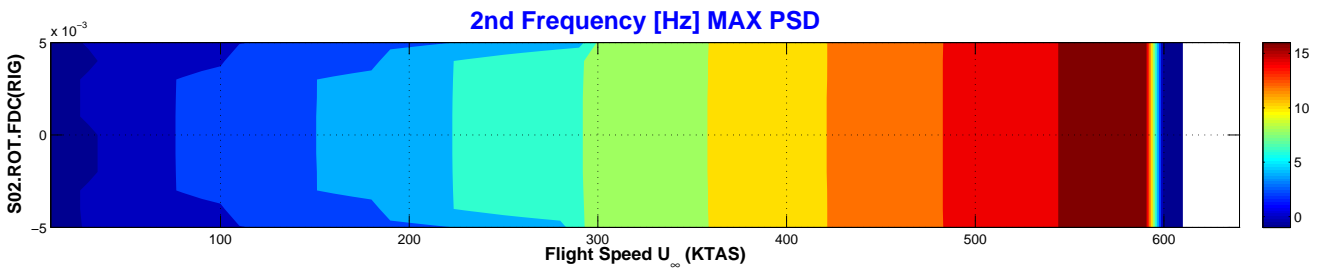
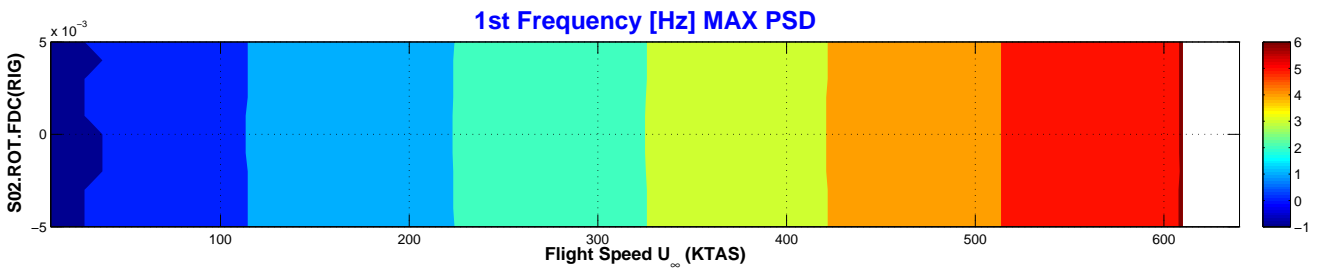
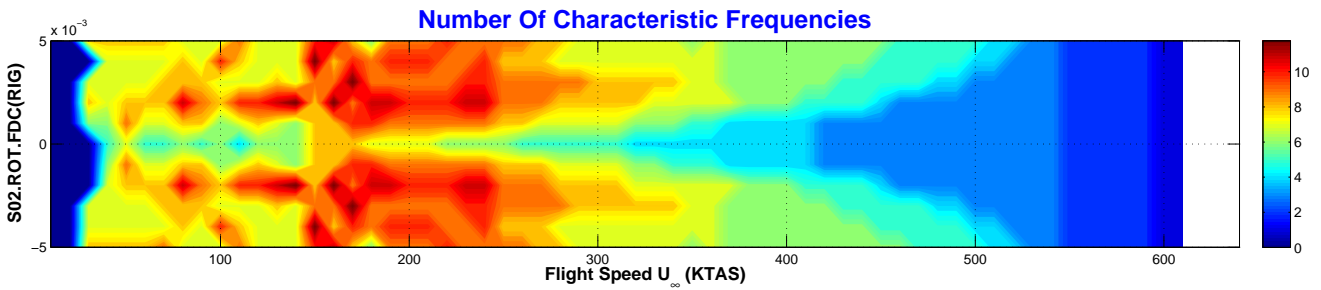
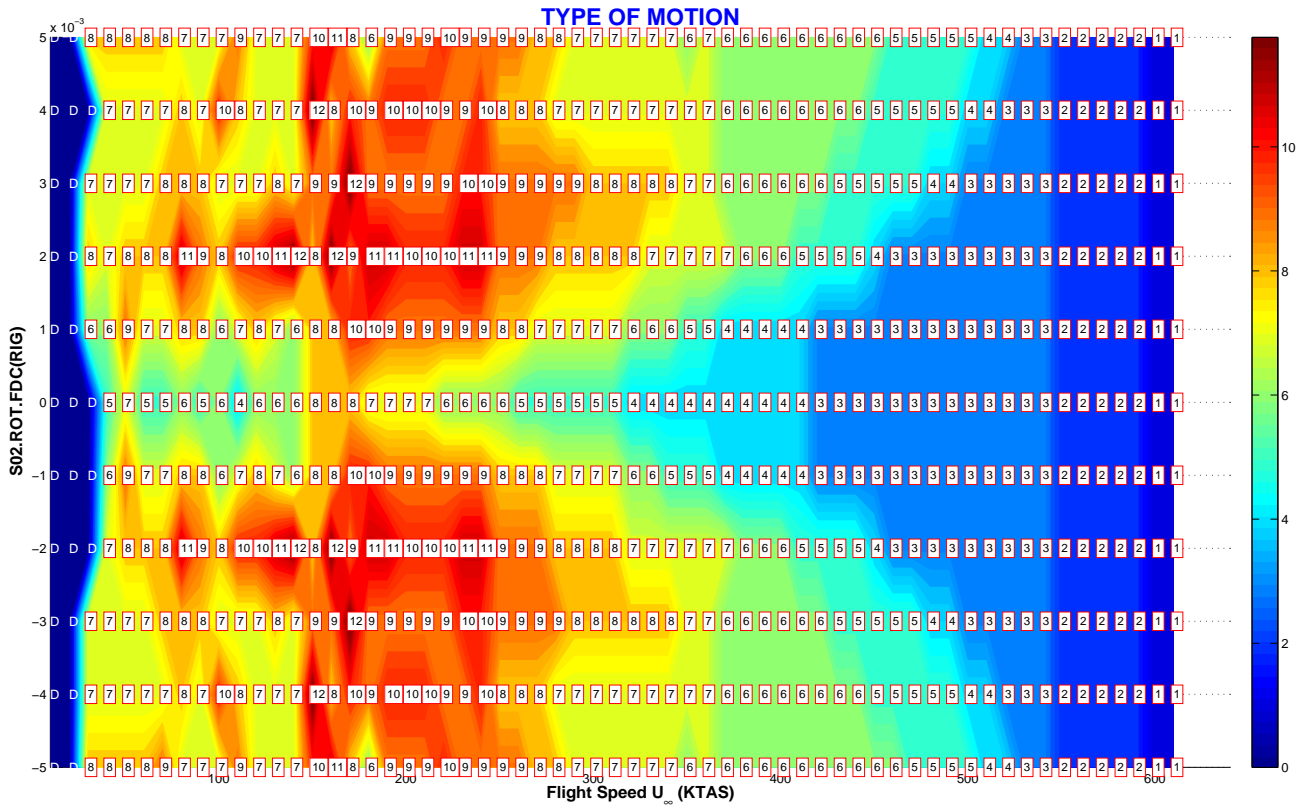


CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S02	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Amplitude (DA)	S02.ROT.FDA	4/4

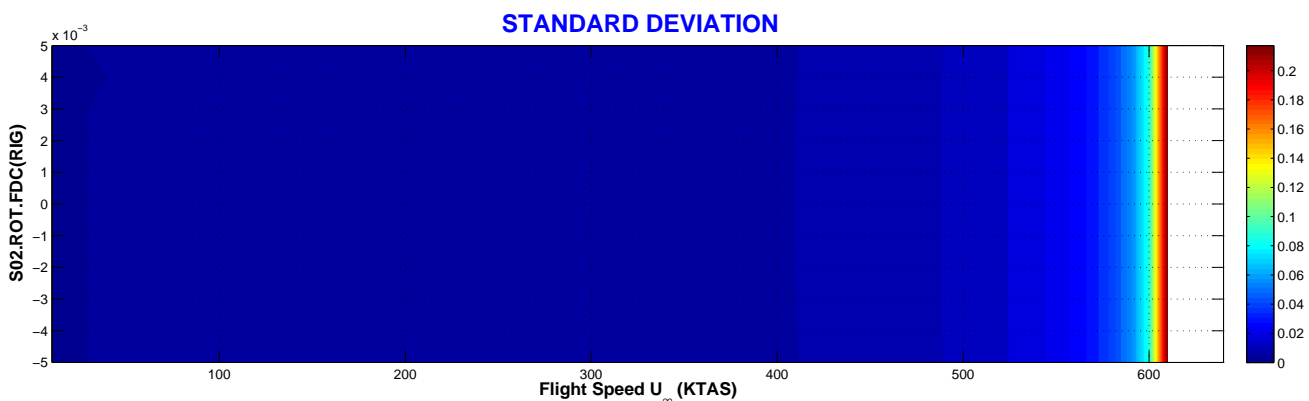
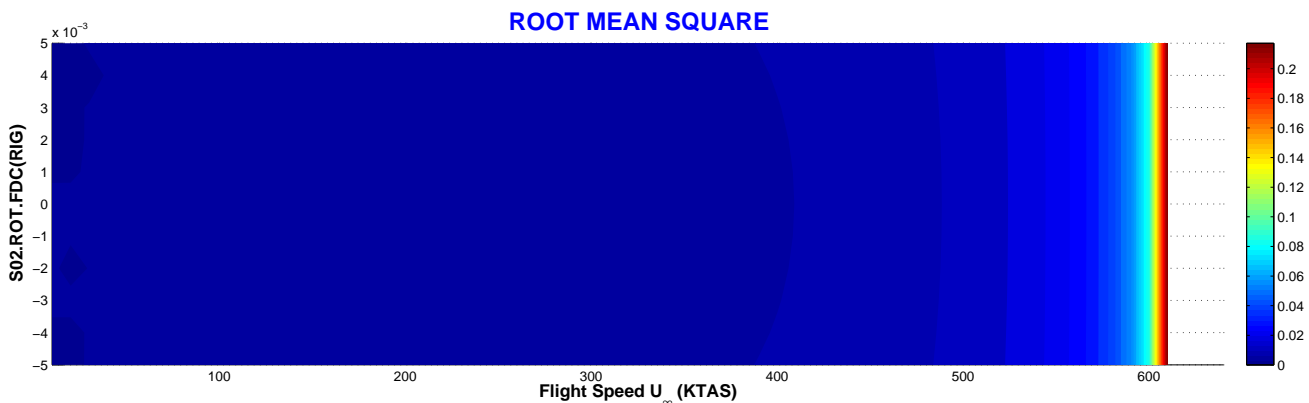
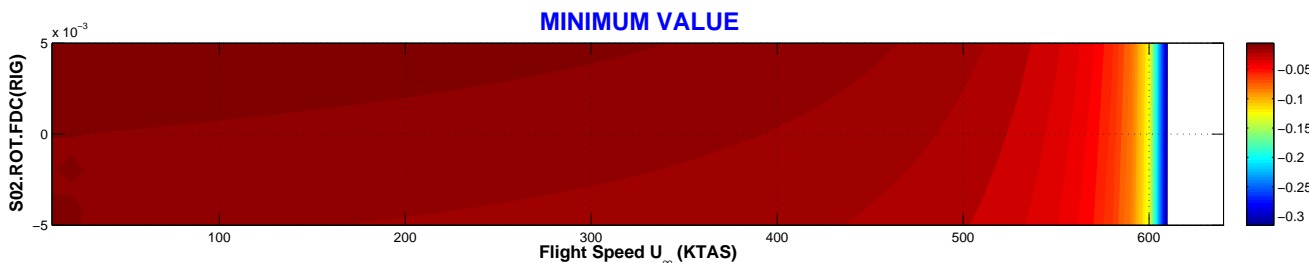
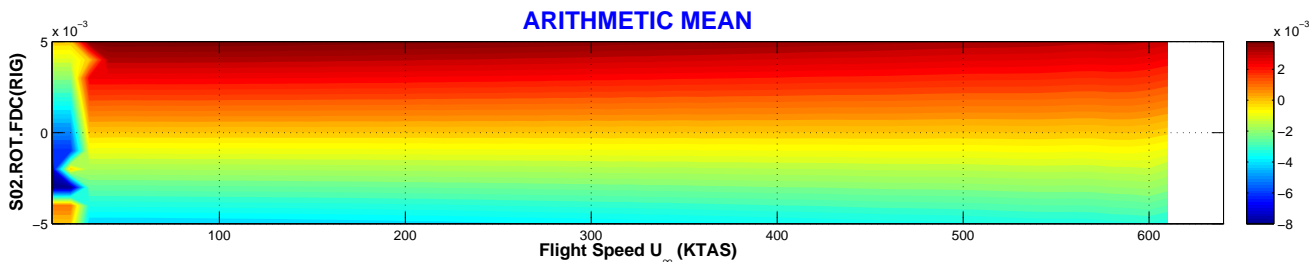
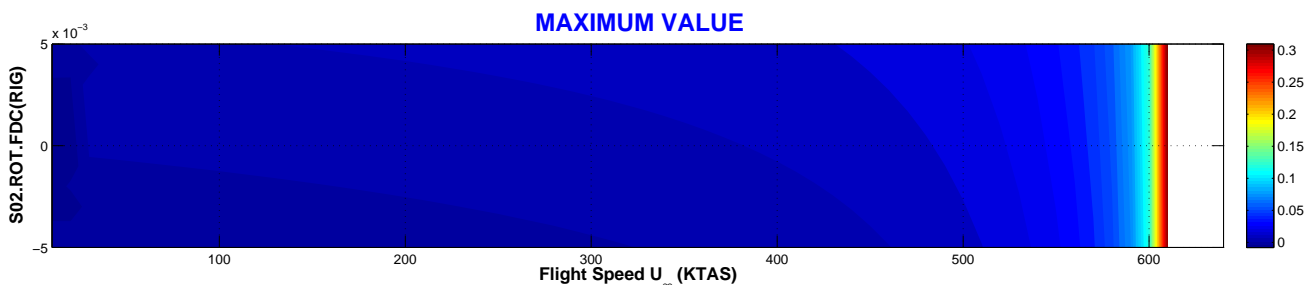
Tipo de Respuesta	DMP	Movimiento amortiguado a velocidades menores que 30 KTAS independiente de la amplitud de la holgura, excepto para el sistema lineal que es amortiguado a todas las velocidades de vuelo hasta la velocidad de <i>flutter</i> .
	LCO	Excepto para el sistema lineal (amortiguado hasta la velocidad de <i>flutter</i>), el resto de amplitudes tiene respuesta LCO con distintas frecuencias características desde $U_\infty = 30$ KTAS hasta la entrada en <i>flutter</i> .
	CHA	No existe respuesta caótica.
	FLT	Entrada en <i>flutter</i> a una velocidad aproximada de 620 KTAS e independiente de la amplitud de la holgura.
Transición entre Tipos de Respuesta	Excepto para el sistema lineal (con un patrón DMP-FLT), la respuesta evoluciona según la siguiente secuencia: DMP-LCO[5-8]-LCO[4,3,2,1]-FLT. Hasta la velocidad de vuelo de 30 KTAS la respuesta está amortiguada. Desde $U_\infty = 30$ KTAS hasta 350 KTAS, la respuesta es armónica no amortiguada (LCO) con un elevado número de frecuencias características (de 5 a 8). Los diagramas de bifurcación revelan la existencia de dos máximos y dos mínimos característicos en este rango de velocidades. A partir de $U_\infty = 350$ KTAS (aprox.), la respuesta pasa a tener LCOs de 4 frecuencias características y, a medida que aumenta la velocidad de vuelo, las frecuencias características disminuyen de 4 a 1 con velocidades ya muy próximas a la velocidad de <i>flutter</i> . Esta última frecuencia característica a velocidades próximas a la de <i>flutter</i> es la frecuencia del <i>mecanismo de flutter</i> .	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 616$. KTAS / $VF_{(K=0)} = 0$. KTAS.
	No Lineal	Velocidad de <i>flutter</i> de 620 KTAS aprox. e independiente de la amplitud de la holgura.
Variación de la Amplitud	con U_∞	La amplitud de la respuesta LCO aumenta con la velocidad de vuelo U_∞ .
	con ROT.FDA	La amplitud de la respuesta LCO es ligeramente mayor para valores mayores de la amplitud de la holgura.
Bifurcaciones	Bifurcación de tipo <i>Hopf</i> en la transición de amortiguado a LCO (DMP-LCO[5-8]).	
Flutter onset	Entrada en <i>flutter</i> progresiva ya que a la amplitud del movimiento ya estaba aumentando a medida que la velocidad de vuelo se aproximaba a la velocidad de <i>flutter</i> (620 KTAS).	

VARIACIÓN DEL CENTRO DE LA NOLINEALIDAD

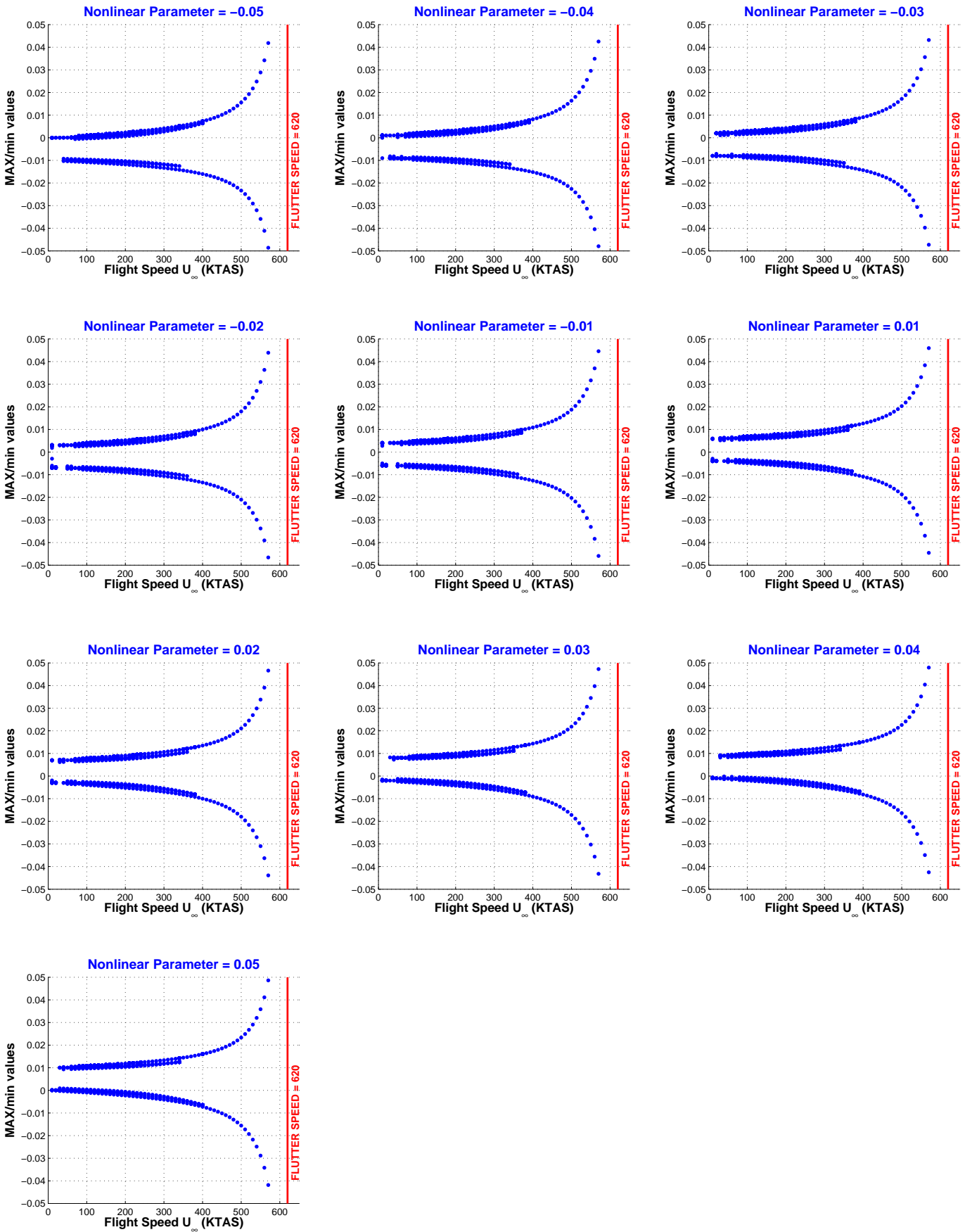
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S02	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Center (DC)	S02.ROT.FDC	1/4



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S02	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Center (DC)	S02.ROT.FDC	2/4



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S02	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Center (DC)	S02.ROT.FDC	3/4

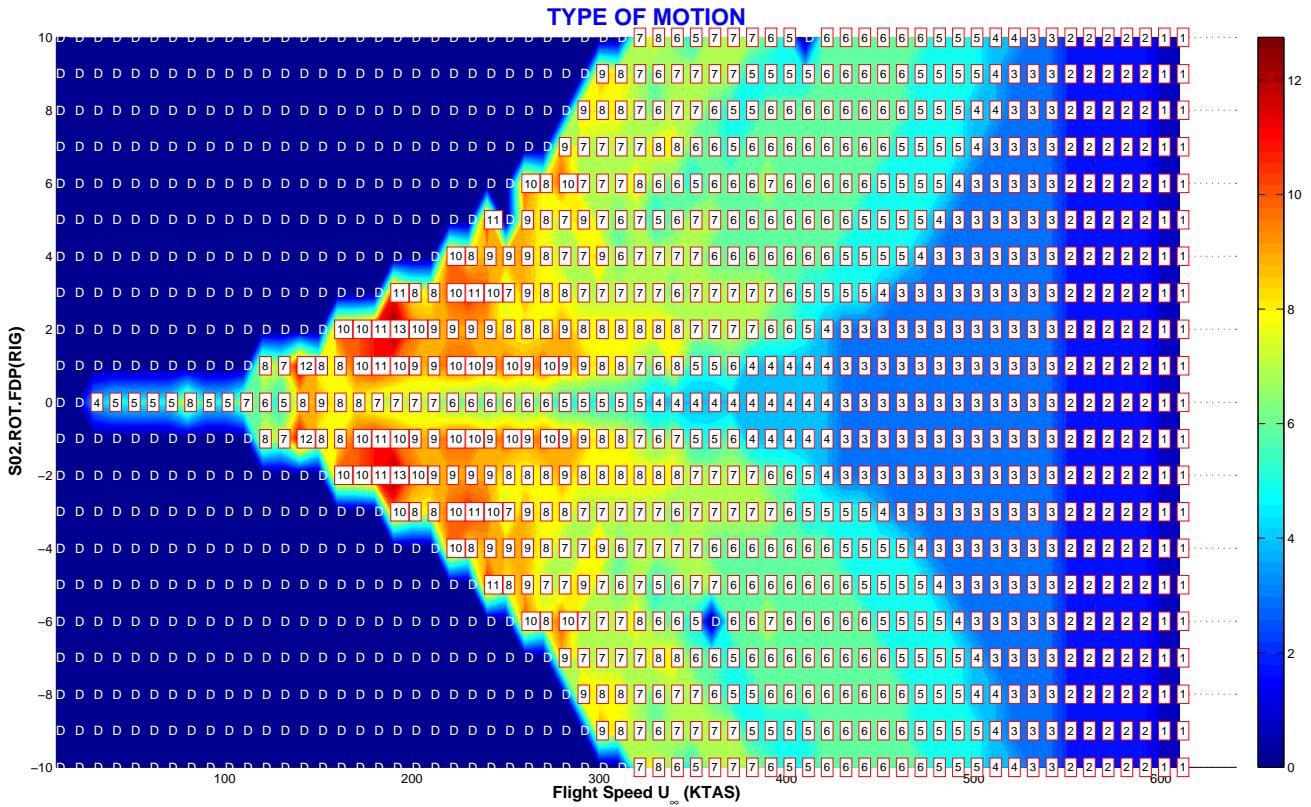


CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S02	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Amplitude (DC)	S02.ROT.FDC	4/4

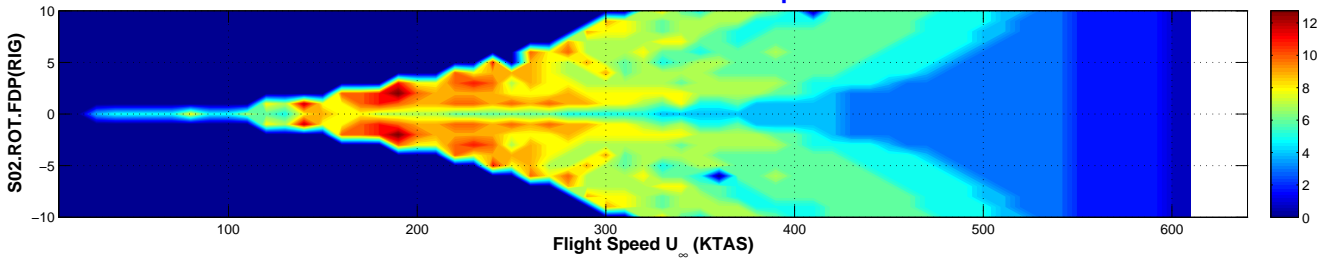
Tipo de Respuesta	DMP	Movimiento amortiguado a velocidades inferiores a 30 KTAS.
	LCO	Movimiento armónico no amortiguado (LCO) desde la velocidad de vuelo $U_\infty = 30$ KTAS hasta la velocidad de <i>flutter</i> . La complejidad de la respuesta LCO depende de la velocidad de vuelo: hasta 250 KTAS, el movimiento LCO se compone de un elevado número de frecuencias características (entre 6 y 11 frecuencias características). A partir de 250 KTAS, el número de frecuencias características empieza a disminuir hasta llegar a un armónico simple justo a la velocidad de <i>flutter</i> .
	CHA	No existe respuesta de tipo caótico.
	FLT	La velocidad de <i>flutter</i> es aproximadamente 620 KTAS e independiente del descentramiento de la no linealidad.
Transición entre Tipos de Respuesta	La respuesta tiene el siguiente patrón: DMP-LCO[6-11]-LCO[11-4]-LCO[4-1]-FLT. El movimiento amortiguado persiste hasta velocidades de vuelo $U_\infty = 20$ KTAS, independiente del descentramiento de la no linealidad. A partir de 20 KTAS, se obtiene una respuesta armónica compleja LCO[6-11] con un elevado número de frecuencias características, entre 6 y 11. Esta respuesta LCO[6-11] se mantiene en un rango de velocidades independiente del descentramiento de la no linealidad, entre 20 y 250 KTAS aproximadamente. A partir de la velocidad de vuelo 250 KTAS, el movimiento armónico empieza a ser menos complejo (disminuye el número de frecuencias características), y se obtiene el movimiento LCO[11-4] con un número de frecuencias características entre 11 y 4. El LCO con 4 frecuencias características se obtiene a una velocidad mayor a medida que aumenta el descentramiento, por lo que el rango de velocidades en el que se desarrolla el LCO[11-4] depende del centro de la no linealidad. A partir de la velocidad en la que se desarrolla el LCO[4] comienza un último rango de velocidades en el que la respuesta decrece en complejidad (disminuye el número de frecuencias características) para aproximarse a un armónico simple con la frecuencia única del mecanismo de <i>flutter</i> .	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 616$. KTAS / $VF_{(K=0)} = 0$. KTAS.
	No Lineal	La velocidad de <i>flutter</i> no lineal es de 620 KTAS, independiente del descentramiento de la no linealidad.
Variación de la Amplitud	con U_∞	La amplitud de la respuesta aumenta a medida que se incrementa la velocidad de vuelo U_∞ .
	con ROT.FDC	La amplitud no depende del descentramiento de la no linealidad, aunque el valor medio de la respuesta se mueve con el centro de la no linealidad.
Bifurcaciones	Bifurcación de tipo <i>Hopf</i> en la transición de amortiguado DMP a armónico LCO[6-11].	
Flutter onset	Entrada en <i>flutter</i> previsible a la vista del aumento progresivo de la amplitud de la respuesta a medida que la velocidad de vuelo se aproxima a la velocidad de <i>flutter</i> (620 KTAS aprox. e independiente del descentramiento de la no linealidad).	

VARIACIÓN DE LA PRECARGA

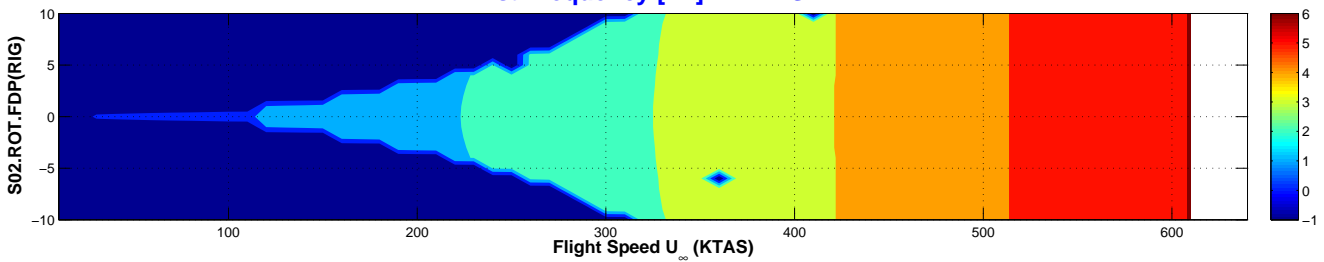
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S02	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Preload (DP)	S02.ROT.FDP	1/5



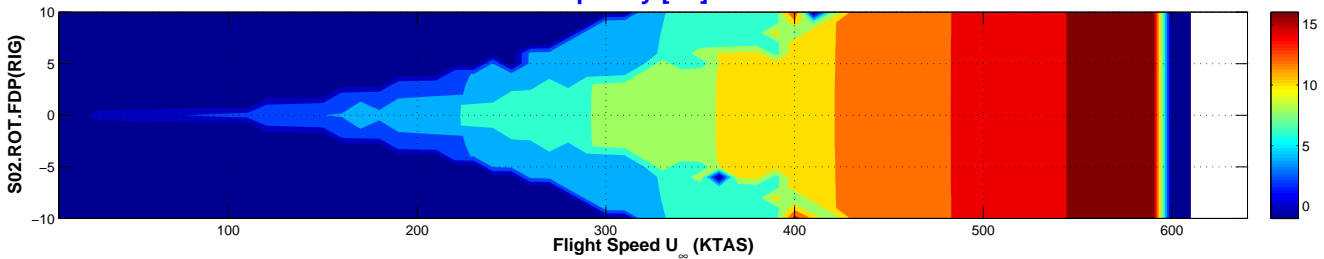
Number Of Characteristic Frequencies



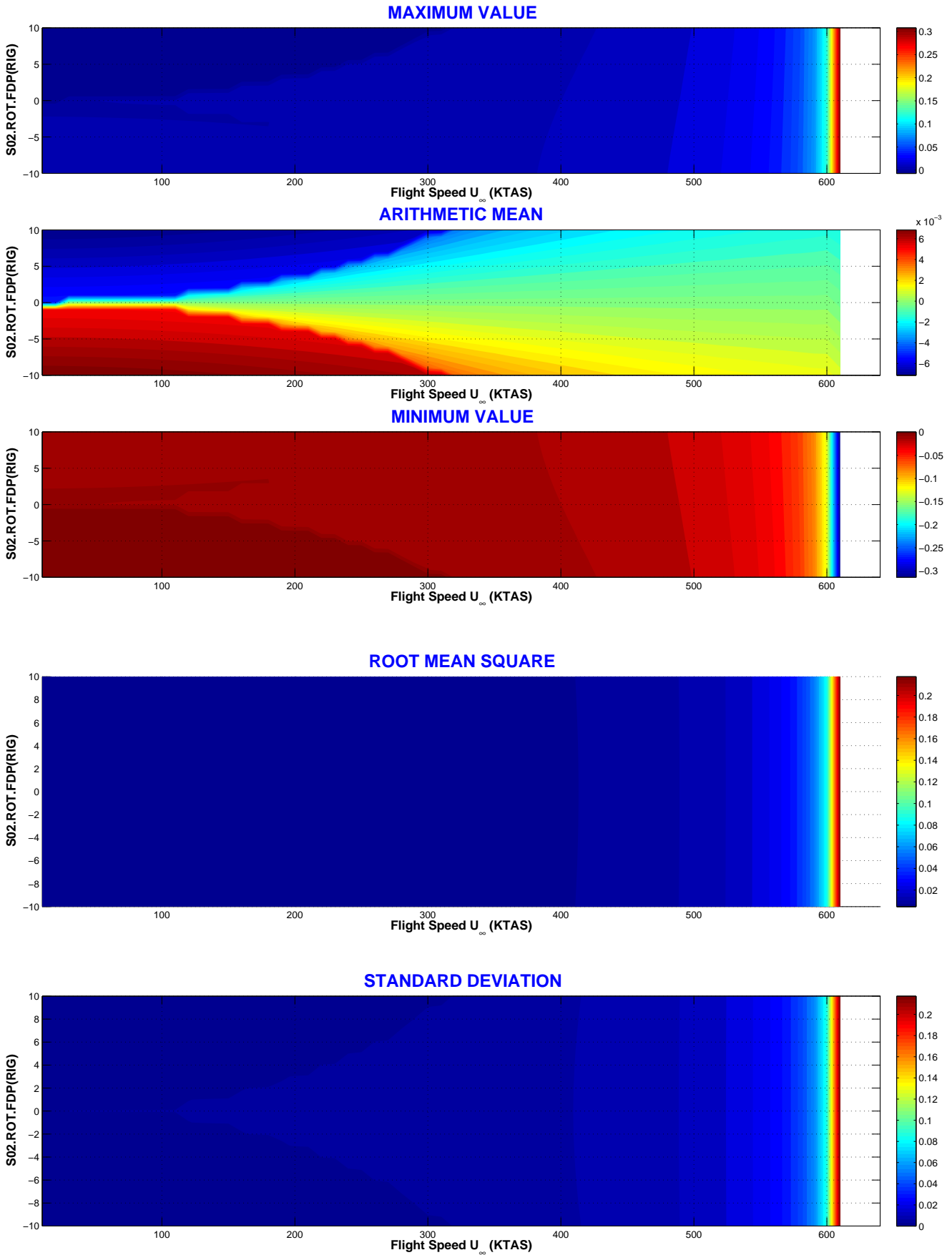
1st Frequency [Hz] MAX PSD



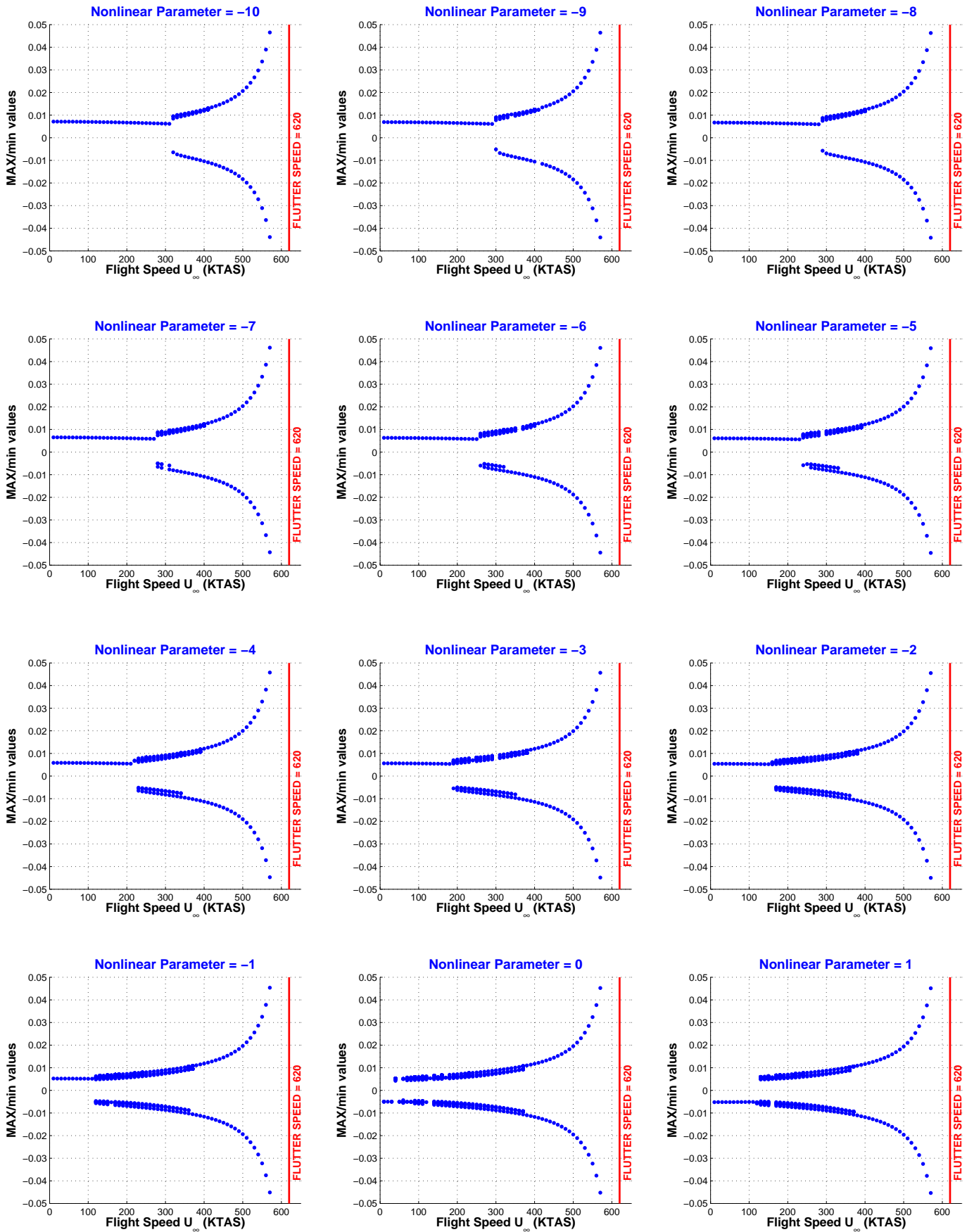
2nd Frequency [Hz] MAX PSD



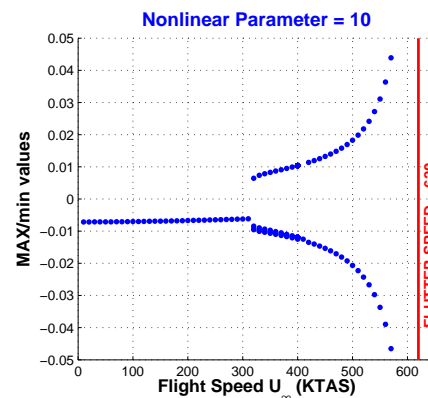
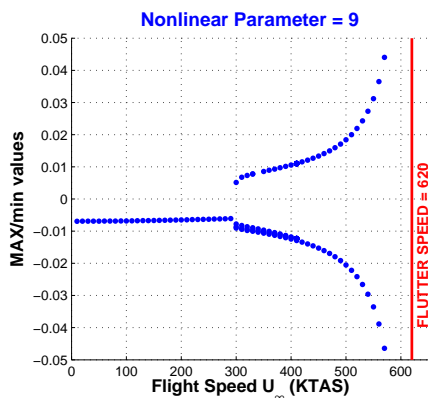
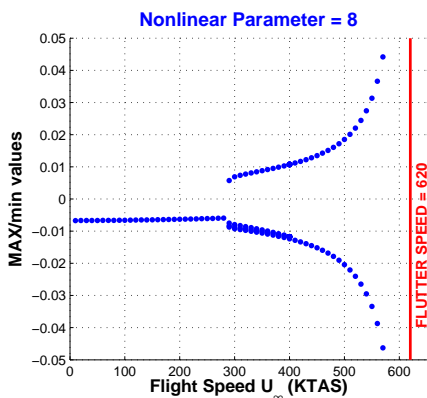
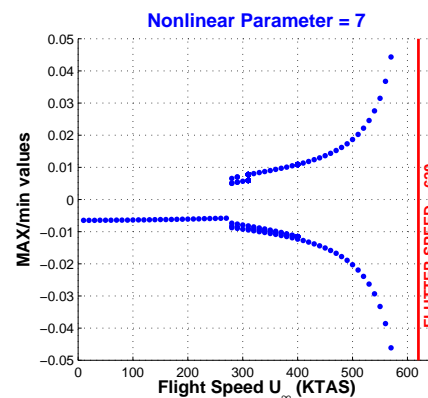
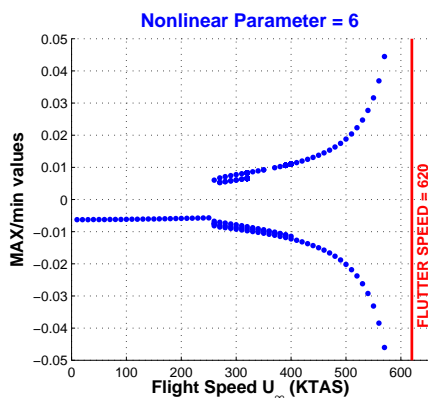
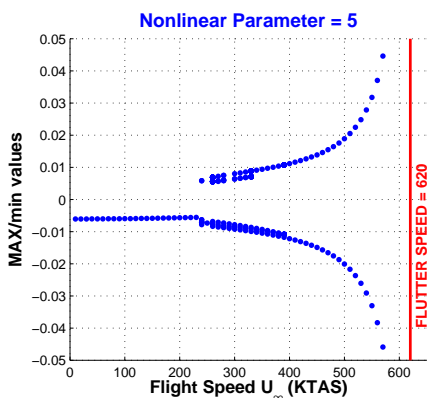
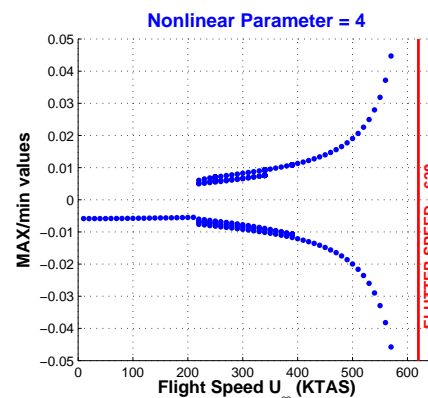
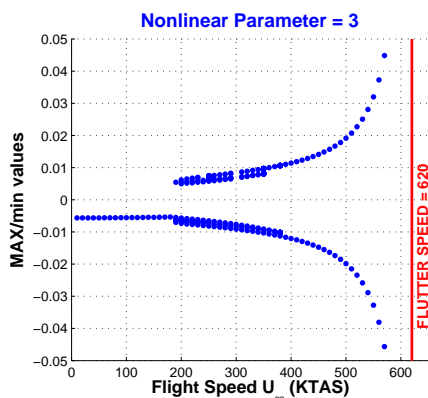
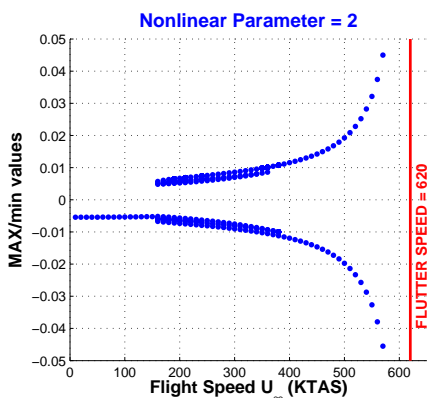
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S02	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Preload (DP)	S02.ROT.FDP	2/5



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S02	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Preload (DP)	S02.ROT.FDP	3/5



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S02	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Preload (DP)	S02.ROT.FDP	4/5



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S02	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Preload (DP)	S02.ROT.FDP	5/5

Tipo de Respuesta	DMP	Movimiento amortiguado hasta una velocidad de vuelo que depende de la precarga de la no linealidad. A mayor precarga de la no linealidad <i>freeplay</i> , la respuesta amortiguada se mantiene hasta una velocidad de vuelo mayor.
	LCO	Movimiento armónico no amortiguado a partir de una velocidad de vuelo que depende de la precarga de la no linealidad. A esta velocidad de vuelo comienza un LCO complejo (con unas 10 frecuencias características) que evoluciona hasta un LCO[2] con 2 frecuencias características a la velocidad de 550 KTAS (aprox.) independiente de la precarga. A partir de 550 KTAS el LCO evoluciona hasta tener una única frecuencia característica, la del mecanismo de <i>flutter</i> .
	CHA	No existe respuesta de tipo caótico.
	FLT	Velocidad de <i>flutter</i> es aproximadamente 620 KTAS e independiente de la precarga de la no linealidad.
Transición entre Tipos de Respuesta	La respuesta evoluciona según el siguiente patrón: DMP-LCO[11-4]-LCO[4-1]-FLT. El movimiento amortiguado ocurre hasta una velocidad que depende de la precarga, mayor cuanto mayor es la precarga. El primer tipo de LCO, denominado LCO[11-4], tiene lugar durante un intervalo de 200 KTAS a partir de la aparición del primer LCO[11] con 11 frecuencias características. Una vez terminado ese intervalo aparece un tipo de LCO, el denominado LCO[4-1], con un número menor de frecuencias características y terminando en un LCO[1] a la frecuencia del mecanismo de <i>flutter</i> .	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 616$. KTAS / $VF_{(K=0)} = 0$. KTAS.
	No Lineal	Velocidad de <i>flutter</i> no lineal es 620 KTAS independiente de la precarga.
Variación de la Amplitud	con U_∞	La amplitud de la respuesta es mayor a medida que aumenta la velocidad de vuelo.
	con ROT.FDP	La amplitud de la respuesta no depende de la precarga de la no linealidad.
Bifurcaciones	Bifurcación de tipo <i>Hopf</i> en la transición de amortiguado DMP a armónico LCO[11-4].	
Flutter onset	Entrada en <i>flutter</i> previsible a la vista del aumento de amplitud de la respuesta a medida que se alcanza la velocidad de <i>flutter</i> (620 KTAS independiente de la precarga).	

NOTA:

En la respuesta amortiguada a una velocidad de vuelo U_∞ , la rotación de las aletas alcanza un valor estacionario en el tiempo, lo que indica que los actuadores introducen un momento constante durante toda la maniobra el misil (recuérdese que existen dos grados de libertad de sólido rígido). Por otro lado, se comprueba que el misil describe una trayectoria con una variación lineal del ángulo de guiñada (o ángulo de ataque en el problema longitudinal), es decir, a velocidad angular constante. Los actuadores deben compensar el momento inercial y aerodinámico sobre las aletas. El momento debido a la inercia es pequeño por dos motivos: primero, las aletas están equilibradas másicamente (centro de gravedad sobre el eje de charnela) de forma que cualquier desplazamiento lateral (vertical en el problema longitudinal) no introduce momento inercial y, segundo, el misil describe una trayectoria con velocidad angular constante y no aparecen momentos inerciales debido a aceleraciones angulares. Por tanto, si el momento de los actuadores es constante, es debido a que las fuerzas aerodinámicas permanecen constantes, lo que se traduce en que el *ángulo de ataque local* α_{loc} no varía durante la maniobra del misil.

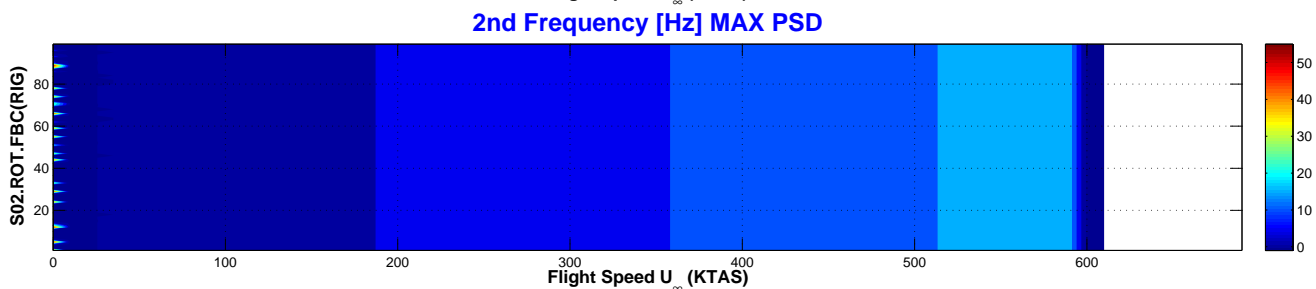
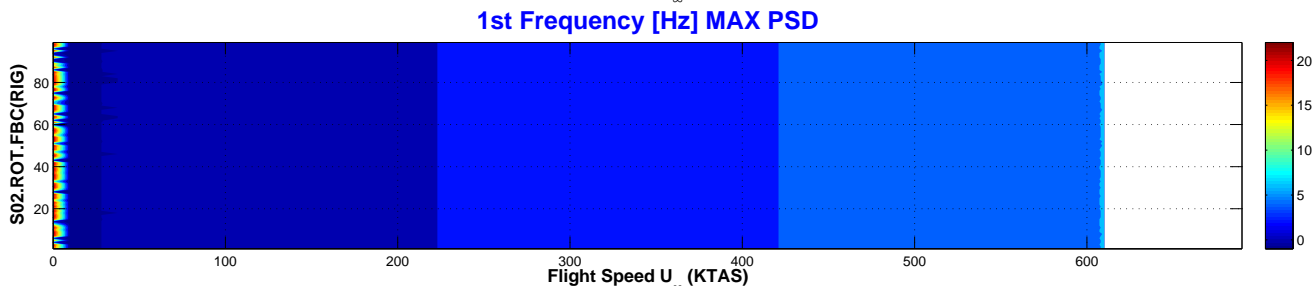
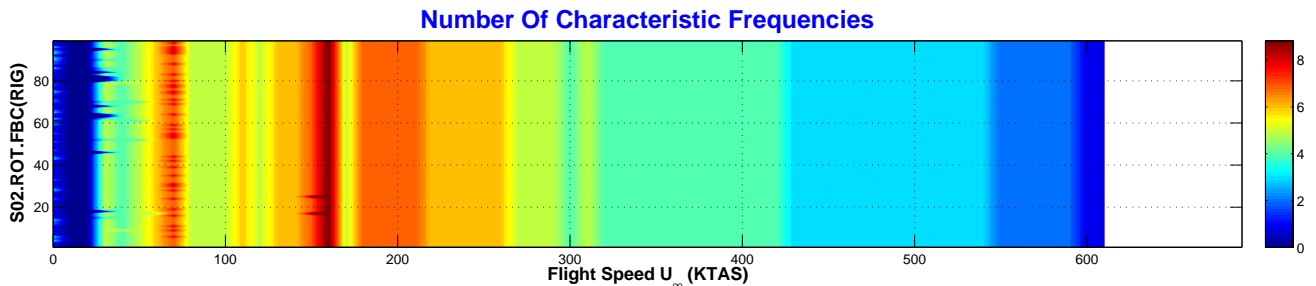
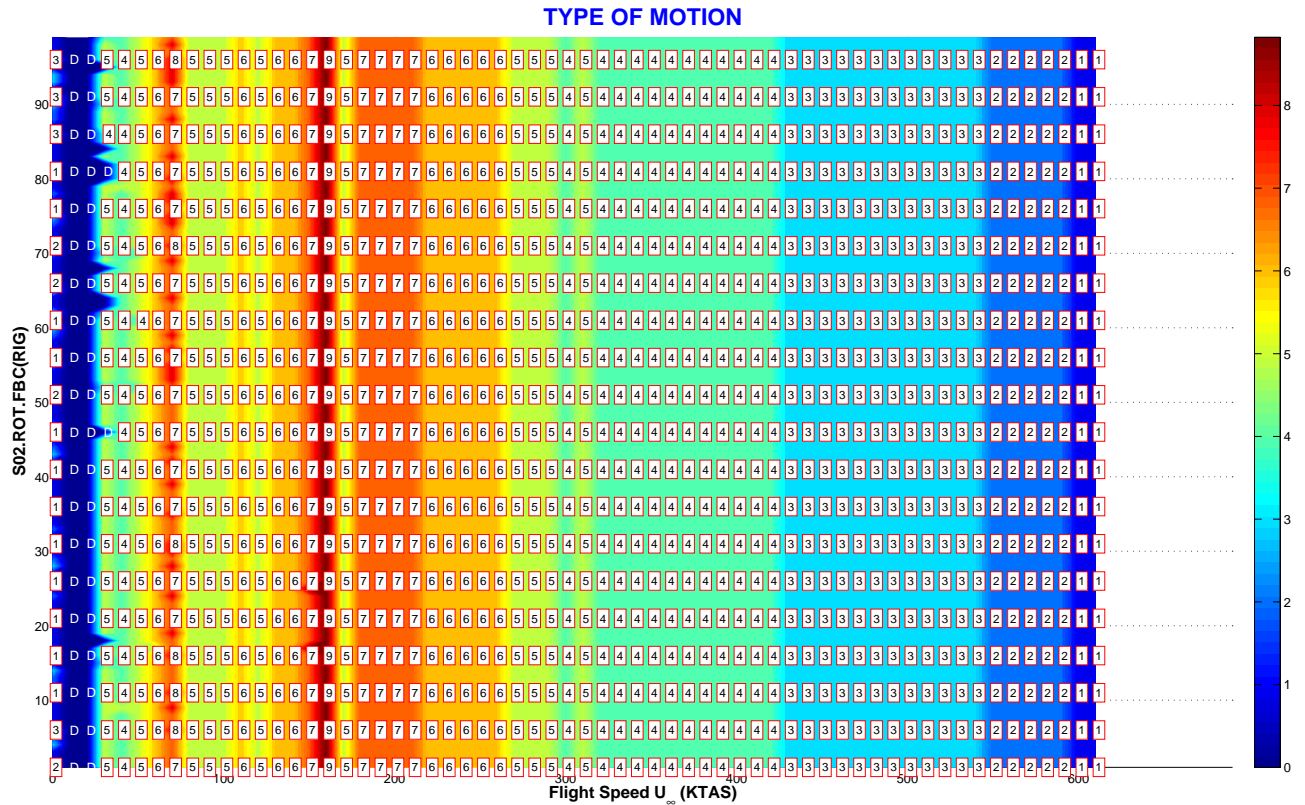
Este ángulo de ataque local α_{loc} se calcula combinando el ángulo de ataque de las aletas con la velocidad lineal del movimiento lateral (o *heaving* en el problema longitudinal) en el eje de charnela de las aletas, i.e.:

$$\alpha_{loc}(t) = \frac{\partial w_w}{\partial x}(x_h; t) + \frac{\frac{\partial w_w}{\partial t}(x_h; t)}{U_\infty}$$

siendo $w_w(x_h; t)$ los desplazamientos en la abscisa x_h en la que se sitúa el eje de charnela de las aletas. Pues bien, se comprueba que en estas trayectorias la variación del ángulo de ataque local con el tiempo es nula, i.e., $d\alpha_{loc}/dt = 0$, y esto es debido a que el giro a velocidad angular constante se combina con un desplazamiento lateral del misil con aceleración constante. Esto explica el momento aerodinámico constante sobre las aletas y, por tanto, la rotación estacionaria de las mismas.

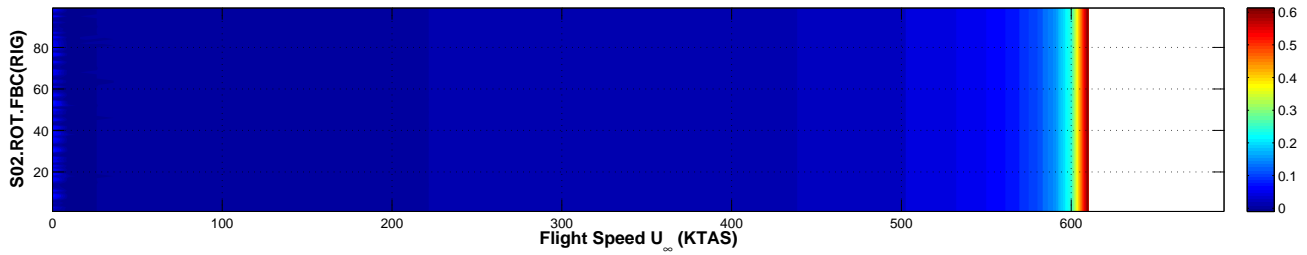
VARIACIÓN DE LAS CONDICIONES INICIALES

CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S02	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Boundary Conditions (BC)	S02.ROT.FBC	1/3

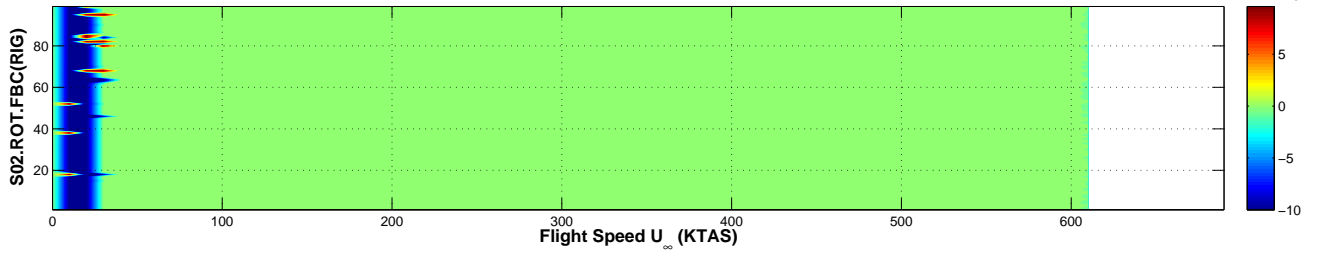


CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S02	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Boundary Conditions (BC)	S02.ROT.FBC	2/3

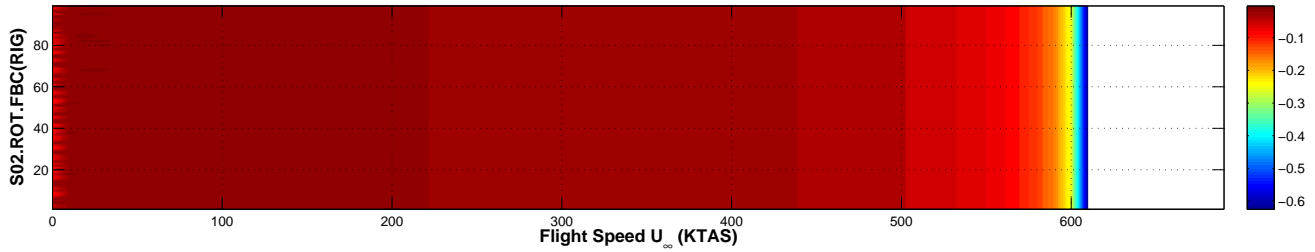
MAXIMUM VALUE



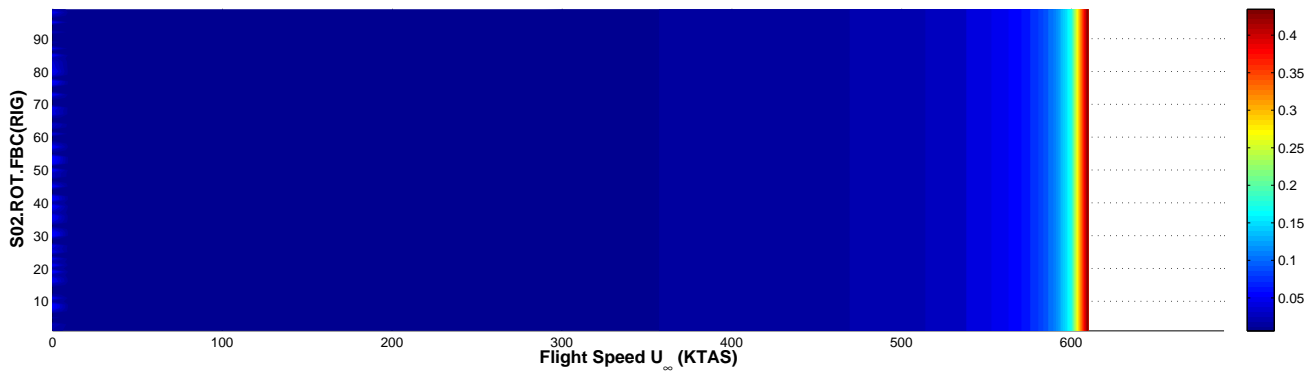
ARITHMETIC MEAN



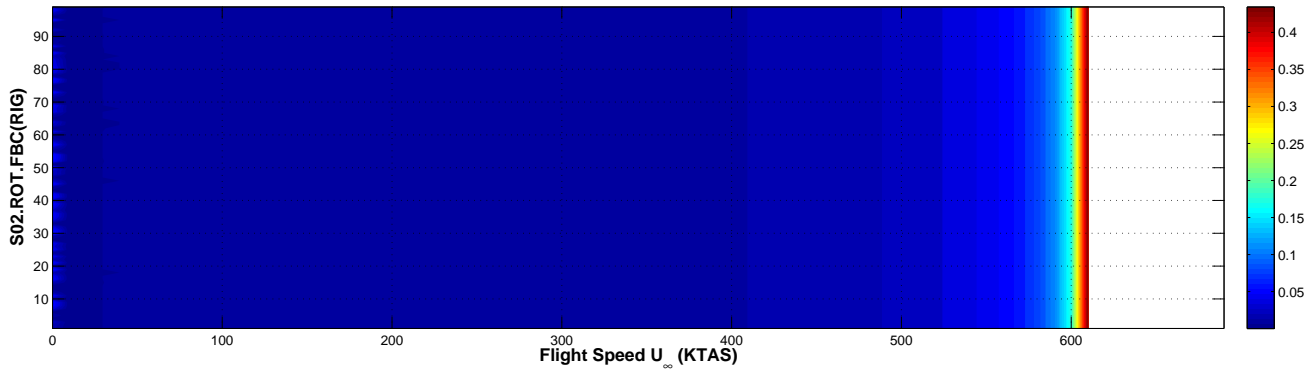
MINIMUM VALUE



ROOT MEAN SQUARE



STANDARD DEVIATION



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S02	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Boundary Conditions (BC)	S02.ROT.FBC	3/3

Tipo de Respuesta	DMP	Movimiento amortiguado a velocidades muy bajas (inferiores a 30 KTAS).
	LCO	A velocidades de vuelo superiores a $U_\infty = 30$ KTAS la respuesta para a ser de tipo armónica (LCO) con distinto número de frecuencias características (distinta complejidad) en función de la velocidad. La oscilación de ciclo límite más compleja es de 9 frecuencias características y ocurre a una velocidad aproximada de 160 KTAS. A partir de esta velocidad, la complejidad de la respuesta va disminuyendo a medida que aumenta la velocidad (menor número de frecuencias características), hasta tener un LCO con 1 frecuencia característica (LCO[1]), la del mecanismo de <i>flutter</i> .
	CHA	No existe respuesta de tipo caótica.
	FLT	La velocidad de <i>flutter</i> aproximada es de 620 KTAS, independiente de las condiciones iniciales.
Transición entre Tipos de Respuesta	La respuesta evoluciona según el siguiente patrón: DMP-LCO[5-9]-LCO[9-1]-FLT. La transición entre los distintos tipos de respuesta es independiente de las condiciones iniciales.	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 616$. KTAS / $VF_{(K=0)} = 0$. KTAS.
	No Lineal	La velocidad de <i>flutter</i> es 620 KTAS aprox., independiente de las condiciones iniciales.
Variación de la Amplitud	con U_∞	Una vez iniciada la respuesta de ciclo límite LCO, la amplitud aumenta exponencialmente con la velocidad de vuelo U_∞ .
	con ROT.FBC	La amplitud de la respuesta no depende de las condiciones iniciales.
Bifurcaciones	Bifurcación de tipo <i>Hopf</i> en la transición de amortiguado a oscilación de ciclo límite (DMP-LCO[5-9]).	
Flutter onset	Velocidad de <i>flutter</i> no abrupta y previsible, a la vista del aumento exponencial de la velocidad a velocidades próximas a la de <i>flutter</i> .	

NOTA:

Las condiciones iniciales son:

$$\{x(0)\} = \left[\begin{array}{cccccc} +0,015 & -0,015 & \hat{\xi}_3 & 0,0 & 0,0 & \frac{d\hat{\xi}_3}{d\hat{t}} \end{array} \right]$$

donde $\hat{\xi}_3$ y $d\hat{\xi}_3/d\hat{t}$ se varían aleatoriamente dando un total de 99 condiciones iniciales distintas.

9.4. Estructura (FLE) / Soportado (S02)

En esta sección se detallan los resultados para la configuración de misil flexible con 4 modos (modo lateral **LAT**, modo de guiñada **YAW**, modo de rotación de aletas **ROT** y 1ª flexión lateral del misil) con condiciones de contorno correspondientes a vuelo equilibrado (soportado **S02**).

La no linealidad de tipo *freeplay* se considera localizada en la rotación de las aletas (**ROT**). Por otro lado, se varían distintos parámetros del *freeplay*: **FDA** corresponde a la variación de la amplitud de la holgura, **FDC** corresponde a la variación del centro de la no linealidad, **FDP** corresponde a la variación de la precarga de la no linealidad y, por último, **FBC** indica variación de las condiciones iniciales.

La tabla 10.3 resume las configuraciones de estudio y la sección en la que se incluyen los resultados.

SECCIÓN	CONFIGURACIÓN
9.4	FLE.S02.ROT.FDA
	FLE.S02.ROT.FDC
	FLE.S02.ROT.FDP
	FLE.S02.ROT.FBC

Tabla 9.3: Configuraciones de estudio para el misil **FLE** (modelo estructural de misil flexible) con soportado **S02** (vuelo libre equilibrado).

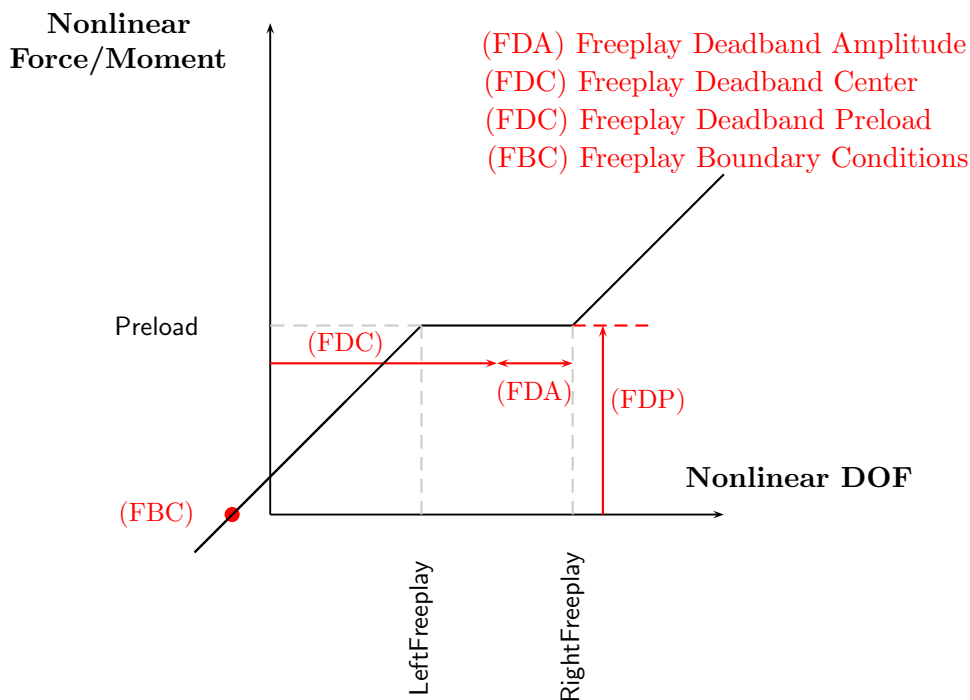


Figura 9.5: Nolinealidad del tipo *freeplay* con los principales parámetros que la definen.

Dada una no linealidad tipo *freeplay* nominal, de precarga 0,0 [N.m]⁷ y amplitud adimensional $\mp 0,005$ ($\mp 0,29^\circ$ aprox.), se varían uno a uno los parámetros mencionados anteriormente.

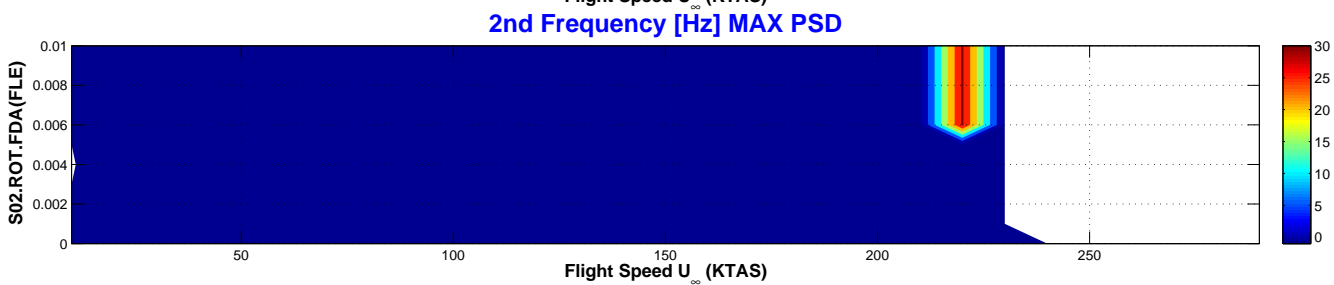
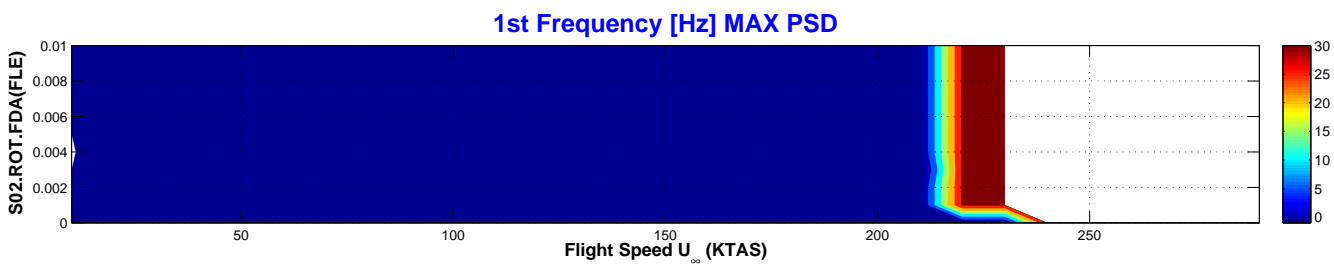
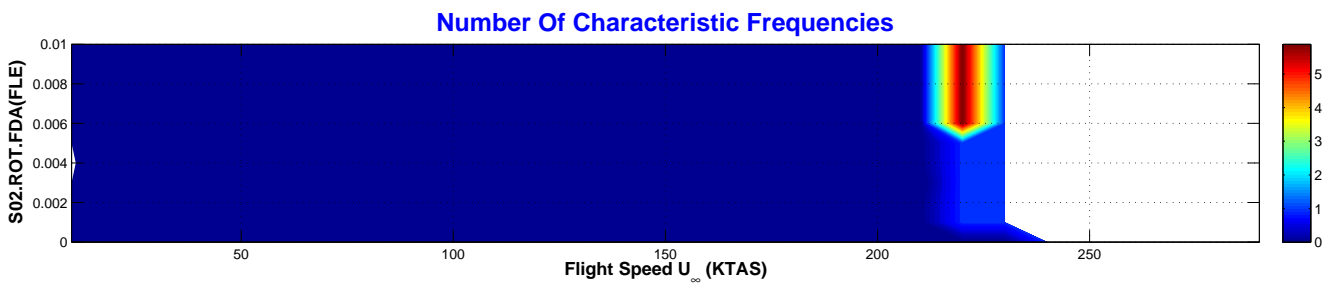
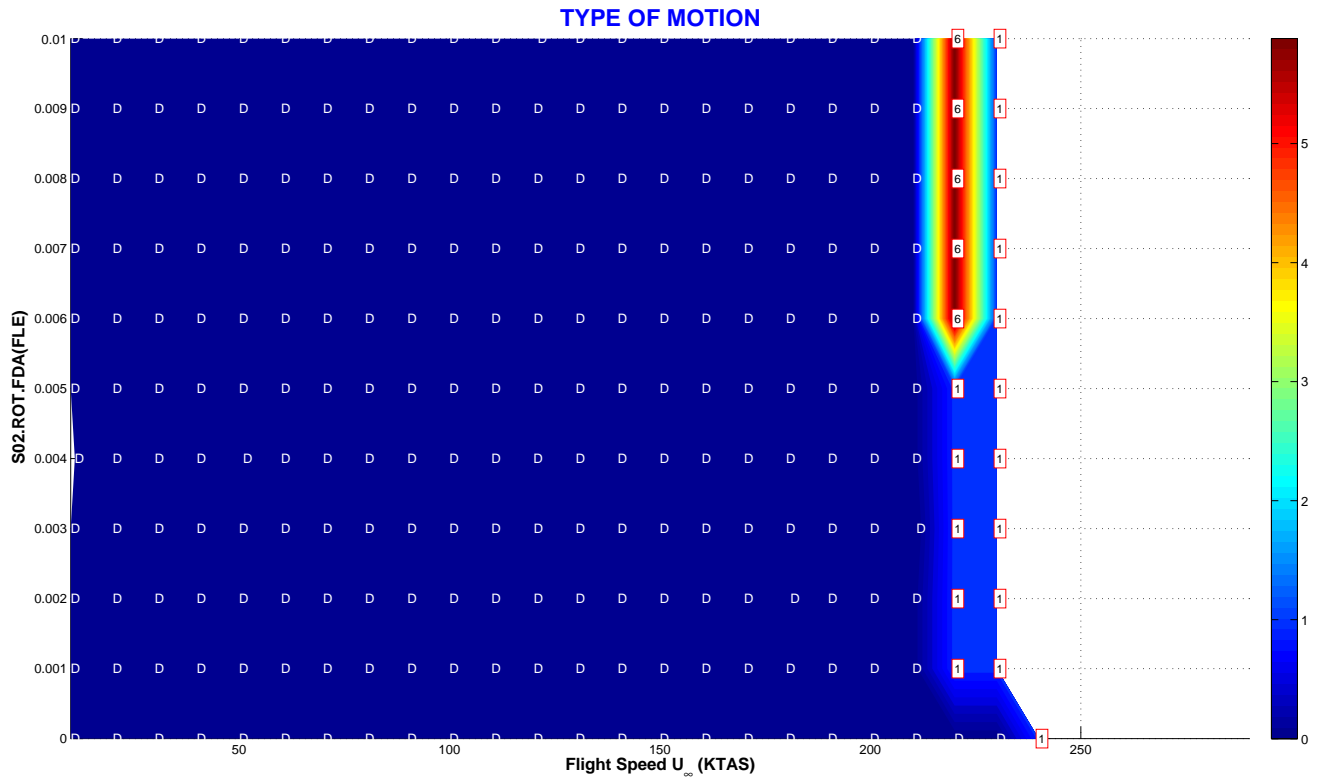
La condición inicial nominal del vector de estado-espacio $\{x\}$ es:

$$\{x(0)\}_{8x1} = \left[\hat{\xi}_1 \quad \hat{\xi}_2 \quad \hat{\xi}_3 \quad \hat{\xi}_4 \quad \frac{d\hat{\xi}_1}{d\hat{t}} \quad \frac{d\hat{\xi}_2}{d\hat{t}} \quad \frac{d\hat{\xi}_3}{d\hat{t}} \quad \frac{d\hat{\xi}_4}{d\hat{t}} \right]^T = \left[+1,30 \quad 0,0 \quad 0,117 \quad 0,238 \quad 1,0 \quad 1,0 \quad 1,0 \quad 1,0 \right]^T$$

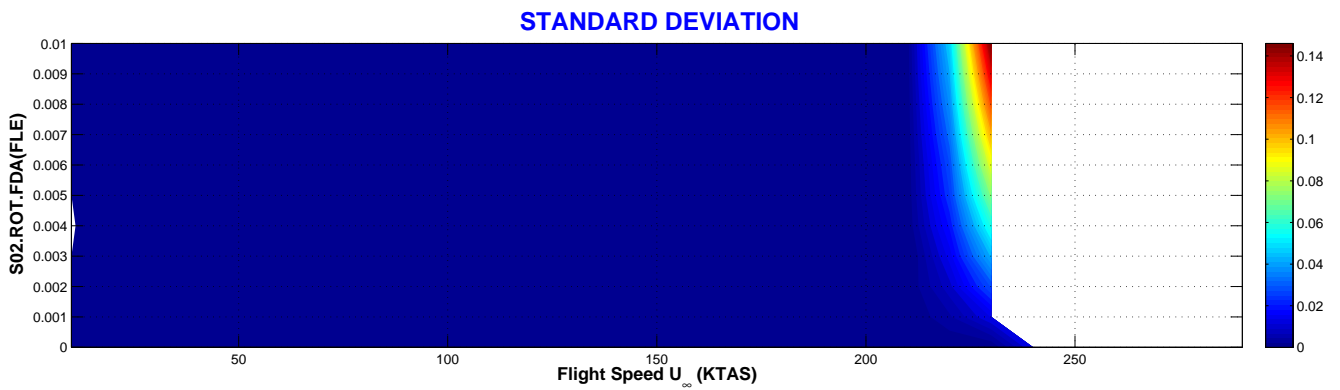
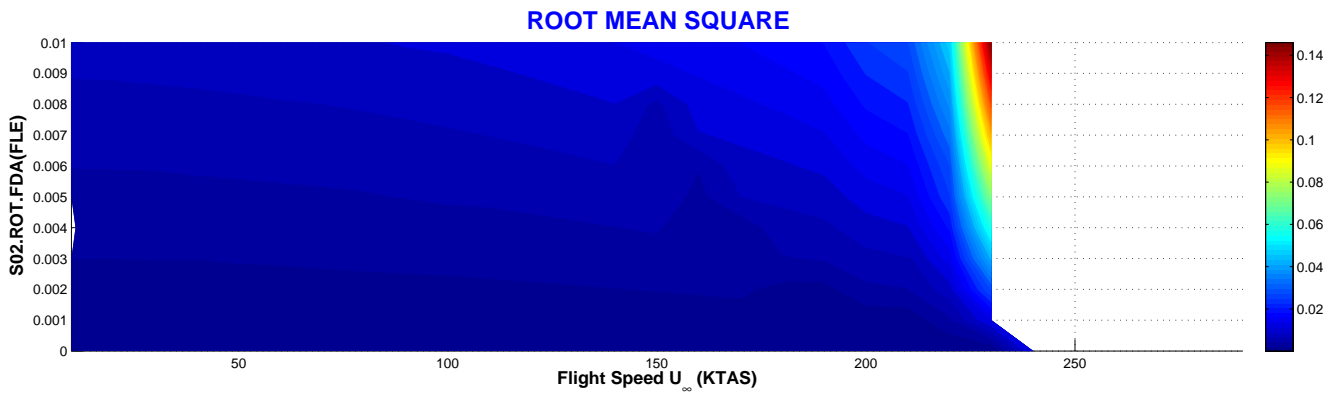
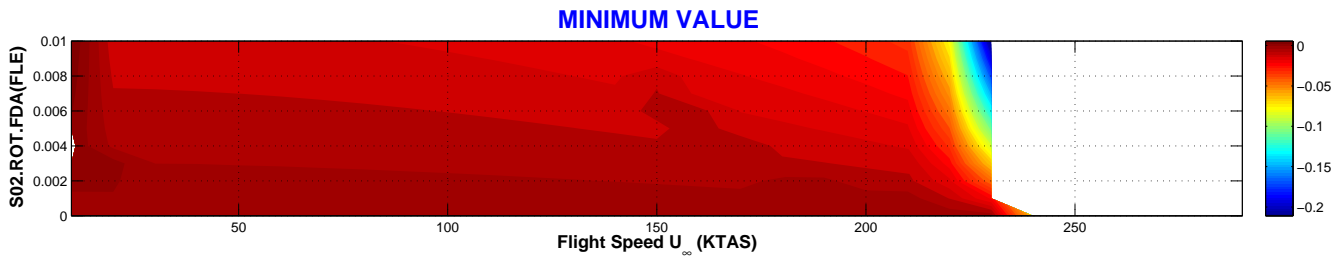
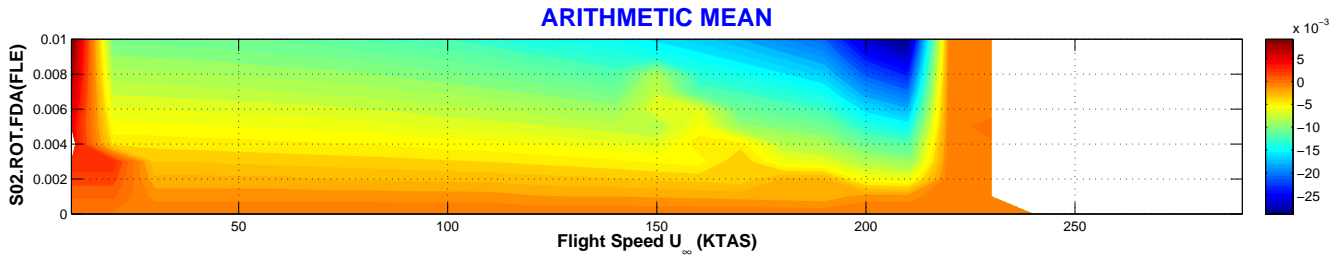
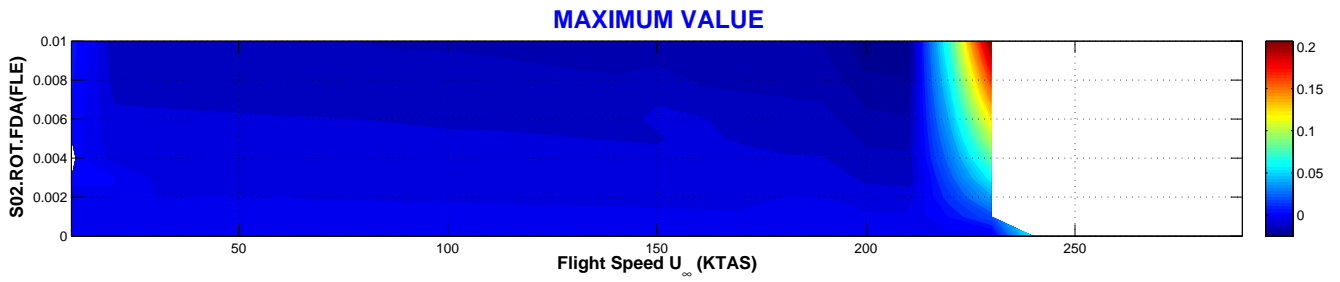
⁷Recuérdese que la precarga adimensional venía dada por $\hat{M}_0^{NLR} = M_0^{NLR} / m_0 U_0^2 L$.

VARIACIÓN DE LA AMPLITUD DE LA HOLGURA

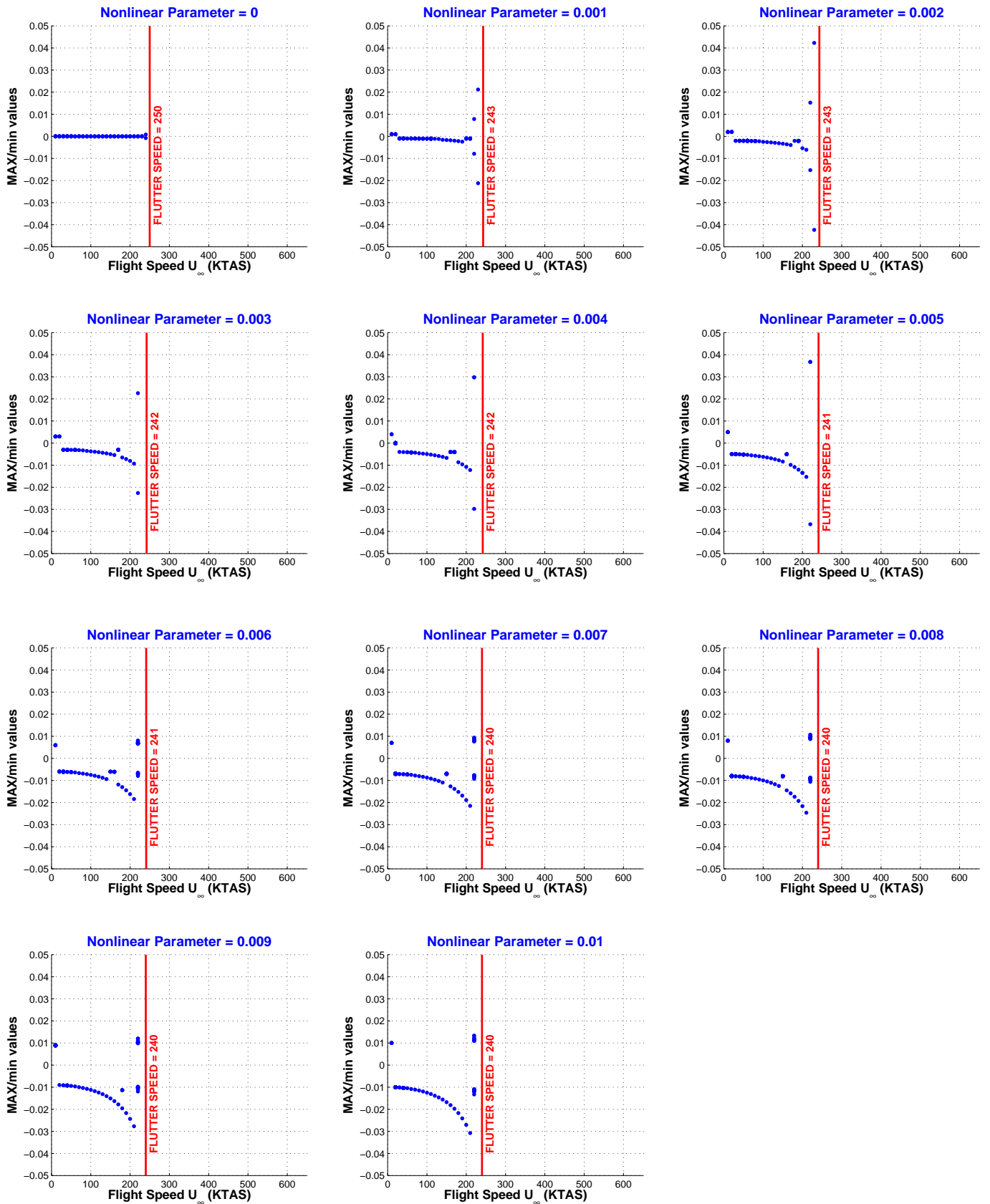
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
FLE.S02	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Amplitude (DA)	S02.ROT.FDA	1/4



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
FLE.S02	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Amplitude (DA)	S02.ROT.FDA	2/4



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
FLE.S02	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Amplitude (DA)	S02.ROT.FDA	3/4

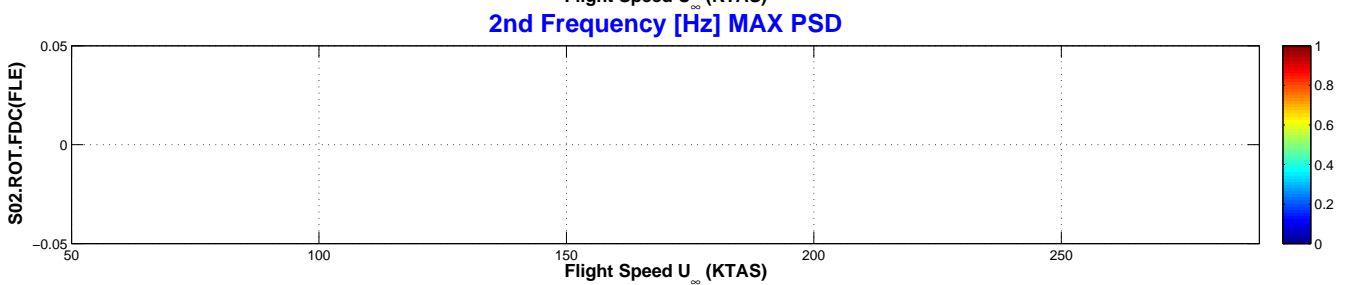
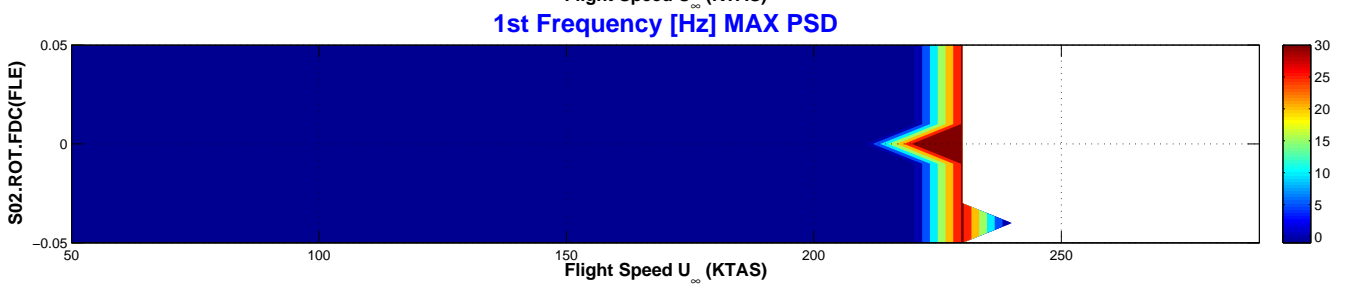
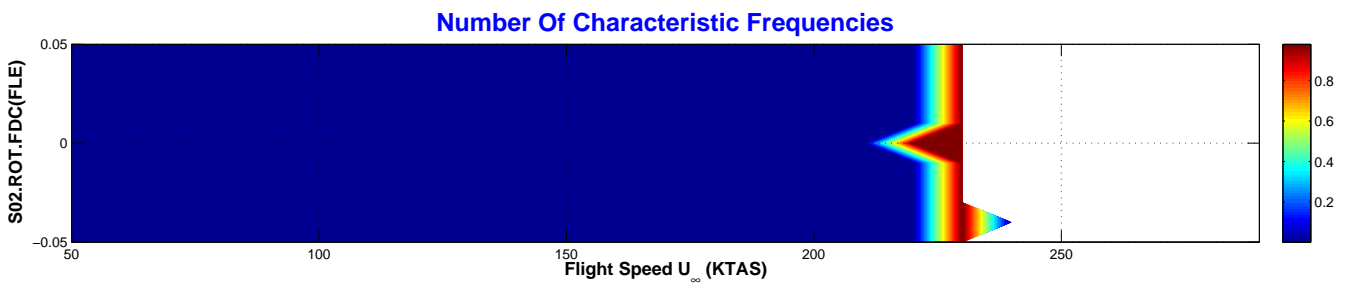
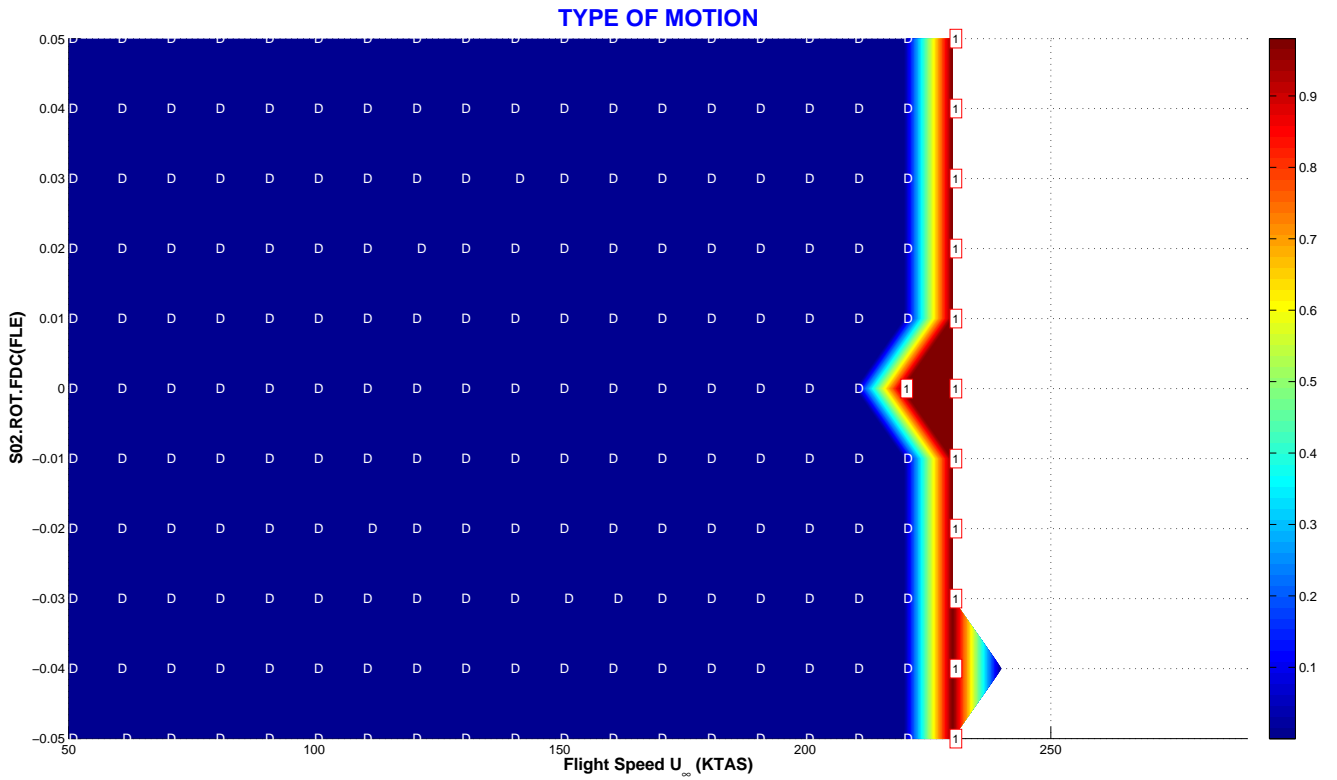


CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
FLE.S02	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Amplitude (DA)	S02.ROT.FDA	4/4

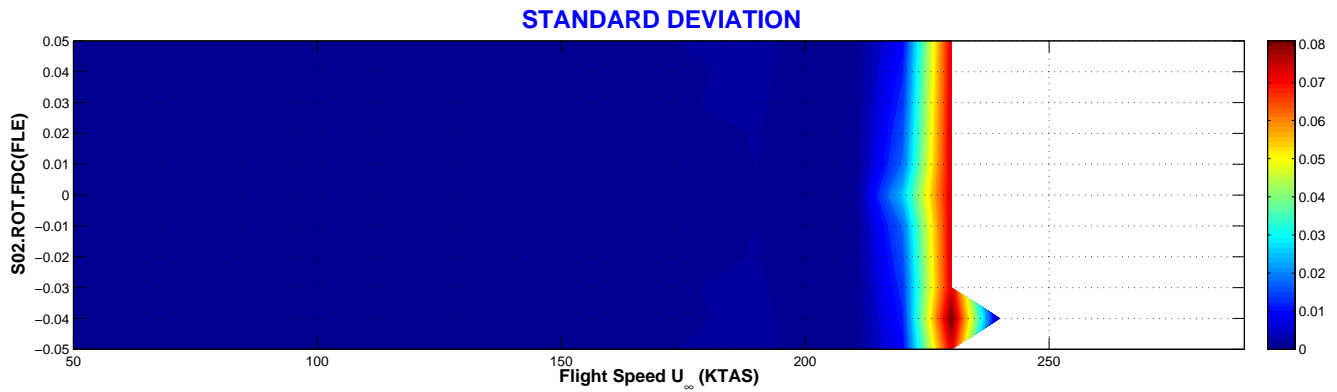
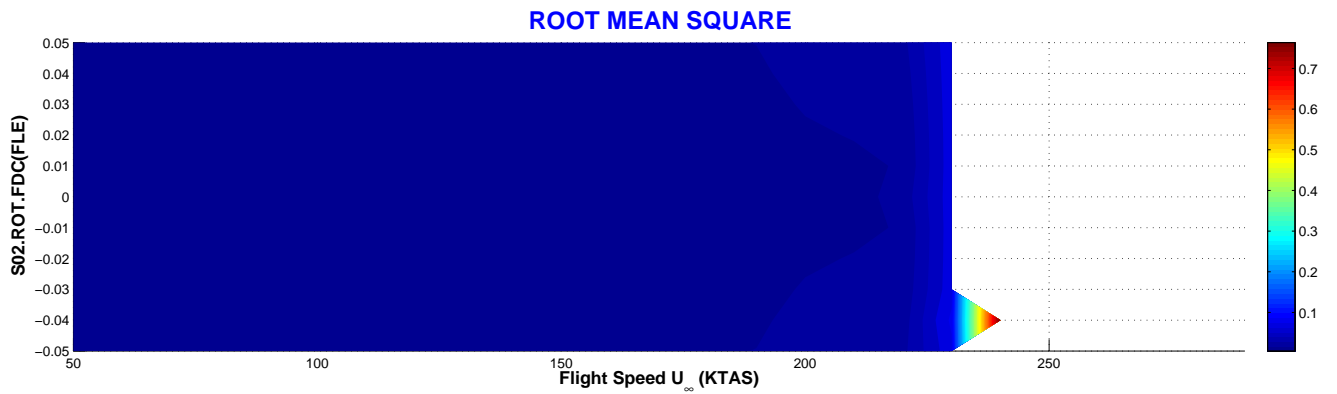
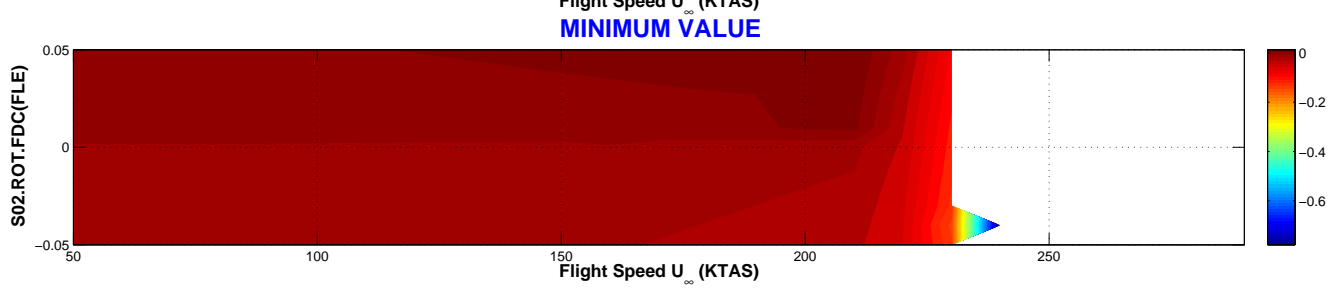
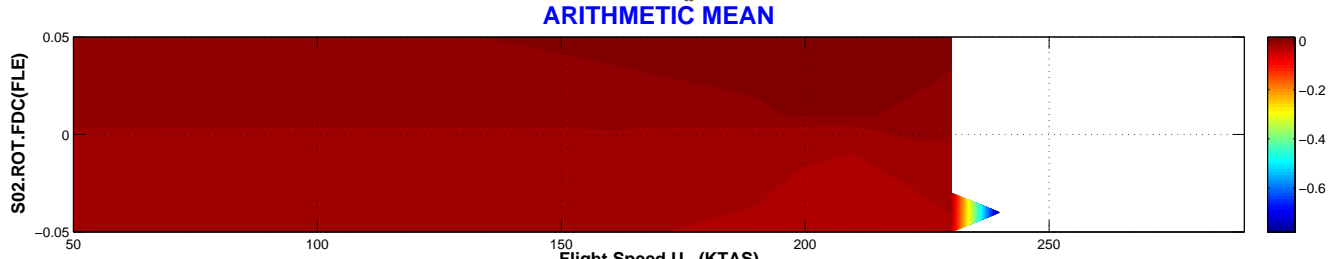
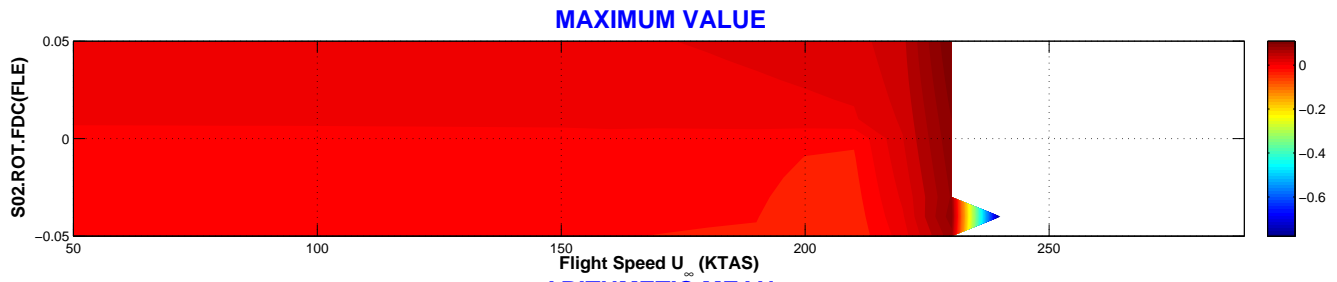
Tipo de Respuesta	DMP	Movimiento amortiguado hasta una velocidad del orden de 210 KTAS.
	LCO	Movimiento armónico no amortiguado (LCO) desde 210 KTAS (aprox.) hasta la entrada en <i>flutter</i> (a 230 KTAS aprox.).
	CHA	No existe respuesta de tipo caótico.
	FLT	La velocidad de <i>flutter</i> es 230 KTAS aproximadamente, 10 KTAS por debajo de la velocidad de <i>flutter</i> del sistema lineal.
Transición entre Tipos de Respuesta	La respuesta evoluciona de la siguiente forma: DMP-LCO[1]-FLT. El movimiento amortiguado persiste hasta la velocidad aproximada de 210 KTAS. A partir de esta velocidad y hasta 230 KTAS (aprox.), comienza un movimiento armónico no amortiguado LCO[1] o LCO[6], con 1 ó 6 frecuencias características respectivamente. A la velocidad de 230 KTAS la respuesta es oscilatoria divergente (<i>flutter</i>).	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 241. \text{ KTAS} / VF_{(K=0)} = 0. \text{ KTAS}$.
	No Lineal	La velocidad de <i>flutter</i> no lineal es 230 KTAS.
Variación de la Amplitud	con U_∞	A velocidades inferiores a 210 KTAS, la respuesta es amortiguada y por tanto las aletas rotan hasta alcanzar un ángulo de giro estacionario. Este ángulo de rotación estacionario aumenta de forma exponencial con la velocidad de vuelo U_∞ . A velocidades superiores a 210 KTAS, la respuesta pasa a ser oscilatoria armónica con 1 ó 6 frecuencias características, LCO[1] y LCO[6] respectivamente.
	con ROT.FDA	La amplitud de la respuesta es mayor para valores mayores de la holgura.
Bifurcaciones	Bifurcación de tipo <i>Hopf</i> en la transición de amortiguado DMP a LCO.	
Flutter onset	Entrada en <i>flutter</i> previsible a la vista del aumento de amplitud de la respuesta a velocidades inferiores a la de <i>flutter</i> .	

VARIACIÓN DEL CENTRO DE LA NOLINEALIDAD

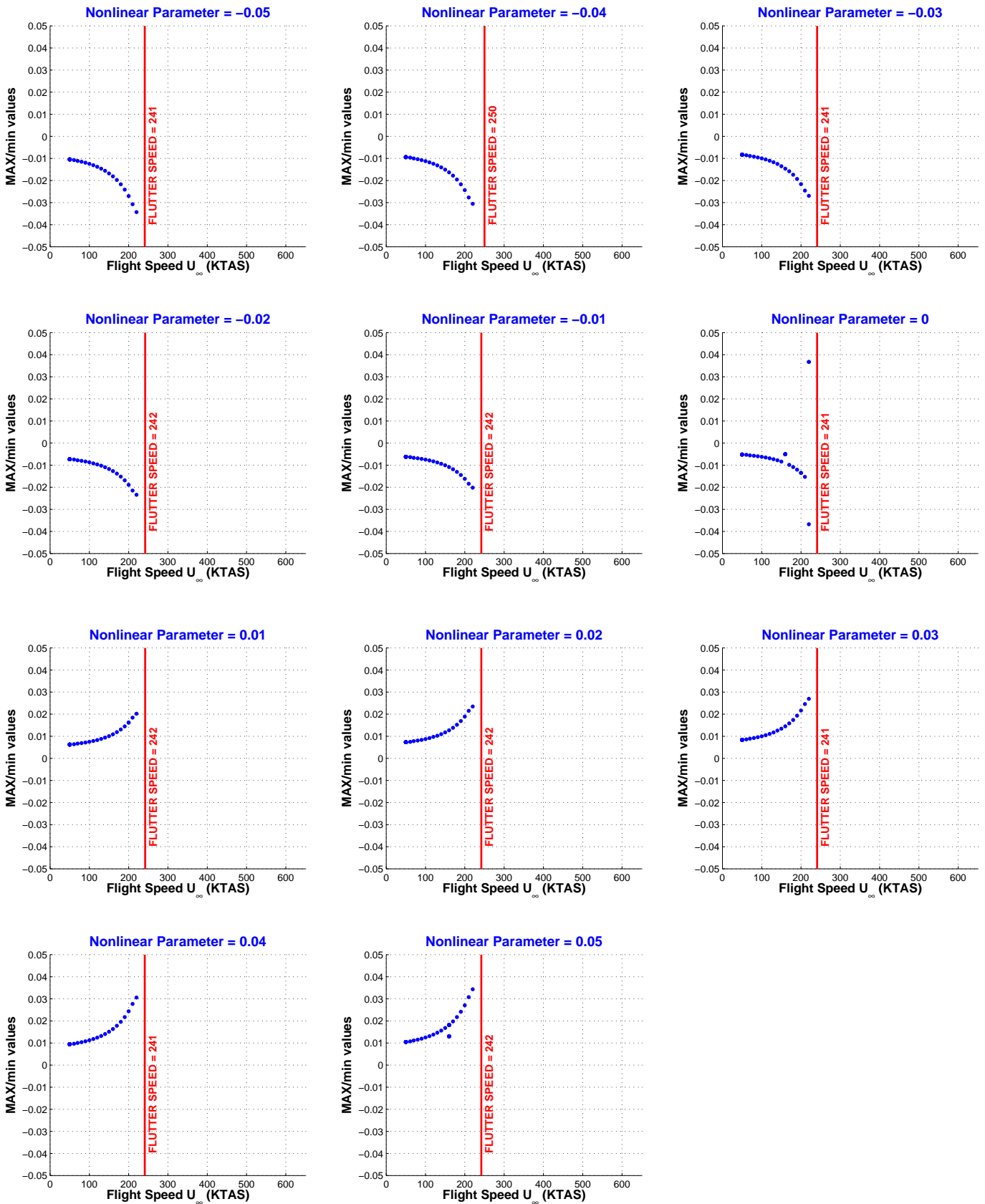
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
FLE.S02	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Center (DC)	S02.ROT.FDC	1/4



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
FLE.S02	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Center (DC)	S02.ROT.FDC	2/4



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
FLE.S02	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Center (DC)	S02.ROT.FDC	3/4

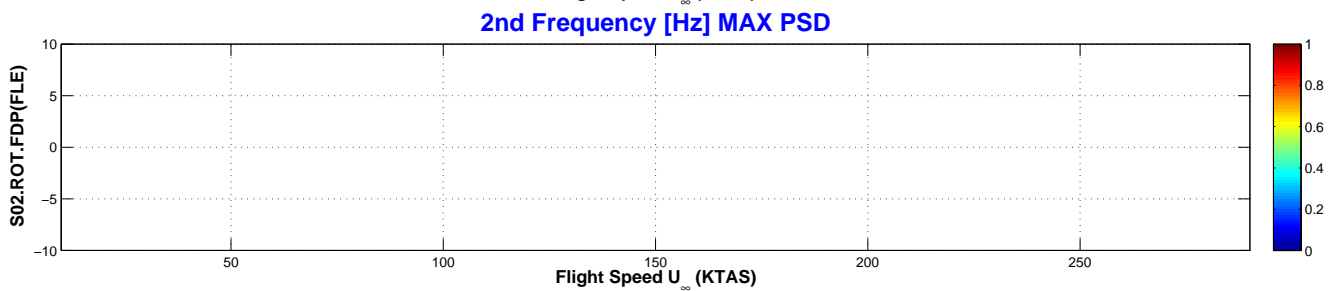
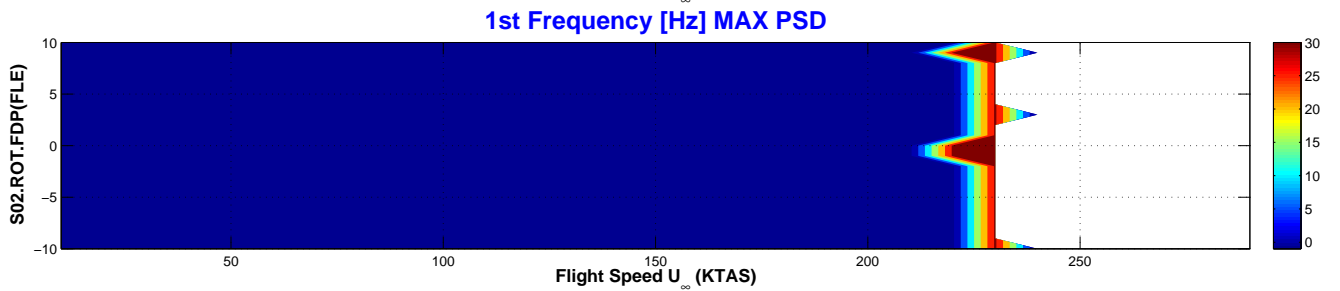
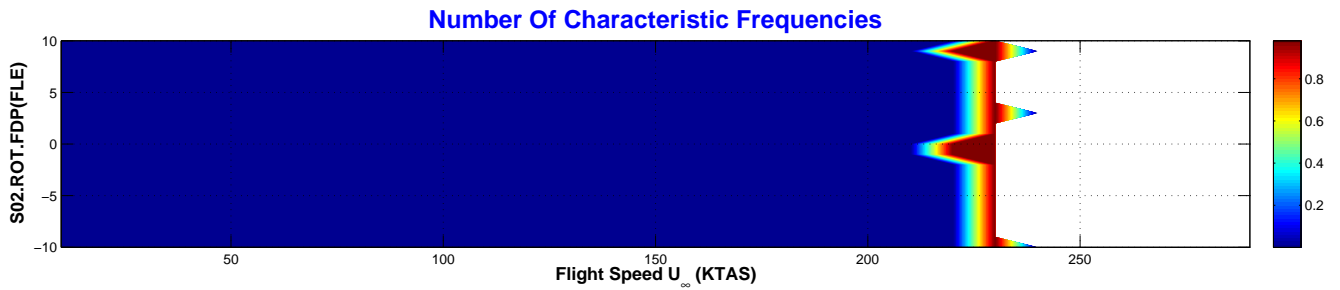
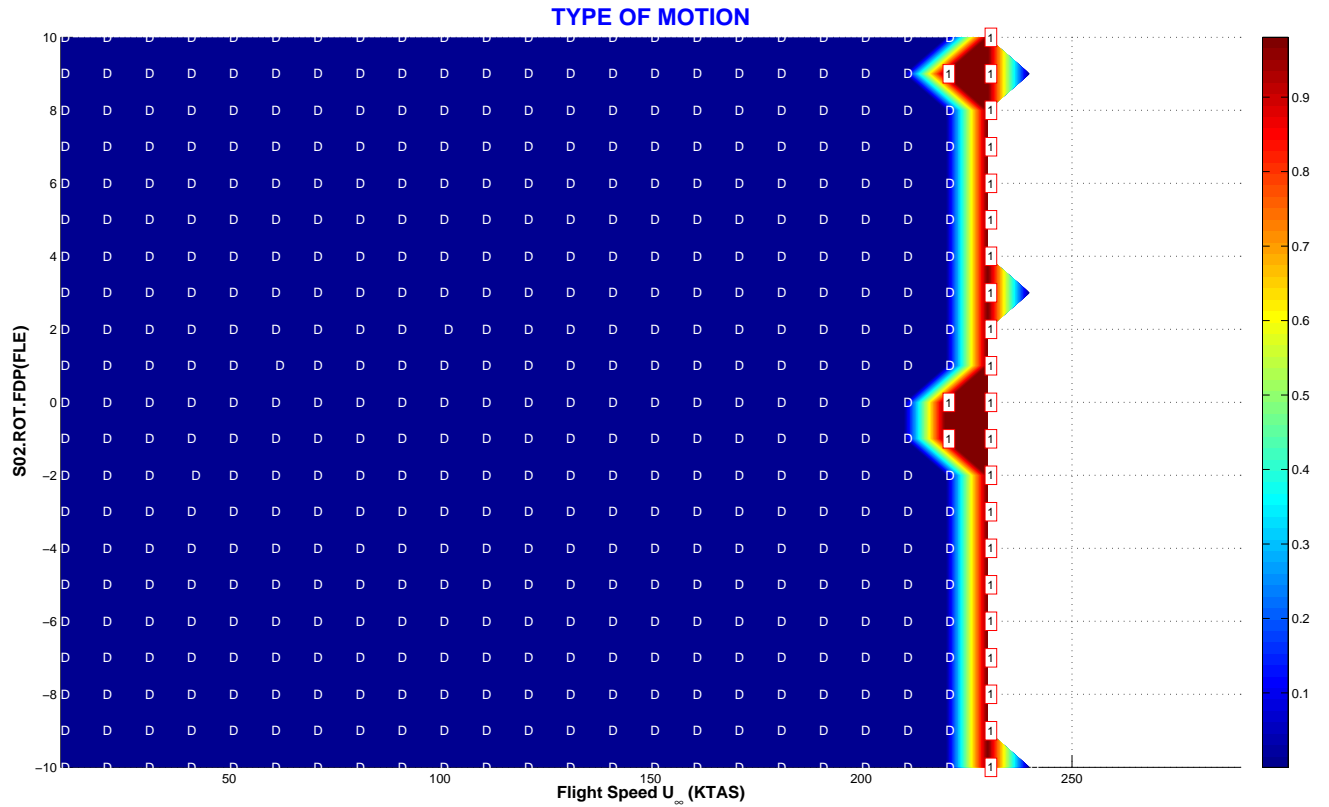


CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
FLE.S02	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Center (DC)	S02.ROT.FDC	4/4

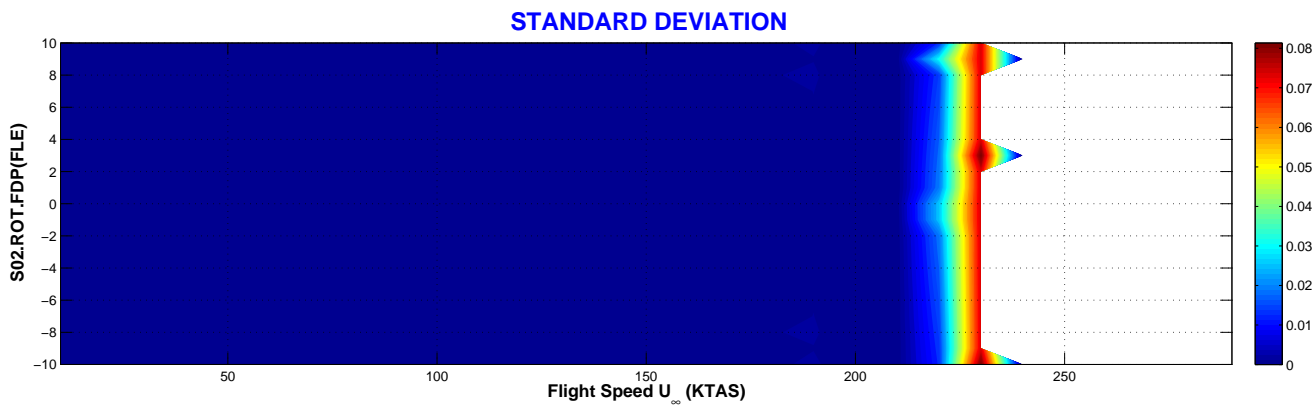
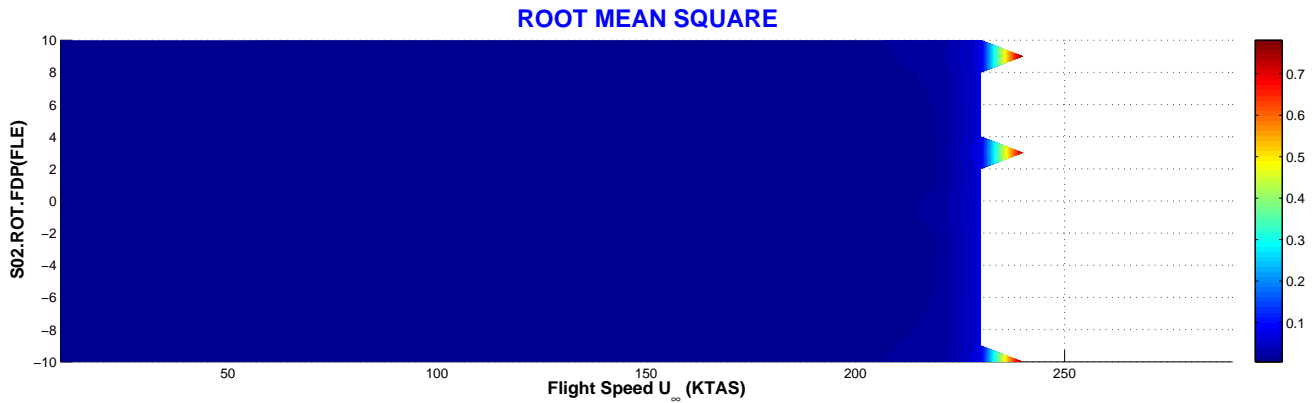
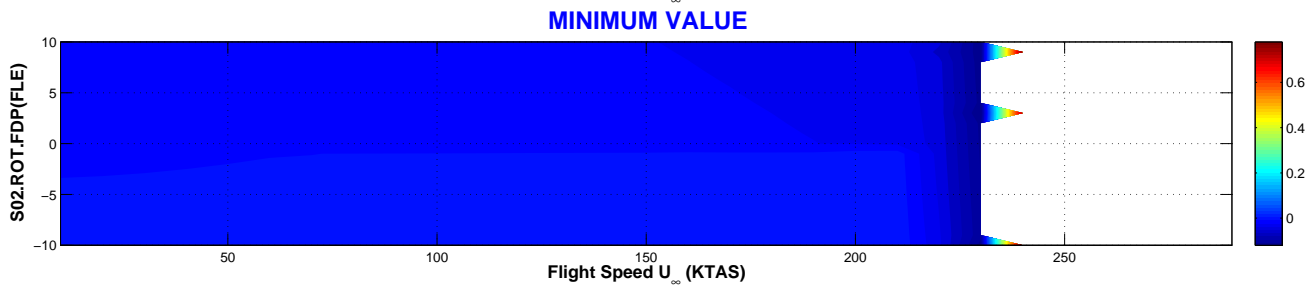
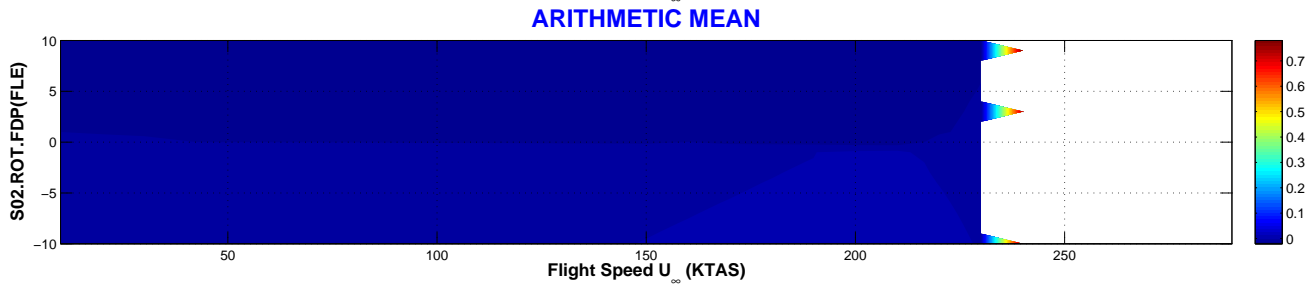
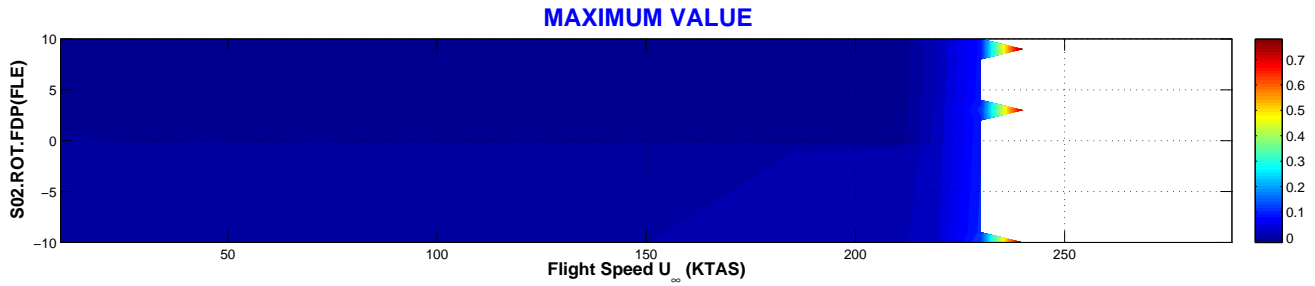
Tipo de Respuesta	DMP	Movimiento amortiguado a velocidades inferiores a 220 KTAS. A partir de 220 KTAS, y hasta la velocidad de <i>flutter</i> (230 KTAS), la respuesta es de tipo armónico no amortiguado.
	LCO	Respuesta armónica con una frecuencia característica (LCO[1]) desde 220 KTAS hasta la velocidad de <i>flutter</i> .
	CHA	No existe respuesta de tipo caótica.
	FLT	Respuesta oscilatoria divergente (<i>flutter</i>) a partir de una velocidad U_∞ de 230 KTAS.
Transición entre Tipos de Respuesta	La respuesta evoluciona de la siguiente forma: DMP-LCO[1]-FLT. La velocidad de transición DMP-LCO[1] es 220 KTAS e independiente del centro de la no linealidad. La velocidad de transición LCO[1]-FLT, es decir, la velocidad de <i>flutter</i> , es también independiente del centro de la no linealidad.	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 241$. KTAS / $VF_{(K=0)} = 0$. KTAS.
	No Lineal	230 KTAS independiente de la velocidad de <i>flutter</i> .
Variación de la Amplitud	con U_∞	En el rango de velocidades con respuesta amortiguada DMP, la amplitud de la respuesta aumenta exponencialmente con la velocidad de vuelo U_∞ .
	con ROT.FDC	La respuesta se desplaza con el centro de la no linealidad.
Bifurcaciones	Bifurcación de tipo <i>Hopf</i> en la transición DMP-LCO[1].	
Flutter onset	La respuesta divergente de <i>flutter</i> es previsible a la vista del aumento exponencial de la amplitud de la respuesta a medida que aumenta la velocidad de vuelo.	

VARIACIÓN DE LA PRECARGA

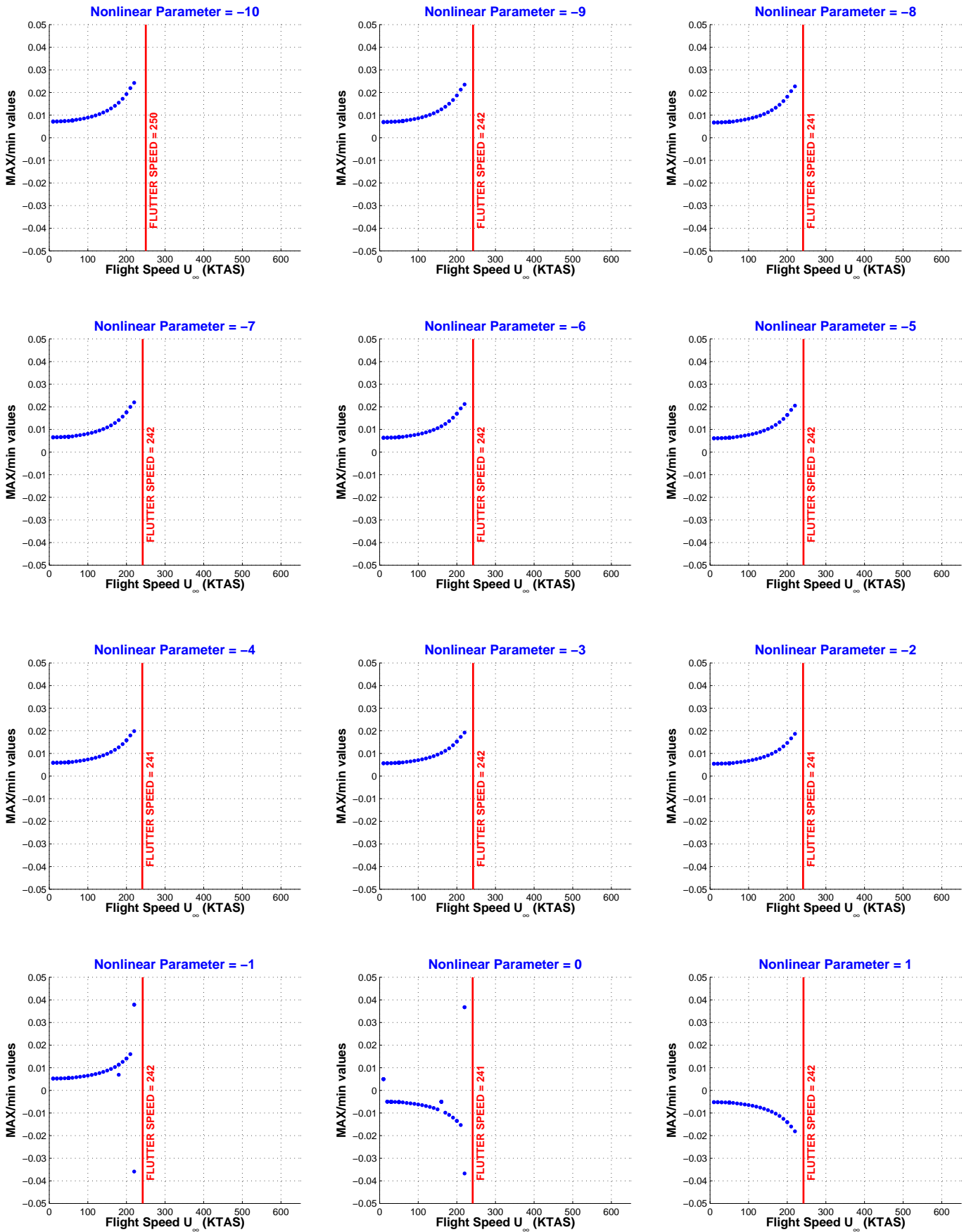
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
FLE.S02	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Preload (DP)	S02.ROT.FDP	1/5



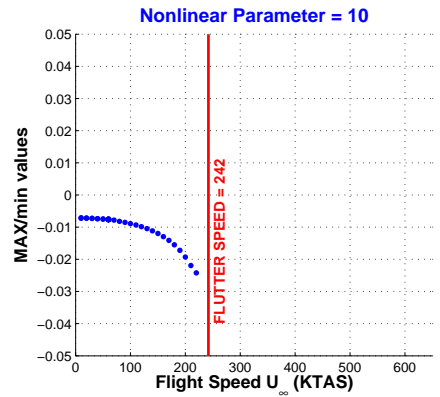
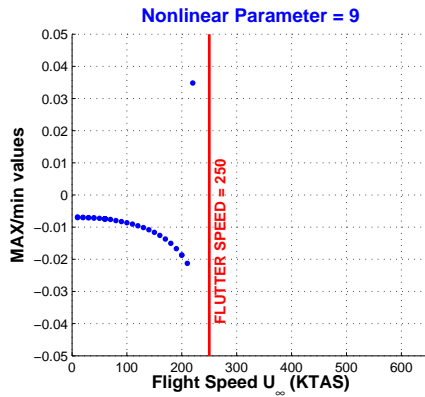
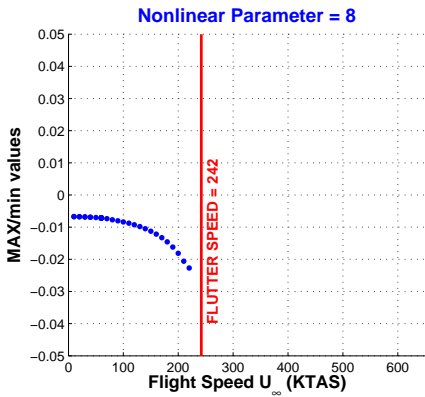
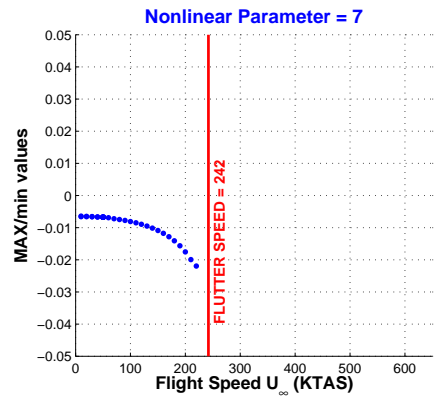
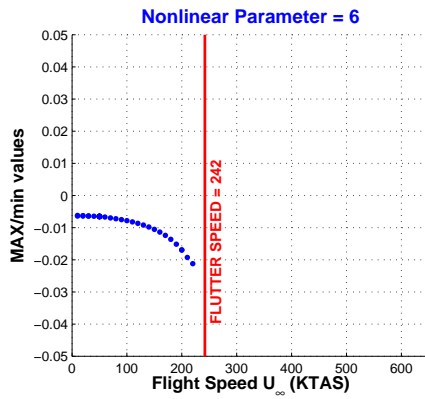
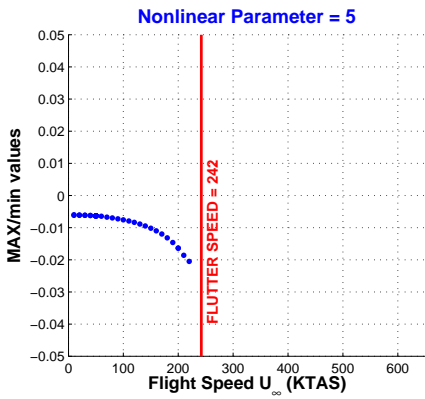
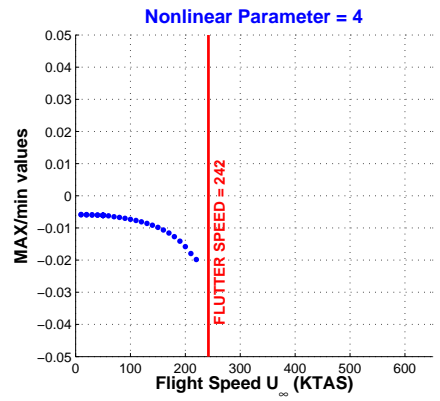
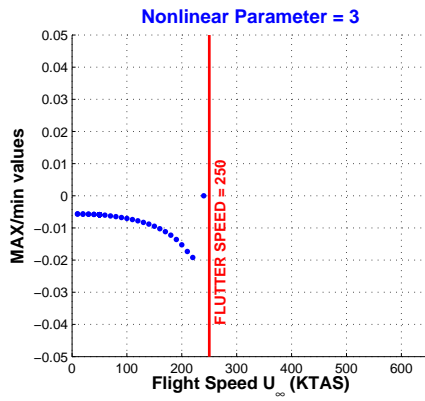
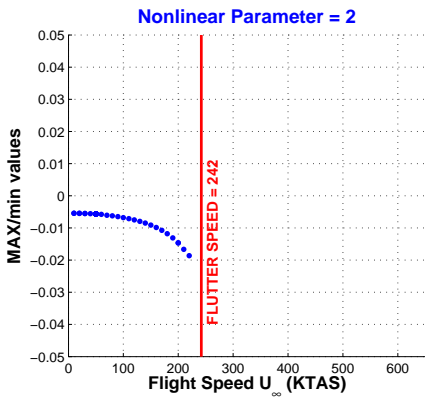
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
FLE.S02	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Preload (DP)	S02.ROT.FDP	2/5



CONFIG	Nonlinear DoF	NONLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
FLE.S02	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Preload (DP)	S02.ROT.FDP	3/5



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
FLE.S02	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Preload (DP)	S02.ROT.FDP	4/5



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
FLE.S02	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Deadband Preload (DP)	S02.ROT.FDP	5/5

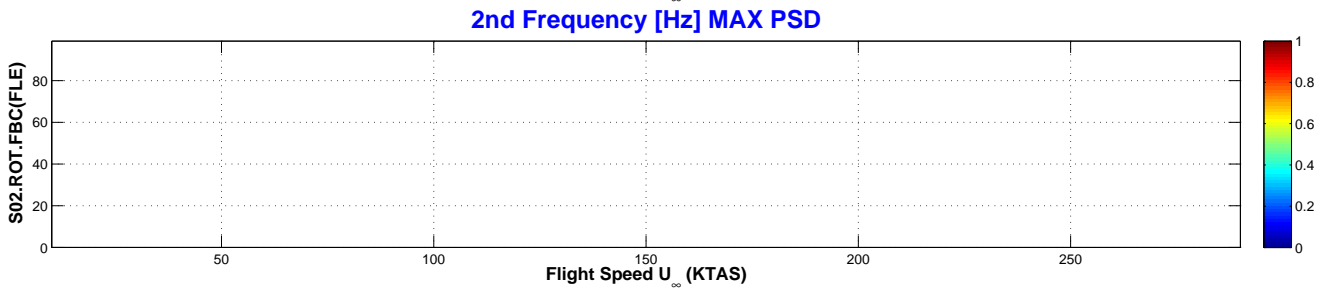
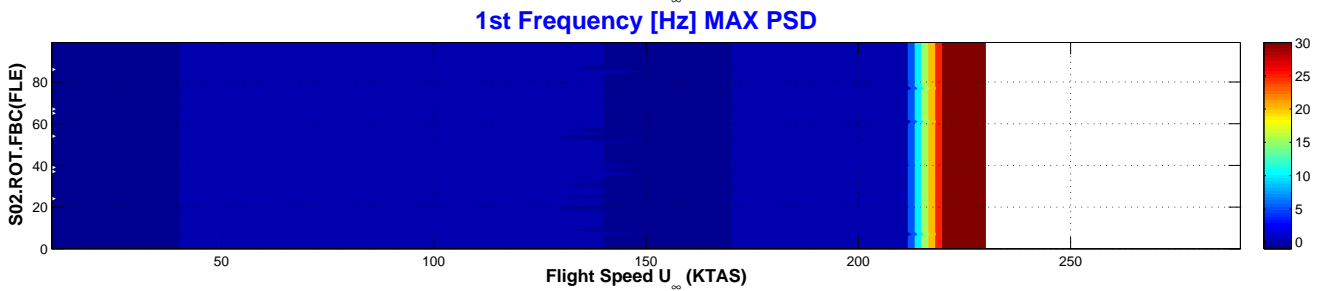
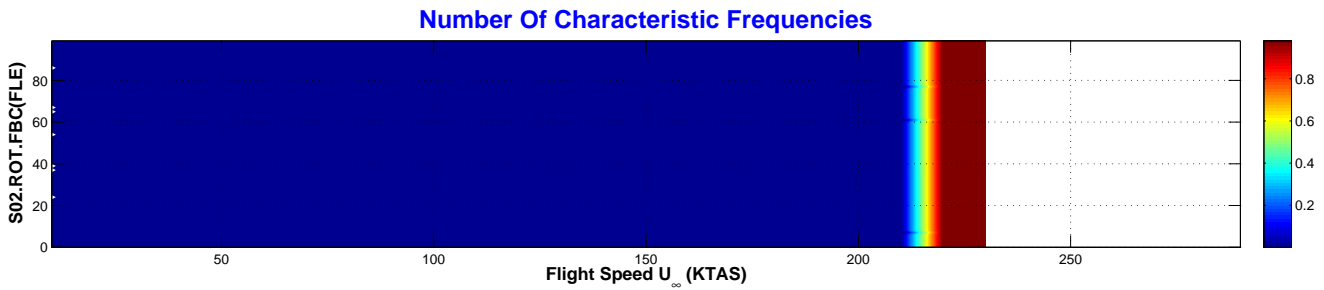
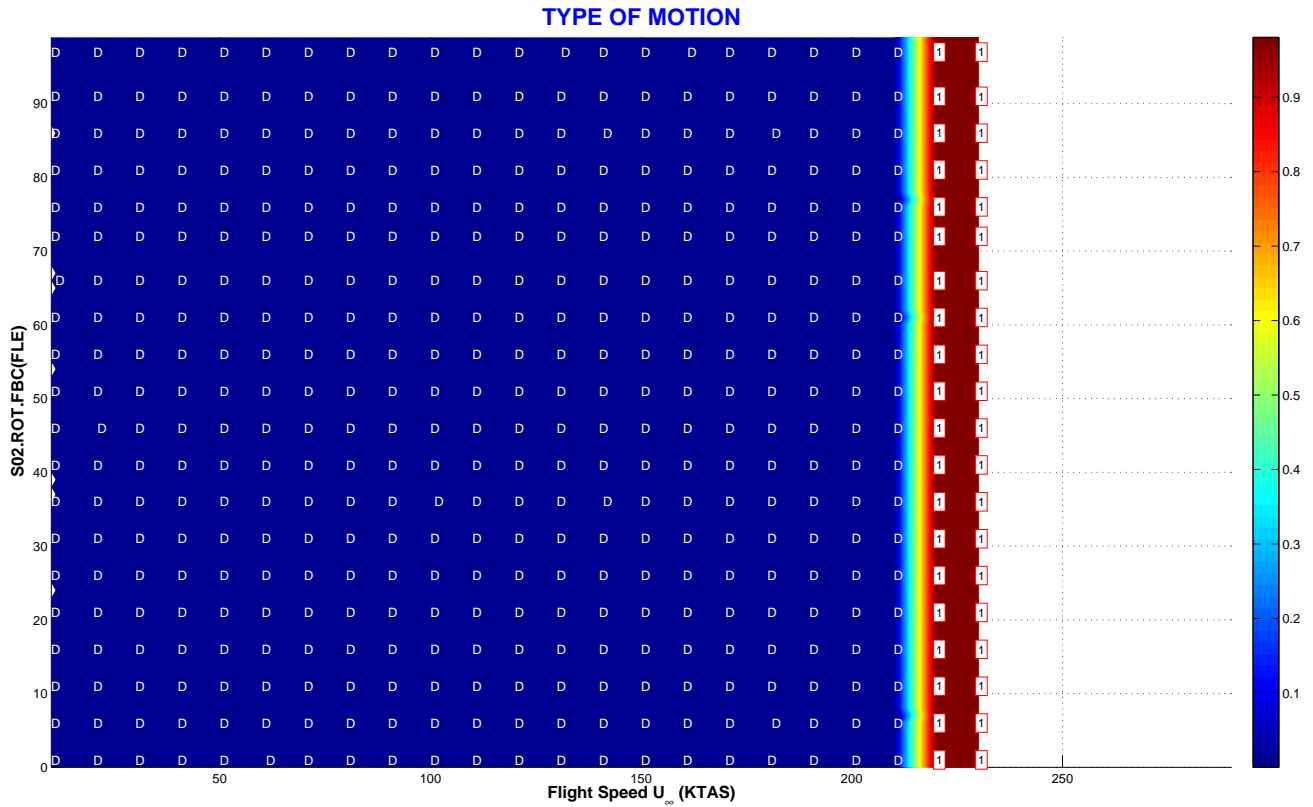
Tipo de Respuesta	DMP	Respuesta amortiguada hasta la velocidad de 210 KTAS.
	LCO	Respuesta armónica con una frecuencia característica (LCO[1]) desde $U_\infty = 220$ KTAS (incluida) hasta la entrada en <i>flutter</i> a la velocidad de 230 KTAS.
	CHA	No existe respuesta de tipo caótico.
	FLT	Velocidad de <i>flutter</i> 230 KTAS, independiente de la precarga.
Transición entre Tipos de Respuesta	La respuesta evoluciona de la siguiente forma: DMP-LCO[1]-FLT.	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 241$. KTAS / $VF_{(K=0)} = 0$. KTAS.
	No Lineal	230 KTAS, independiente de la precarga.
Variación de la Amplitud	con U_∞	En el rango de velocidades de vuelo con respuesta amortiguada DMP, la amplitud de la respuesta aumenta exponencialmente con la velocidad de vuelo U_∞ . El rango de velocidades con respuesta armónica LCO[1] es muy estrecho, tan sólo 10 KTAS, y la respuesta es sólo armónica a 220 KTAS, pasando a divergente a 230 KTAS.
	con ROT.FDP	La respuesta no depende de la precarga.
Bifurcaciones	Bifurcación de tipo <i>Hopf</i> en la transición DMP-LCO[1].	
Flutter onset	Entrada en <i>flutter</i> previsible a la vista del aumento exponencial de la amplitud de la respuesta a velocidades anteriores a la de <i>flutter</i> .	

NOTA:

A velocidades inferiores a la de *flutter*, el misil realiza un movimiento lento con aumento progresivo de la guiñada hasta que llega a un máximo para posteriormente disminuir la guiñada y alcanzar el estado estacionario. Para capturar la mecánica del vuelo correspondiente a estas respuestas lentas y amortiguadas es necesario tiempos grandes de integración, del orden de hora y media.

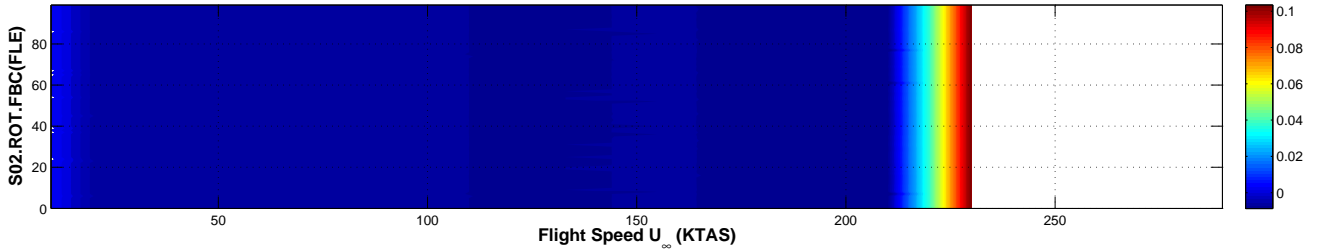
VARIACIÓN DE LAS CONDICIONES INICIALES

CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
FLE.S02	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Boundary Conditions (BC)	S02.ROT.FBC	1/3

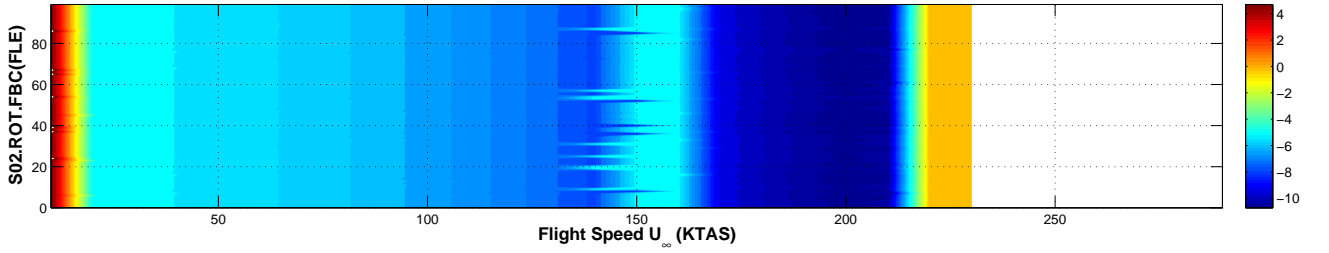


CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
FLE.S02	Rotation (ROT)	Freeplay (H)	Boundary Conditions (BC)	S02.ROT.FBC	2/3

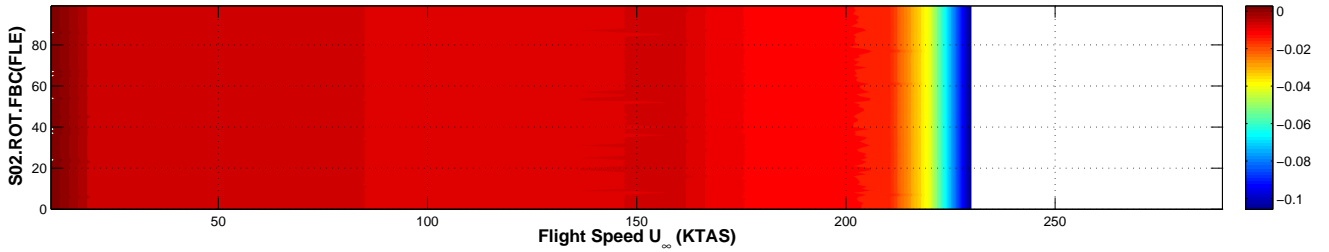
MAXIMUM VALUE



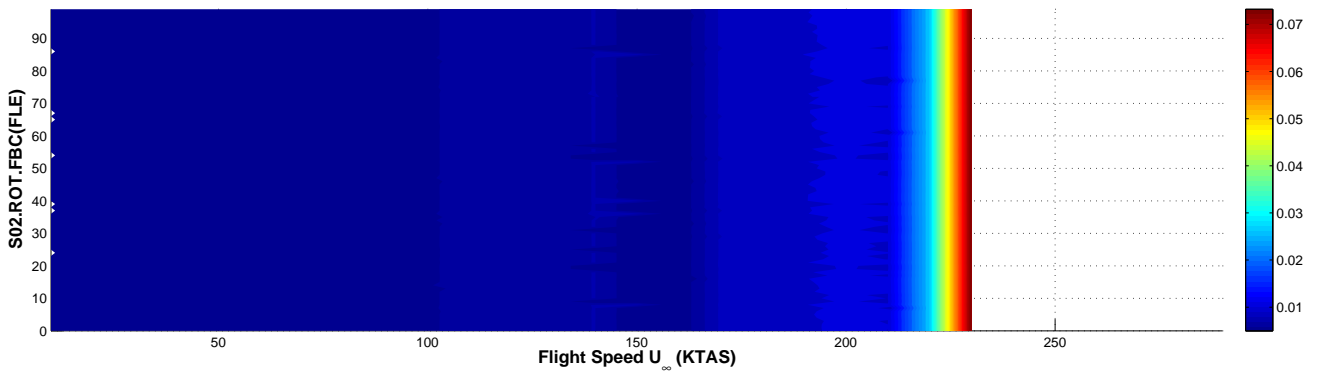
ARITHMETIC MEAN



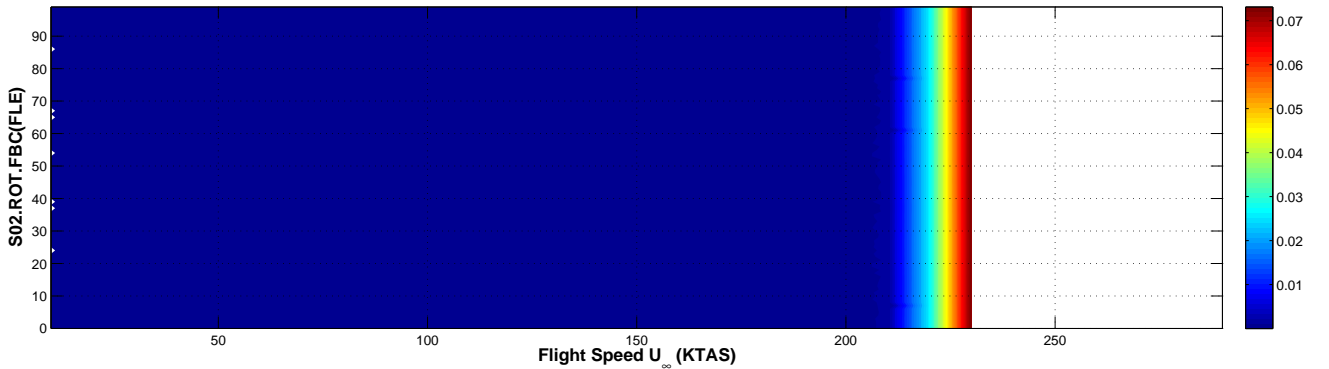
MINIMUM VALUE



ROOT MEAN SQUARE



STANDARD DEVIATION



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
FLE.S02	Rotation (ROT)	Freeplay (F)	Boundary Conditions (BC)	S02.ROT.FBC	3/3

Tipo de Respuesta	DMP	Respuesta amortiguada hasta una velocidad de vuelo de 210 KTAS.
	LCO	Respuesta armónica no amortiguada LCO en un intervalo reducido de velocidades, desde 210 a 230 KTAS, velocidad a la que ocurre <i>flutter</i> .
	CHA	No existe respuesta de tipo caótico.
	FLT	Respuesta divergente tipo <i>flutter</i> a una velocidad de 230 KTAS, independiente de las condiciones iniciales.
Transición entre Tipos de Respuesta	La respuesta evoluciona de la siguiente forma: DMP-LCO[1]-FLT. La transición DMP-LCO[1] ocurre de forma instantánea a una velocidad de 210 KTAS independiente de las condiciones iniciales. Por otro lado, la transición de LCO[1] a <i>flutter</i> ocurre a una velocidad aproximada de 230 KTAS, independiente de las condiciones iniciales.	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 241. \text{ KTAS} / VF_{(K=0)} = 0. \text{ KTAS}$.
	No Lineal	Velocidad de <i>flutter</i> es 230 KTAS, independiente de las condiciones iniciales.
Variación de la Amplitud	con U_∞	La respuesta oscilatoria LCO[1] ocurre en un intervalo muy reducido de velocidades, de forma que en sólo 20 nudos la amplitud de la respuesta pasa de tener un valor acotado (LCO) a divergente (FLT).
	con ROT.FBC	N/A
Bifurcaciones	Bifurcación de tipo <i>Hopf</i> en la transición DMP-LCO[1], independiente de las condiciones iniciales.	
Flutter onset	Entrada en <i>flutter</i> abrupta: en 20 nudos la respuesta pasa de estar amortiguada a <i>flutter</i> . La velocidad de entrada en <i>flutter</i> es 230 KTAS, independiente de las condiciones iniciales.	

NOTA:

Las condiciones iniciales son:

$$\{x(0)\}_{8 \times 1} = \left[+1,30 \quad 0,0 \quad \hat{\xi}_3 \quad 0,238 \quad 1,0 \quad 1,0 \quad \frac{d\hat{\xi}_3}{dt} \quad 1,0 \right]^T$$

donde $\hat{\xi}_3$ y $d\hat{\xi}_3/dt$ se varían aleatoriamente dando un total de 99 condiciones iniciales distintas.

9.5. Consideraciones Finales

En este capítulo se ha presentado la respuesta aeroelástica del sistema en presencia de no linealidades estructurales concentradas del tipo *freeplay*. Las principales conclusiones son:

1. Soportado **S01** (misil colgado de pilón del avión plataforma) con modelo rígido **RIG**:

Una no linealidad en la *rotación de superficies de control* introduce oscilaciones de tipo armónico a velocidades inferiores a la de flutter lineal. No existe respuesta caótica. Las oscilaciones son de mayor amplitud a medida que aumenta la holgura de la zona muerta o deadband, el descentramiento de la no linealidad no afecta a la amplitud de las oscilaciones y la precarga tiende a retrasar la aparición de la oscilación a velocidades mayores de vuelo. Este último resultado coincide con la práctica habitual en las aeronaves de precargar las superficies de control para evitar oscilaciones. Por último, se han probado varias condiciones iniciales en los modos no lineales (manteniendo constantes las condiciones iniciales en los otros modos) y no afectan a los resultados. Sin embargo, se ha comprobado que, a velocidades inferiores a la de *flutter* lineal, determinadas condiciones iniciales pueden degenerar en respuesta de tipo estacionario.

Una no linealidad en la *flexión lateral* del pilón no introduce variación en el comportamiento aeroelástico lineal. El motivo es que el modo de flexión lateral tiene poco peso en el mecanismo de flutter lineal.

Una no linealidad en el *modo de guiñada* introduce oscilaciones de tipo armónico a velocidades inferiores a la velocidad de flutter lineal y respuesta de tipo caótica a velocidades próximas a la de flutter. La velocidad de flutter aumenta de forma sensible con la amplitud de la holgura, el valor del descentramiento modifica los diagramas de bifurcación apareciendo respuestas más complejas para valores mayores del descentramiento, y la precarga no modifica la respuesta del sistema. Por último, la respuesta es sensible a las condiciones iniciales.

2. Soportado **S02** (misil en vuelo libre) con modelo rígido **RIG**:

La no linealidad en la rotación de las superficies de control introduce respuesta armónica no amortiguada desde prácticamente velocidad nula. La razón es que el sistema es inestable a velocidades muy bajas en caso de desconexión del actuador de las superficies de control. Por tanto, a cualquier velocidad, una perturbación se amplifica hasta que la amplitud del giro de las aletas sale fuera de la zona deadband y entra en la zona lineal con rigidez correspondiente a la nominal de las aletas. La respuesta aumenta con la amplitud de la holgura aunque el tipo de respuesta no, el descentramiento modifica el tipo de respuesta y tiende a retrasar la aparición de los LCOs previos al *flutter* y la precarga de nuevo retrasa la aparición de los LCOs. Tener una cierta precarga (aerodinámica o estructural) en la rotación de aletas disminuye el rango de velocidades a las que aparecen los LCOs. Por último, las condiciones de contorno no afectan al tipo de respuesta.

3. Soportado **S02** (misil en vuelo libre) con modelo flexible **FLE**:

La introducción del primer modo de flexión modifica el mecanismo de flutter, apareciendo un *mild flutter* a velocidades bajas (250 KTAS aprox.). En este caso, la presencia de la no linealidad no modifica la respuesta aeroelástica lineal, permaneciendo una respuesta amortiguada a velocidades

inferiores a la de *flutter* lineal, oscilatoria a velocidades muy próximas a la velocidad de flutter, y respuesta divergente a velocidades mayores.

Como resultado final, puede observarse que las no linealidades introducen oscilaciones que no eran detectadas con el modelo lineal, la precarga de las superficies de control tiende a aumentar la velocidad de vuelo a la que aparecen los LCOs, un resultado que coincide con lo observado en aeronaves y, por otro lado, las no linealidades en los modos que no intervienen en el mecanismo de flutter (en este caso la flexión lateral) no influyen en la respuesta aeroelástica no lineal.

Capítulo 10

NOLINEALIDAD DEL TIPO *HYSTERESIS*: RESULTADOS

10.1. Introducción

En este capítulo se analiza la estabilidad aeroelástica de la configuración cuerpo/ala descrita en la capítulo 7 con una no linealidad estructural concentrada del tipo *hysteresis*.

La sección 10.2 se dedica al soportado **S01** (misil instalado en el avión plataforma, con modelo estructural rígido **RIG**) y una no linealidad concentrada localizada en uno de los tres grados de libertad: desplazamiento lateral, guiñada o rotación de aletas. Además, para cada localización de la no linealidad, se varían los principales parámetros del ciclo de *hysteresis*: holgura de la zona muerta o deadband, descentramiento, precarga y condiciones iniciales.

La sección 10.3 se dedica al soportado **S02** (vuelo libre) con modelo estructural rígido (**RIG**) y una no linealidad concentrada localizada la rotación de aletas. Se varían los principales parámetros del ciclo de *hysteresis*: holgura de la zona muerta o deadband, descentramiento, precarga y condiciones iniciales.

Por último, la sección 10.4 se dedica al soportado **S02** con modelo estructural flexible (**FLE**) y una no linealidad concentrada localizada la rotación de aletas. De nuevo, se varían los principales parámetros del ciclo *hysteresis*: holgura de la zona muerta o deadband, descentramiento, precarga y condiciones iniciales.

Los resultados para cada caso se presentan en el formato descrito en la sección 7.8 del capítulo 7.

10.2. Estructura (**RIG**) / Soportado (**S01**)

En esta sección se detallan los resultados para la configuración de misil con 3 modos de sólido rígido (modo lateral, modo de guiñada y modo de rotación de aletas) e instalado en la plataforma que lo transporta (soportado **S01**), típicamente colgado del pilón de un avión.

Una no linealidad estructural de tipo *hysteresis* se considera localizada en cada uno de los 3 modos: **ROT** cuando la no linealidad se localiza en la rotación de aletas, **LAT** si la no linealidad se localiza en el modo lateral y **YAW** en el caso de que la no linealidad se considere localizada en el modo de guiñada.

Por otro lado, y para cada una tres posibles localizaciones de la no linealidad, se varían distintos parámetros de la *hysteresis*: **HDA** corresponde a la variación de la amplitud de la holgura, **HDC** corresponde a la variación del centro de la no linealidad, **HDP** corresponde a la variación de la precarga de la no linealidad y, por último, **HBC** indica variación de las condiciones iniciales.

La tabla 10.1 resume las configuraciones de estudio y la sección en la que se incluyen los resultados.

SECCIÓN	CONFIGURACIÓN
10.2.1	RIG.S01.ROT.HDA
	RIG.S01.ROT.HDC
	RIG.S01.ROT.HDP
	RIG.S01.ROT.HBC
10.2.2	RIG.S01.LAT.HDA
	RIG.S01.LAT.HDC
	RIG.S01.LAT.HDP
	RIG.S01.LAT.HBC
10.2.3	RIG.S01.YAW.HDA
	RIG.S01.YAW.HDC
	RIG.S01.YAW.HDP
	RIG.S01.YAW.HBC

Tabla 10.1: Configuraciones de estudio para el misil **RIG** (modelo estructural con 3 modos de sólido rígido) con soportado **S01** (instalado en la plataforma que lo transporta).

10.2.1. Nolinealidad en Rotación de Aletas (ROT)

La figura 10.1 detalla la nolinealidad de tipo *hysteresis* con las principales características que se consideran como parámetros en el estudio:

- Amplitud de la holgura (*Deadband Amplitude* **HDA**).
- Centro de la nolinealidad (*Deadband Center* **HDC**).
- Precarga de la nolinealidad (*Deadband Preload* **HDP**).

Aparte de los tres parámetros anteriores, se estudiará el efecto de las condiciones iniciales en la respuesta (**HBC**). La nolinealidad se considera concentrada en el actuador de las aletas, de forma que la variable no lineal es el giro relativo de la aleta β_A respecto al cuerpo en el eje de charnela x_h , i.e. $\beta_A \simeq \partial w_{wb} / \partial x(x_h; t)$.

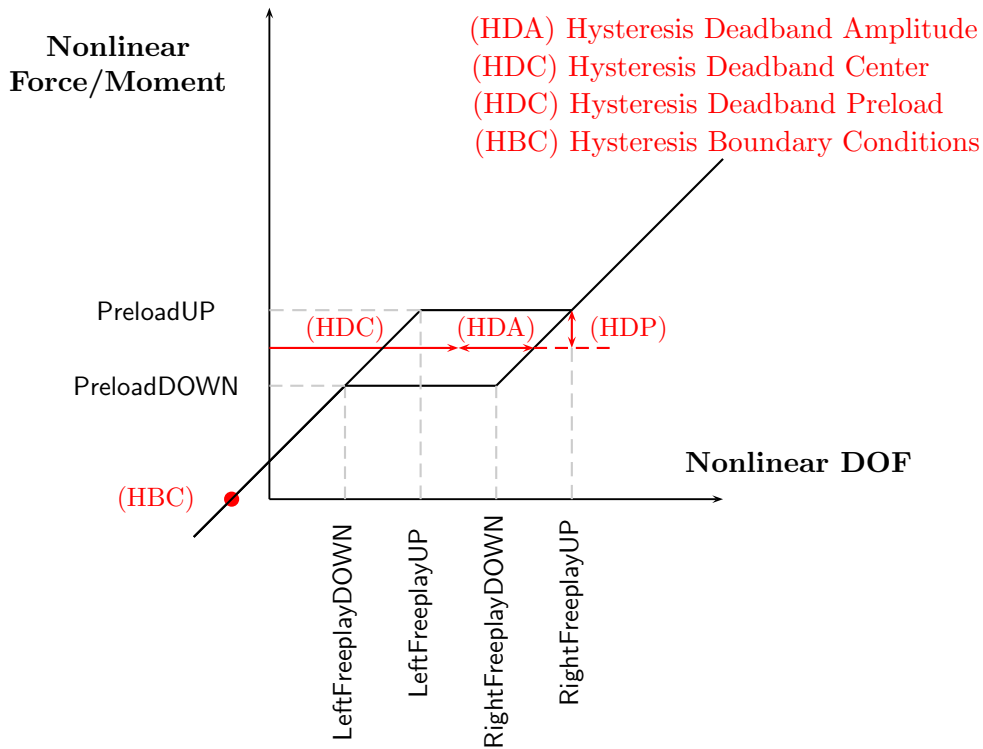


Figura 10.1: Nolinealidad del tipo *hysteresis* con los principales parámetros que la definen.

Dado un ciclo de histéresis nominal, de precarga $5,0 \text{ [N.m]}^1$ y amplitud adimensional $\mp 0,005$ ($\mp 0,29^\circ$ aprox.), se varían uno a uno los parámetros mencionados anteriormente.

La condición inicial nominal del vector de estado-espacio $\{x\}$ es:

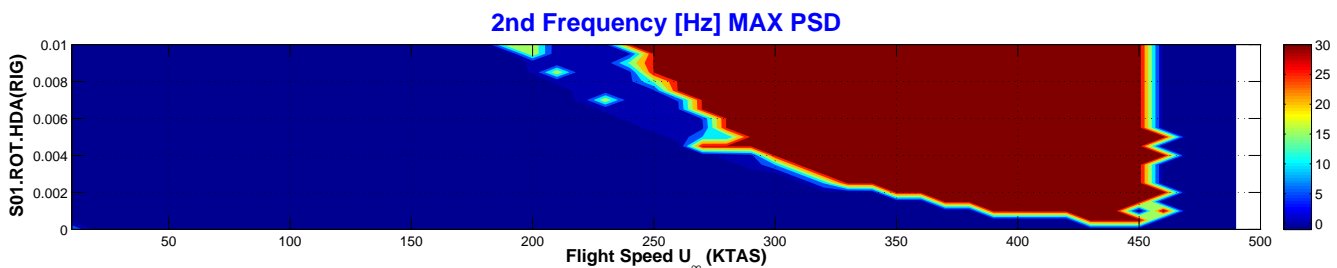
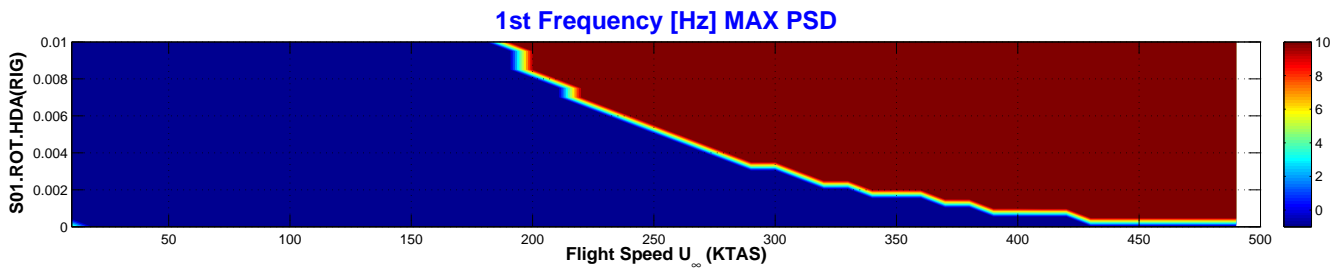
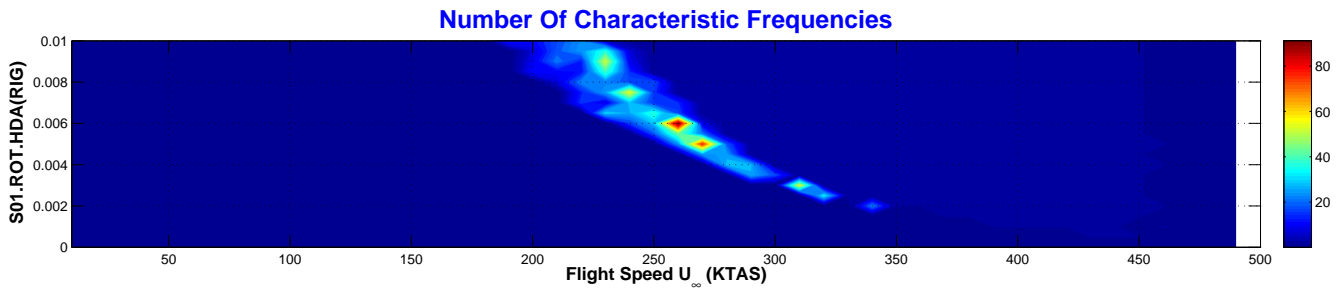
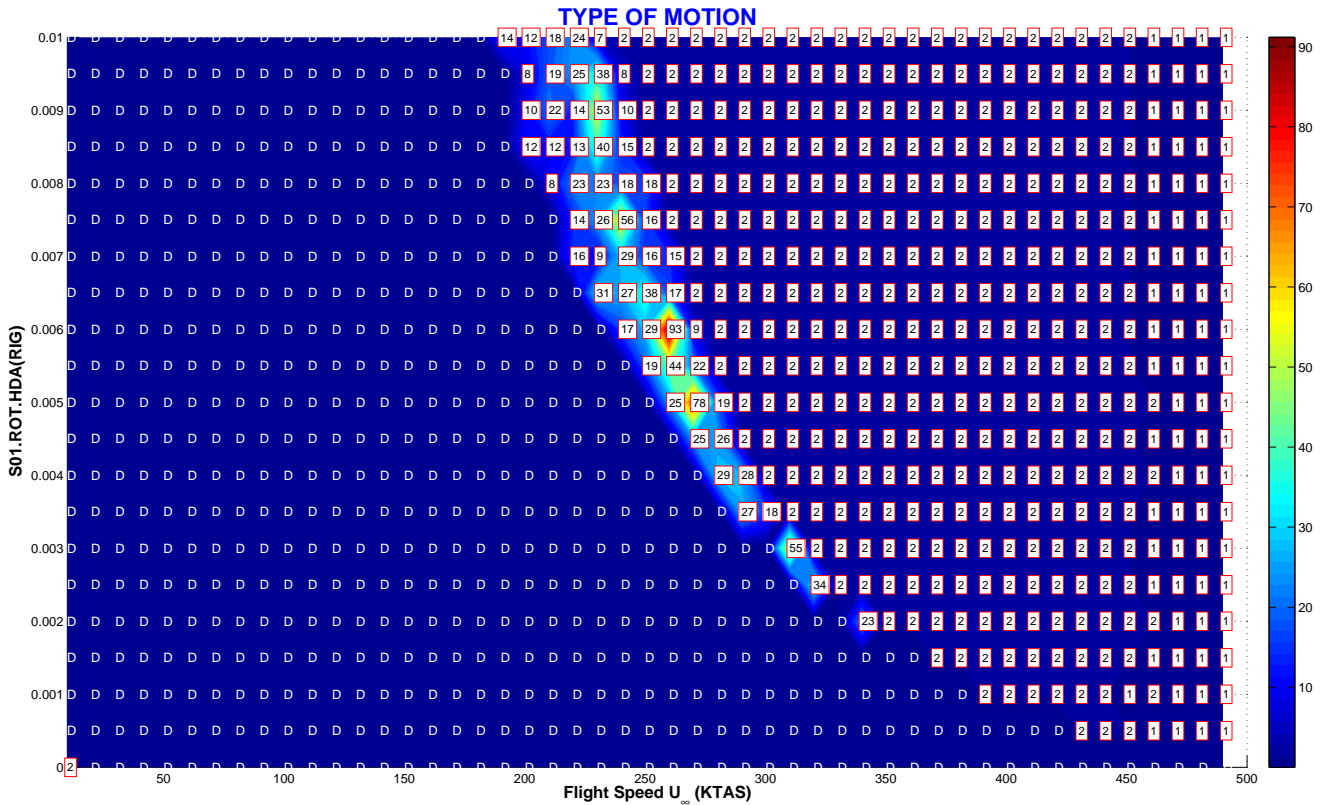
$$\{x(0)\}_{6 \times 1} = \left[\hat{\xi}_1 \quad \hat{\xi}_2 \quad \hat{\xi}_3 \quad \frac{d\hat{\xi}_1}{d\hat{t}} \quad \frac{d\hat{\xi}_2}{d\hat{t}} \quad \frac{d\hat{\xi}_3}{d\hat{t}} \right]^T = \left[+0,015 \quad -0,015 \quad -0,015 \quad 0,0 \quad 0,0 \quad 0,0 \right]^T$$

siendo la coordenada generalizada $\hat{\xi}_3$ (modo de rotación de aletas) y su velocidad generalizada $d\hat{\xi}_3/d\hat{t}$ las que se varían en el estudio de la sensibilidad de la respuesta a las condiciones iniciales (**HBC**).

¹Recuérdese que la precarga adimensional venía dada por $\hat{M}_0^{NLA} = M_0^{NLA} / m_0 U_0^2 L$.

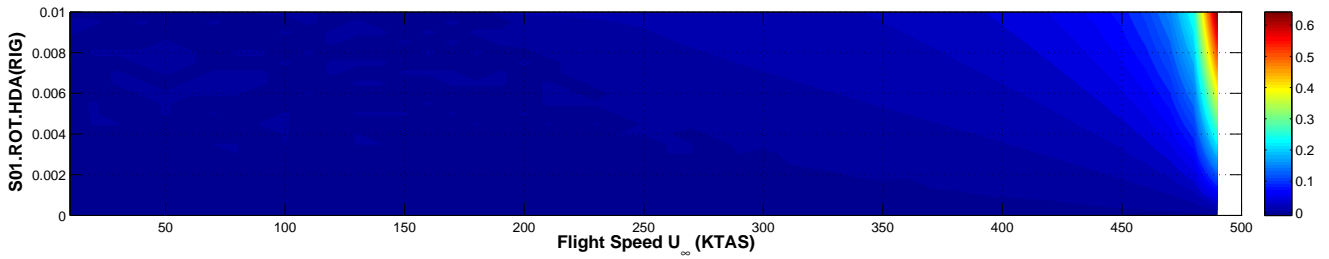
VARIACIÓN DE LA AMPLITUD DE LA HOLGURA

CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Amplitude (DA)	S01.ROT.HDA	1/5

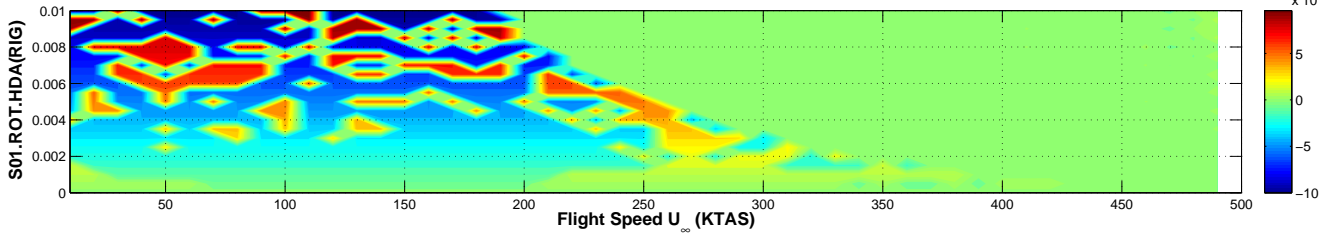


CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Amplitude (DA)	S01.ROT.HDA	2/5

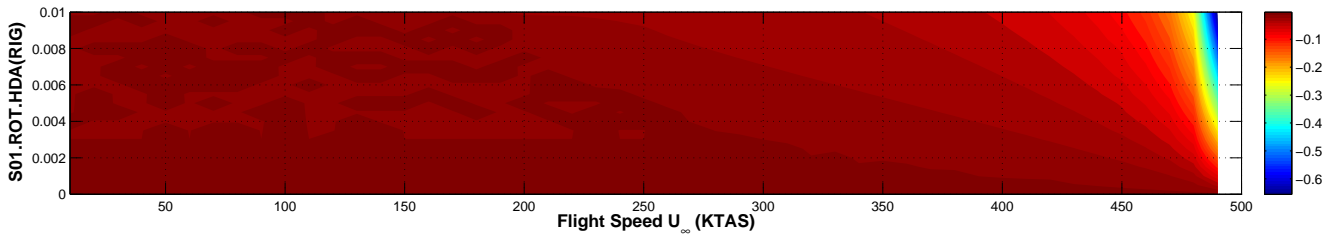
MAXIMUM VALUE



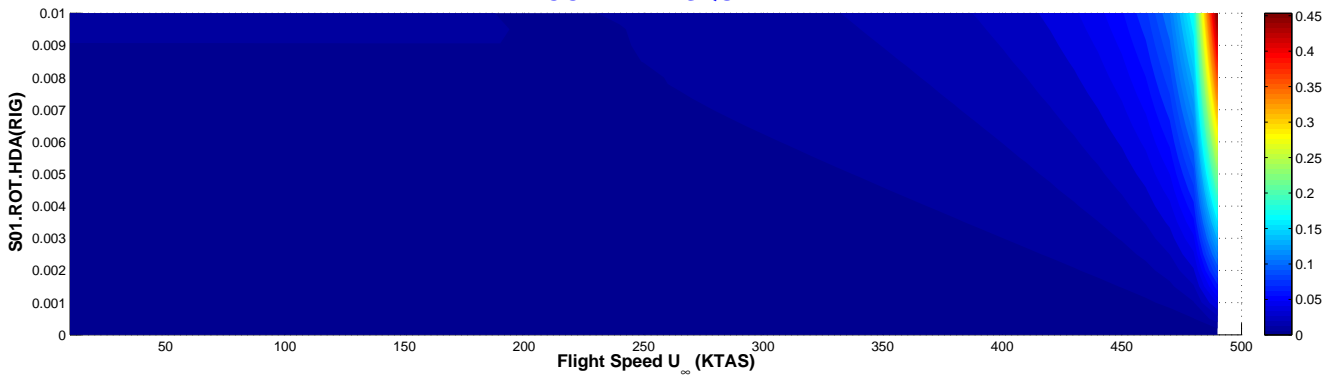
ARITHMETIC MEAN



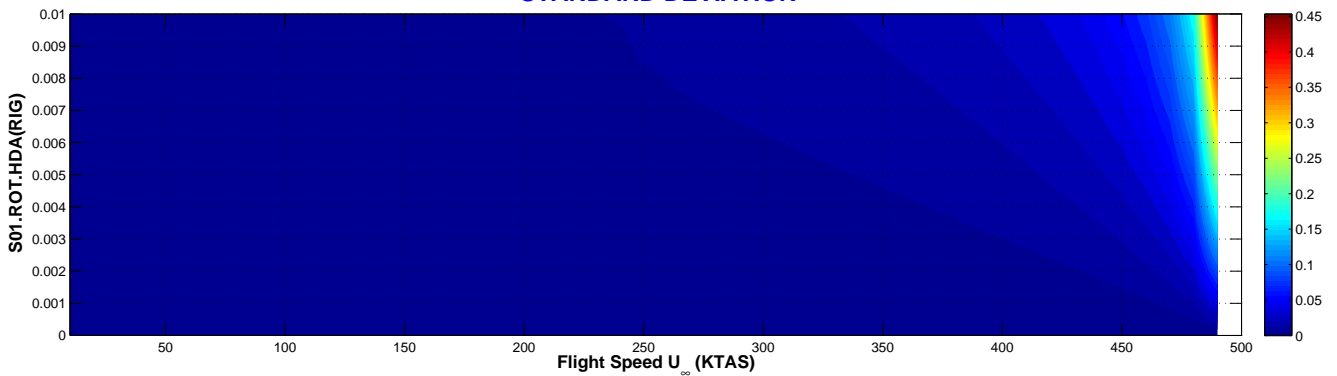
MINIMUM VALUE



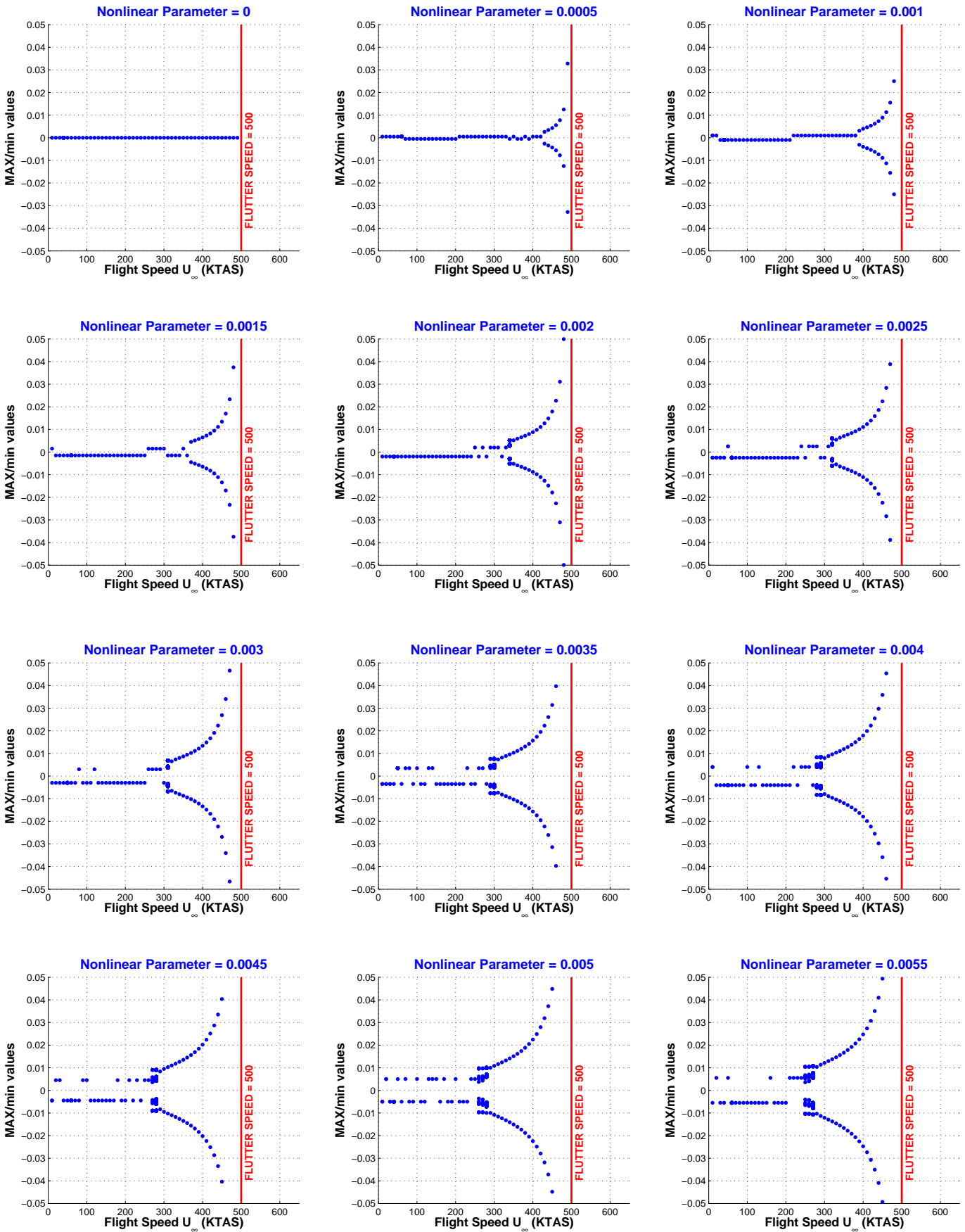
ROOT MEAN SQUARE



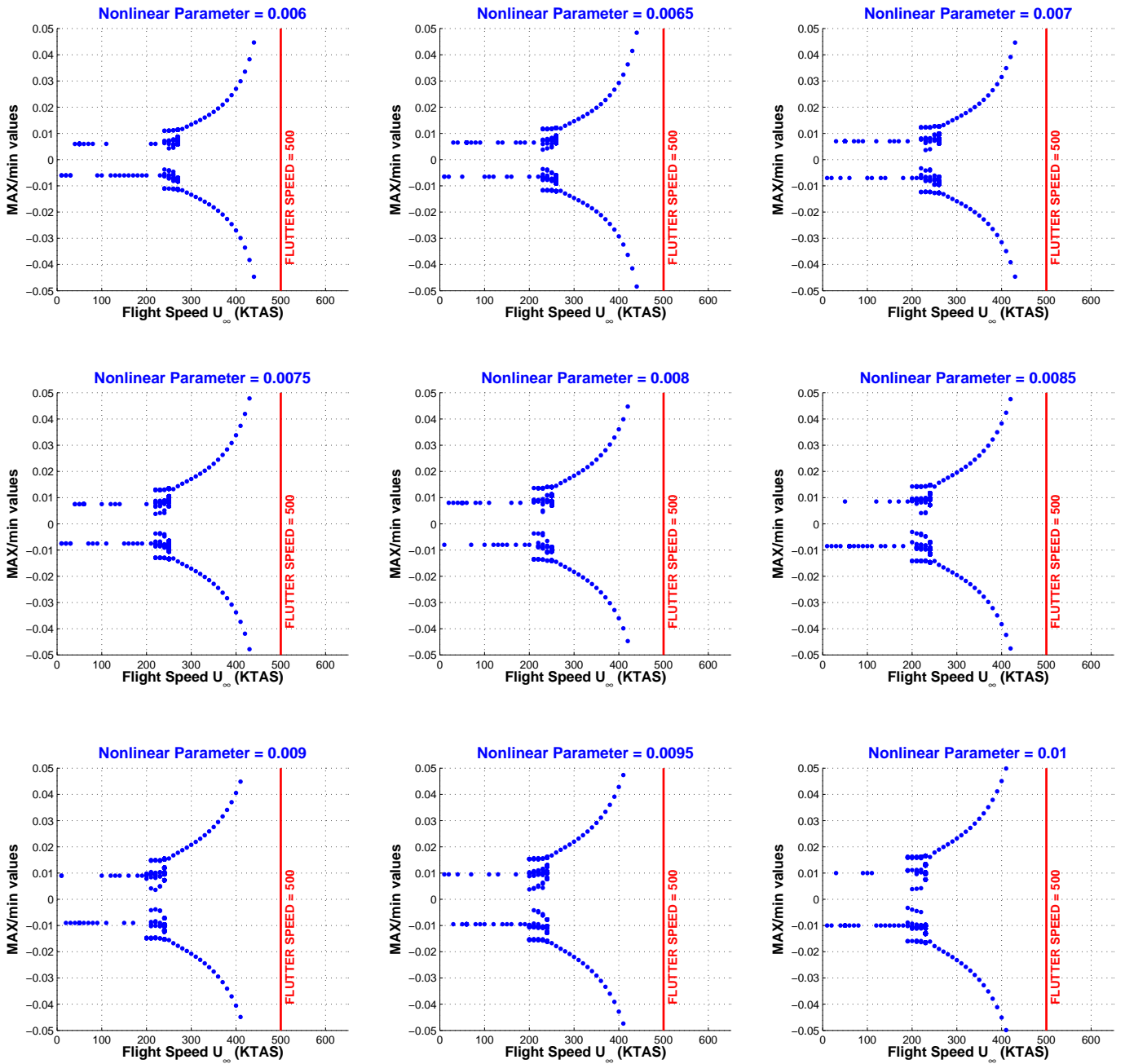
STANDARD DEVIATION



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Amplitude (DA)	S01.ROT.HDA	3/5



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Amplitude (DA)	S01.ROT.HDA	4/5



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Amplitude (DA)	S01.ROT.HDA	5/5

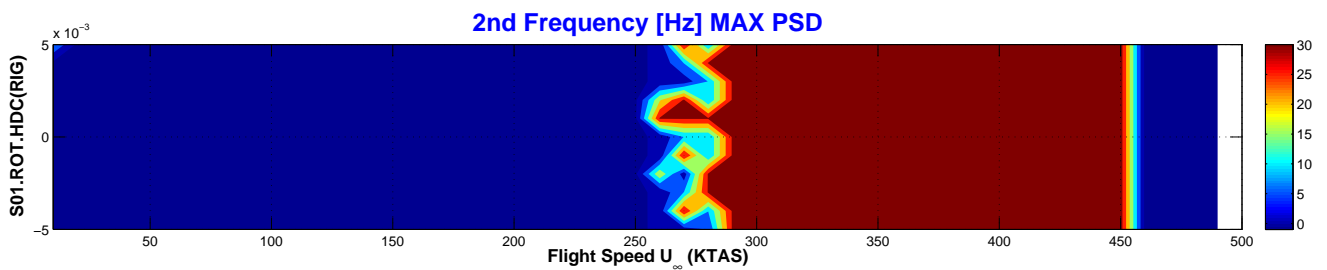
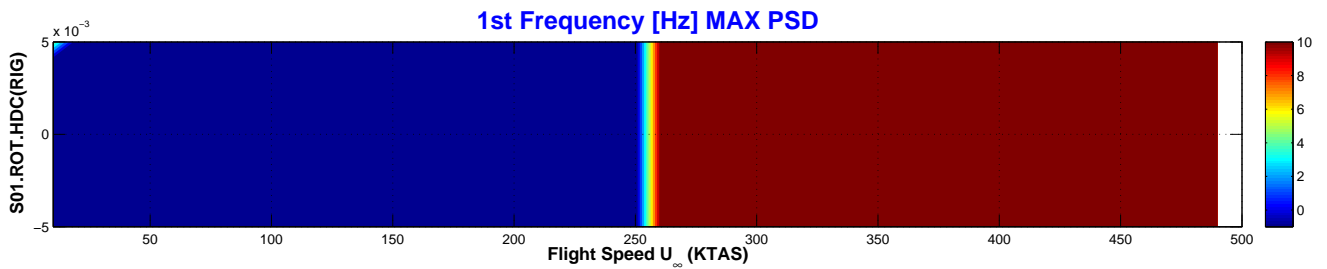
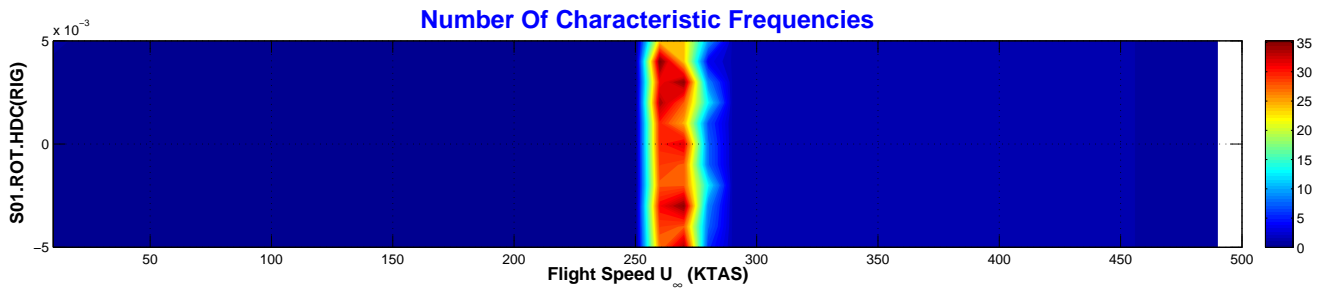
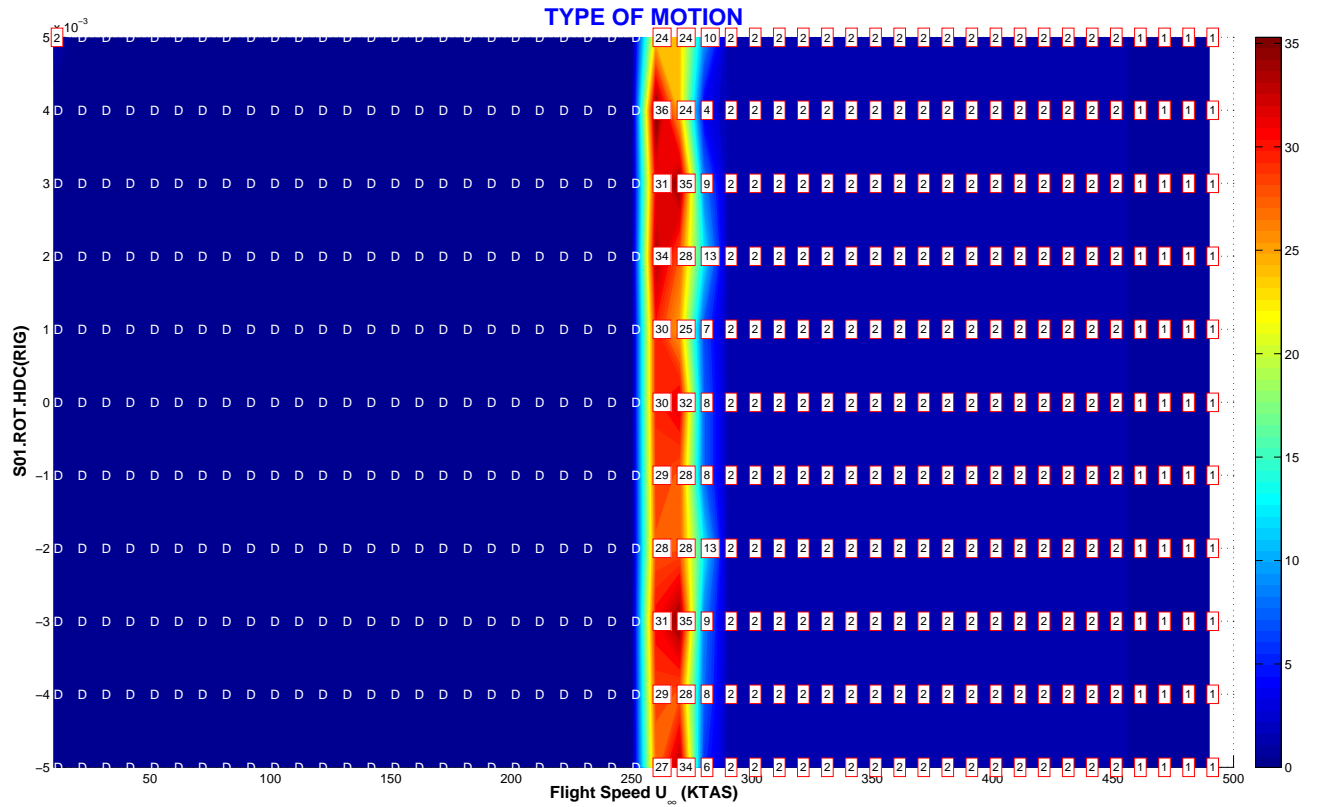
Tipo de Respuesta	DMP	Movimiento amortiguado a bajas velocidades de vuelo U_∞ .
	LCO	Movimiento armónico no amortiguado LCO aparece a una velocidad que depende de la holgura de la no linealidad. A mayor holgura, menor es la velocidad en la que tiene lugar este tipo de respuesta.
	CHA	La transición de movimiento amortiguado DMP a armónico LCO ocurre tras una respuesta intermedia de tipo caótico. La transición de amortiguado (DMP) a caótico (CHA) ocurre a una velocidad que depende de la amplitud de la holgura de la no linealidad <i>freeplay</i> . A mayor holgura, menor es la velocidad a la que ocurre esta transición.
	FLT	La velocidad de <i>flutter</i> coincide con la velocidad de <i>flutter</i> lineal y es independiente de la holgura.
Transición entre Tipos de Respuesta	La respuesta evoluciona con la velocidad de la siguiente forma: DMP-CHA-LCO-FLT. La transición de movimiento amortiguado DMP a oscilación de tipo caótica CHA ocurre de una forma instantánea al aumentar ligeramente la velocidad. Se puede considerar como una transición <i>dura</i> . El movimiento caótico ocurre en un intervalo de velocidades reducido hasta que la respuesta cambia a oscilación de tipo armónico LCO. La respuesta armónica LCO se mantiene hasta que se alcanza la velocidad de <i>flutter</i> .	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 496 \text{ KTAS} / VF_{(K=0)} = 331 \text{ KTAS}$.
	No Lineal	490 KTAS aprox. e independiente de la amplitud de la holgura.
Variación de la Amplitud	con U_∞	En el intervalo de velocidades con respuesta caótica, la amplitud del movimiento permanece constante con la velocidad de vuelo U_∞ . Una vez que se alcanza la velocidad de vuelo con transición a LCO, la amplitud del movimiento varía de forma exponencial con la velocidad de vuelo hasta alcanzar la velocidad de <i>flutter</i> (490 KTAS aprox.).
	con ROT.HDA	La amplitud de la respuesta es mayor cuanto mayor es la holgura de la no linealidad.
Bifurcaciones	Bifurcación de tipo Hopf en la transición DMP-CHA (amortiguado a respuesta caótica).	
Flutter onset	La velocidad de <i>flutter</i> es 490 KTAS aproximadamente y es independiente de la amplitud de la holgura. La respuesta a velocidades próximas a la de <i>flutter</i> es de tipo armónico LCO con una amplitud que aumenta exponencialmente con la velocidad de vuelo U_∞ . Por tanto, la entrada en <i>flutter</i> se puede predecir a la vista de la respuesta a velocidades inferiores a la de <i>flutter</i> .	

NOTA:

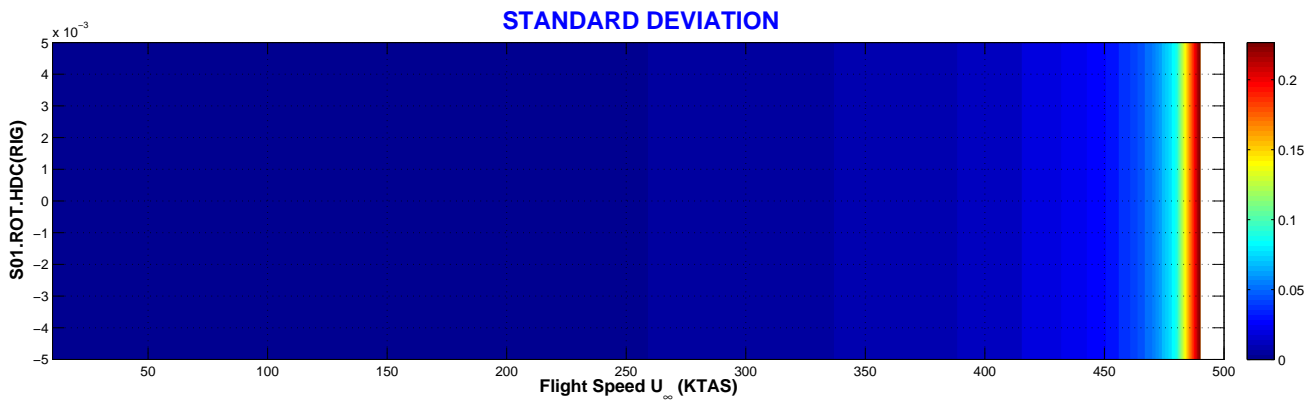
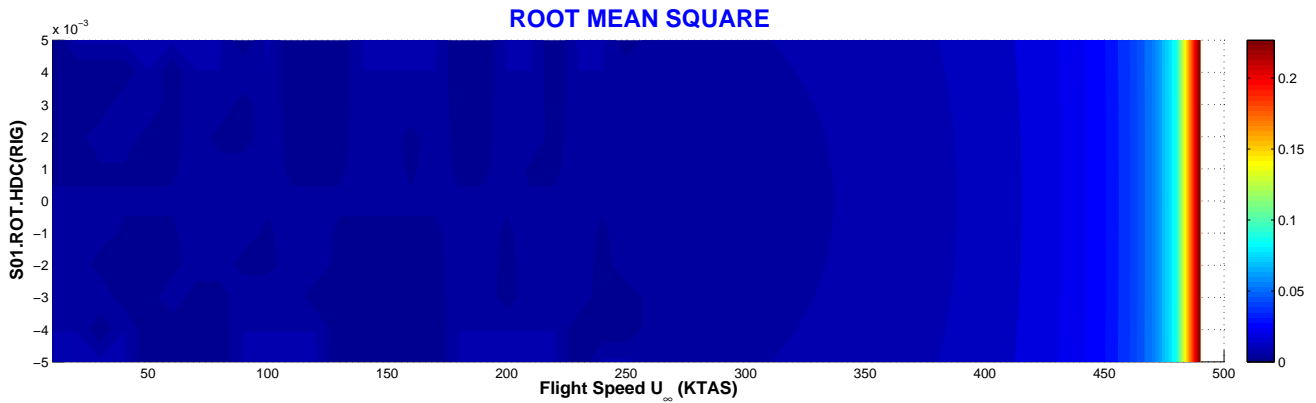
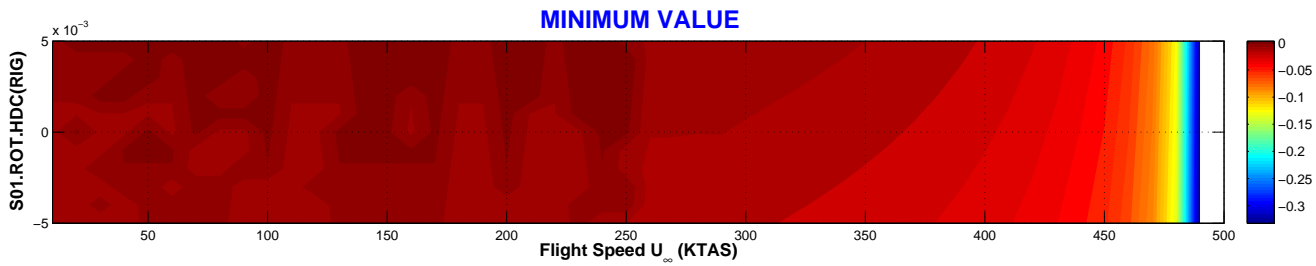
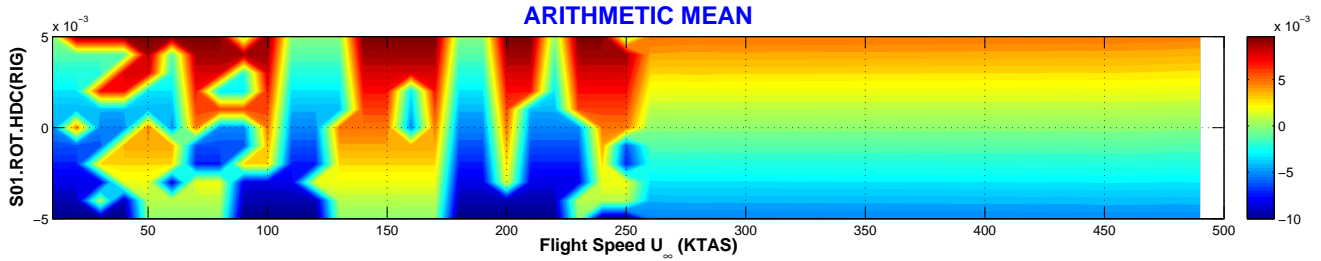
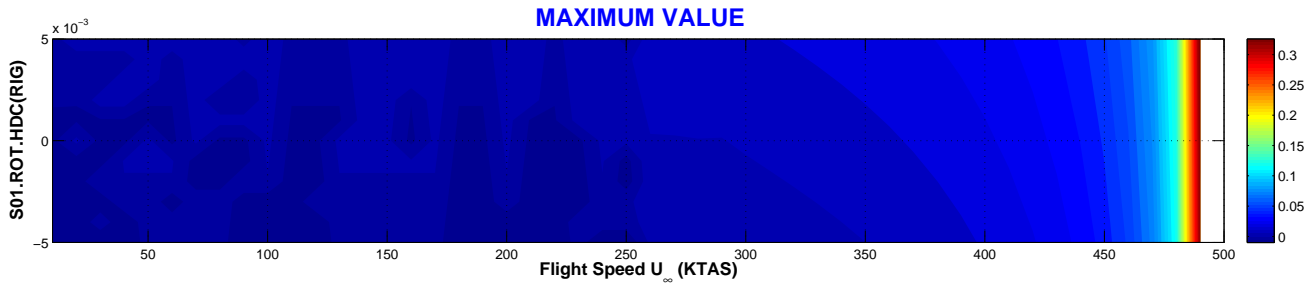
La respuesta amortiguada (a bajas velocidades) da lugar a rotaciones estacionarias de aletas próximas a la rotación que produce momento de actuador nulo. Esto es debido a que el momento aerodinámico es pequeño y los actuadores lo compensan con pequeñas rotaciones de aletas.

VARIACIÓN DEL CENTRO DE LA NONLINEALIDAD

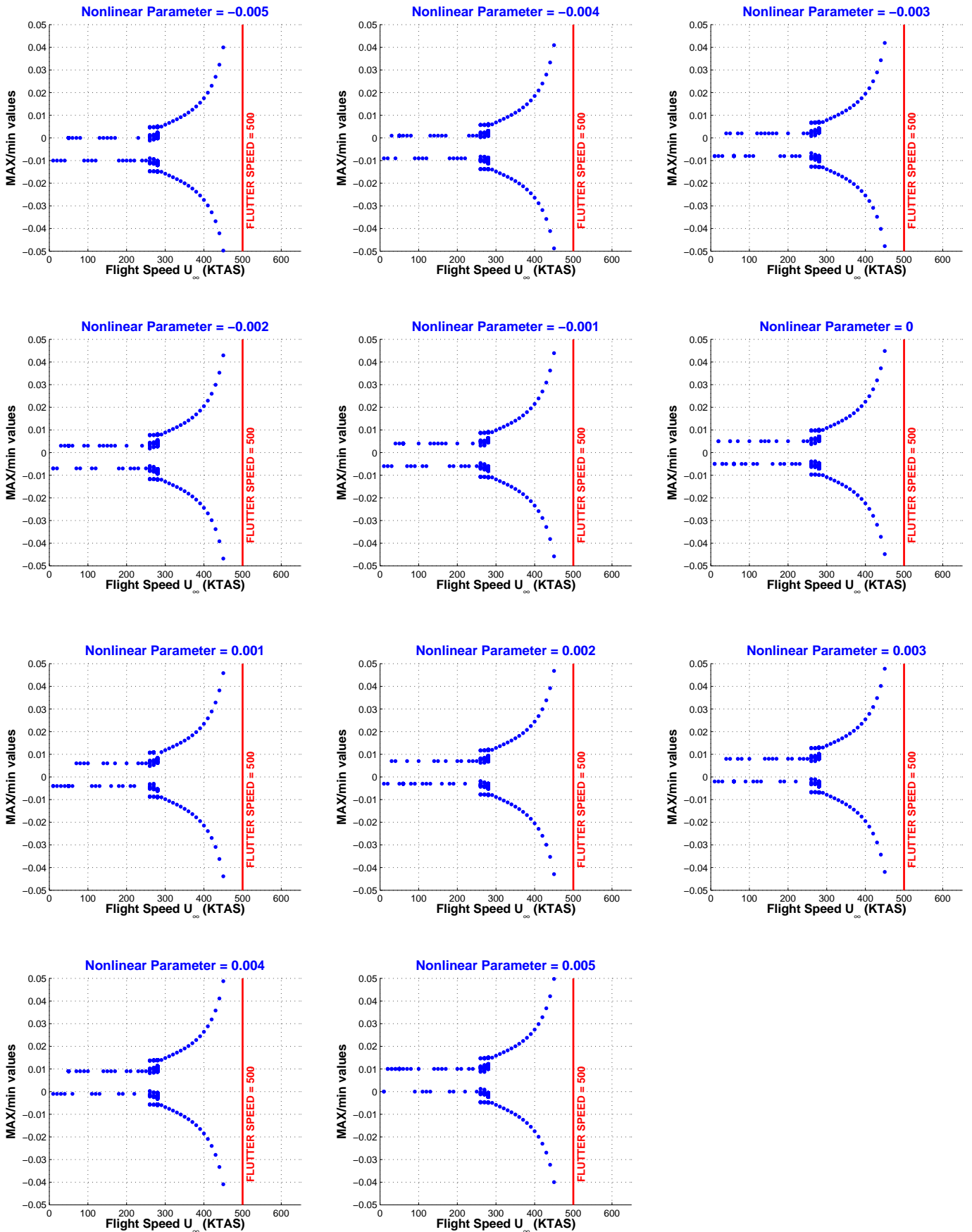
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Center (DC)	S01.ROT.HDC	1/4



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Center (DC)	S01.ROT.HDC	2/4



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Center (DC)	S01.ROT.HDC	3/4

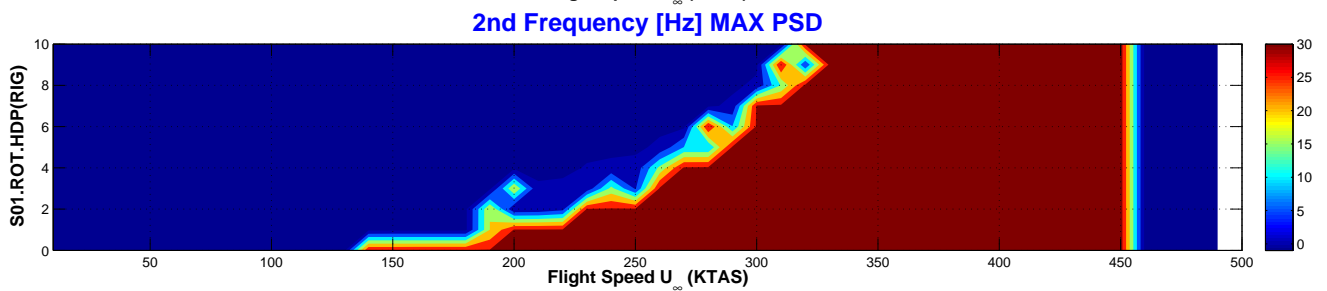
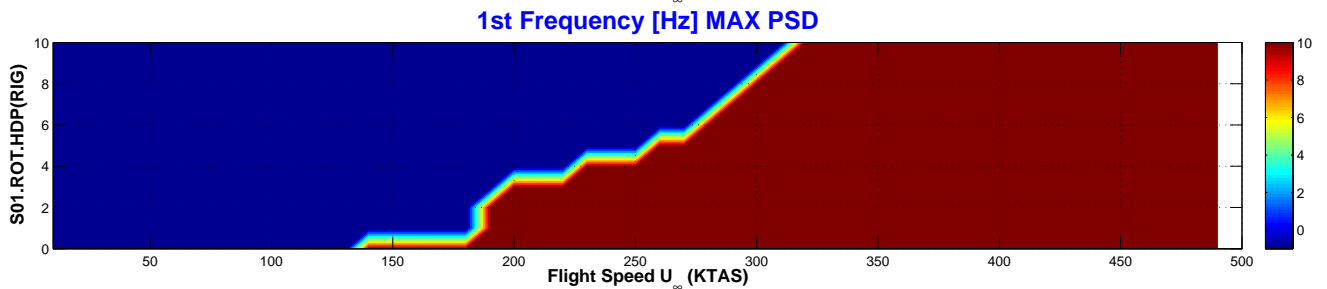
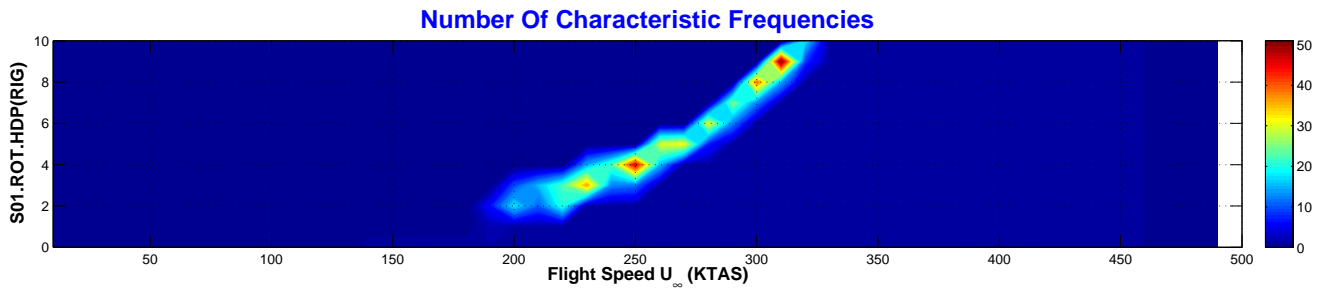
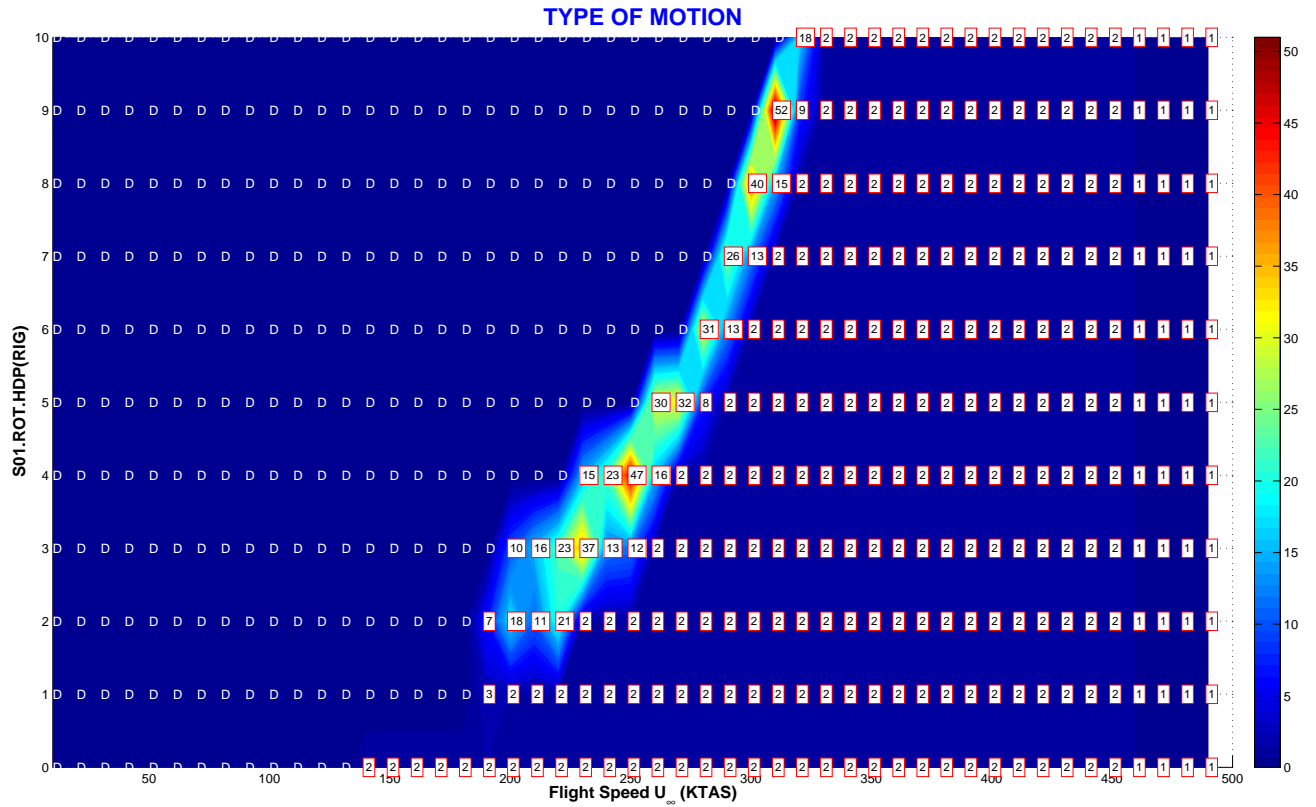


CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Center (DC)	S01.ROT.HDC	4/4

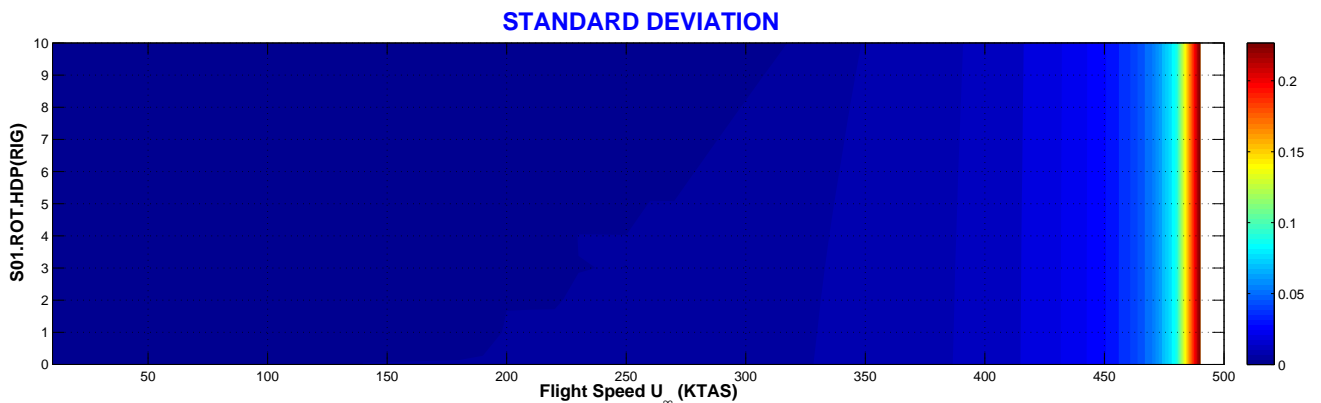
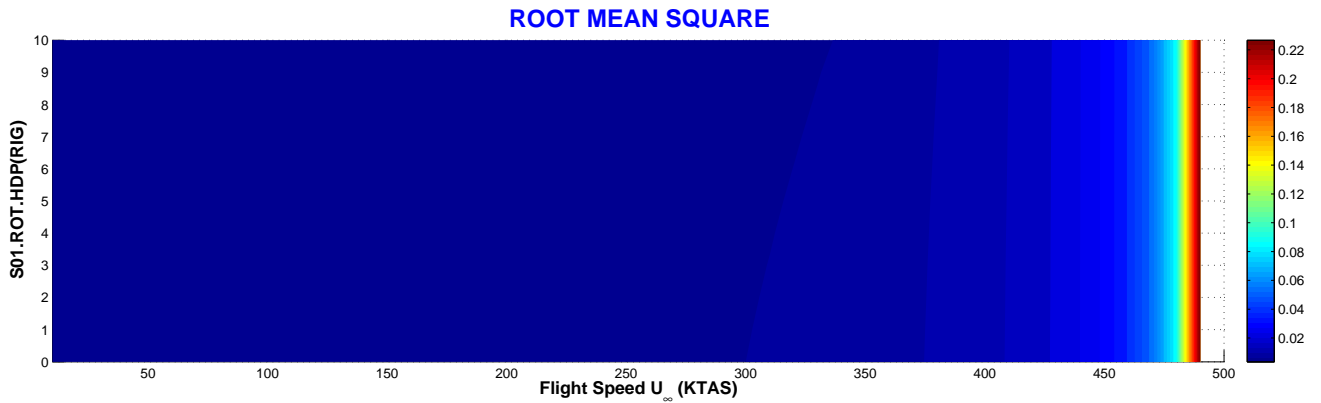
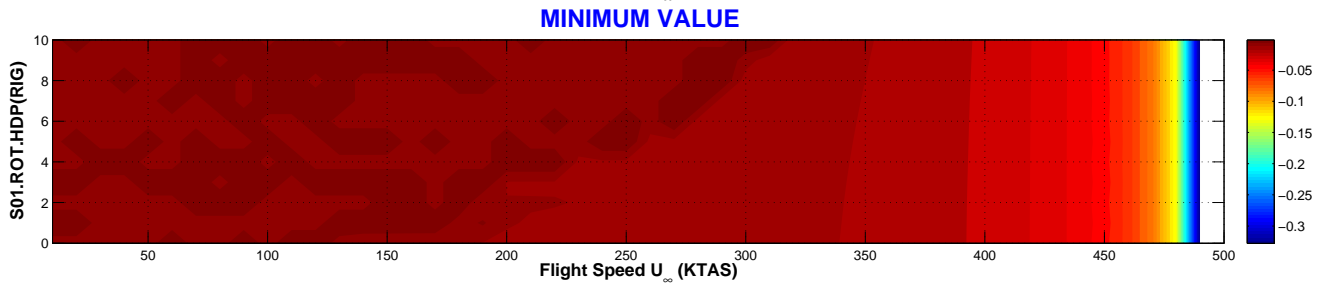
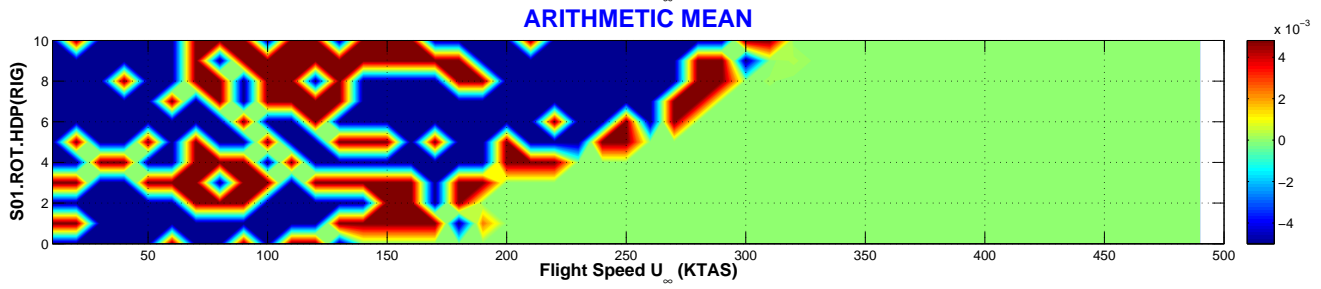
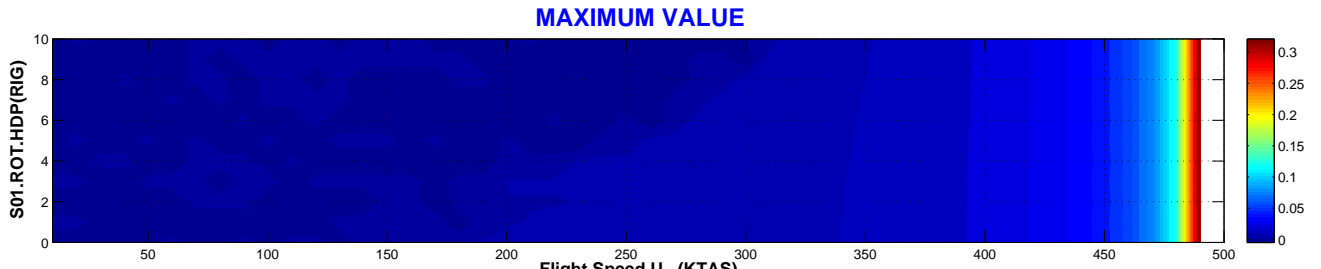
Tipo de Respuesta	DMP	Respuesta amortiguada a velocidades bajas hasta $U_{\infty} = 260$ KTAS (aprox.), independiente del centro de la no linealidad.
	LCO	Respuesta armónica de tipo LCO a velocidades mayores de 280 KTAS (aprox.) hasta alcanzar la velocidad de <i>flutter</i> (490 KTAS aprox.). Tanto velocidad de transición (280 KTAS) como la velocidad de <i>flutter</i> son independientes del centro de la no linealidad.
	CHA	La respuesta de tipo caótica ocurre en la transición de movimiento amortiguado DMP a LCO, en el rango de velocidades de 260 a 280 KTAS. De nuevo, este rango de velocidades es independiente del centro de la no linealidad.
	FLT	La velocidad de <i>flutter</i> es 490 KTAS (aprox.) e independiente del centro de la no linealidad.
Transición entre Tipos de Respuesta	La respuesta evoluciona de la siguiente forma: DMP-CHA-LCO[2]-LCO[1]-FLT. La transición de movimiento amortiguado DMP a oscilación de tipo caótica CHA ocurre de una forma instantánea al aumentar ligeramente la velocidad. Se puede considerar como una transición <i>dura</i> . El movimiento caótico ocurre en un intervalo de velocidades reducido (de 260 a 280 KTAS) hasta que la respuesta cambia a oscilación de tipo armónico LCO[2], con dos frecuencias características. La respuesta armónica LCO[2] cambia a LCO[1] (con frecuencia característica la del mecanismo de <i>flutter</i>), que se mantiene hasta que se alcanza la velocidad de <i>flutter</i> a 490 KTAS (aprox.). Esta transición es independiente del centro de la no linealidad.	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 496$. KTAS / $VF_{(K=0)} = 331$. KTAS.
	No Lineal	Velocidad de <i>flutter</i> es 490 KTAS (aprox.) e independiente del centro de la no linealidad.
Variación de la Amplitud	con U_{∞}	En el rango de velocidades de respuesta caótica (de 260 a 280 KTAS), la amplitud de la respuesta es independiente de la velocidad de vuelo U_{∞} . Al cambiar de CHA a LCO[2]-LCO[1], la amplitud de la respuesta aumenta exponencialmente con la velocidad de vuelo.
	con ROT.HDC	La amplitud de la respuesta es independiente del centro de la no linealidad. Sin embargo, el valor medio de la respuesta se desplaza siguiendo el centro de la no linealidad.
Bifurcaciones	Bifurcación de tipo Hopf en la transición de amortiguado a caos (DMP-CHA).	
Flutter onset	La velocidad de <i>flutter</i> (490 KTAS aprox.) es independiente del centro de la no linealidad y es una entrada en <i>flutter</i> previsible a la vista del aumento exponencial de la amplitud de la respuesta a velocidades anteriores al <i>flutter</i> .	

VARIACIÓN DE LA PRECARGA

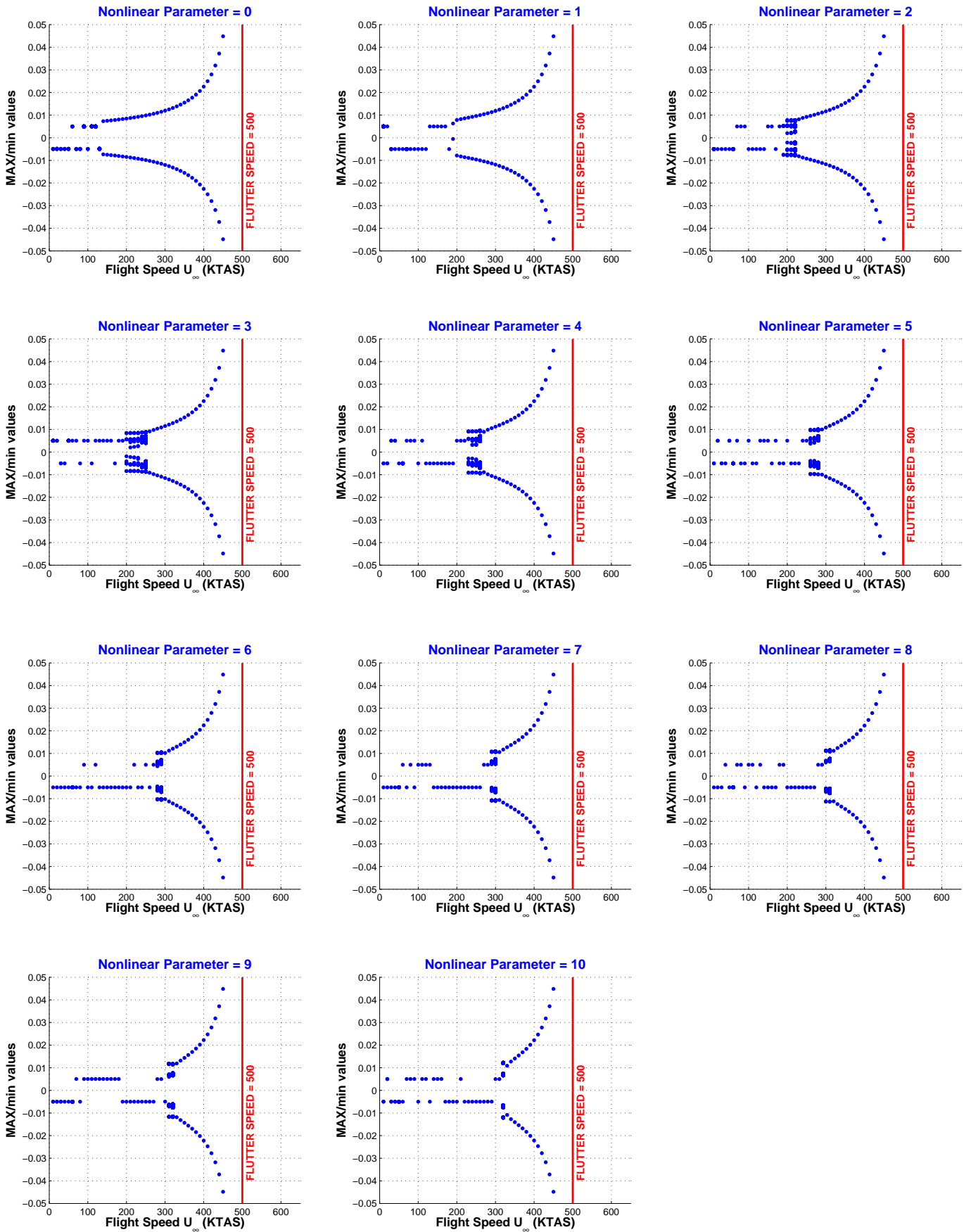
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Preload (DP)	S01.ROT.HDP	1/4



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Preload (DP)	S01.ROT.HDP	2/4



CONFIG	Nonlinear DoF	NONLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Preload (DP)	S01.ROT.HDP	3/4



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Preload (DP)	S01.ROT.HDP	4/4

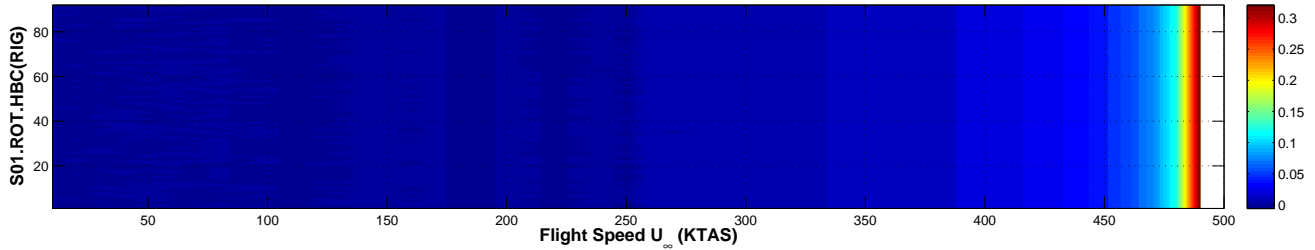
Tipo de Respuesta	DMP	Movimiento amortiguado a bajas velocidades, hasta una velocidad de vuelo que depende de la precarga de la no linealidad.
	LCO	Movimiento armónico LCO[2] y LCO[1] con 2 y 1 frecuencias características respectivamente. Este tipo de respuesta ocurre a partir de una velocidad que depende de la precarga de la no linealidad y se mantiene hasta la velocidad de <i>flutter</i> (490 KTAS aprox.) que es independiente de la precarga.
	CHA	La respuesta de tipo caótica ocurre en la transición de amortiguado DMP a armónico LCO[2] durante un pequeño intervalo de velocidades. En unos 20 nudos de velocidad, la respuesta pasa de DMP a LCO[2] a través de la respuesta caótica.
	FLT	La velocidad de <i>flutter</i> es independiente de la precarga y ocurre a 490 KTAS aproximadamente.
Transición entre Tipos de Respuesta	La respuesta evoluciona con la velocidad de la siguiente forma: DMP-CHA-LCO[2]-LCO[1]-FLT. La transición de movimiento amortiguado DMP a oscilación de tipo caótica CHA ocurre de una forma instantánea al aumentar ligeramente la velocidad. Se puede considerar como una transición <i>dura</i> . El movimiento caótico ocurre en un intervalo de velocidades reducido hasta que la respuesta cambia a oscilación de tipo armónico LCO[2] con dos frecuencias características. La respuesta armónica LCO[2] (dos frecuencias características) pasa a LCO[1] (con una frecuencia característica, la del mecanismo de <i>flutter</i>) a una velocidad de vuelo de 450 KTAS (independiente de la precarga) que se mantiene hasta que se alcanza la velocidad de <i>flutter</i> de 490 KTAS (independiente de la precarga).	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 496. \text{ KTAS} / VF_{(K=0)} = 331. \text{ KTAS}$.
	No Lineal	490 KTAS independiente de la precarga.
Variación de la Amplitud	con U_∞	En el intervalo de respuesta caótica (unos 20 nudos), la respuesta tiene una amplitud constante e independiente de la velocidad de vuelo. Sin embargo, una vez que la respuesta pasa a armónica LCO[2]-LCO[1], la amplitud de la respuesta aumenta exponencialmente con la velocidad de vuelo U_∞
	con ROT.HDP	Amplitud de la respuesta es independiente de la precarga.
Bifurcaciones	Bifurcación de tipo Hopf en la transición de amortiguado DMP a caótico CHA.	
Flutter onset	La entrada de <i>flutter</i> es previsible a la vista del aumento exponencial de la amplitud de la respuesta a velocidades anteriores a la velocidad de <i>flutter</i> .	

NOTA:

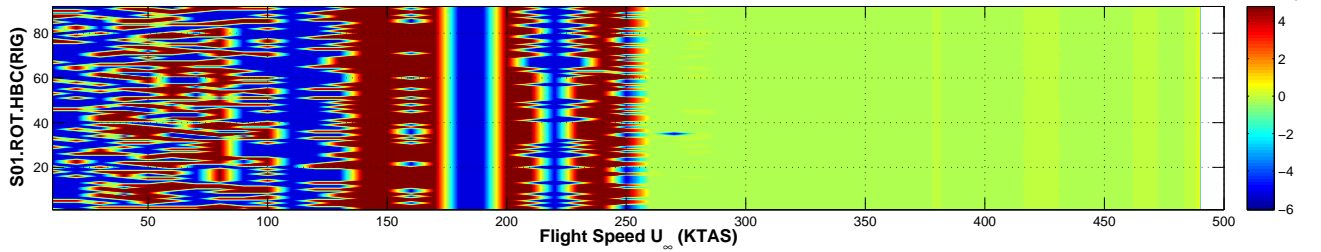
La respuesta amortiguada (a bajas velocidades) da lugar a rotaciones estacionarias de aletas β_A próximas a la rotación que produce momento de actuador nulo ($|\beta_A| \simeq 0,005[\text{rad}] = 0,29[\text{deg}]$). Esto es debido a que el momento aerodinámico es pequeño y los actuadores lo compensan con pequeñas rotaciones de aletas.

CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Boundary Conditions (BC)	S01.ROT.HBC	2/3

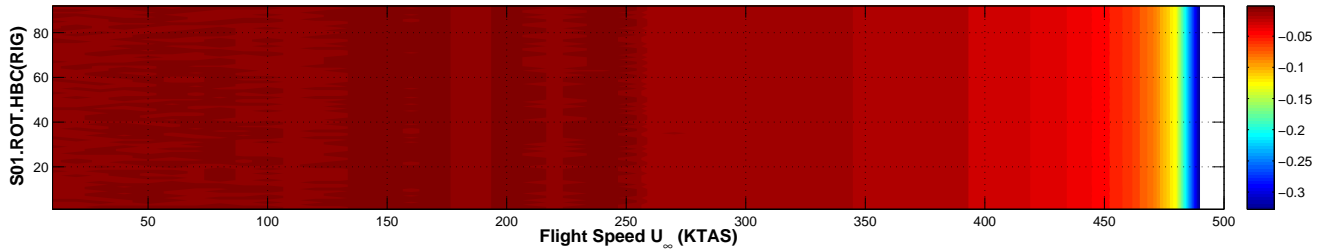
MAXIMUM VALUE



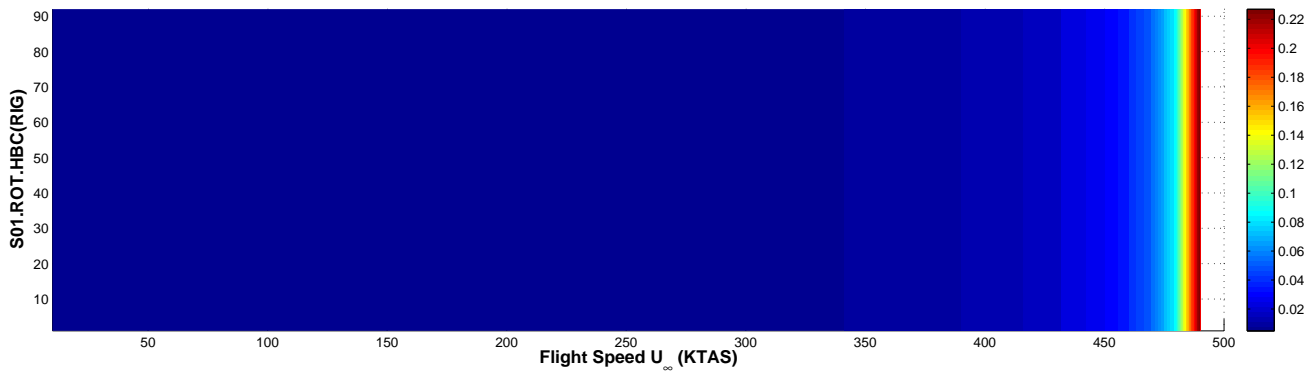
ARITHMETIC MEAN



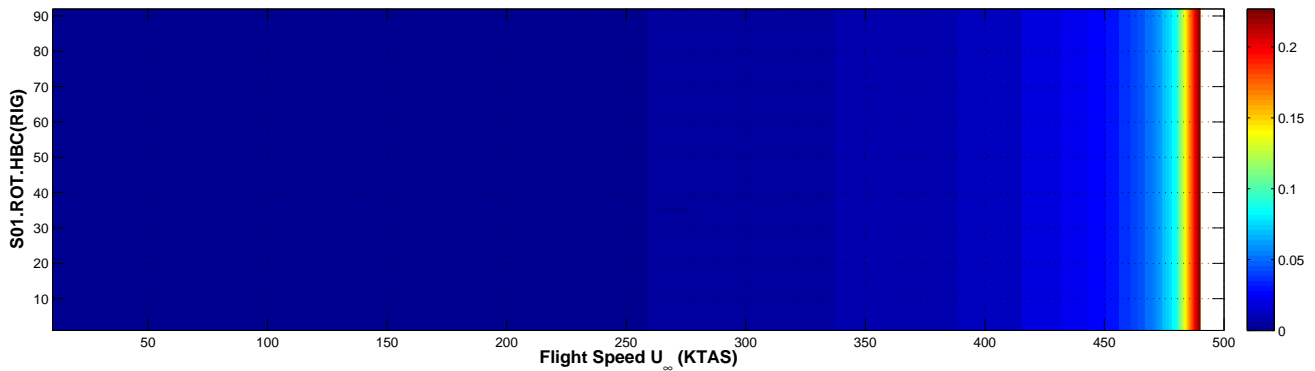
MINIMUM VALUE



ROOT MEAN SQUARE



STANDARD DEVIATION



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Boundary Conditions (BC)	S01.ROT.HBC	3/3

Tipo de Respuesta	DMP	Movimiento amortiguado a velocidades de vuelo menores de 250 KTAS (aprox.). Independiente de las condiciones iniciales.
	LCO	Respuesta armónica LCO[2]-LCO[1] a velocidades mayores que 290 KTAS (aprox.). Independiente de las condiciones iniciales.
	CHA	Respuesta caótica en la transición de amortiguado DMP a LCO[2] en una estrecha banda de velocidades de vuelo, entre 260 y 280 KTAS (aprox.). El grado de caos depende de las condiciones iniciales, como puede verse por el número de frecuencias características de la respuesta.
	FLT	Velocidad de <i>flutter</i> aproximada de 490 KTAS. Independiente de las condiciones iniciales.
Transición entre Tipos de Respuesta	Transición DMP-LCO[2]-LCO[1]-FLT independiente de las condiciones iniciales.	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 496$. KTAS / $VF_{(K=0)} = 331$. KTAS.
	No Lineal	Velocidad de <i>flutter</i> es 490 KTAS (aprox.). Independiente de las condiciones iniciales.
Amplitud	No depende de las condiciones iniciales.	
Bifurcaciones	Bifurcación tipo Hopf en la transición de movimiento amortiguado DMP a LCO[2]. Independiente de las condiciones iniciales.	
Flutter <i>onset</i>	Velocidad de flutter 490 KTAS independiente de las condiciones iniciales. Entrada en <i>flutter</i> progresiva con la respuesta aumentando en amplitud.	

10.2.2. Nolinealidad en Flexión Lateral de Pilón (LAT)

La figura 10.2 detalla la nolinealidad de tipo *hysteresis* con las principales características que se consideran como parámetros en el estudio:

- Amplitud de la holgura (*Deadband Amplitude HDA*).
- Centro de la nolinealidad (*Deadband Center HDC*).
- Precarga de la nolinealidad (*Deadband Preload HDP*).

Aparte de los tres parámetros anteriores, se estudiará el efecto de las condiciones iniciales en la respuesta (**HBC**). La nolinealidad se considera concentrada en el soporte que modeliza la flexión lateral del misil, de forma que el desplazamiento adimensional $w_b(x^{NLD}; t)/L$ en la coordenada del soporte nolineal x^{NLD} es la variable nolineal.

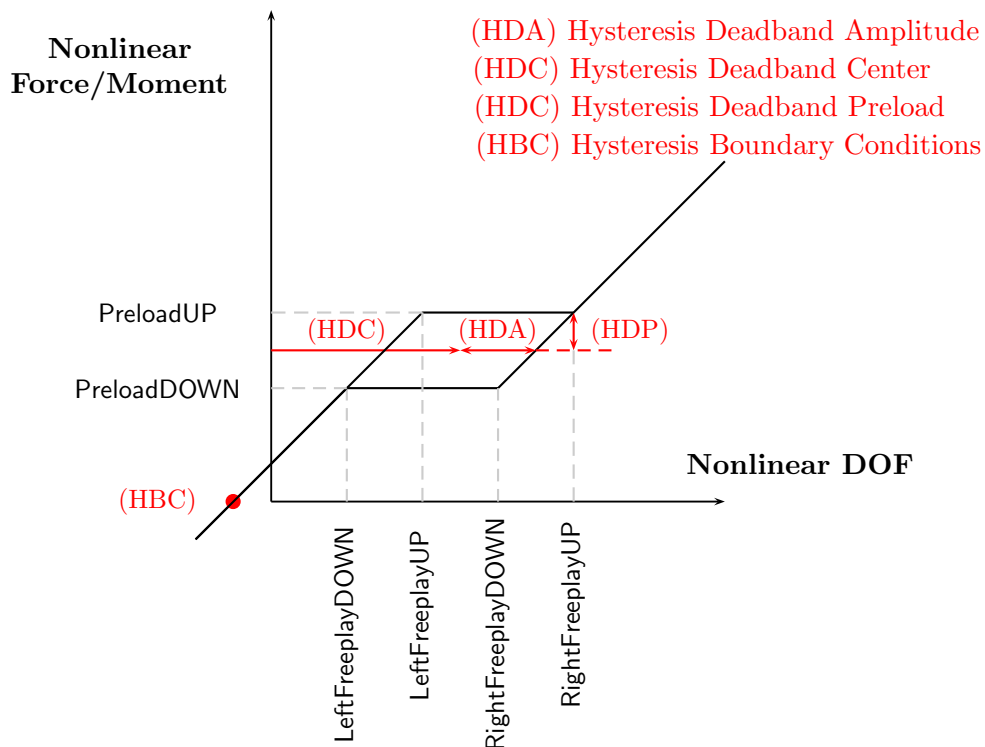


Figura 10.2: Nolinealidad del tipo *hysteresis* con los principales parámetros que la definen.

Dado un ciclo de histéresis nominal, de precarga 5,0 [N]² y amplitud $\mp 5,0$ [mm], se varían uno a uno los parámetros mencionados anteriormente.

La condición inicial nominal del vector de estado-espacio $\{x\}$ es:

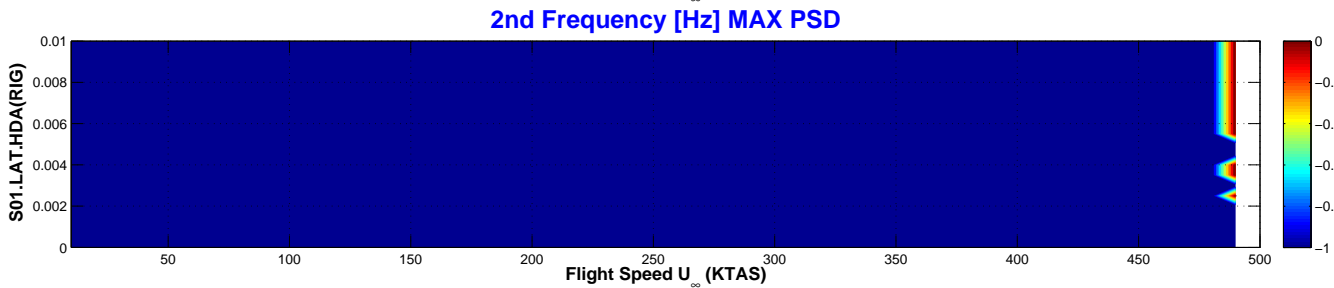
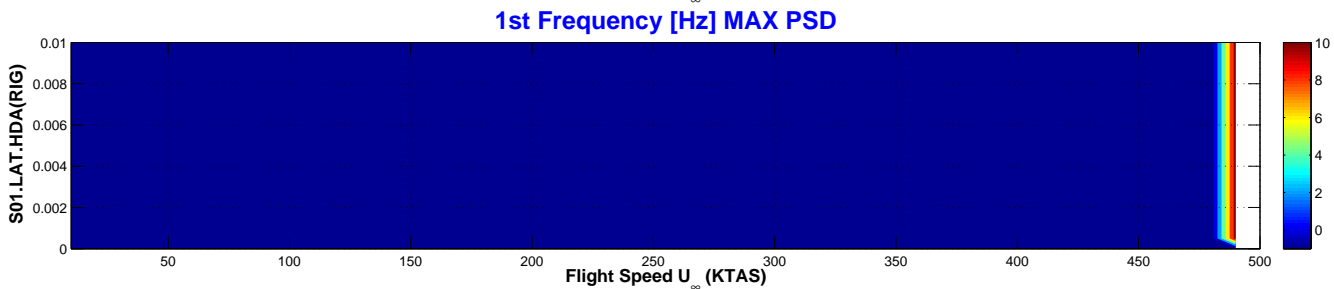
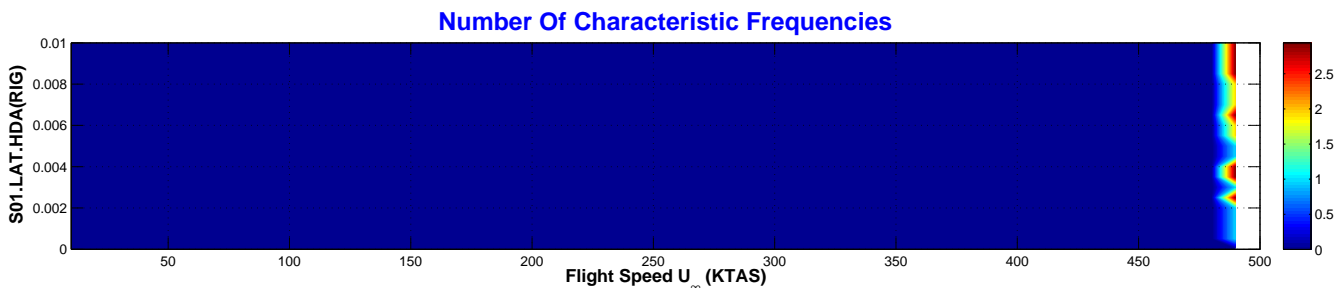
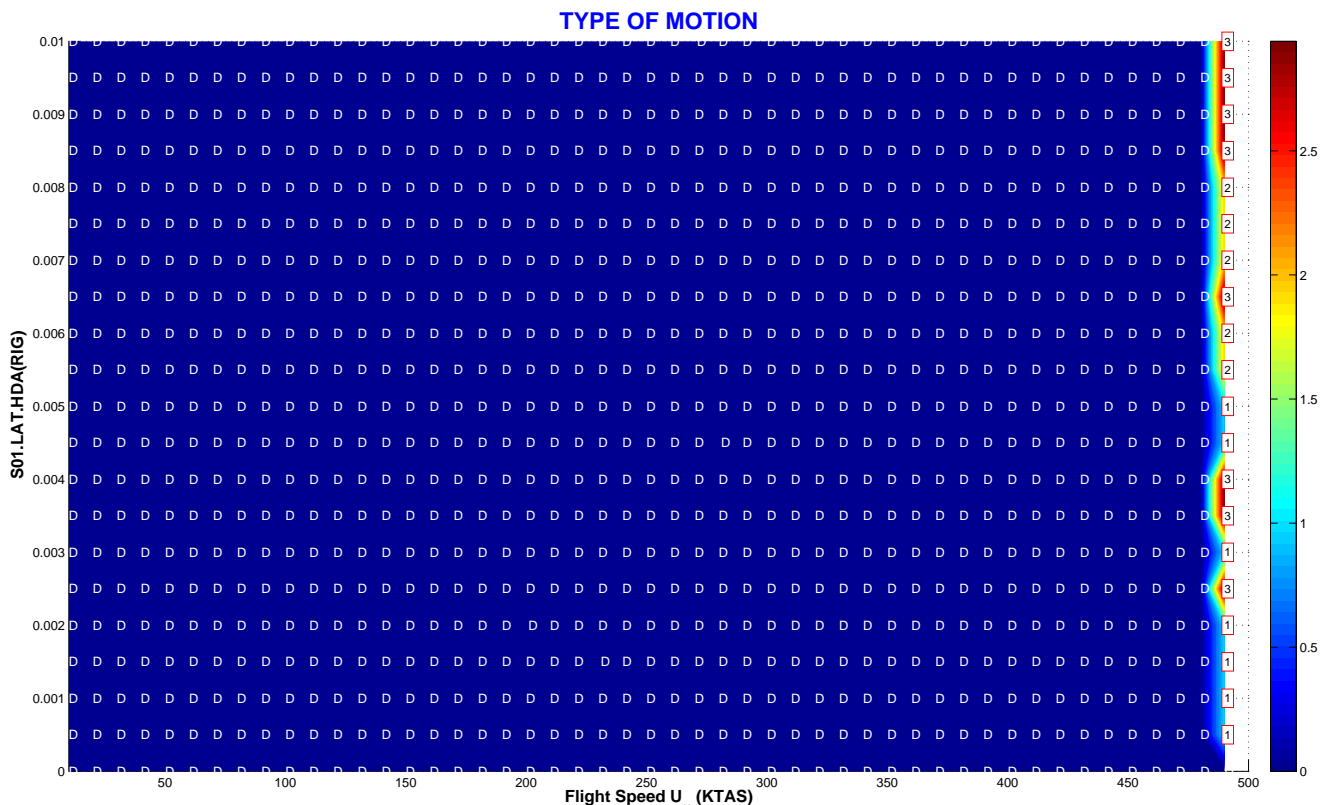
$$\{x(0)\}_{6 \times 1} = \left[\hat{\xi}_1 \quad \hat{\xi}_2 \quad \hat{\xi}_3 \quad \frac{d\hat{\xi}_1}{d\hat{t}} \quad \frac{d\hat{\xi}_2}{d\hat{t}} \quad \frac{d\hat{\xi}_3}{d\hat{t}} \right]^T = \left[+0,015 \quad -0,015 \quad -0,015 \quad 0,0 \quad 0,0 \quad 0,0 \right]^T$$

siendo la coordenada generalizada $\hat{\xi}_1$ (modo lateral) y su velocidad generalizada $d\hat{\xi}_1/d\hat{t}$ las que se varían en el estudio de la sensibilidad de la respuesta a las condiciones iniciales (**HBC**).

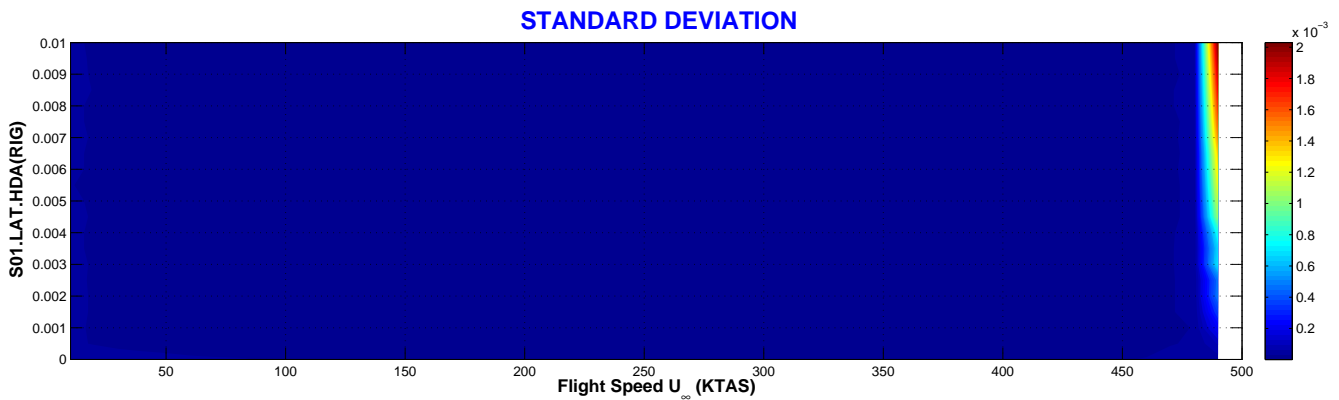
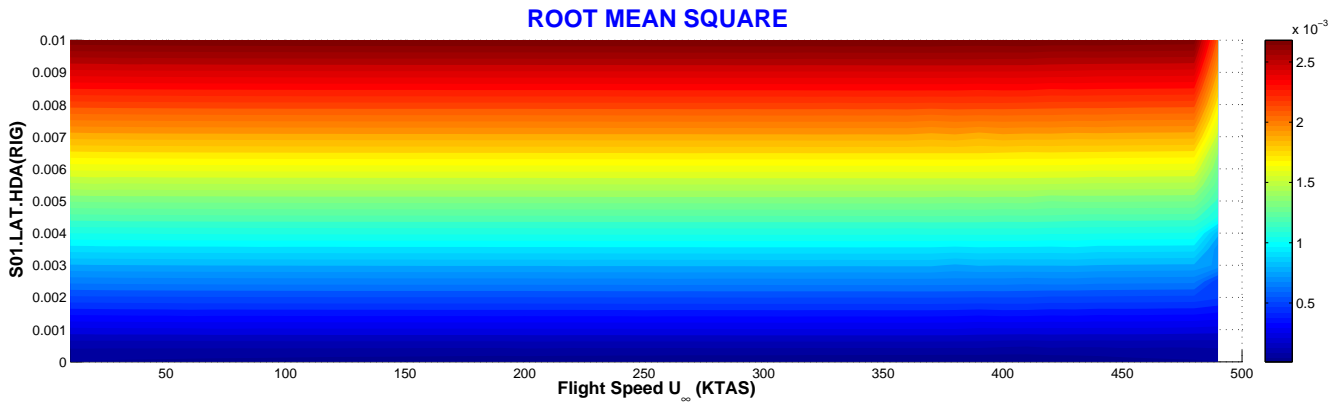
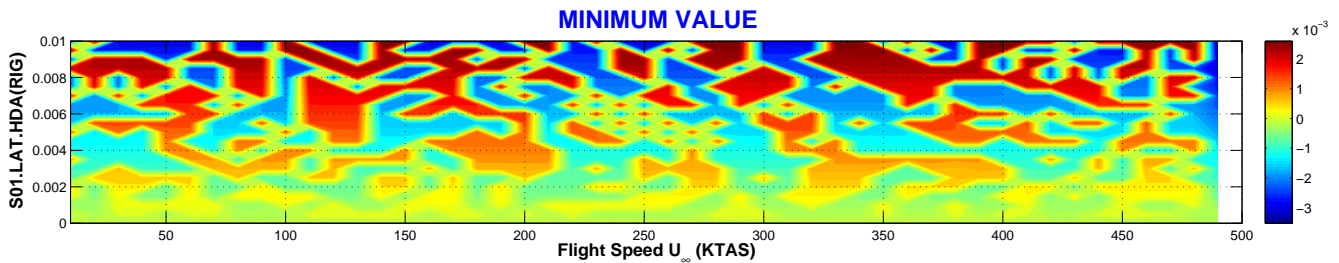
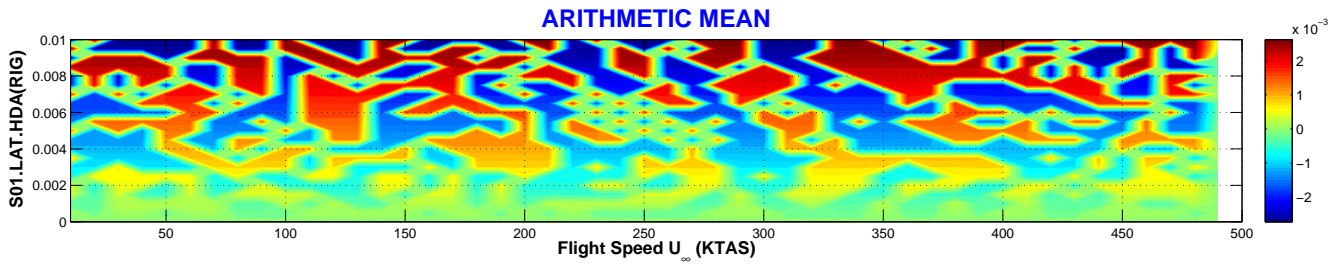
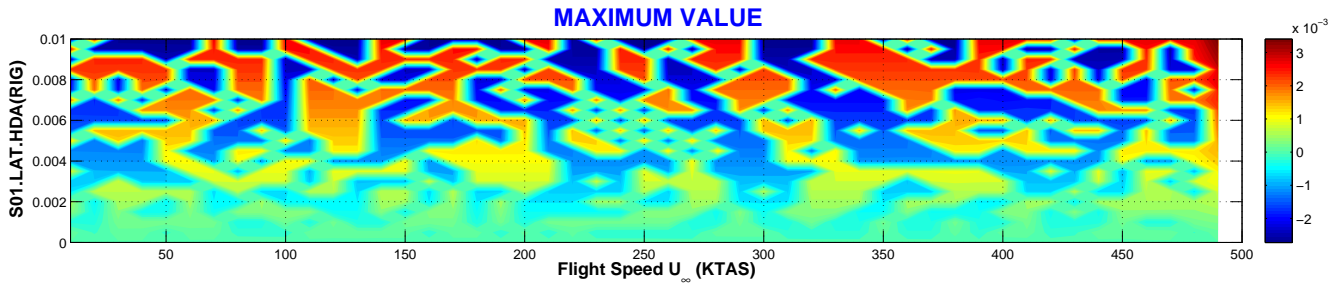
²Recuérdese que la precarga adimensional venía dada por $\hat{F}_0^{NLD} = F_0^{NLD}/m_0U_0^2$.

VARIACIÓN DE LA AMPLITUD DE LA HOLGURA

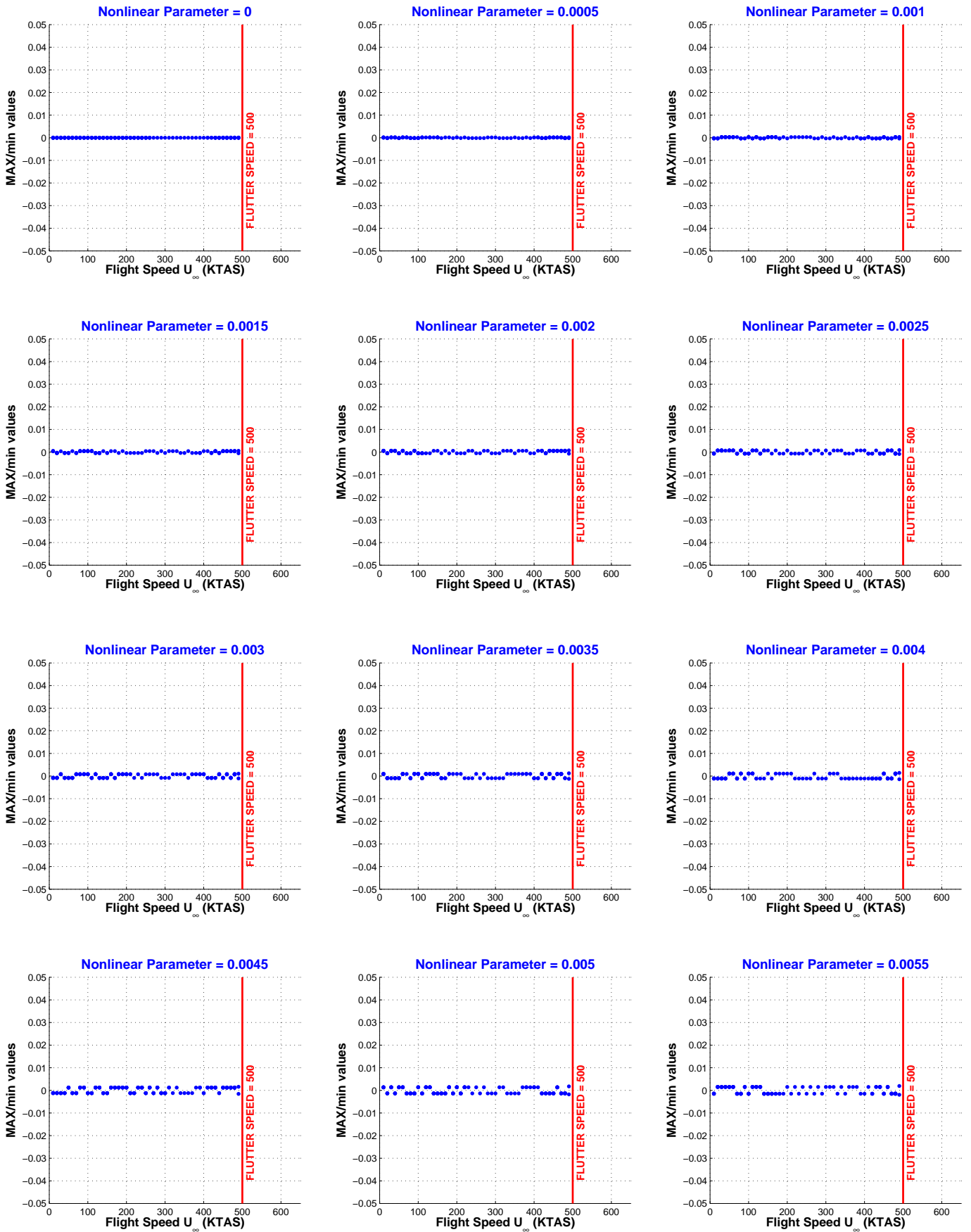
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Lateral (LAT)	Hysteresis (H)	Deadband Amplitude (DA)	S01.LAT.HDA	1/5



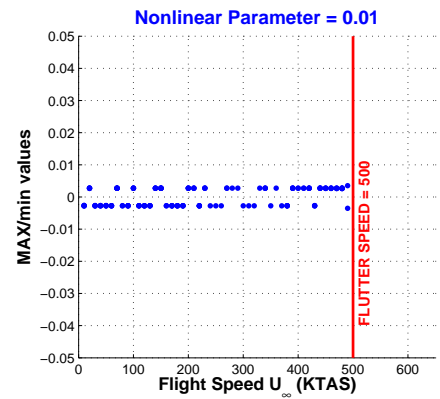
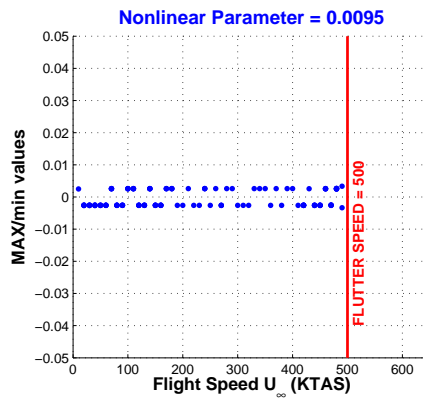
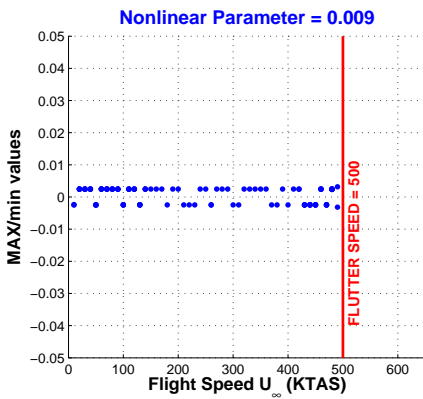
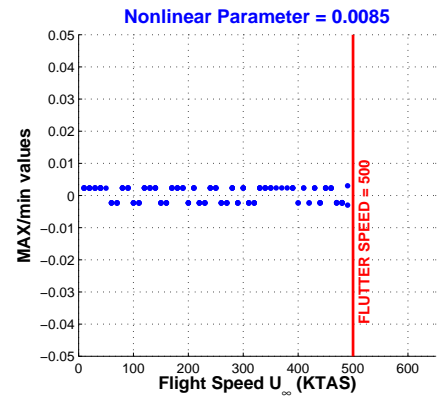
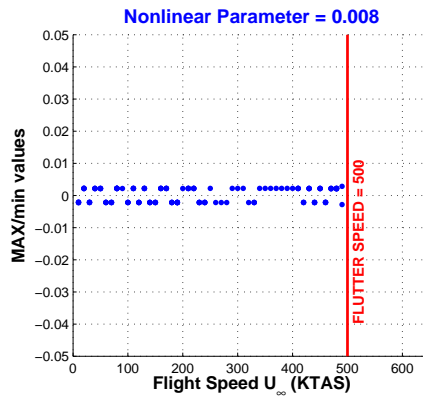
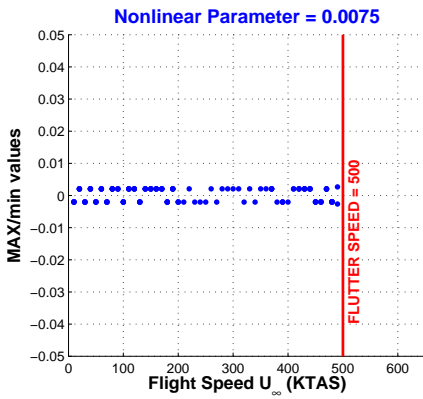
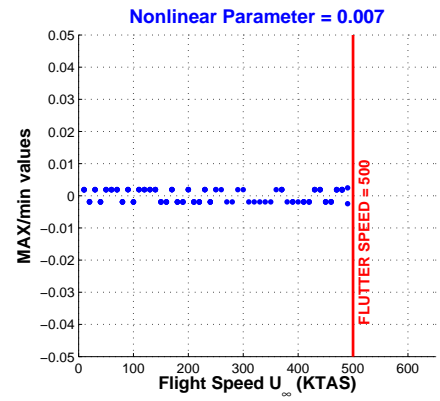
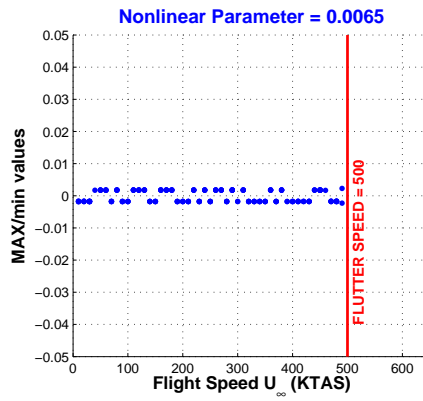
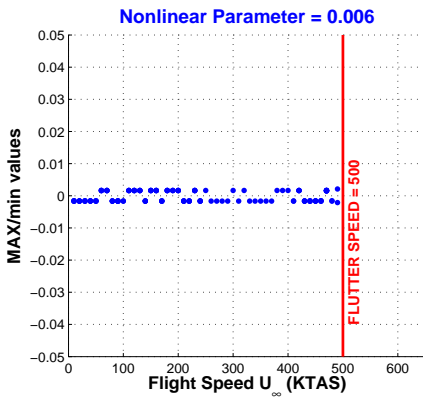
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Lateral (LAT)	Hysteresis (H)	Deadband Amplitude (DA)	S01.LAT.HDA	2/5



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Lateral (LAT)	Hysteresis (H)	Deadband Amplitude (DA)	S01.LAT.HDA	3/5



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Lateral (LAT)	Hysteresis (H)	Deadband Amplitude (DA)	S01.LAT.HDA	4/5



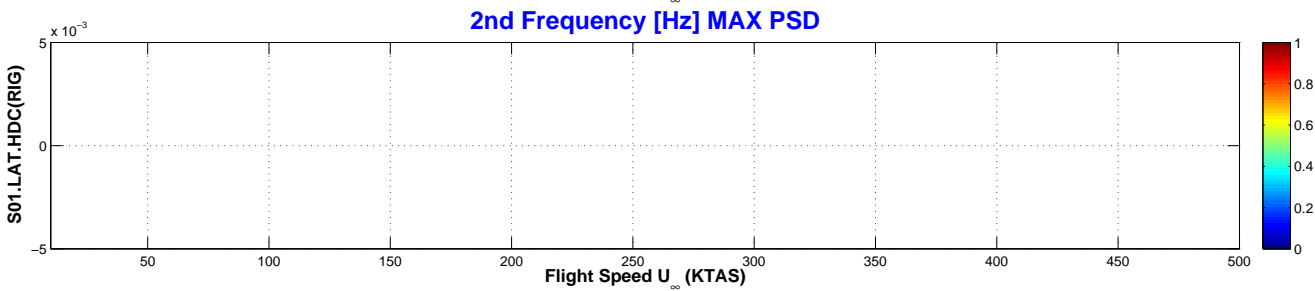
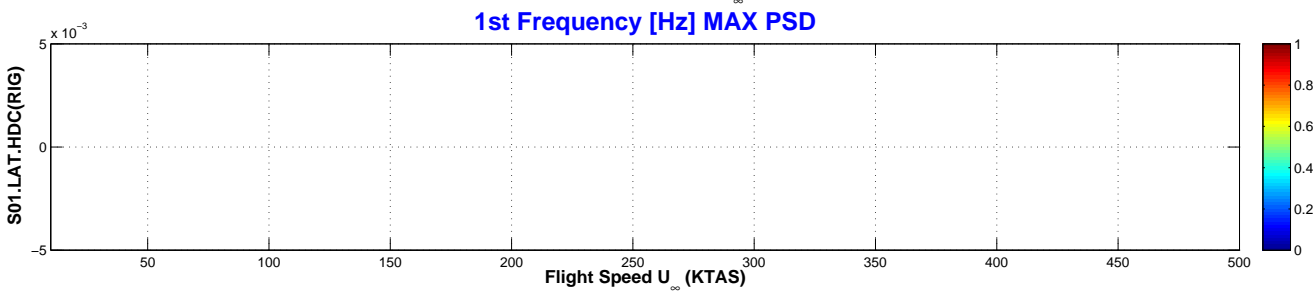
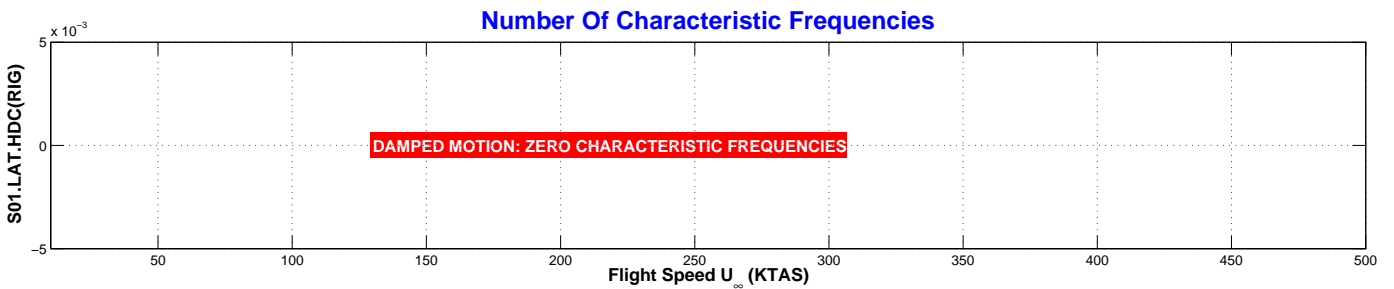
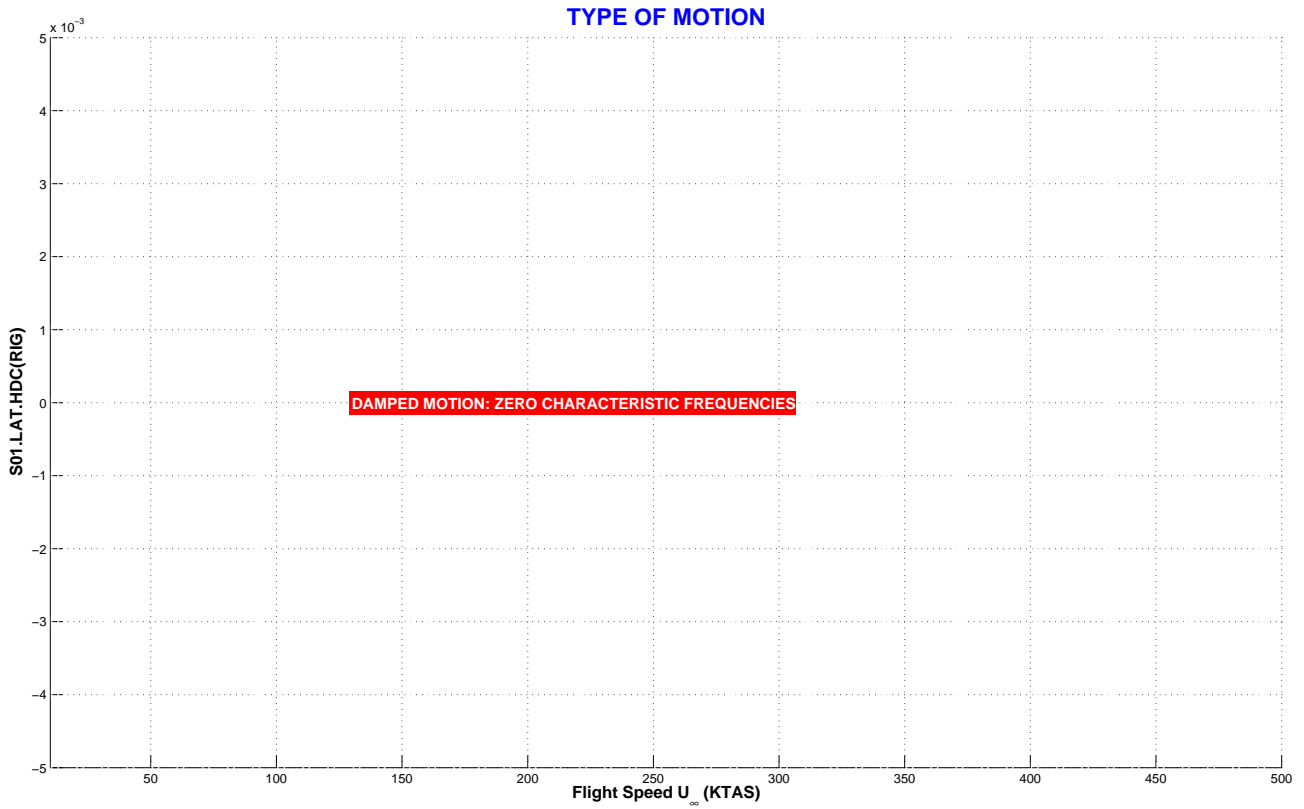
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Lateral (LAT)	Hysteresis (H)	Deadband Amplitude (DA)	S01.LAT.HDA	5/5

Tipo de Respuesta	DMP	Respuesta amortiguada hasta la velocidad de <i>flutter</i> .
	LCO	No existe respuesta armónica de tipo LCO, excepto justo a la velocidad de <i>flutter</i> .
	CHA	No existe respuesta caótica.
	FLT	Respuesta divergente por encima de la velocidad de <i>flutter</i> (490 KTAS aprox.).
Transición entre Tipos de Respuesta	La respuesta evoluciona con la velocidad de la siguiente forma: DMP-FLT. La transición de amortiguado DMP a <i>flutter</i> FLT ocurre de la misma forma que en el <i>flutter</i> lineal.	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 496. \text{ KTAS} / VF_{(K=0)} = 489. \text{ KTAS}$.
	No Lineal	490 KTAS independiente de la holgura de la no linealidad.
Variación de la Amplitud	con U_{∞}	Movimiento amortiguado hasta la velocidad de <i>flutter</i> .
	con LAT.HDA	El punto de equilibrio se encuentra en torno a la esquina de la no linealidad, por lo que la respuesta depende de la amplitud de la holgura.
Bifurcaciones	Bifurcación de tipo <i>Hopf</i> en la transición de amortiguado a <i>flutter</i> (DMP-FLT).	
Flutter onset	Entrada en <i>flutter</i> violenta.	

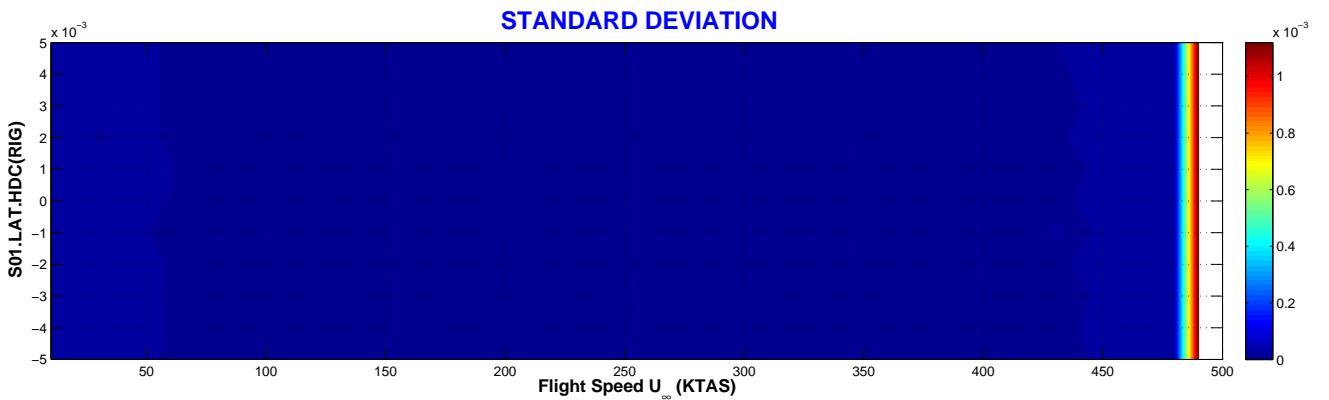
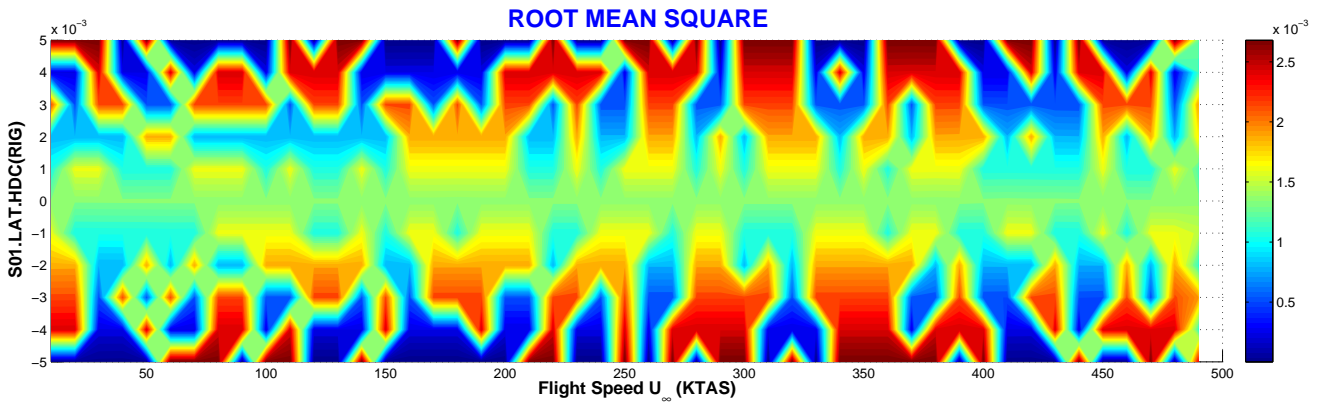
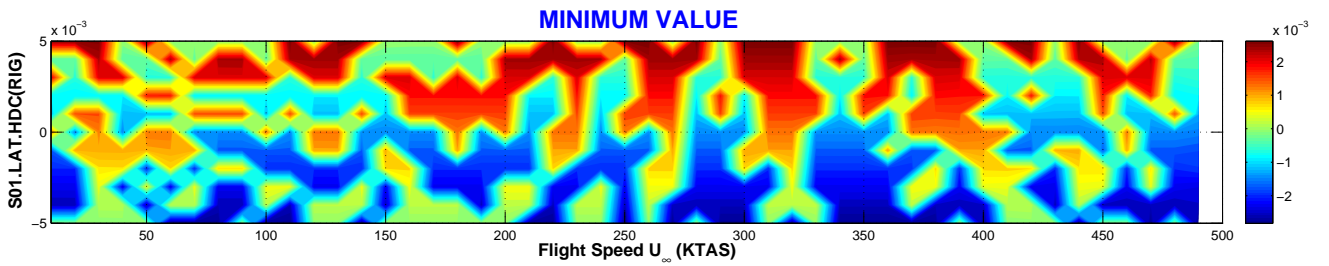
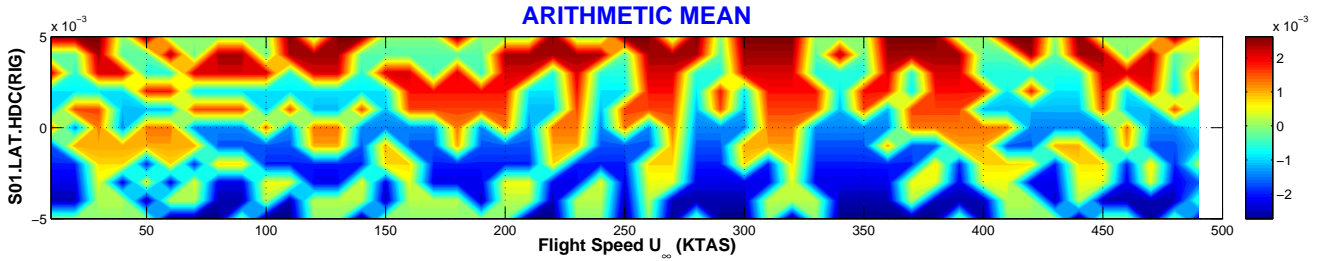
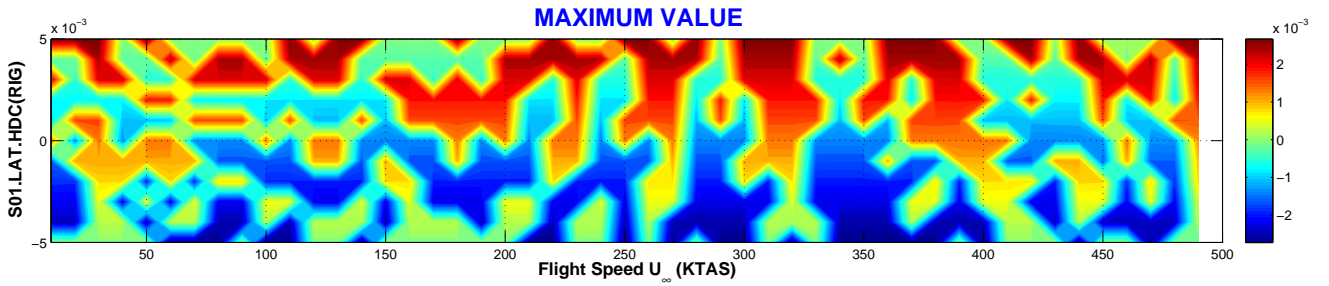
NOTA:

Como puede observarse en los diagramas de bifurcación, la respuesta amortiguada se traduce en un desplazamiento lateral estacionario (modo $\hat{\xi}_1$) que no tiene por qué estar en alguna de las cuatro esquinas de la no linealidad tipo *hysteresis*.

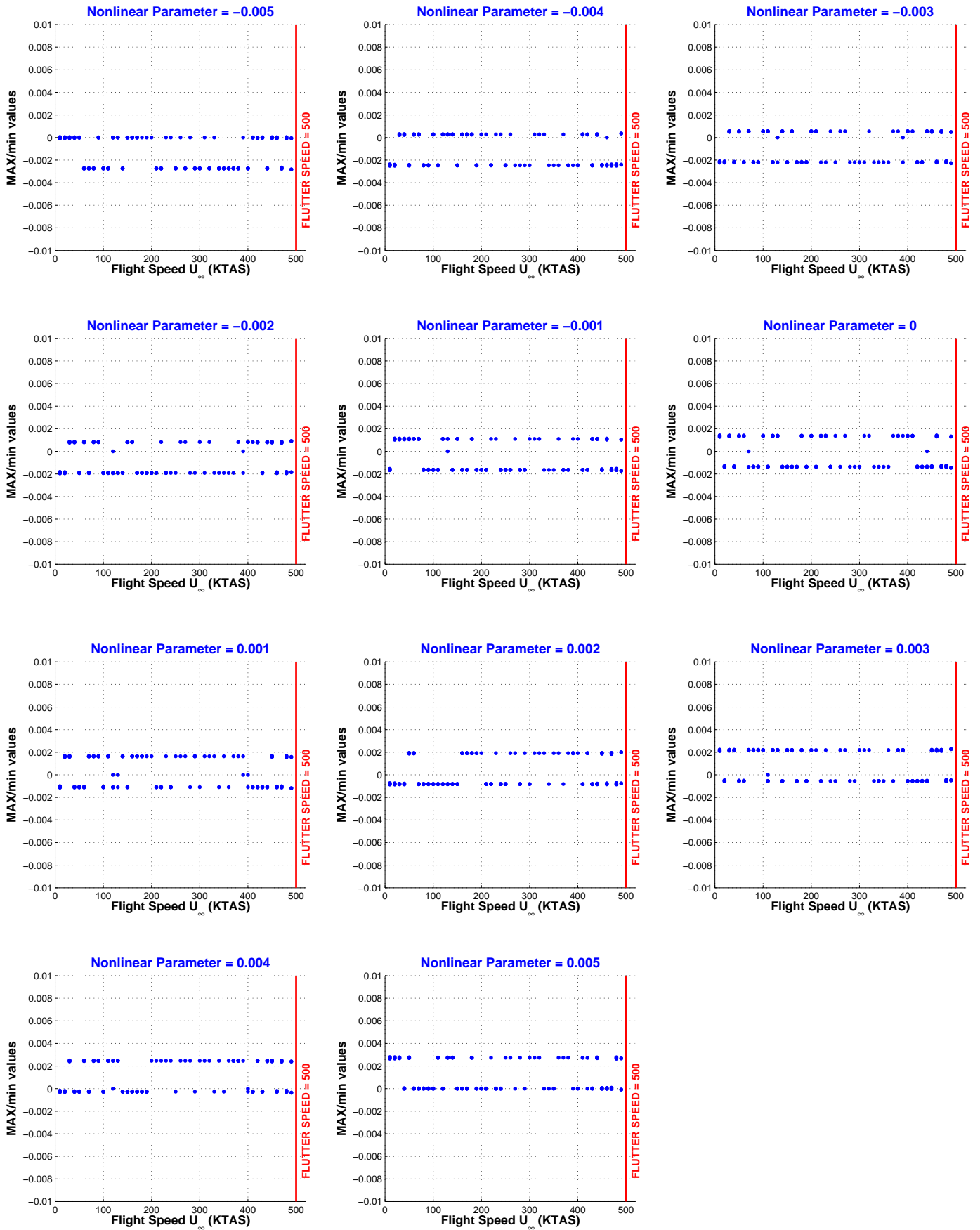
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Lateral (LAT)	Hysteresis (H)	Deadband Center (DC)	S01.LAT.HDC	1/4



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Lateral (LAT)	Hysteresis (H)	Deadband Center (DC)	S01.LAT.HDC	2/4



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Lateral (LAT)	Hysteresis (H)	Deadband Center (DC)	S01.LAT.HDC	3/4

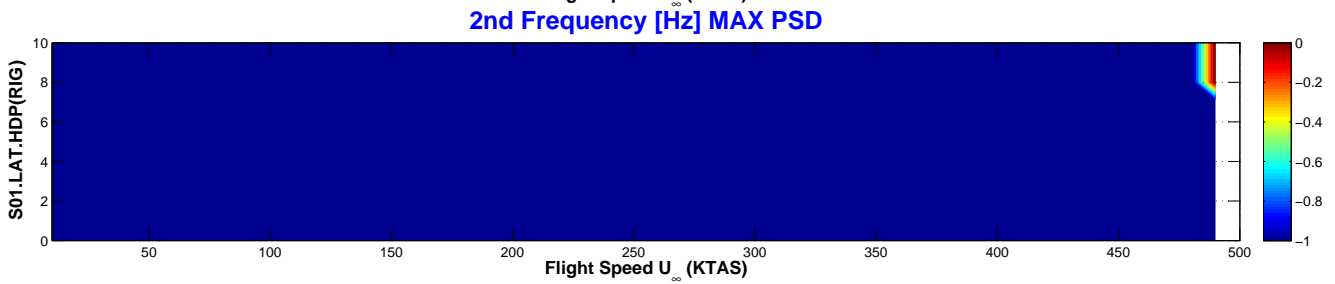
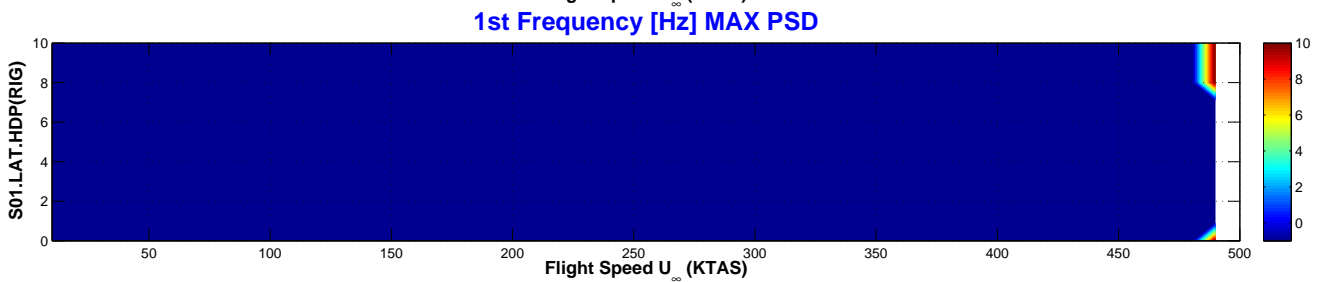
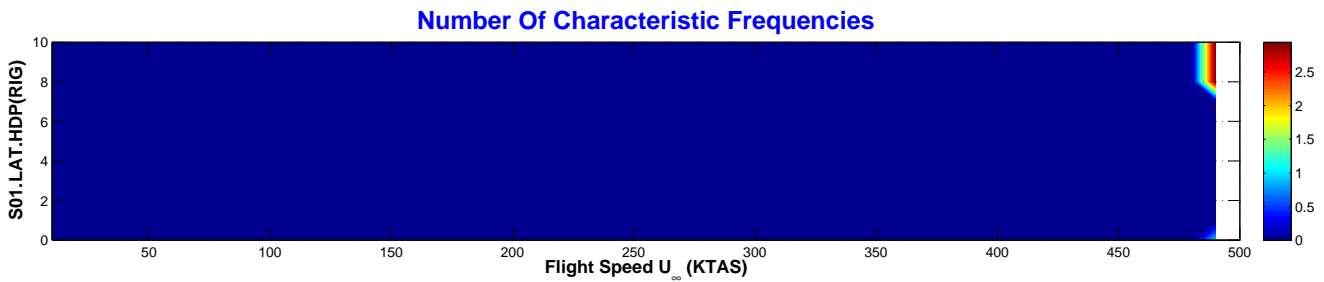
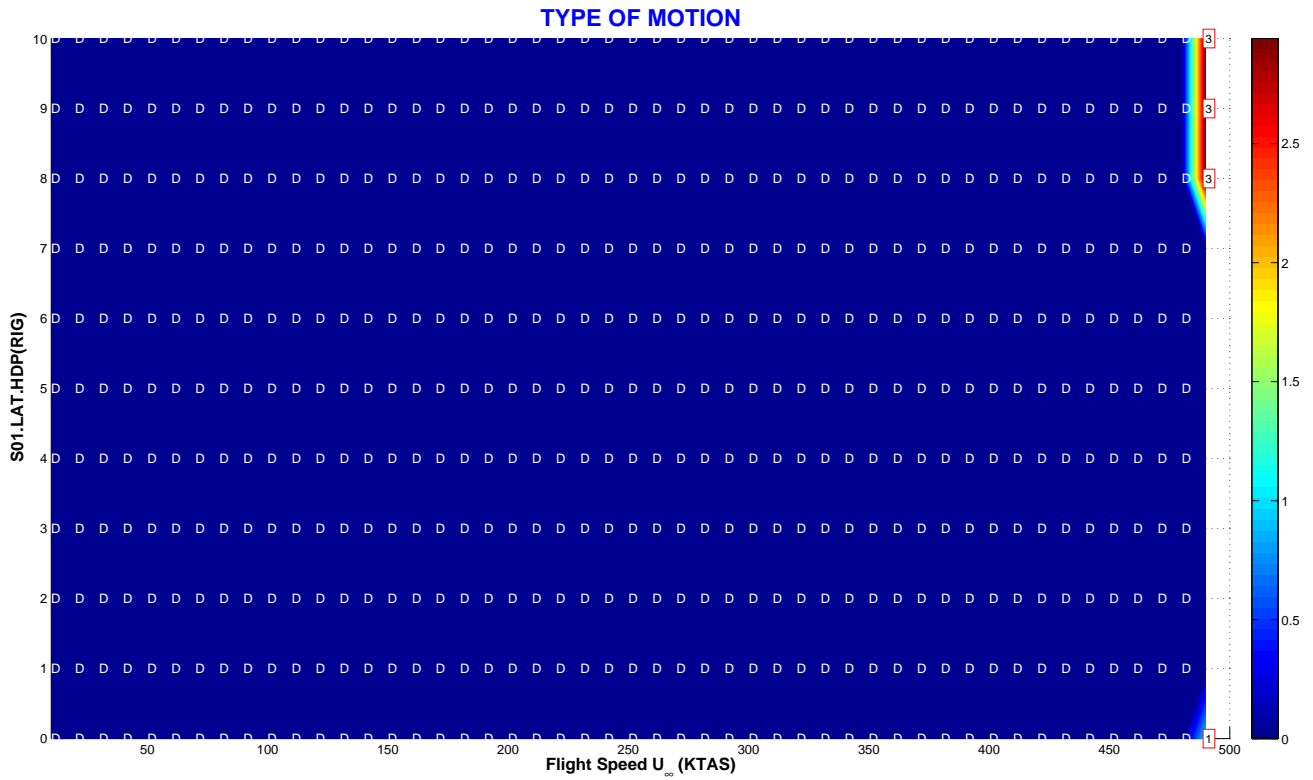


CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Lateral (LAT)	Hysteresis (H)	Deadband Center (DC)	S01.LAT.HDC	4/4

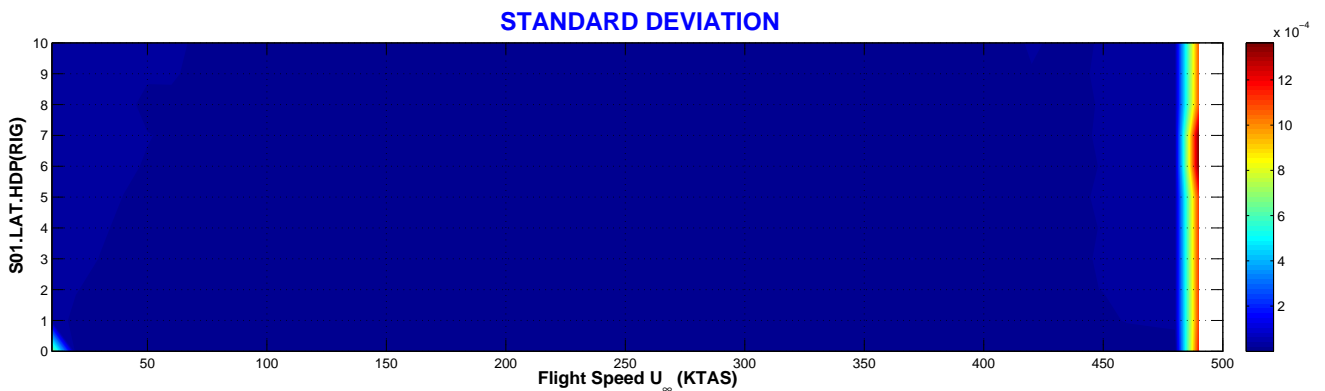
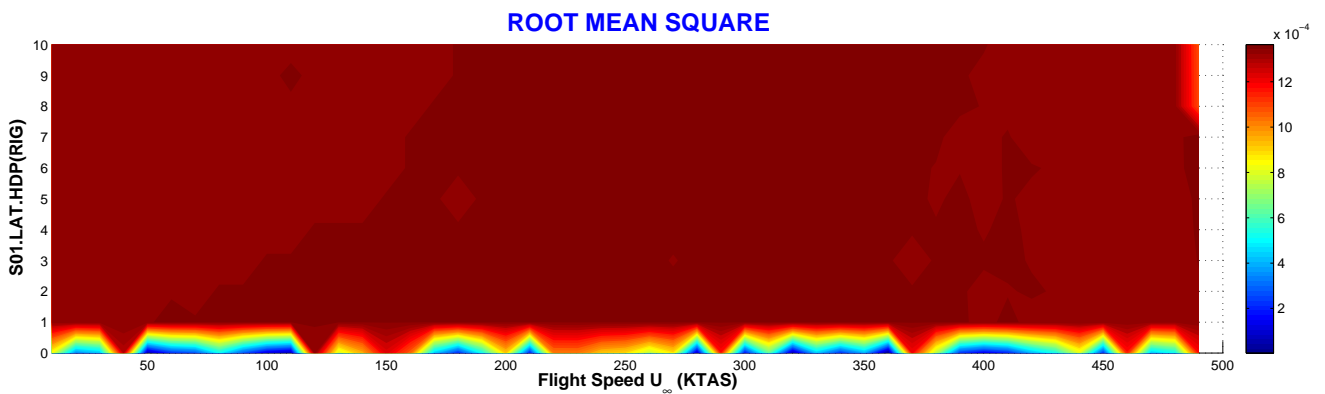
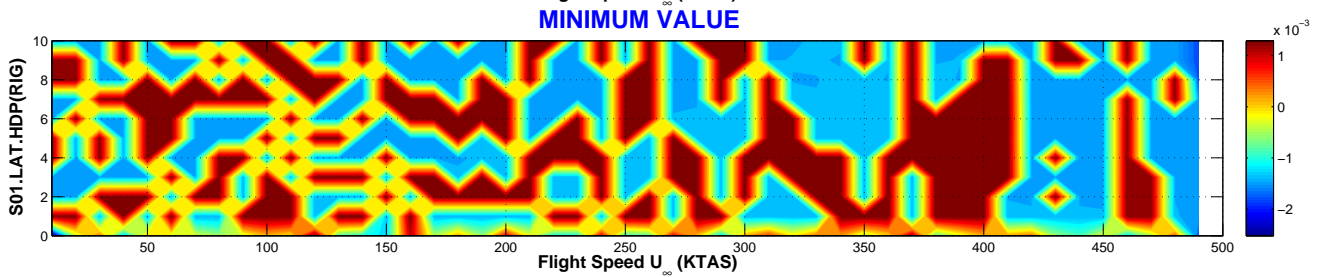
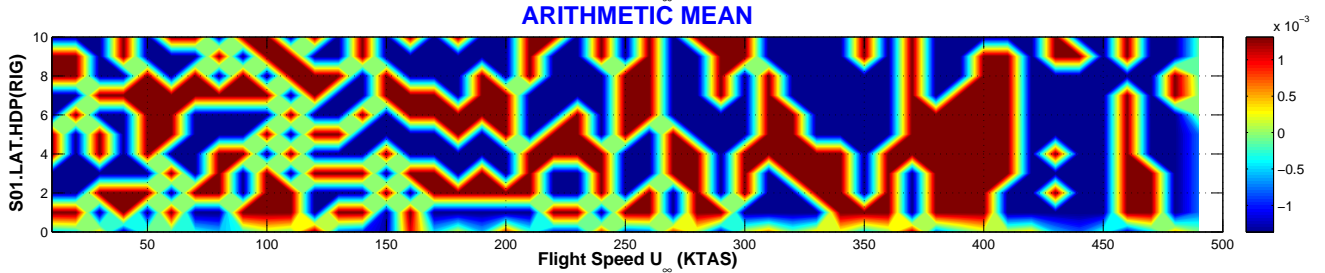
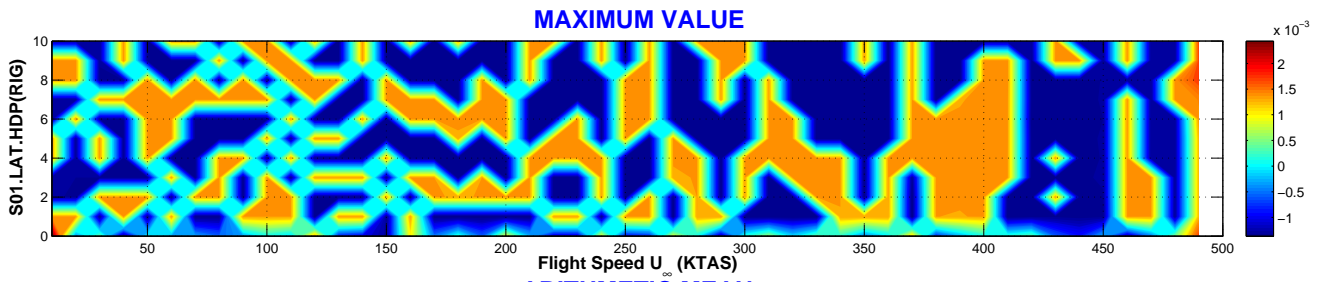
Tipo de Respuesta	DMP	Movimiento amortiguado en todo el rango de velocidades hasta llegar a la velocidad de <i>flutter</i> .
	LCO	No existe respuesta de tipo armónico no amortiguado LCO, excepto justo a la velocidad de <i>flutter</i> .
	CHA	No existe respuesta de tipo caótica.
	FLT	Respuesta divergente a velocidades mayores de 490 KTAS (aprox.).
Transición entre Tipos de Respuesta	Transición de amortiguado (DMP) a divergente (FLT) de forma abrupta.	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 496. \text{ KTAS} / VF_{(K=0)} = 489. \text{ KTAS}$.
	No Lineal	Velocidad de <i>flutter</i> es 490 KTAS independiente del centro de la no linealidad.
Variación de la Amplitud	con U_{∞}	A velocidades de vuelo menores que la velocidad de <i>flutter</i> , la amplitud de la respuesta no depende de la velocidad de vuelo.
	con LAT.HDC	La respuesta se desplaza con el descentramiento de la no linealidad.
Bifurcaciones	Bifurcación de tipo <i>Hopf</i> en la transición de amortiguado a <i>flutter</i> (DMP-FLT).	
Flutter onset	La velocidad de <i>flutter</i> es independiente del centro de la no linealidad. Por otro lado, es una entrada en <i>flutter</i> clásica: amortiguado a velocidades menores que la de <i>flutter</i> , justo en la velocidad de <i>flutter</i> movimiento no amortiguado, y a velocidades mayores movimiento divergente.	

VARIACIÓN DE LA PRECARGA

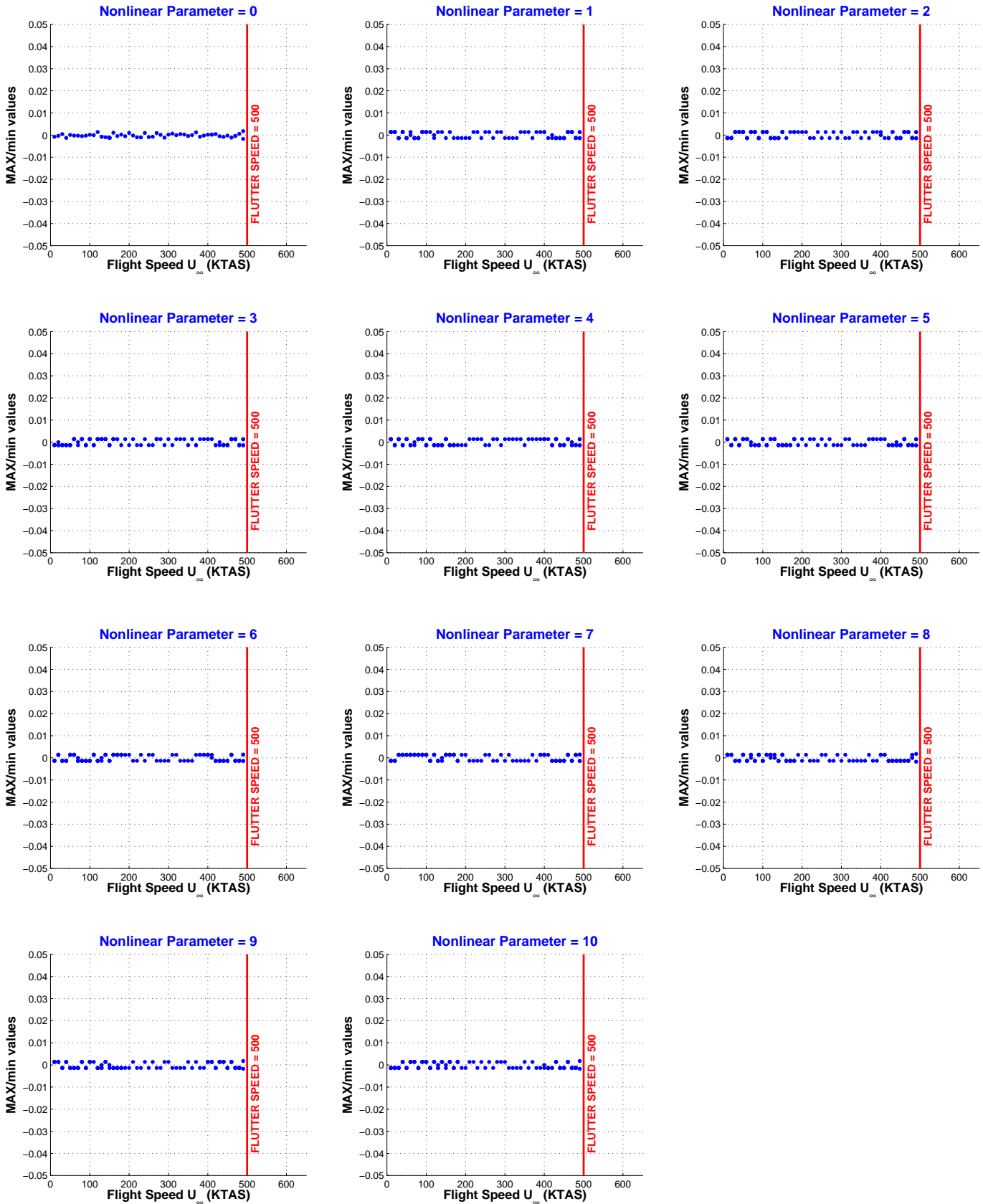
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Lateral (LAT)	Hysteresis (H)	Deadband Preload (DP)	S01.LAT.HDP	1/4



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Lateral (LAT)	Hysteresis (H)	Deadband Preload (DP)	S01.LAT.HDP	2/4



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Lateral (LAT)	Hysteresis (H)	Deadband Preload (DP)	S01.LAT.HDP	3/4



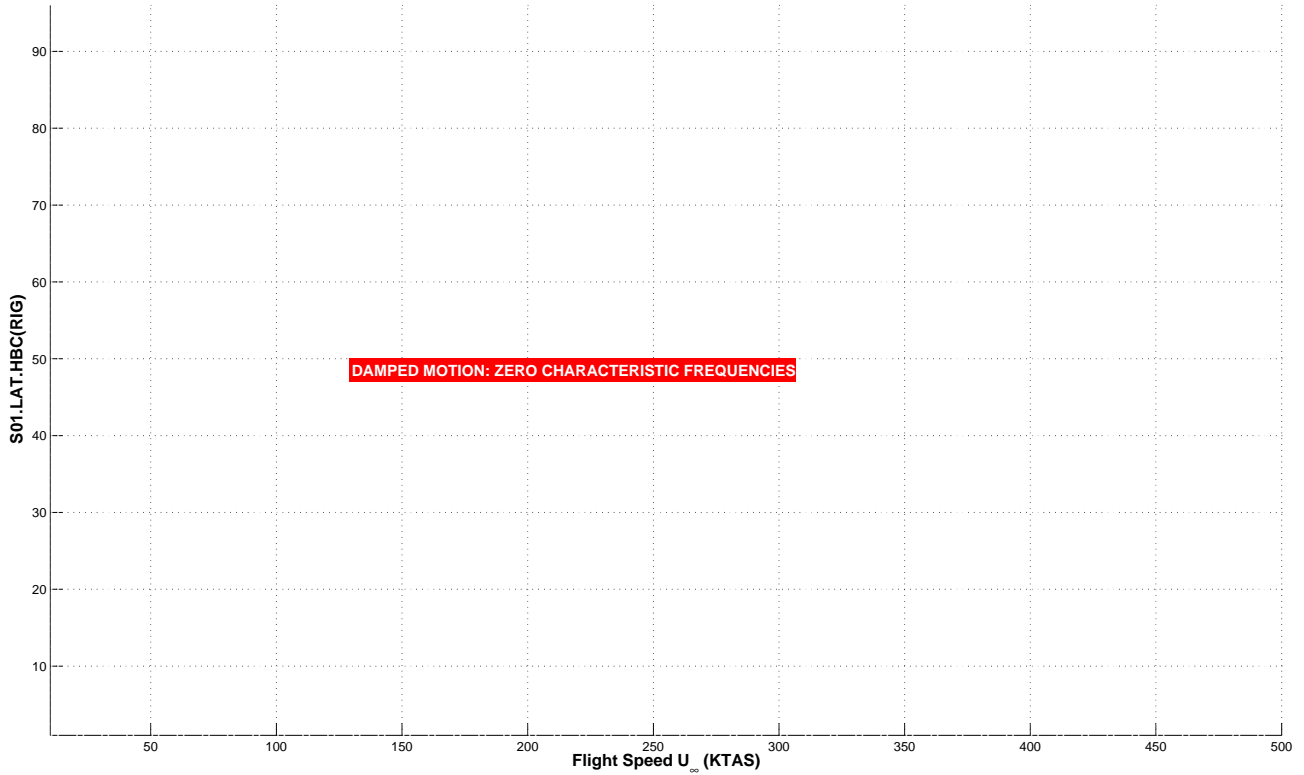
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Lateral (LAT)	Hysteresis (H)	Deadband Preload (DP)	S01.LAT.HDP	4/4

Tipo de Respuesta	DMP	Movimiento amortiguado hasta la velocidad de <i>flutter</i> .
	LCO	No existe respuesta de tipo LCO, excepto justo a la velocidad de <i>flutter</i> .
	CHA	No existe respuesta caótica.
	FLT	Respuesta divergente a velocidades mayores que la de <i>flutter</i> .
Transición entre Tipos de Respuesta	Transición de amortiguado (DMP) a divergente justo a la velocidad de <i>flutter</i> . Es una transición clásica con cambio abrupto de movimiento amortiguado a respuesta armónica no amortiguada.	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 496. \text{ KTAS} / VF_{(K=0)} = 489. \text{ KTAS}$.
	No Lineal	Velocidad de <i>flutter</i> es 490 KTAS aproximadamente.
Variación de la Amplitud	con U_∞	A velocidades menores que la de <i>flutter</i> , la amplitud de la respuesta no depende de la velocidad de vuelo U_∞ .
	con LAT.HDP	La amplitud de la respuesta no depende de la precarga de la no linealidad.
Bifurcaciones	Bifurcación de tipo <i>Hopf</i> en la transición de amortiguado a <i>flutter</i> (DMP-FLT).	
Flutter onset	Velocidad de <i>flutter</i> es independiente del centro de la no linealidad. Por otro lado, es una entrada en <i>flutter</i> clásica: amortiguado a velocidades menores que la de <i>flutter</i> , justo en la velocidad de <i>flutter</i> movimiento no amortiguado, y a velocidades mayores movimiento divergente.	

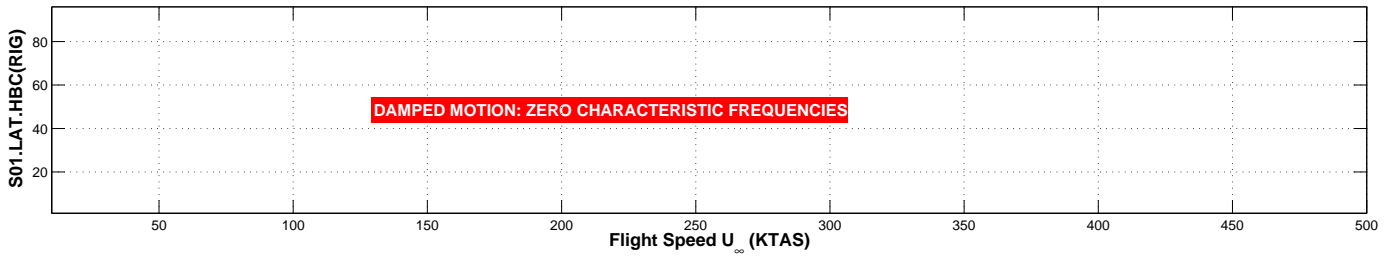
VARIACIÓN DE LAS CONDICIONES INICIALES

CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Lateral (LAT)	Hysteresis (H)	Boundary Conditions (BC)	S01.LAT.HBC	1/3

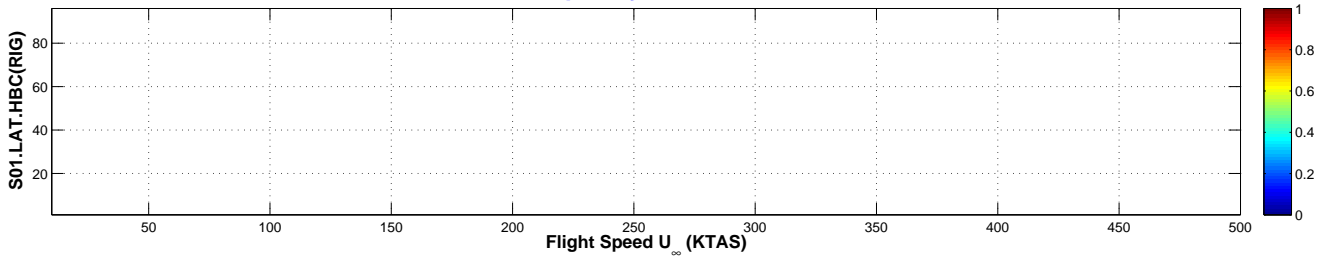
TYPE OF MOTION



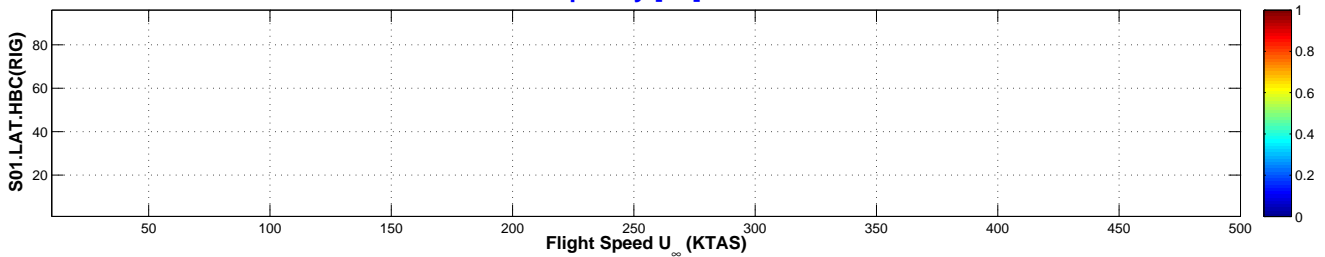
Number Of Characteristic Frequencies



1st Frequency [Hz] MAX PSD

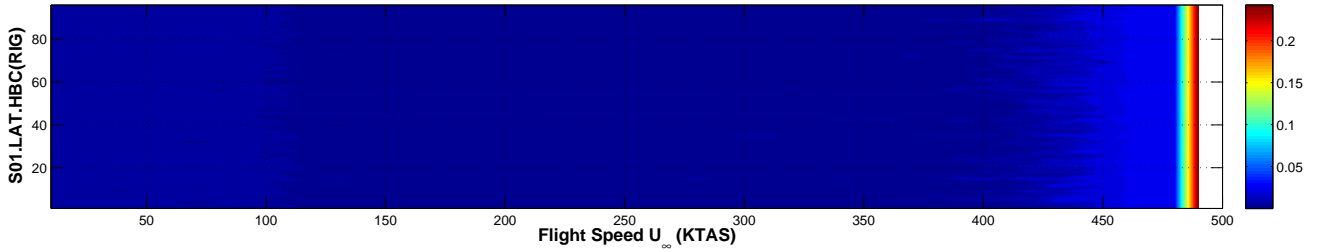


2nd Frequency [Hz] MAX PSD

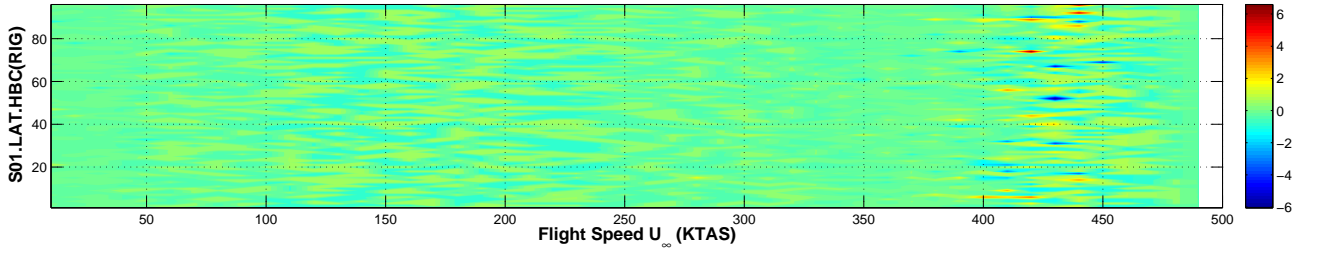


CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Lateral (LAT)	Hysteresis (H)	Boundary Conditions (BC)	S01.LAT.HBC	2/3

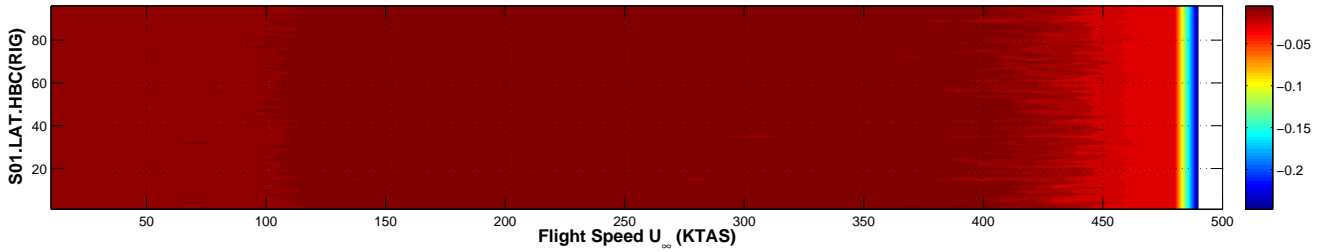
MAXIMUM VALUE



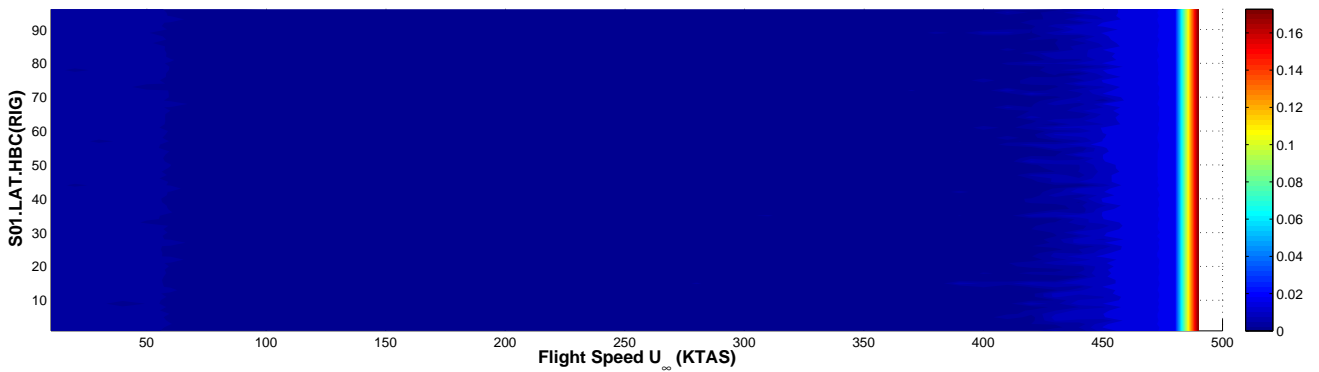
ARITHMETIC MEAN



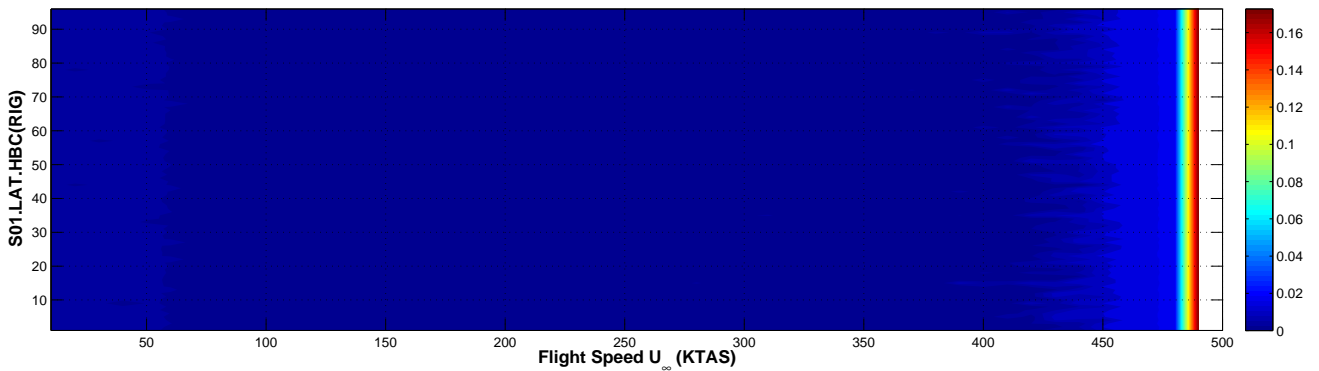
MINIMUM VALUE



ROOT MEAN SQUARE



STANDARD DEVIATION



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Lateral (LAT)	Hysteresis (H)	Boundary Conditions (BC)	S01.LAT.HBC	3/3

Tipo de Respuesta	DMP	Movimiento amortiguado hasta la velocidad de <i>flutter</i> .
	LCO	No existe respuesta de tipo LCO, excepto justo a la velocidad de <i>flutter</i> .
	CHA	No existe respuesta caótica.
	FLT	Respuesta divergente a velocidades mayores que la de <i>flutter</i> .
Transición entre Tipos de Respuesta	Transición de amortiguado (DMP) a divergente a la velocidad de <i>flutter</i> . Es una transición clásica con cambio abrupto de movimiento amortiguado a respuesta armónica no amortiguada.	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 496. \text{ KTAS} / VF_{(K=0)} = 489. \text{ KTAS}$.
	No Lineal	Velocidad de <i>flutter</i> es 490 KTAS aproximadamente, independiente de las condiciones iniciales.
Variación de la Amplitud	con U_∞	Amplitud de la respuesta poco dependiente de la velocidad de vuelo U_∞ .
	con LAT.HBC	Amplitud de la respuesta poco dependiente de las condiciones iniciales.
Bifurcaciones	Bifurcación de tipo <i>Hopf</i> en la transición de amortiguado a <i>flutter</i> (DMP-FLT).	
Flutter onset	Velocidad de <i>flutter</i> independiente de las condiciones iniciales. Por otro lado, es una entrada en <i>flutter</i> clásica: amortiguado a velocidades menores que la de <i>flutter</i> , justo a la velocidad de <i>flutter</i> movimiento amortiguado, y a velocidades mayores movimiento divergente.	

10.2.3. Nolinealidad en Guiñada de Pílon (YAW)

La figura 10.3 detalla la nolinealidad de tipo *hysteresis* con las principales características que se consideran como parámetros en el estudio:

- Amplitud de la holgura (*Deadband Amplitude HDA*).
- Centro de la nolinealidad (*Deadband Center HDC*).
- Precarga de la nolinealidad (*Deadband Preload HDP*).

Aparte de los tres parámetros anteriores, se estudiará el efecto de las condiciones iniciales en la respuesta (**HBC**). La nolinealidad se considera concentrada en el soporte que modeliza el movimiento de guiñada del conjunto pílón+misil, de forma que la variable no lineal es el giro local del misil γ en la localización del soporte x^{NLR} , i.e. $\gamma \simeq \partial w_b / \partial x (x^{NLR}; t)$.

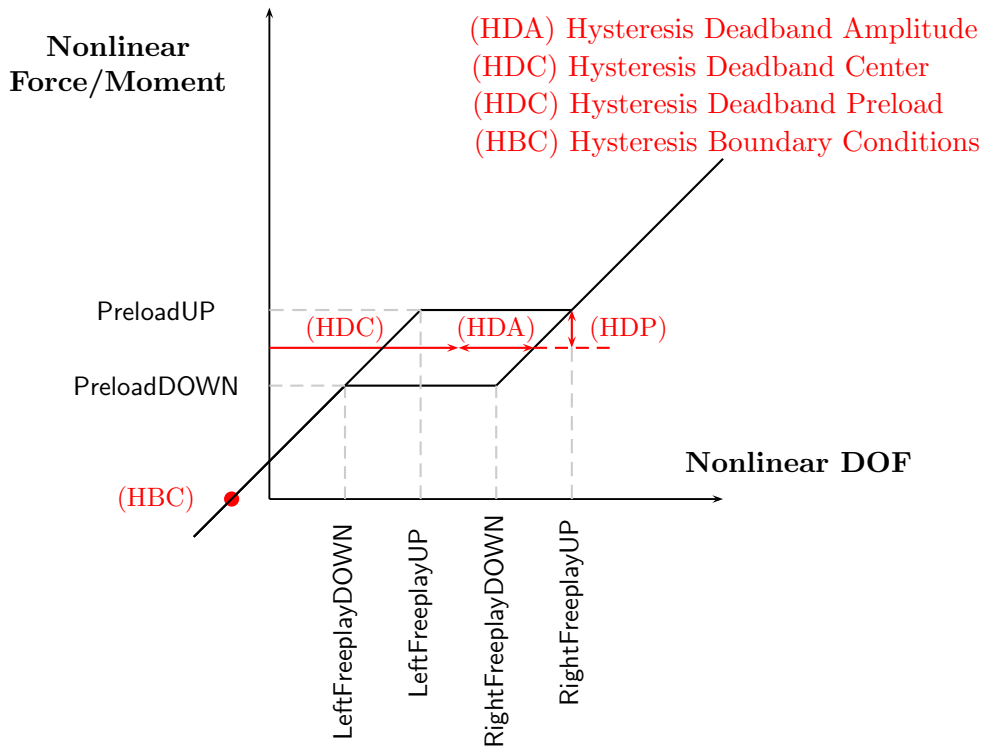


Figura 10.3: Nolinealidad del tipo *hysteresis* con los principales parámetros que la definen.

Dado un ciclo de histéresis nominal, de precarga $5,0 \text{ [N.m]}^3$ y amplitud adimensional $\mp 0,005$ ($\mp 0,29^\circ$ aprox.), se varía uno a uno los parámetros mencionados anteriormente.

La condición inicial nominal del vector de estado-espacio $\{x\}$ es:

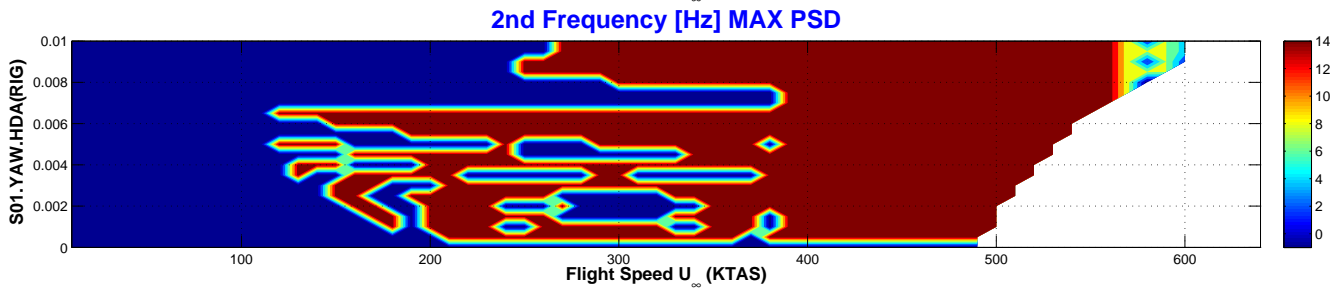
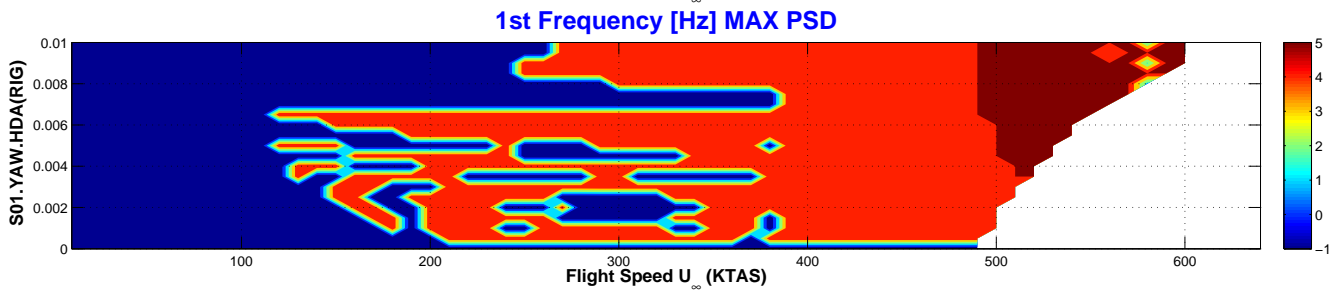
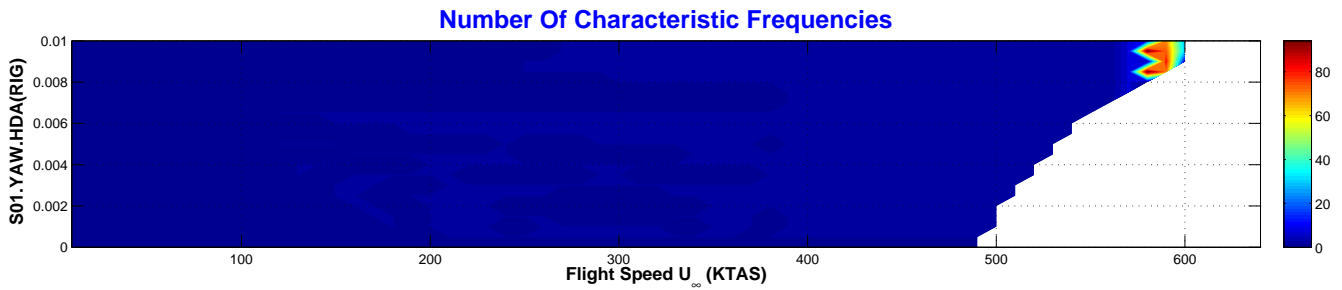
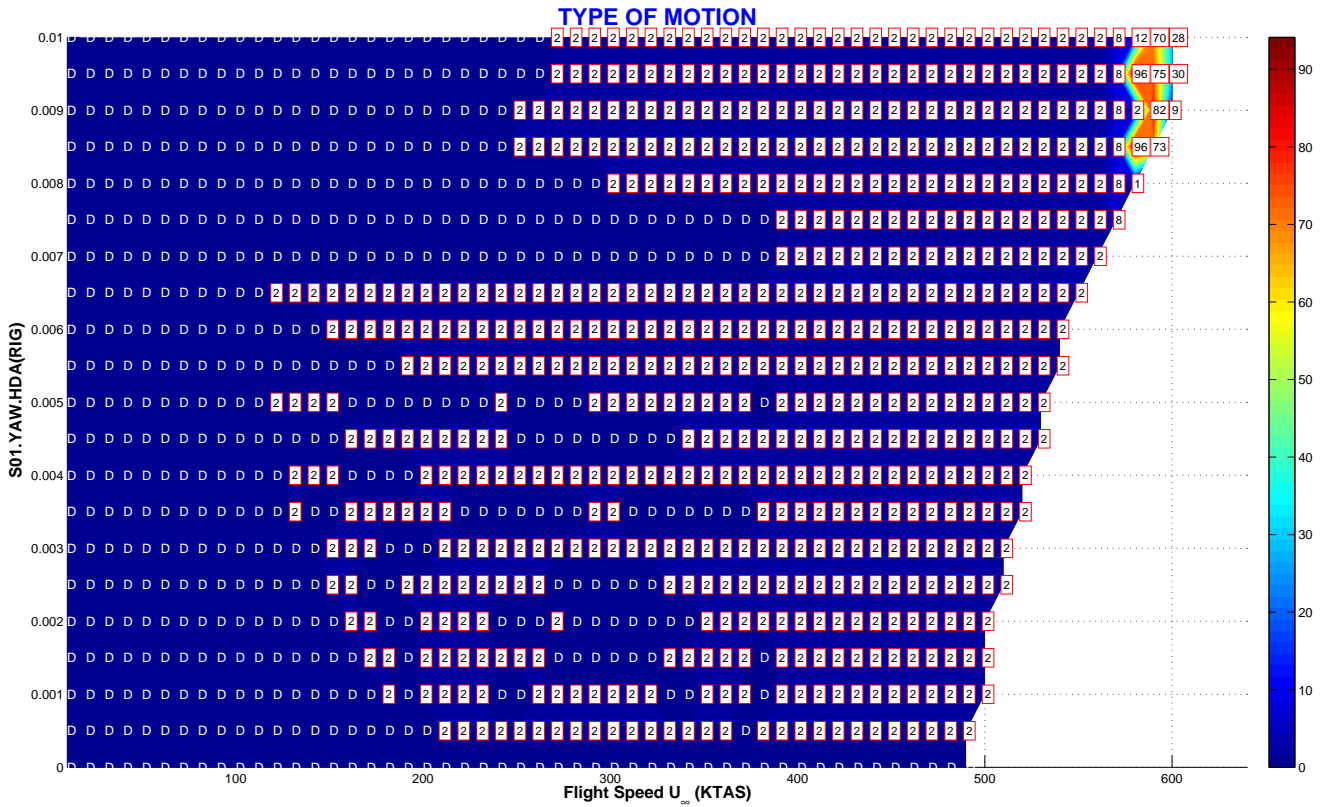
$$\{x(0)\}_{6 \times 1} = \left[\hat{\xi}_1 \quad \hat{\xi}_2 \quad \hat{\xi}_3 \quad \frac{d\hat{\xi}_1}{d\hat{t}} \quad \frac{d\hat{\xi}_2}{d\hat{t}} \quad \frac{d\hat{\xi}_3}{d\hat{t}} \right]^T = \left[+0,015 \quad -0,015 \quad -0,015 \quad 0,0 \quad 0,0 \quad 0,0 \right]^T$$

siendo la coordenada generalizada $\hat{\xi}_2$ (modo de guiñada) y su velocidad generalizada $d\hat{\xi}_2/d\hat{t}$ las que se varían en el estudio de la sensibilidad de la respuesta a las condiciones iniciales (**HBC**).

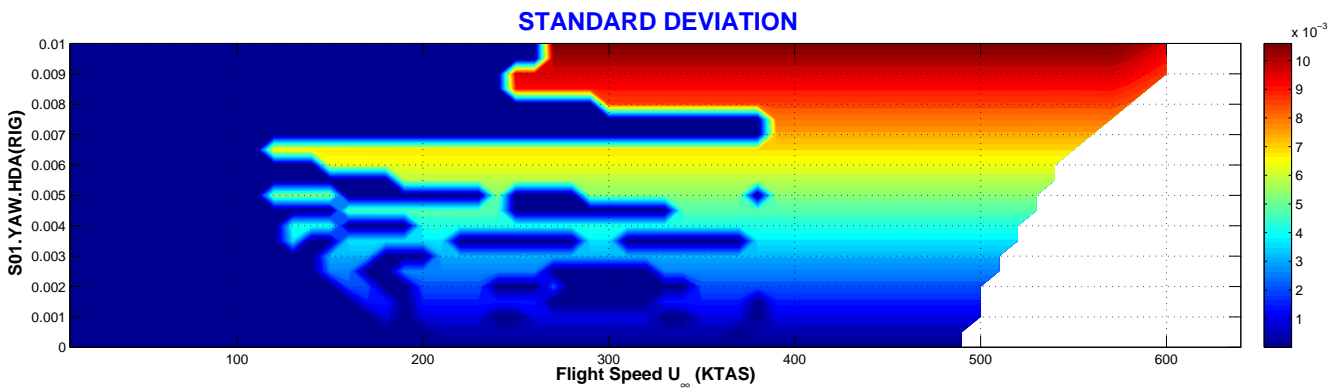
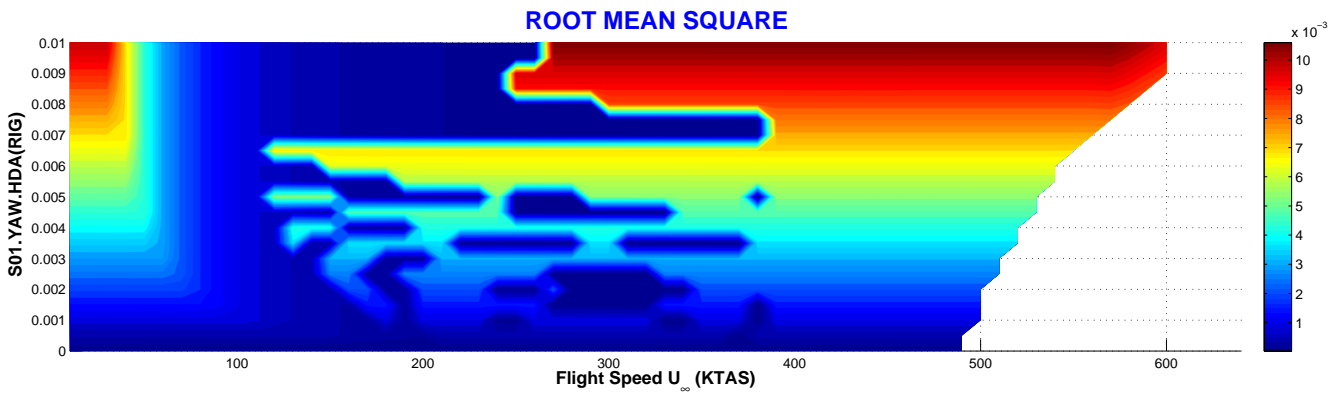
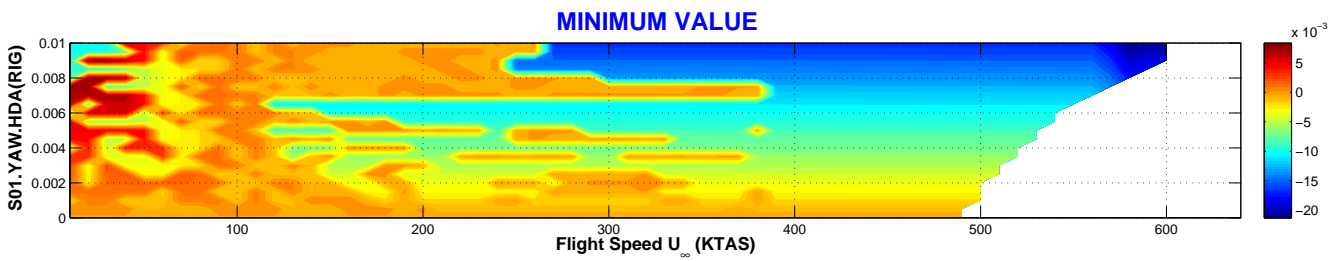
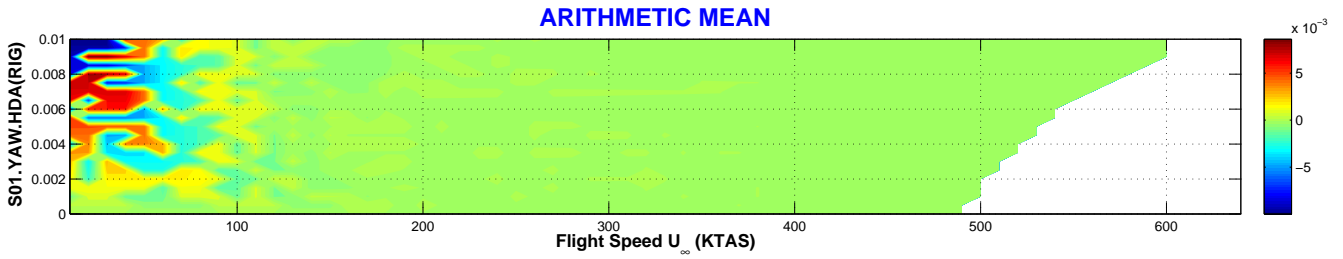
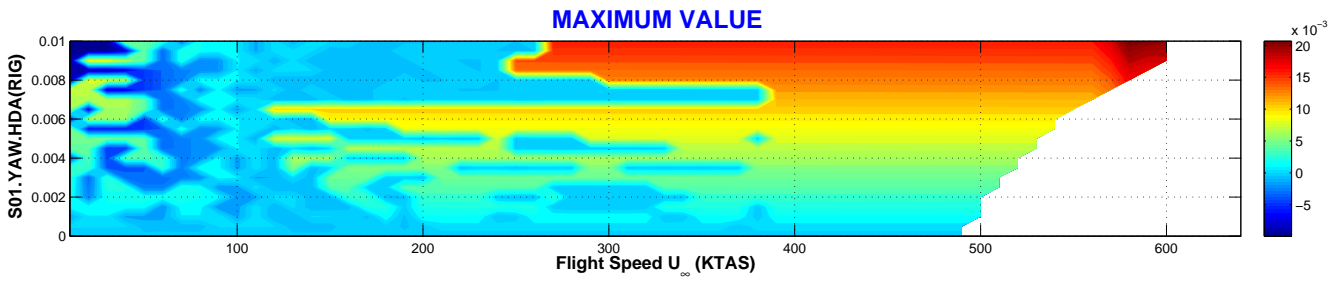
³Recuérdese que la precarga adimensional venía dada por $\hat{M}_0^{NLR} = M_0^{NLR} / m_0 U_0^2 L$.

VARIACIÓN DE LA AMPLITUD DE LA HOLGURA

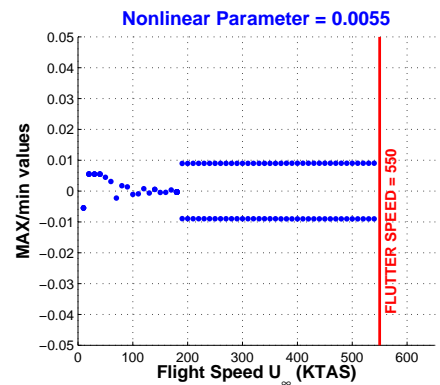
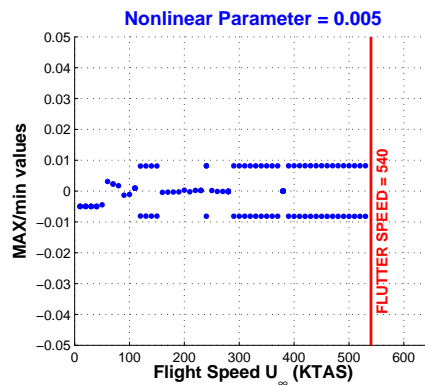
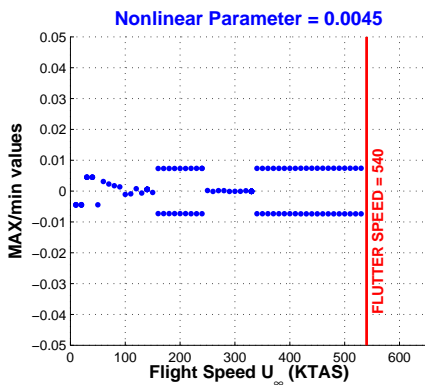
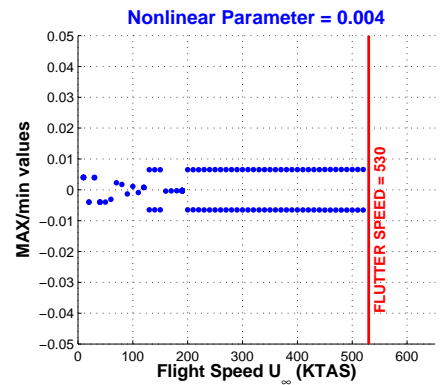
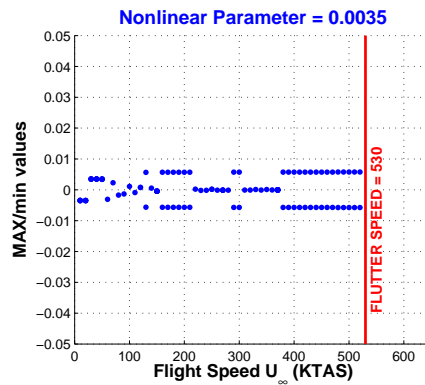
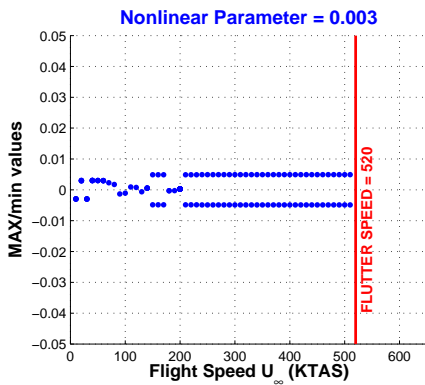
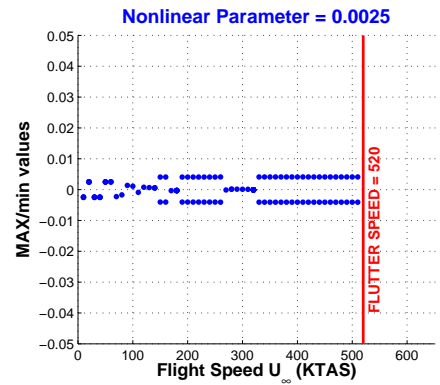
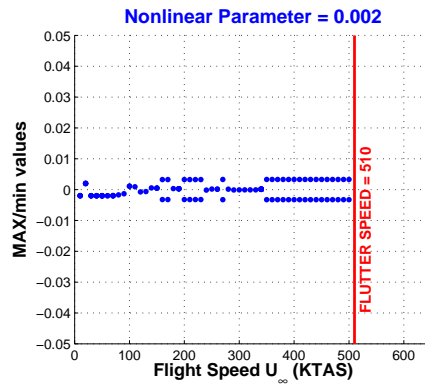
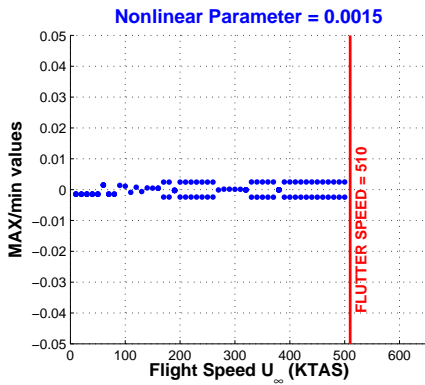
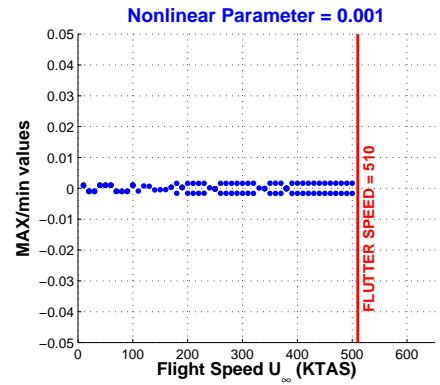
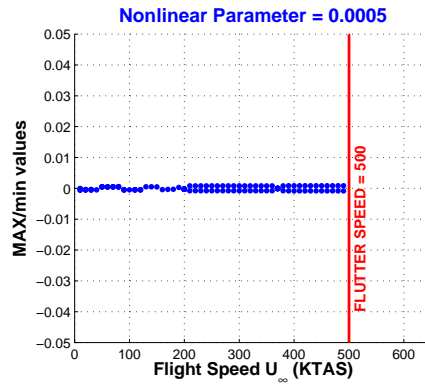
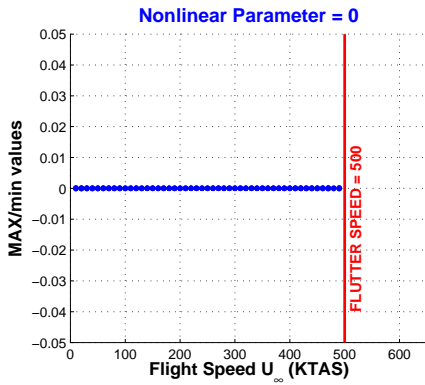
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Guiñada (YAW)	Hysteresis (H)	Deadband Amplitude (DA)	S01.YAW.HDA	1/5



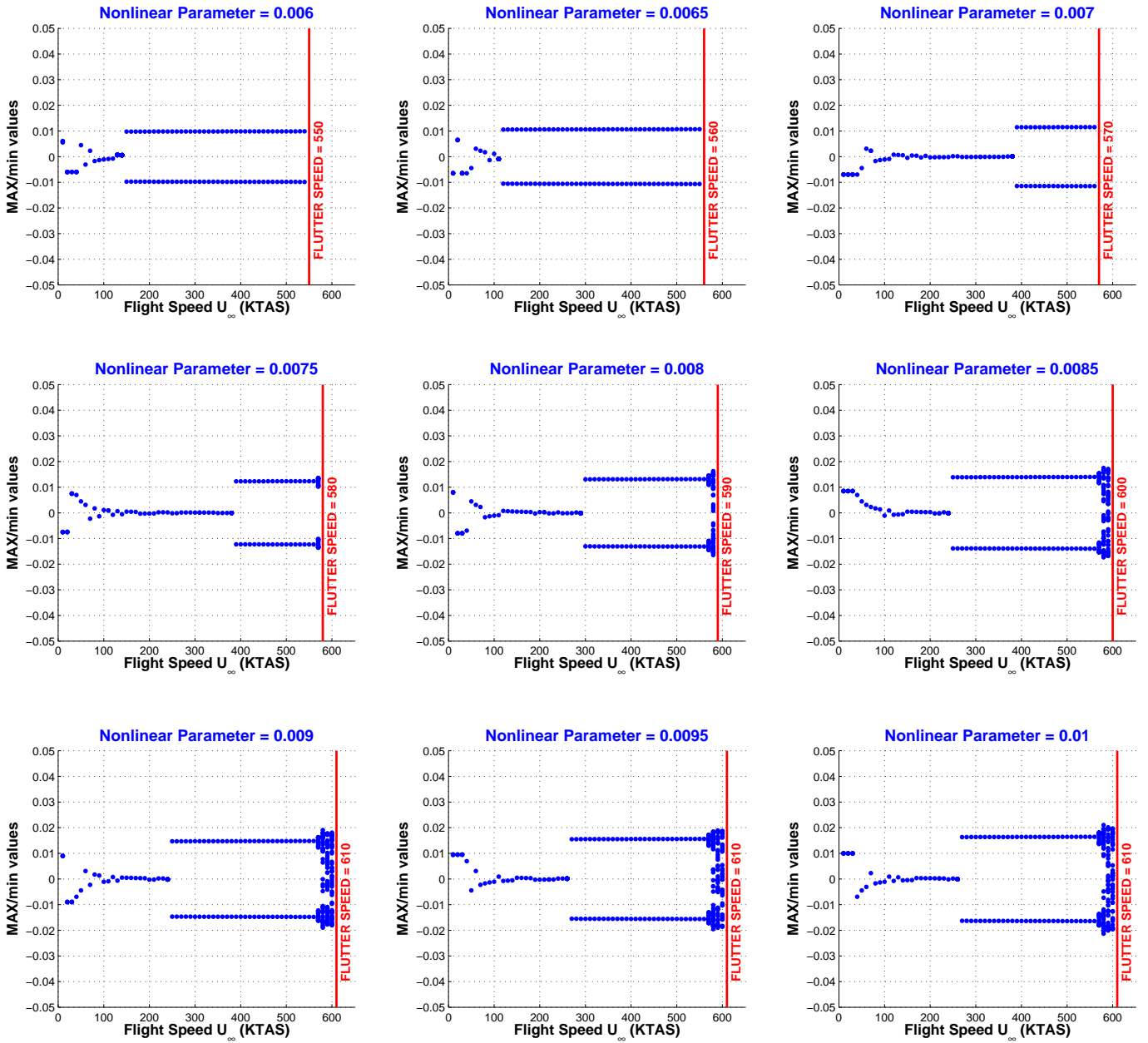
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Guiñada (YAW)	Hysteresis (H)	Deadband Amplitude (DA)	S01.YAW.HDA	2/5



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Guiñada (YAW)	Hysteresis (H)	Deadband Amplitude (DA)	S01.YAW.HDA	3/5



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Guiñada (YAW)	Hysteresis (H)	Deadband Amplitude (DA)	S01.YAW.HDA	4/5



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Guiñada (YAW)	Hysteresis (H)	Deadband Amplitude (DA)	S01.YAW.HDA	5/5

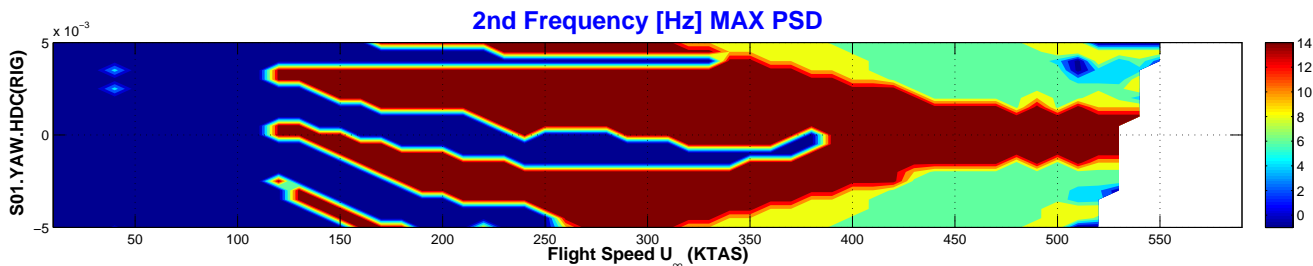
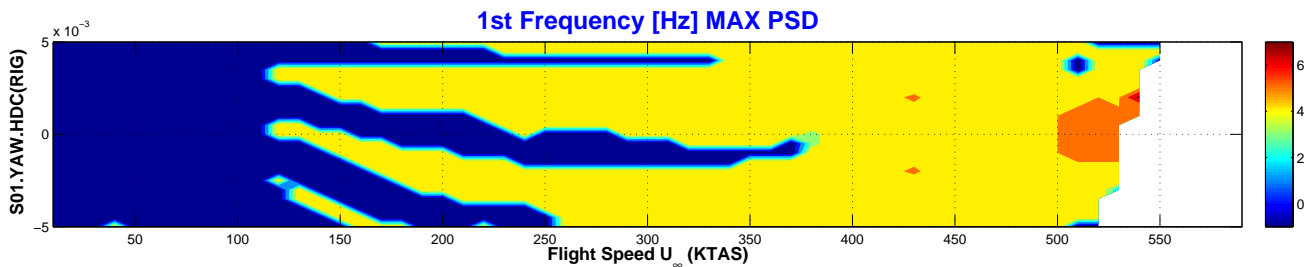
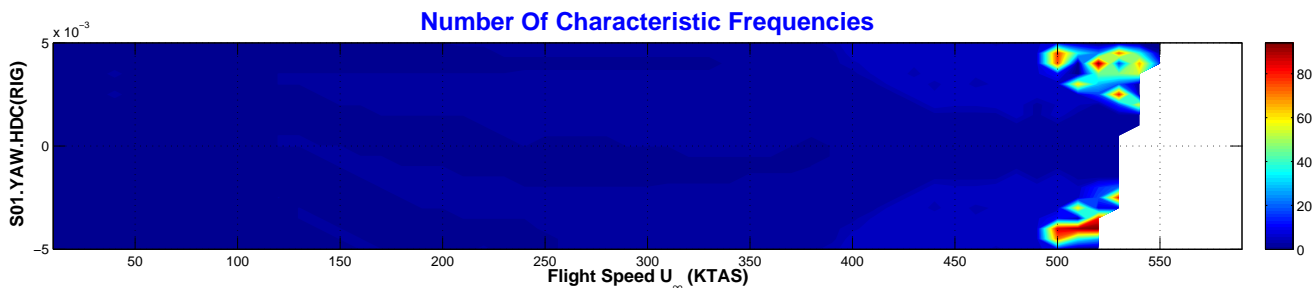
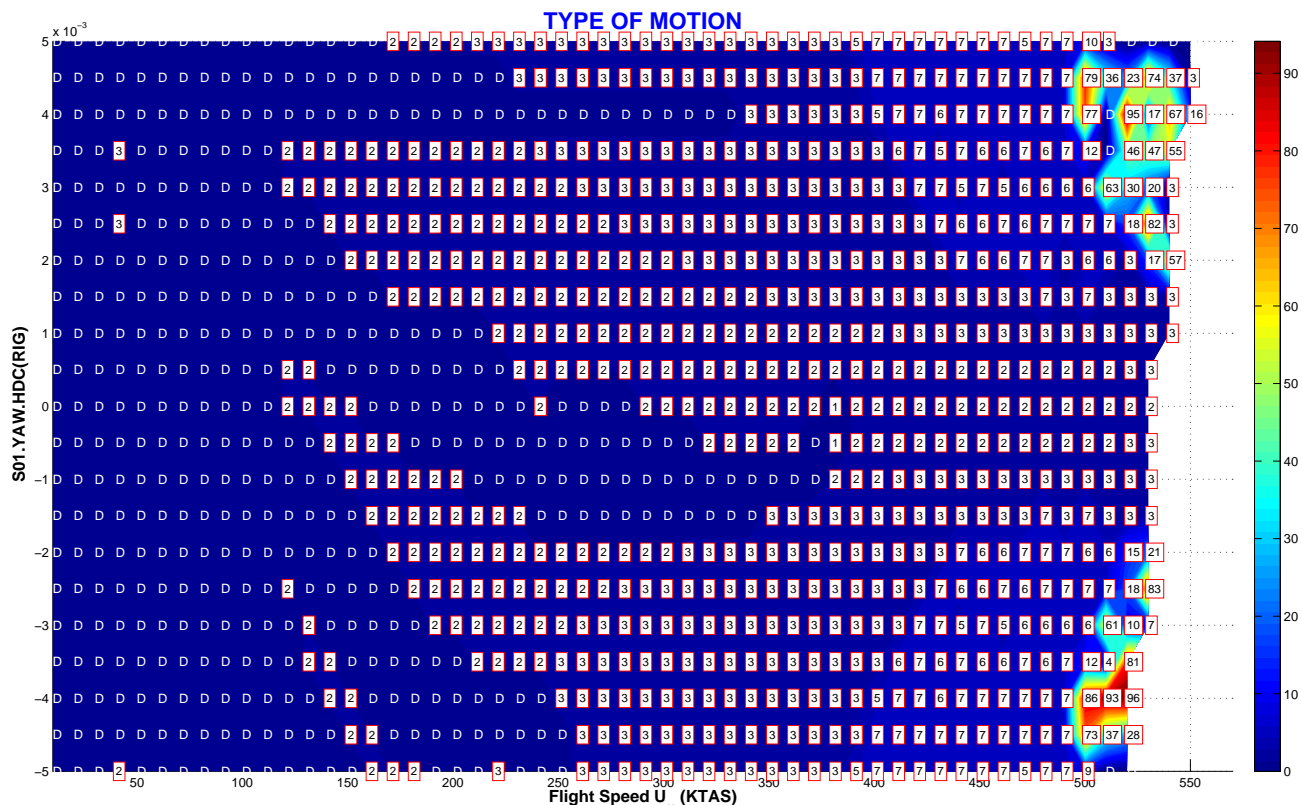
Tipo de Respuesta	DMP	Respuesta amortiguada hasta una velocidad de vuelo de 110 KTAS (aprox.). A partir de 110 KTAS y hasta una velocidad de 370 KTAS aparecen <i>islas</i> de respuesta amortiguada alternando con zonas de respuesta armónica LCO de dos frecuencias características (LCO[2]).
	LCO	Desde $U_\infty = 110$ KTAS y hasta 370 KTAS existen valores combinados de (U_∞ , <i>Amplitud</i>) que dan lugar a respuesta armónica con dos frecuencias características. Desde los 370 KTAS y hasta la velocidad de <i>flutter</i> , la respuesta es armónica no amortiguada LCO (LCO[2]).
	CHA	Indicios de respuesta caótica con amplitudes grandes de la holgura ($> 0,008 \simeq 0,46[deg]$)
	FLT	La velocidad de <i>flutter</i> depende de la holgura de una forma aproximadamente lineal, siendo 490 KTAS para amplitud de holgura nula y llegando a 600 KTAS a una amplitud (adimensional) de 0,01.
Transición entre Tipos de Respuesta	La respuesta evoluciona de la siguiente forma: DMP-LCO[2]-(CHA)-FLT. La respuesta caótica CHA aparece sólo con amplitudes grandes de la holgura, y para velocidades de vuelo inmediatamente anteriores a la velocidad de <i>flutter</i> . La transición DMP-LCO[2] (LCO[2] es una respuesta armónica no amortiguada con 2 frecuencias características) ocurre de forma brusca o, como se denomina en análisis de sistemas no lineales, con una <i>hard Hopf bifurcation</i> .	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 496$. KTAS / $VF_{(K=0)} = 381$. KTAS.
	No Lineal	La velocidad de <i>flutter</i> depende de la amplitud de la holgura. Se puede considerar que varía de forma lineal (aprox.) con la amplitud adimensional de la holgura, empezando por 490 KTAS con amplitudes nulas de la holgura (sistema lineal) y llegando a 600 KTAS con amplitudes adimensionales de 0,01.
Variación de la Amplitud	con U_∞	La amplitud de la respuesta LCO[2] no depende de la velocidad de vuelo U_∞ .
	con YAW.HDA	La amplitud de la respuesta LCO[2] aumenta a medida que se incrementa la amplitud de la holgura.
Bifurcaciones	Bifurcación de tipo <i>Hopf</i> en la transición de amortiguado a oscilación armónica, i.e., DMP-LCO[2].	
Flutter onset	Entrada en <i>flutter</i> violenta debido a que a velocidades inmediatamente anteriores a la velocidad de <i>flutter</i> , la evolución de la amplitud de la respuesta con la velocidad de vuelo no hacía prever la repuesta divergente.	

NOTA:

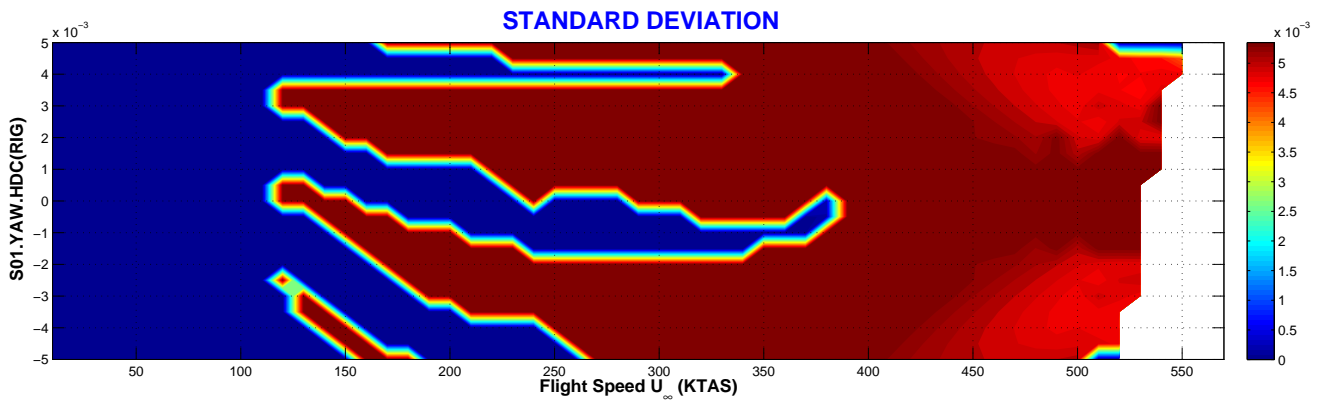
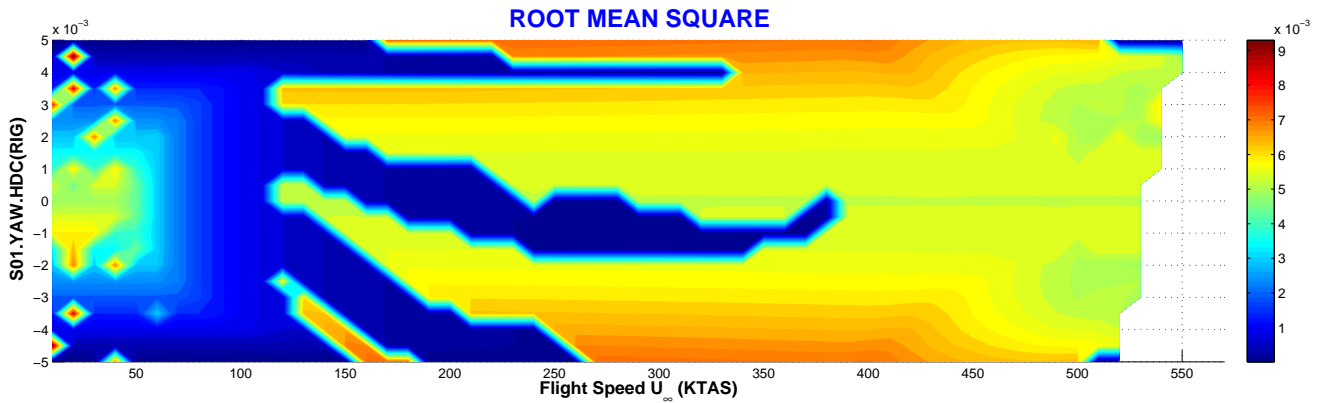
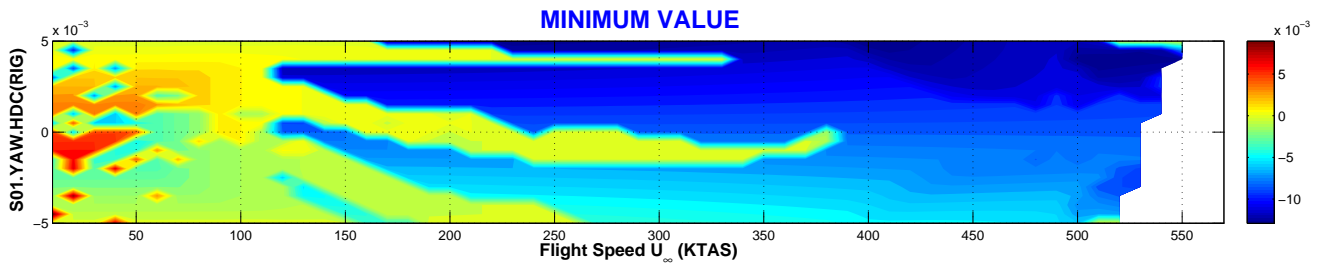
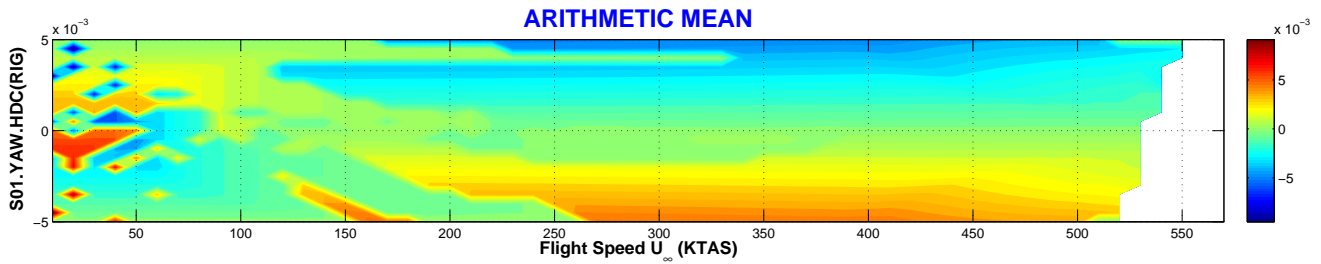
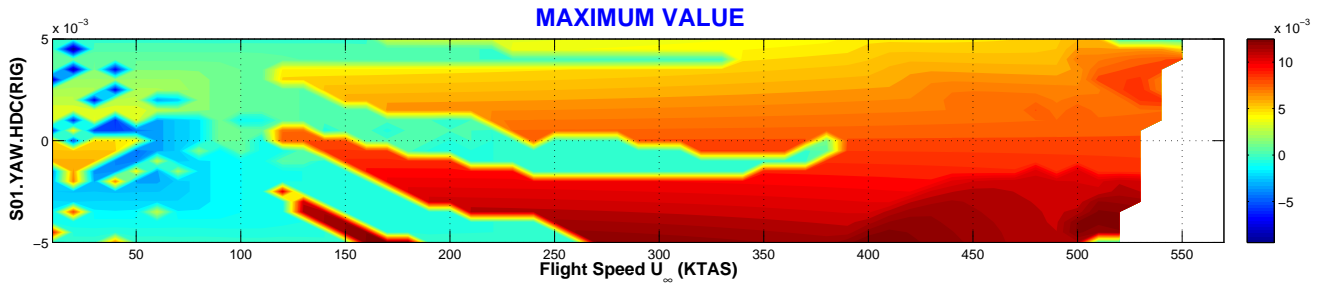
A partir de 30 KTAS (aprox.) y hasta la aparición de la oscilación armónica aparece un movimiento amortiguado con guiñada estacionaria dentro de la zona muerta o *deadband*. Este caso corresponde a un equilibrio de las fuerzas aerodinámicas con la precarga de la *hysteresis*.

VARIACIÓN DEL CENTRO DE LA NONLINEALIDAD

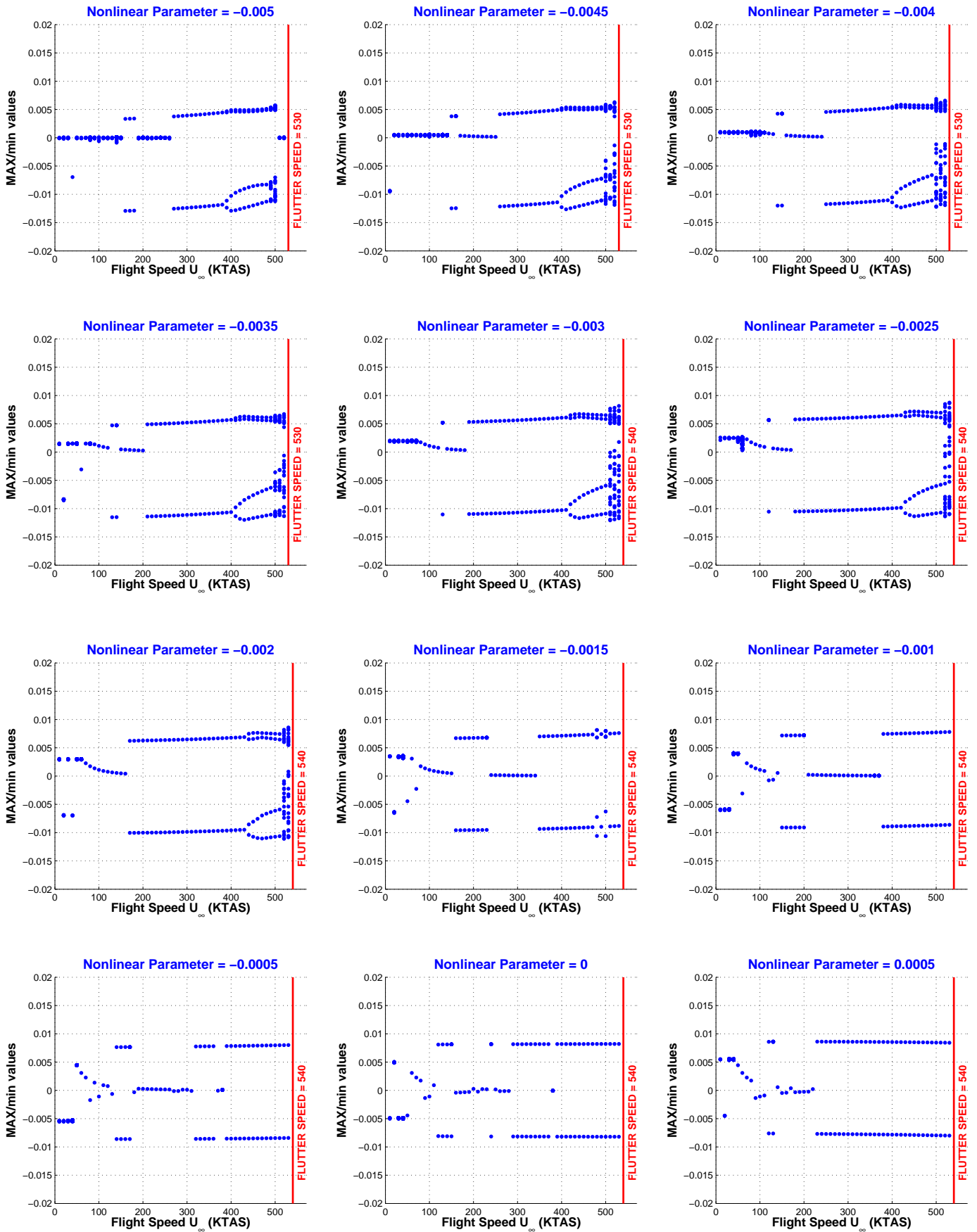
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Guiñada (YAW)	Hysteresis (H)	Deadband Center (DC)	S01.YAW.HDC	1/4



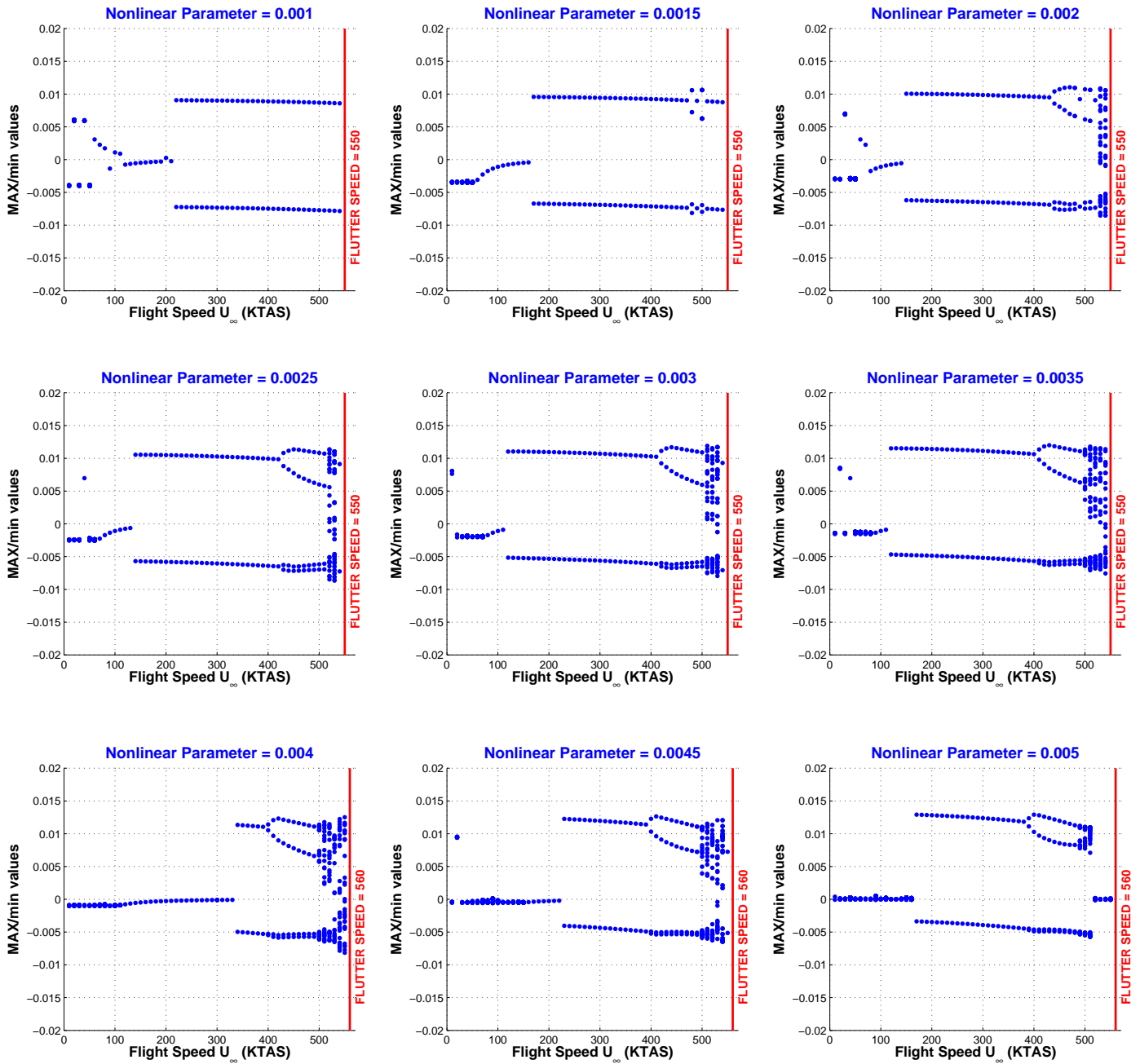
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Guiñada (YAW)	Hysteresis (H)	Deadband Center (DC)	S01.YAW.HDC	2/4



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Guiñada (YAW)	Hysteresis (H)	Deadband Center (DC)	S01.YAW.HDC	3/4



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Guiñada (YAW)	Hysteresis (H)	Deadband Center (DC)	S01.YAW.HDC	4/4

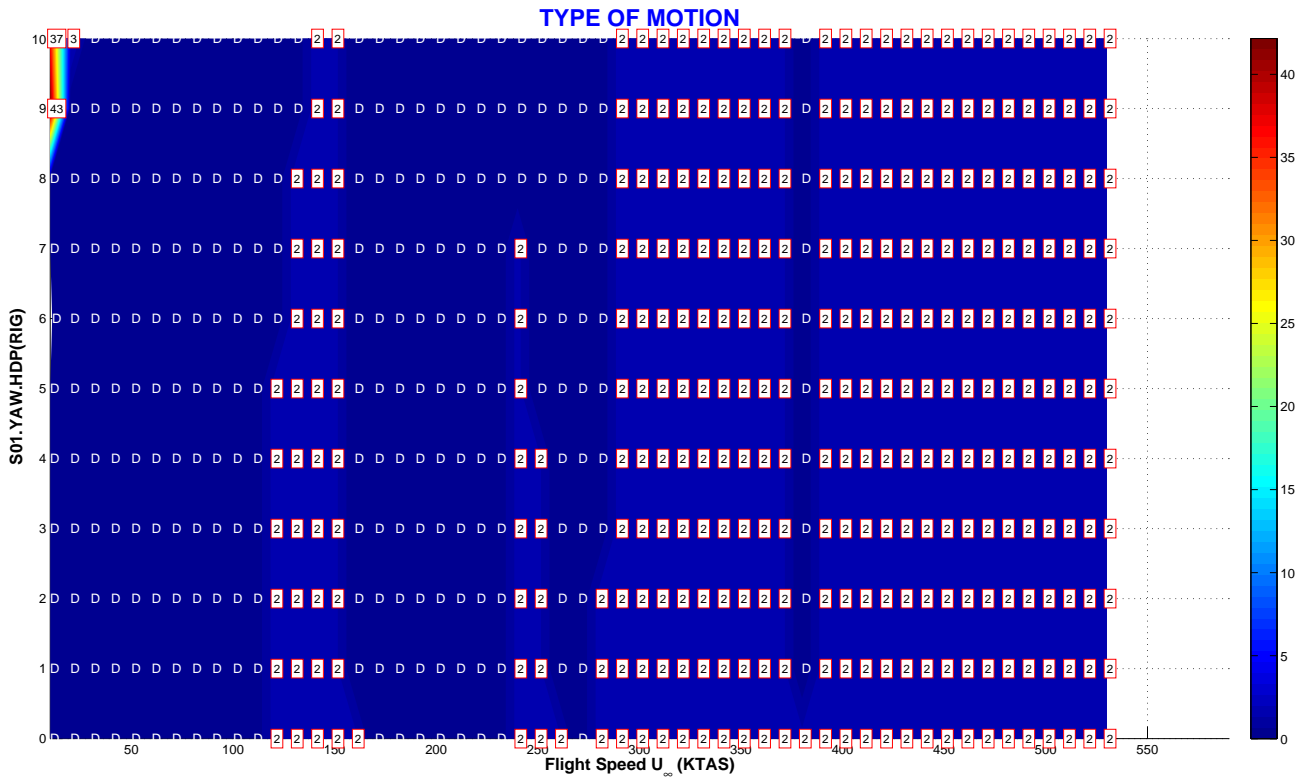


CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Guiñada (YAW)	Hysteresis (H)	Deadband Center (DC)	S01.YAW.HDC	5/5

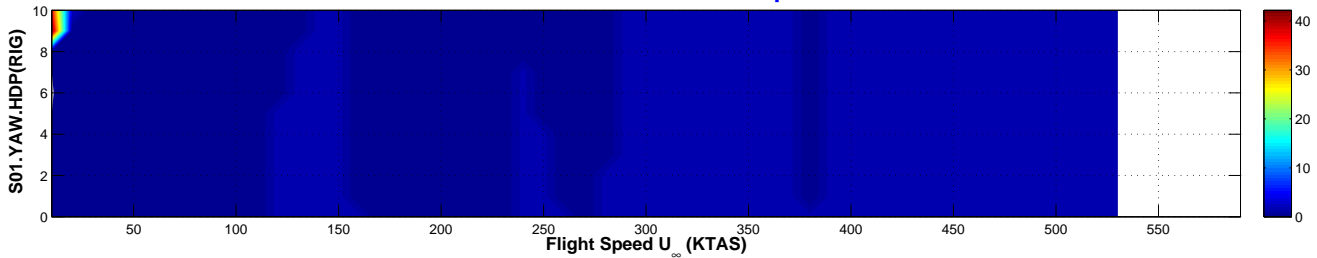
Tipo de Respuesta	DMP	Movimiento amortiguado a bajas velocidades de vuelo menores de 100 KTAS (aproximadamente ya que depende del centro de la no linealidad).
	LCO	Tipos de LCOs: LCO[2], LCO[3], y LCO[5-7] con 2, 3 y 5-7 frecuencias características respectivamente.
	CHA	Respuesta caótica en la transición del LCO[5-7] al <i>flutter</i> .
	FLT	Velocidad de <i>flutter</i> aumenta ligeramente a medida que el centro de la no linealidad se desplaza a valores positivos.
Transición entre Tipos de Respuesta	Dos tipos de transiciones: para centros de la no linealidad entre $-0,002$ y $0,002$ [m], la transición es DMP-LCO[2]-LCO[3]-FLT, mientras que, para valores mayores de descentramiento, la transición es DMP-LCO[2]-LCO[3]-LCO[5-7]-CHA-FLT. Puede observarse que la respuesta de tipo caótico ocurre sólo después del armónico LCO[5-7].	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 496$. KTAS / $VF_{(K=0)} = 381$. KTAS.
	No Lineal	Aumenta ligeramente con descentramientos positivos de la no linealidad.
Variación de la Amplitud	con U_{∞}	Una vez que empieza el LCO[2], la amplitud máxima de la respuesta no varía demasiado con la velocidad de vuelo U_{∞} .
	con YAW.HDC	Los valores medios de la respuesta coinciden con el centro de la no linealidad (aprox.). La amplitud de la respuesta respecto a su valor medio es prácticamente independientes del centro de la no linealidad.
Bifurcaciones	Bifurcación de tipo Hopf en la transición DMP a LCO[2].	
Flutter onset	Entrada en <i>flutter</i> abrupta que ocurre después de un movimiento del tipo LCO[2-3] en el caso de descentramientos pequeños (entre $-0,002$ y $0,002$ [m]), o después de un movimiento de tipo caótico en caso de descentramientos mayores.	

VARIACIÓN DE LA PRECARGA

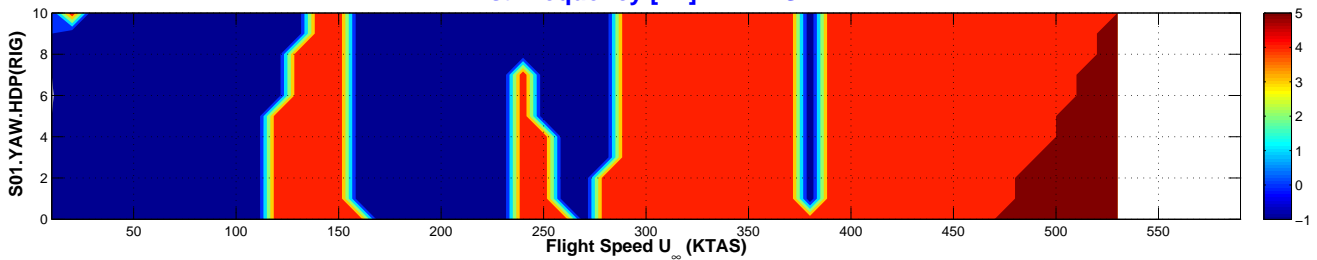
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Guiñada (YAW)	Hysteresis (H)	Deadband Preload (DP)	S01.YAW.HDP	1/4



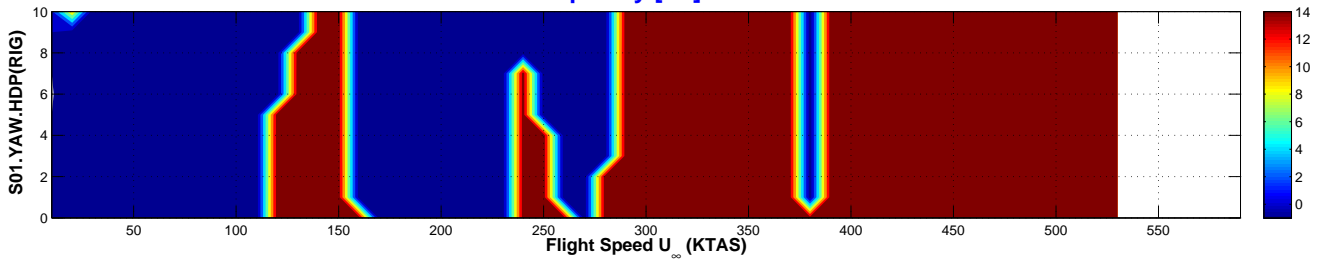
Number Of Characteristic Frequencies



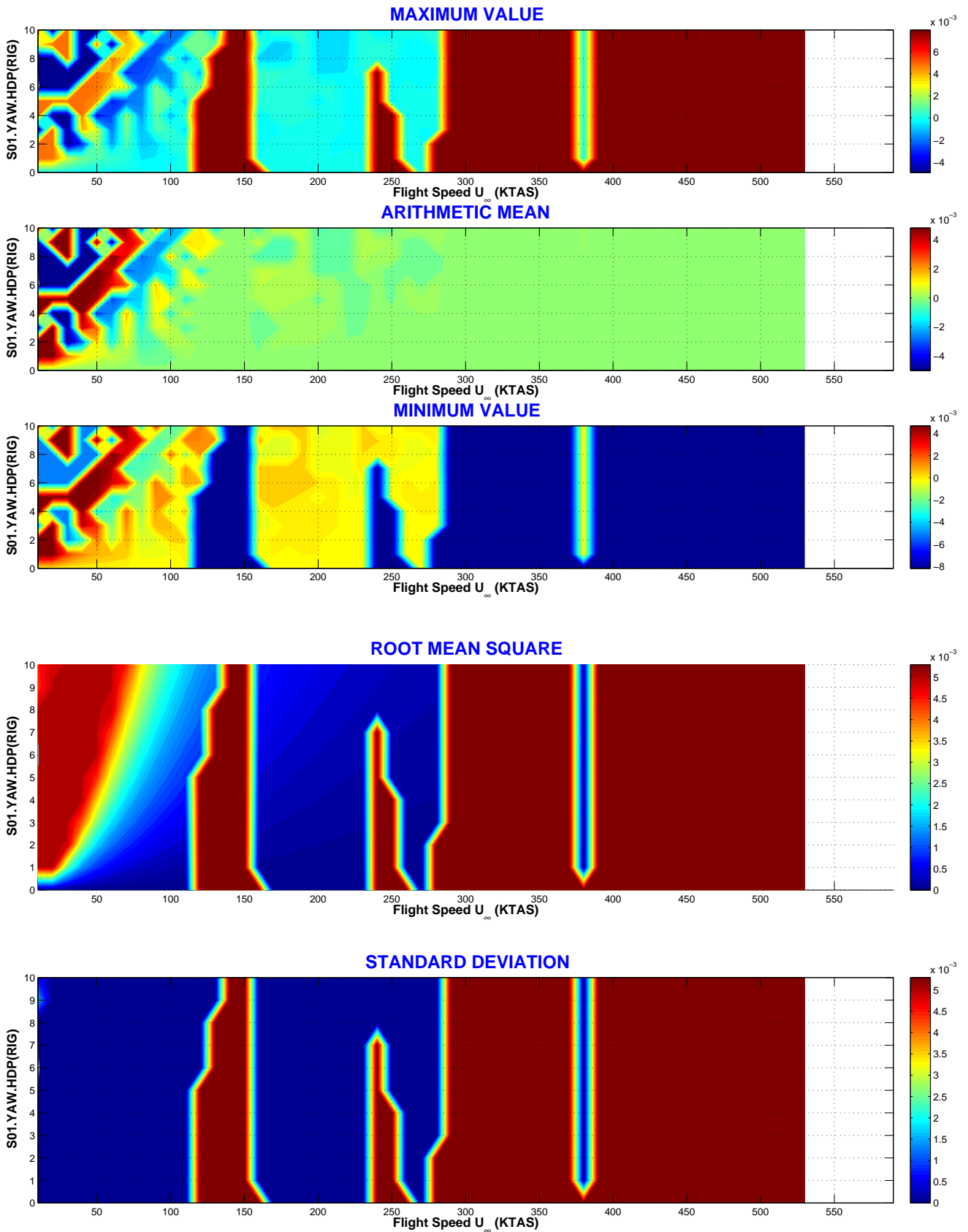
1st Frequency [Hz] MAX PSD



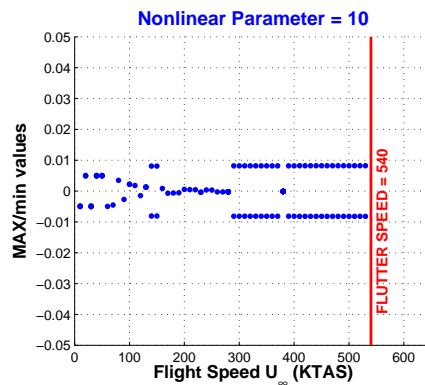
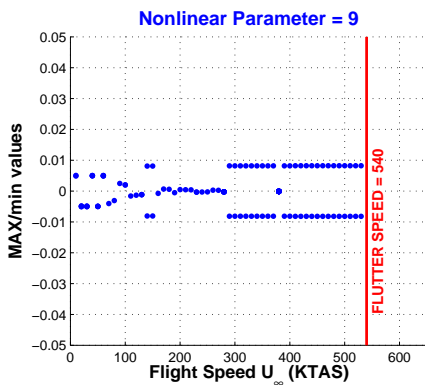
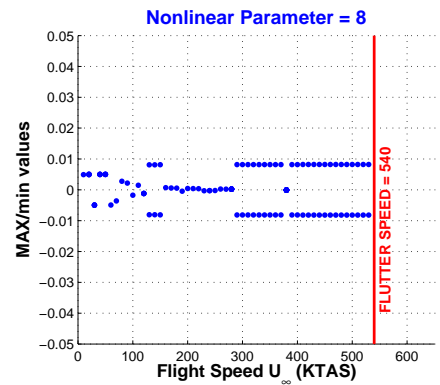
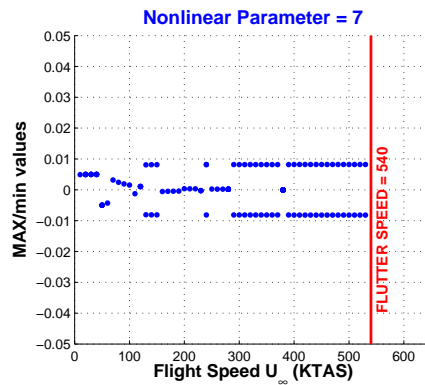
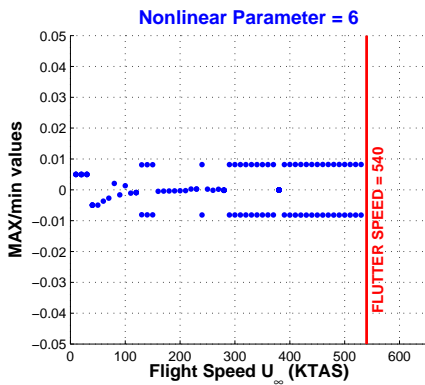
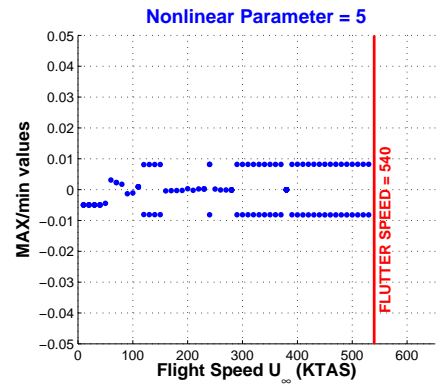
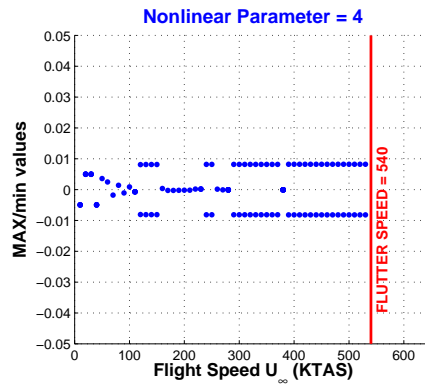
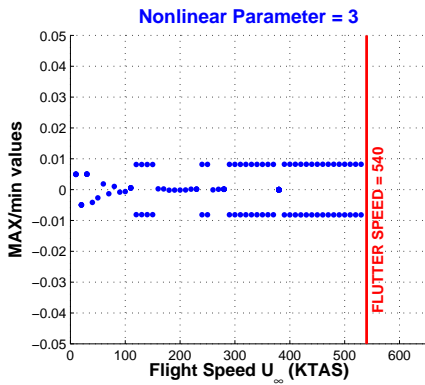
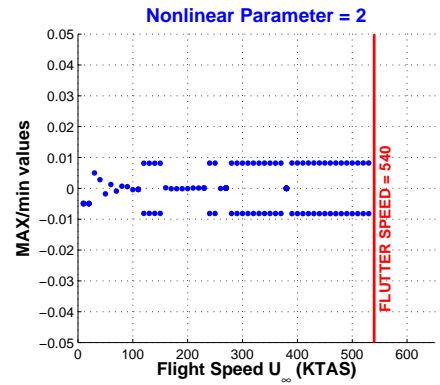
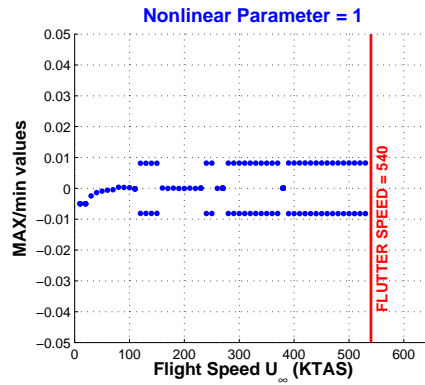
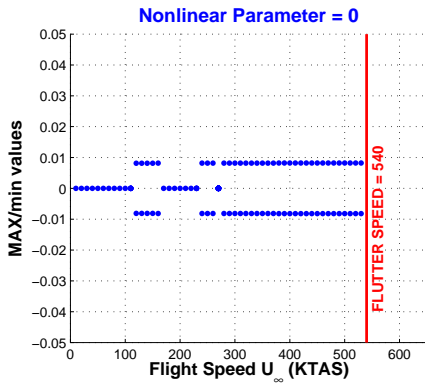
2nd Frequency [Hz] MAX PSD



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Guiñada (YAW)	Hysteresis (H)	Deadband Preload (DP)	S01.YAW.HDP	2/4



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Guiñada (YAW)	Hysteresis (H)	Deadband Preload (DP)	S01.YAW.HDP	3/4

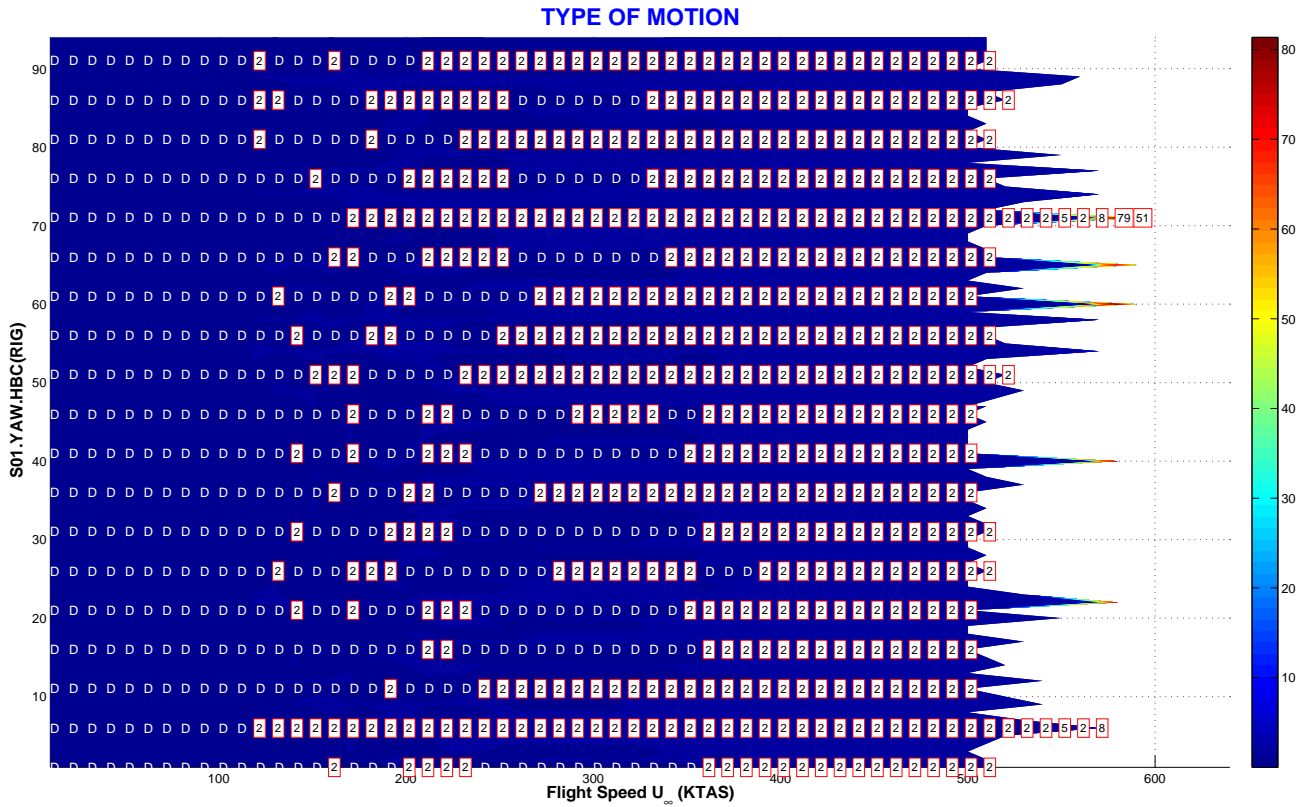


CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Guiñada (YAW)	Hysteresis (H)	Deadband Preload (DP)	S01.YAW.HDP	4/4

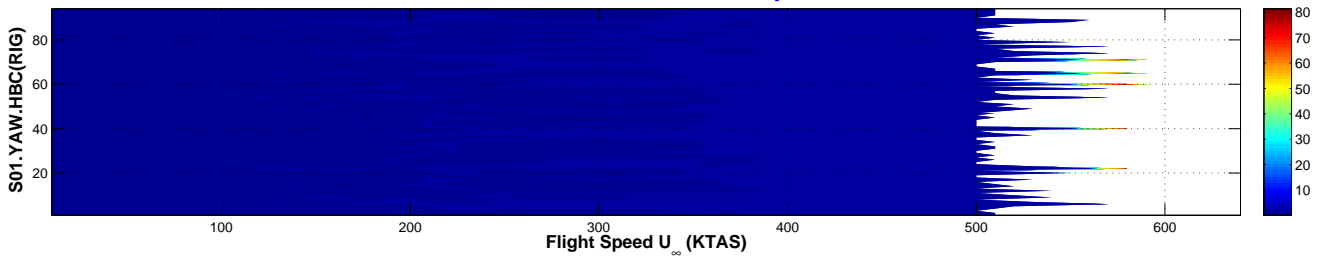
Tipo de Respuesta	DMP	Respuesta amortiguada (DMP), aunque alternada con oscilaciones armónicas LCO[2] (con 2 frecuencias características), a velocidades inferiores a 280 KTAS.
	LCO	Respuesta armónica con dos frecuencias características (LCO[2]) a velocidades superiores a 280 KTAS (aprox.) y hasta la entrada en <i>flutter</i> a una velocidad de 530 KTAS (aprox.).
	CHA	No existe respuesta de tipo caótico.
	FLT	Respuesta divergente <i>flutter</i> a velocidades superiores a 530 KTAS, independiente de la precarga.
Transición entre Tipos de Respuesta	La respuesta evoluciona de la siguiente forma: DMP-LCO[2]-FLT. La respuesta amortiguada DMP y la armónica LCO[2] aparecen en determinados rangos de velocidades que dependen de la precarga de la no linealidad.	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 496$. KTAS / $VF_{(K=0)} = 381$. KTAS.
	No Lineal	Velocidad de <i>flutter</i> es 530 KTAS e independiente de la precarga.
Variación de la Amplitud	con U_{∞}	La amplitud de la respuesta LCO[2] no depende de la velocidad de vuelo U_{∞} .
	con YAW.HDP	La amplitud de la respuesta LCO[2] no depende de la precarga.
Bifurcaciones	Bifurcación de tipo <i>Hopf</i> en la transición de respuesta amortiguada DMP a armónica LCO[2].	
Flutter onset	Entrada en <i>flutter</i> no previsible teniendo en cuenta que la amplitud de la respuesta no tenía indicios de divergencia a velocidades inmediatamente anteriores a la de <i>flutter</i> .	

VARIACIÓN DE LAS CONDICIONES INICIALES

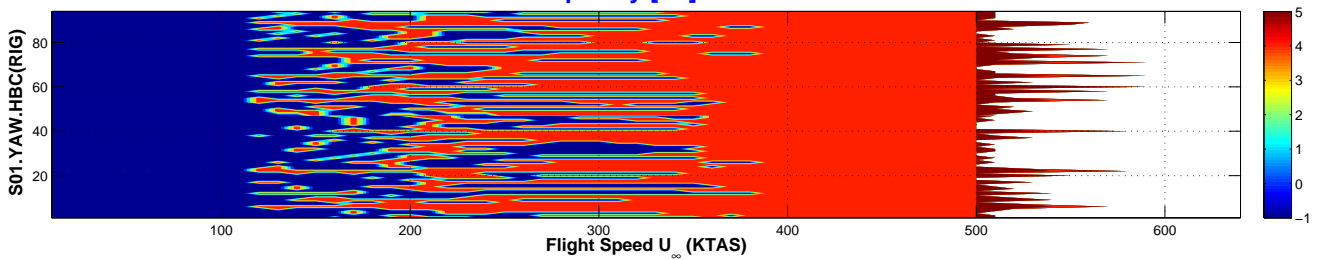
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Guiñada (YAW)	Hysteresis (H)	Boundary Conditions (BC)	S01.YAW.HBC	1/2



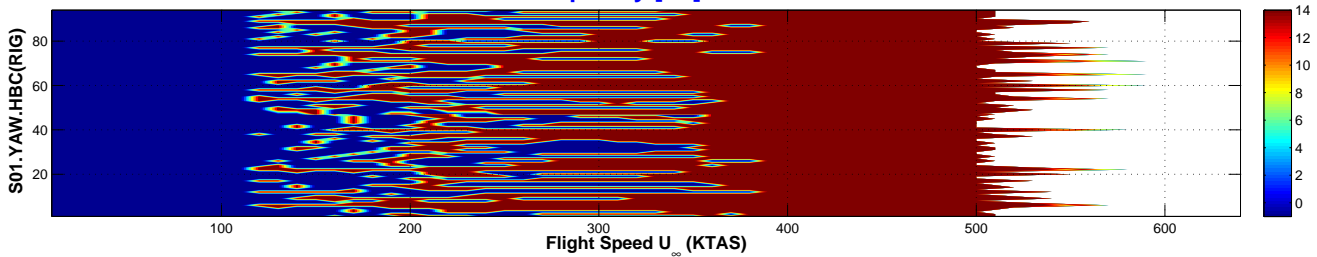
Number Of Characteristic Frequencies



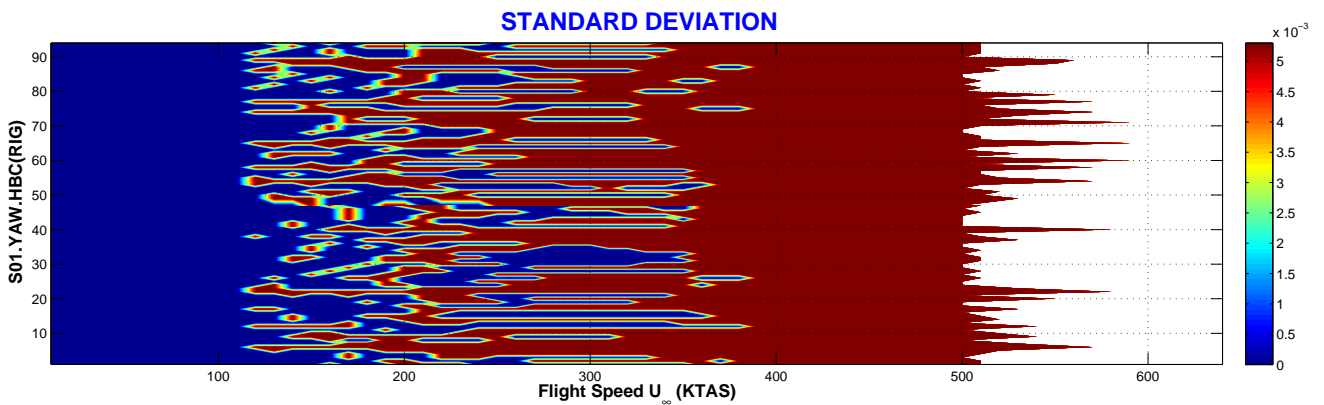
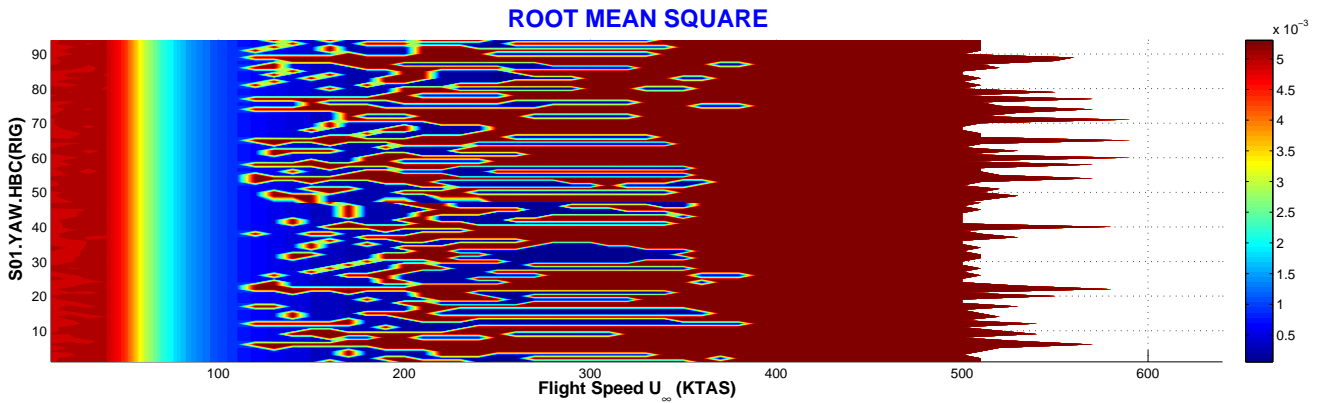
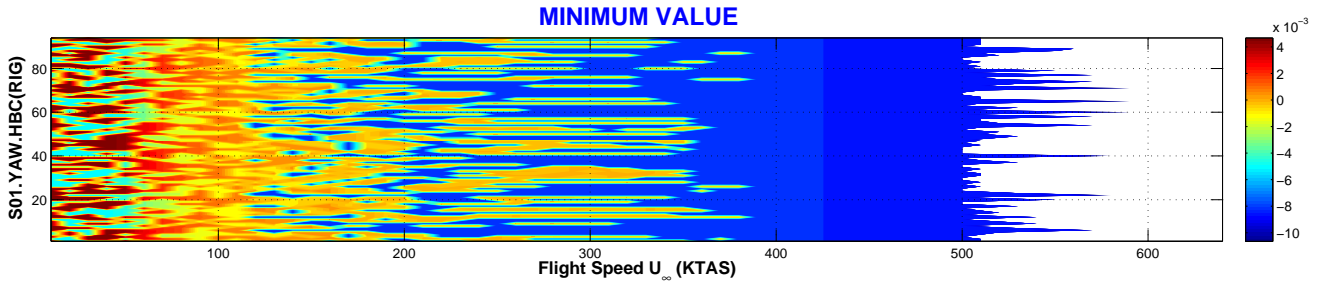
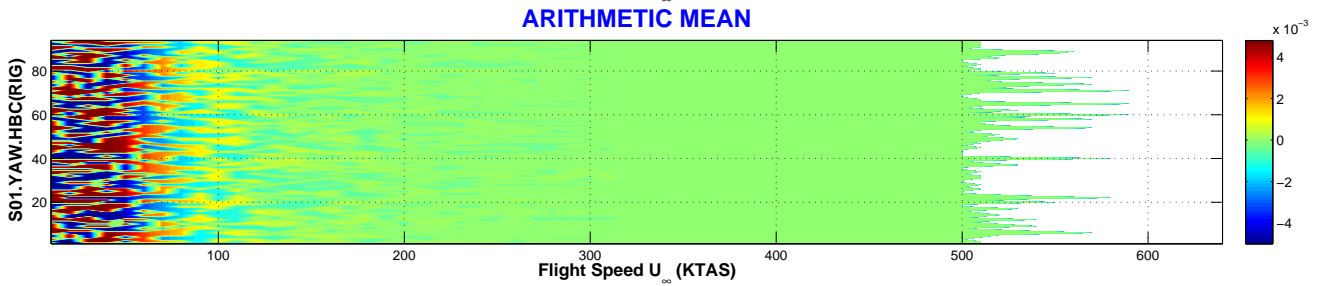
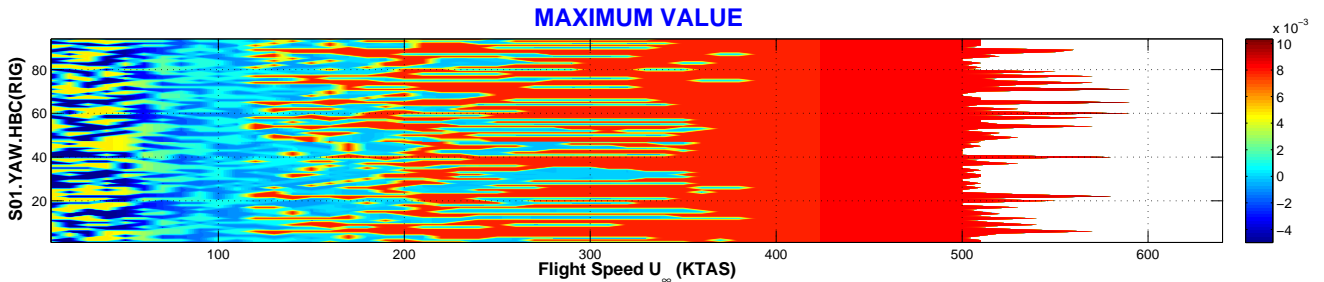
1st Frequency [Hz] MAX PSD



2nd Frequency [Hz] MAX PSD



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Guiñada (YAW)	Hysteresis (H)	Boundary Conditions (BC)	S01.YAW.HBC	2/2



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S01	Guiñada (YAW)	Hysteresis (H)	Boundary Conditions (BC)	S01.YAW.HBC	5/5

Tipo de Respuesta	DMP	Respuesta amortiguada a velocidades inferiores a 100 KTAS, independiente de las condiciones iniciales.
	LCO	En el rango de velocidades de vuelo 100-350 KTAS (aprox.), la respuesta amortiguada DMP se alterna con respuesta armónica simple LCO[2] de dos frecuencias características. La aparición de un tipo de respuesta u otro depende de las condiciones iniciales. A partir de 350 KTAS (aprox.) y hasta la velocidad de entrada en <i>flutter</i> , la respuesta es armónica no amortiguada LCO[2]. La velocidad de <i>flutter</i> es del orden de 500 KTAS aunque, dependiendo de las condiciones iniciales, el sistema presenta excursiones a zonas de mayores velocidades de vuelo U_∞ .
	CHA	No existe respuesta de tipo caótico.
	FLT	La velocidad de <i>flutter</i> es de unos 500 KTAS (aprox.). Dependiendo de las condiciones iniciales, el sistema puede mantenerse sin <i>flutter</i> a velocidades ligeramente mayores.
Transición entre Tipos de Respuesta	La respuesta conmuta entre LCO[2] y DMP a velocidades que dependen de las condiciones iniciales.	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 496$. KTAS / $VF_{(K=0)} = 381$. KTAS.
	No Lineal	Velocidad de <i>flutter</i> es de unos 500 KTAS. Dependiendo de las condiciones iniciales, esta velocidad puede verse incrementada ligeramente.
Variación de la Amplitud	con U_∞	La amplitud de la respuesta LCO[2] no depende de la velocidad de vuelo.
	con YAW.HBC	N/A
Bifurcaciones	Bifurcación de tipo <i>Hopf</i> en la transición DMP-LCO[2].	
Flutter onset	Entrada en <i>flutter</i> abrupta. No existían indicios de aumento en la respuesta, a la vista de la amplitud independiente de la velocidad de vuelo que se observaba a velocidades inmediatamente anteriores a la de <i>flutter</i> .	

NOTA:

Las condiciones iniciales son:

$$\{x(0)\} = \left[+0,015 \quad \hat{\xi}_2 \quad -0,015 \quad 0,0 \quad \frac{d\hat{\xi}_2}{dt} \quad 0,0 \right]$$

donde $\hat{\xi}_2$ y $d\hat{\xi}_2/dt$ se varían aleatoriamente dando un total de 99 condiciones iniciales distintas.

10.3. Estructura (RIG) / Soportado (S02)

En esta sección se detallan los resultados para la configuración de misil con 3 modos de sólido rígido (modo lateral o *heaving* en el problema longitudinal, modo de guiñada o ángulo de ataque en el problema longitudinal y modo de rotación de aletas) con condiciones de contorno correspondientes a vuelo equilibrado, i.e., soportado **S02**.

La no linealidad de tipo *hysteresis* se considera localizada en la rotación de las aletas (**ROT**). Por otro lado, se varían distintos parámetros de la *hysteresis*: **HDA** corresponde a la variación de la amplitud de la holgura, **HDC** corresponde a la variación del centro de la no linealidad, **HDP** corresponde a la variación de la precarga de la no linealidad y, por último, **HBC** indica variación de las condiciones iniciales. La tabla 10.2 resume las configuraciones de estudio y la sección en la que se incluyen los resultados.

SECCIÓN	CONFIGURACIÓN
10.3	RIG.S02.ROT.HDA
	RIG.S02.ROT.HDC
	RIG.S02.ROT.HDP
	RIG.S02.ROT.HBC

Tabla 10.2: Configuraciones de estudio para el misil **RIG** (modelo estructural con 3 modos de sólido rígido) con soportado **S02** (vuelo equilibrado).

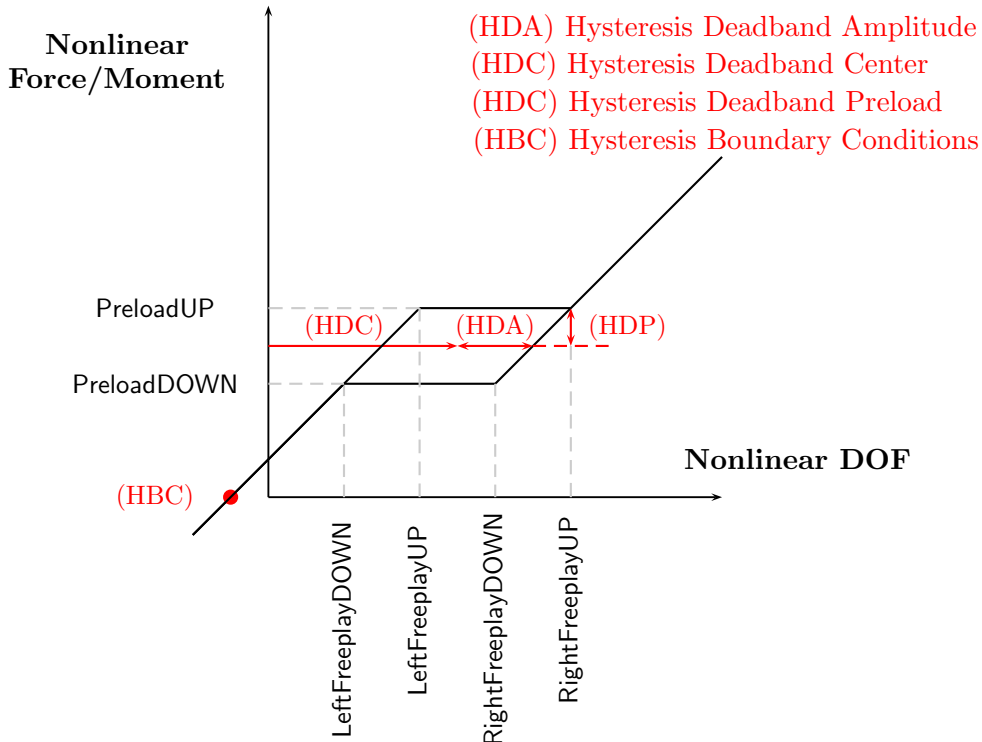


Figura 10.4: No linealidad del tipo *hysteresis* con los principales parámetros que la definen.

Dado un ciclo de histéresis nominal, de precarga 5,0 [N.m]⁴ y amplitud adimensional $\mp 0,0005$ ($\mp 0,29^\circ$ aprox.), se varían uno a uno los parámetros mencionados anteriormente.

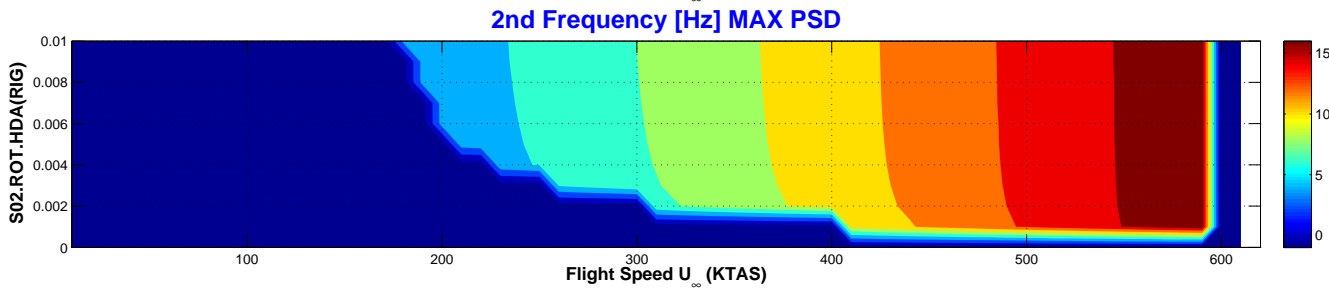
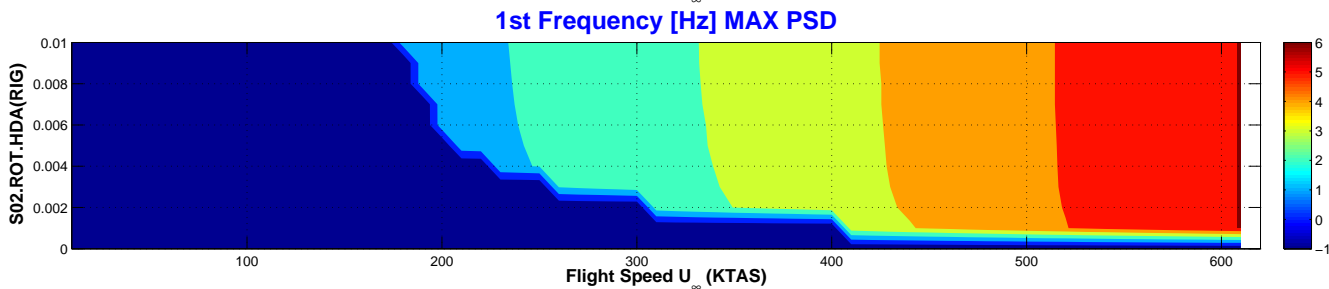
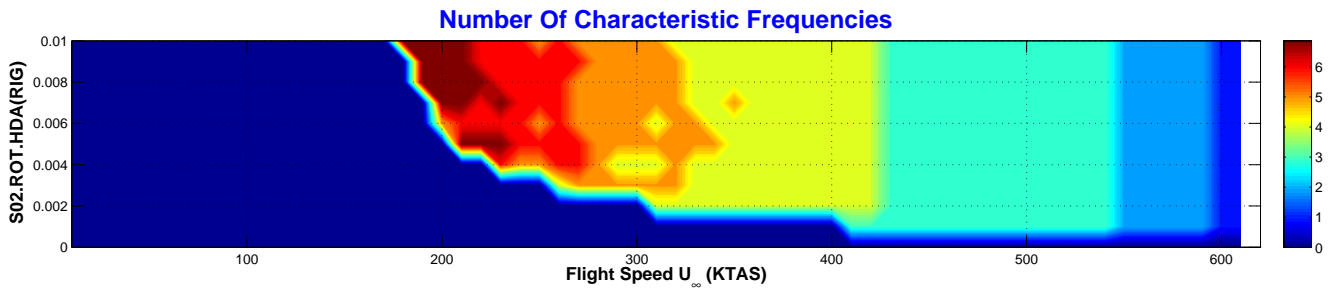
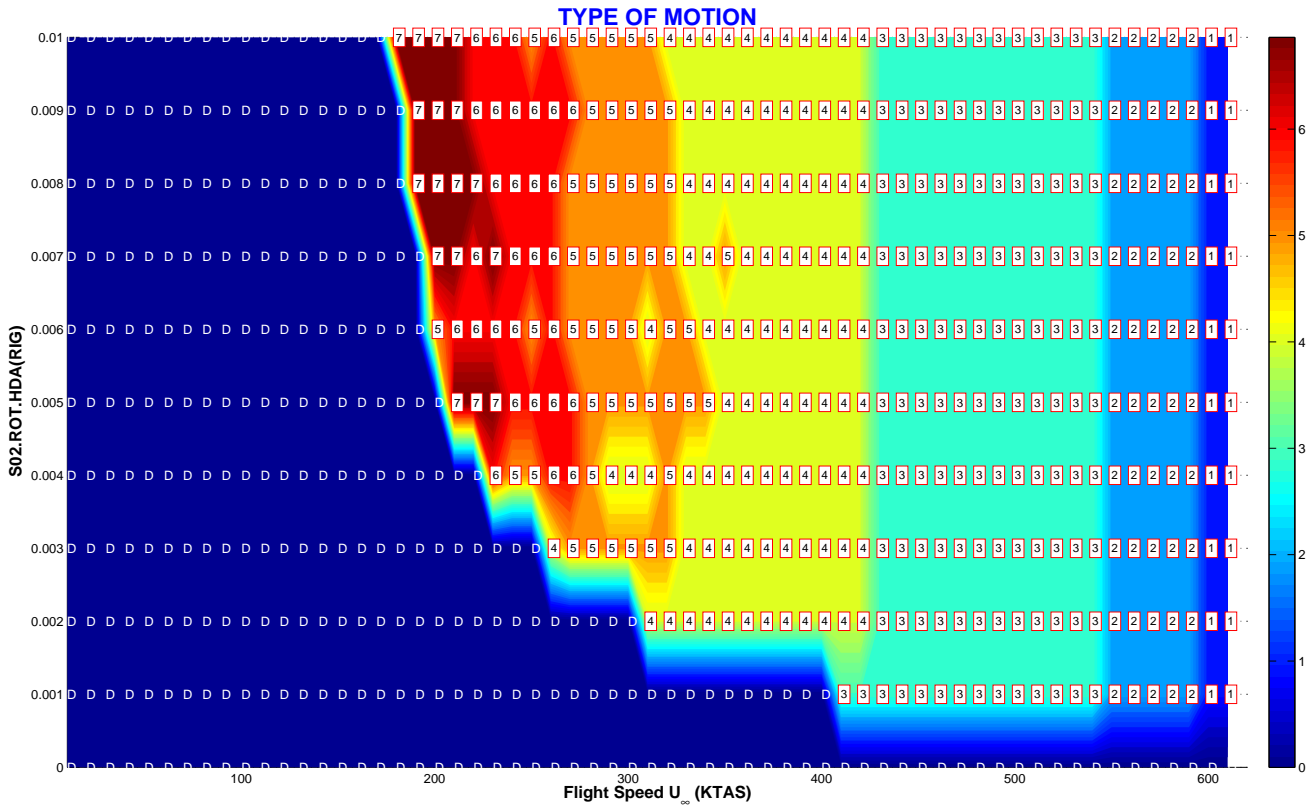
La condición inicial nominal del vector de estado-espacio $\{x\}$ es:

$$\{x(0)\}_{6 \times 1} = \left[\hat{\xi}_1 \quad \hat{\xi}_2 \quad \hat{\xi}_3 \quad \frac{d\hat{\xi}_1}{dt} \quad \frac{d\hat{\xi}_2}{dt} \quad \frac{d\hat{\xi}_3}{dt} \right]^T = \left[+0,015 \quad -0,015 \quad -0,015 \quad 0,0 \quad 0,0 \quad 0,0 \right]^T$$

⁴Recuérdese que la precarga adimensional venía dada por $\hat{F}_0^{NLD} = F_0^{NLD} / m_0 U_0^2 L$.

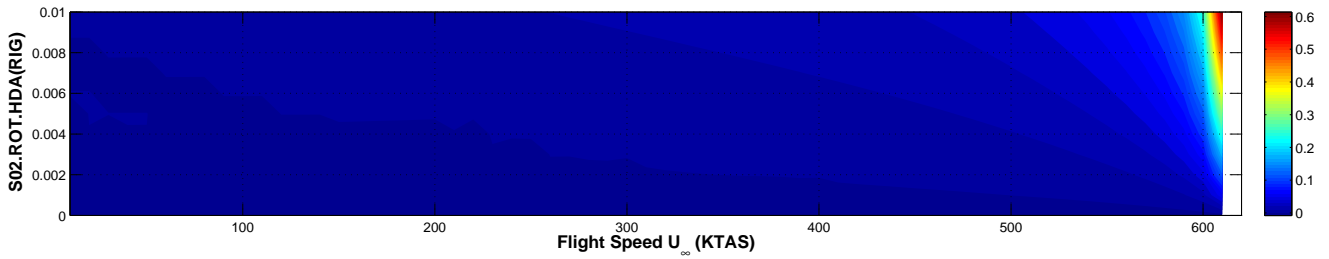
VARIACIÓN DE LA AMPLITUD DE LA HOLGURA

CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S02	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Amplitude (DA)	S02.ROT.HDA	1/4

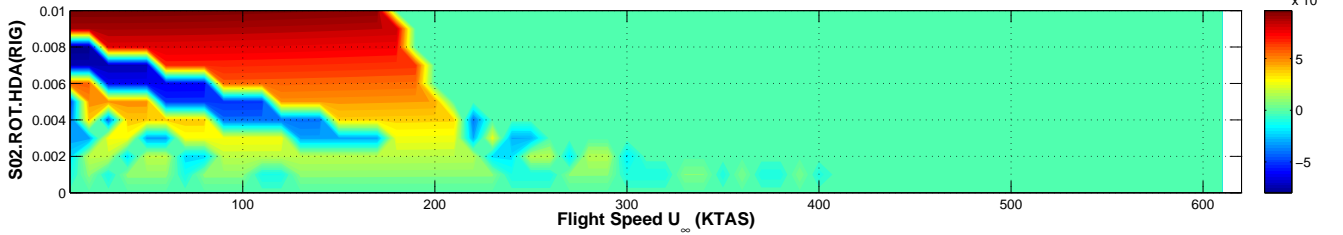


CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S02	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Amplitude (DA)	S02.ROT.HDA	2/4

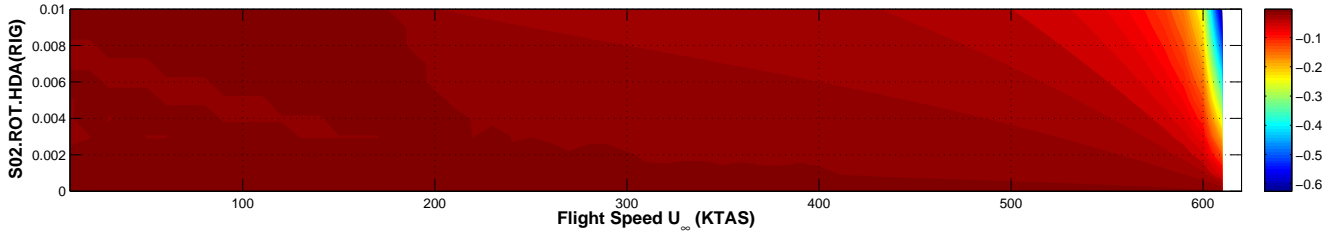
MAXIMUM VALUE



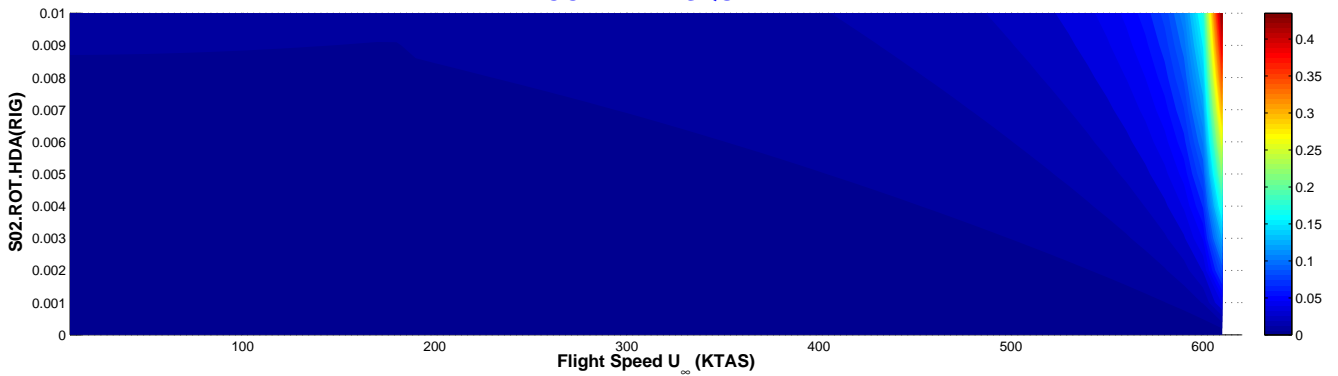
ARITHMETIC MEAN



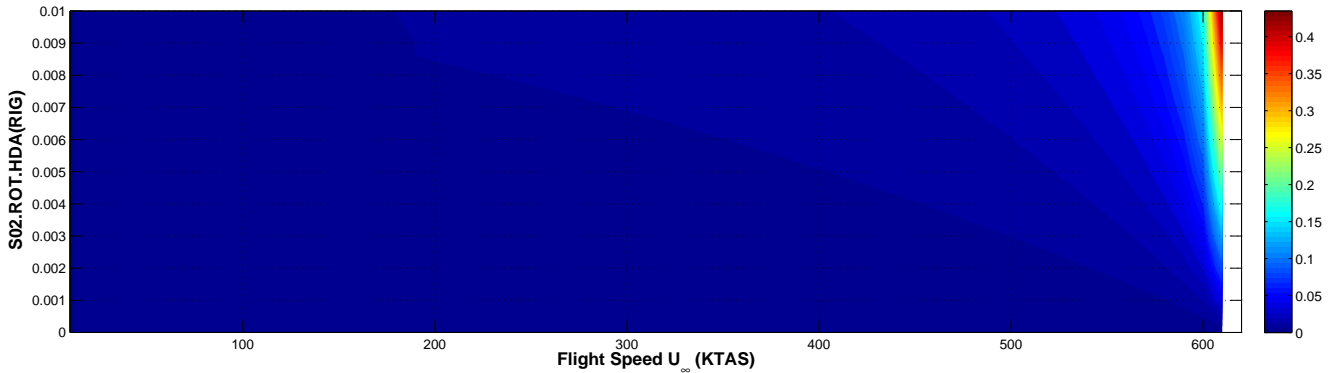
MINIMUM VALUE



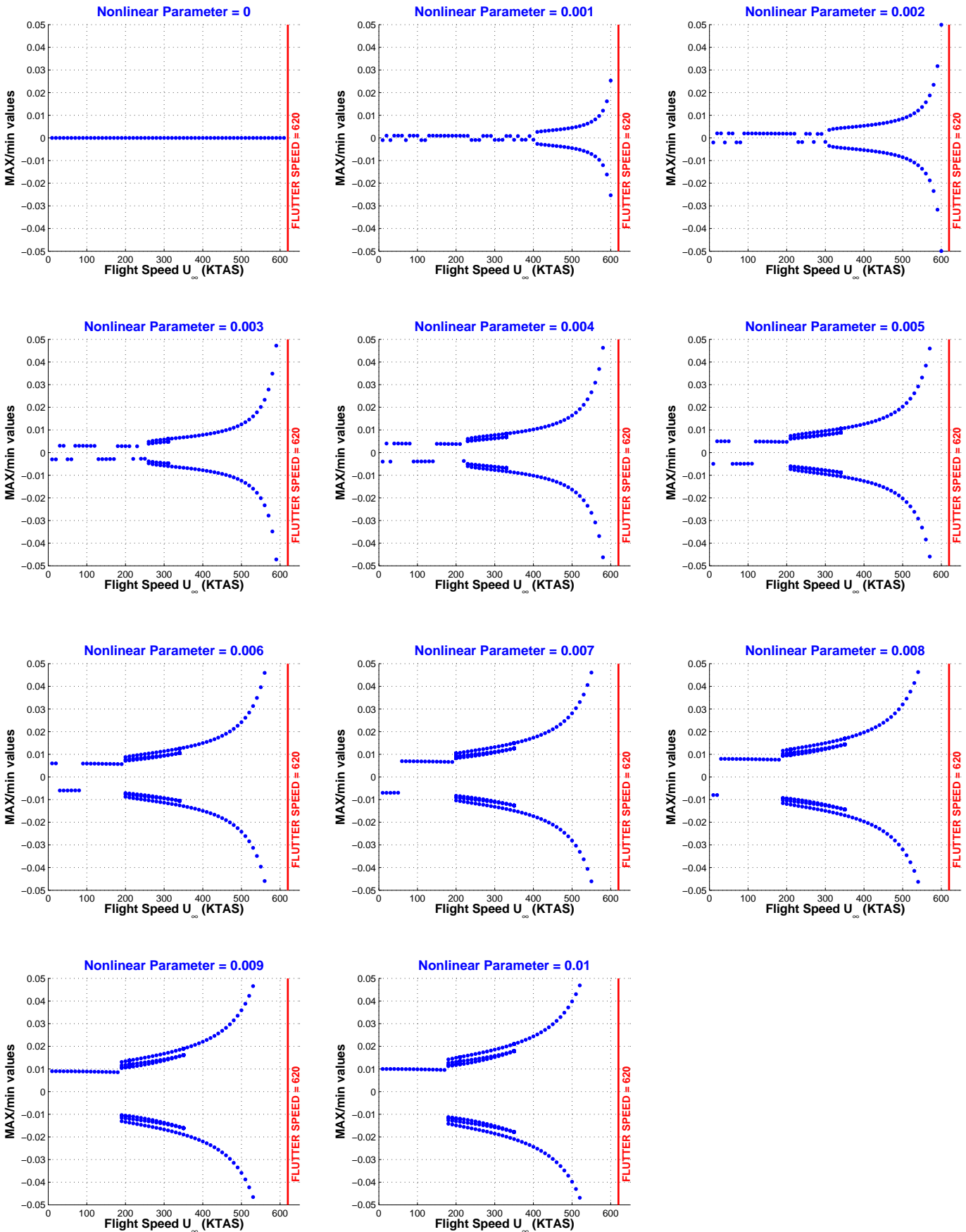
ROOT MEAN SQUARE



STANDARD DEVIATION



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S02	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Amplitude (DA)	S02.ROT.HDA	3/4

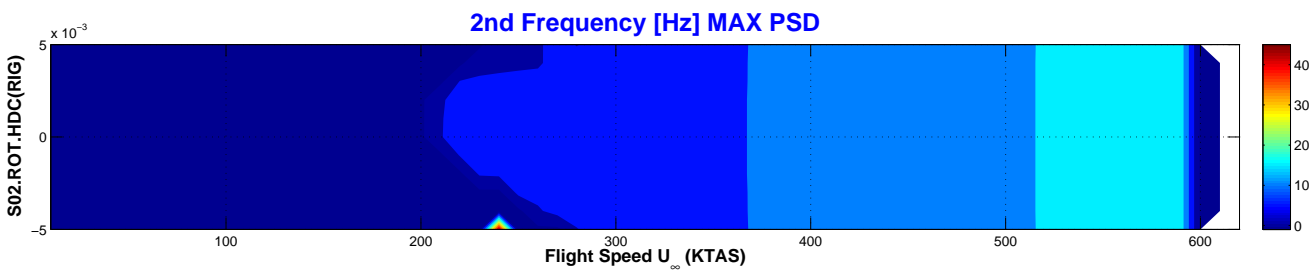
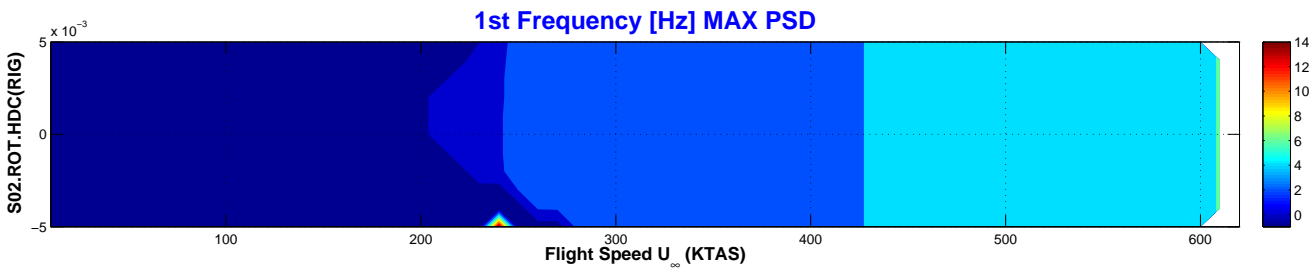
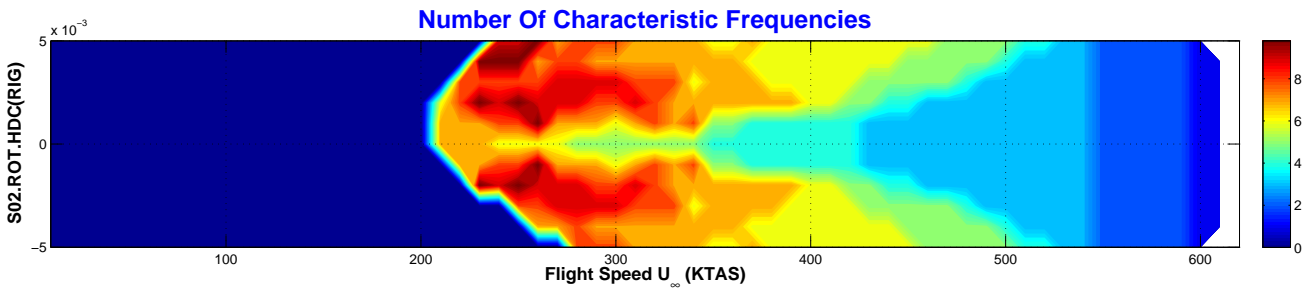
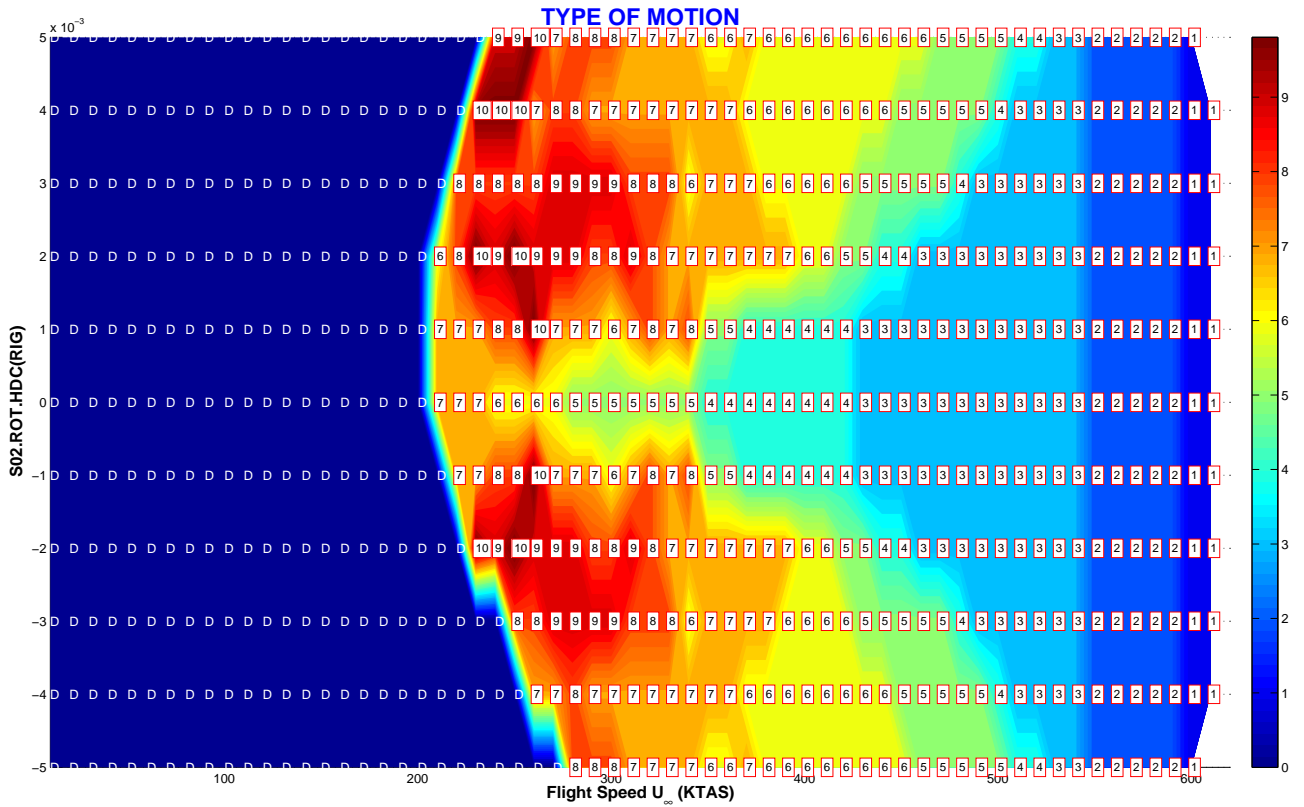


CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S02	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Amplitude (DA)	S02.ROT.HDA	4/4

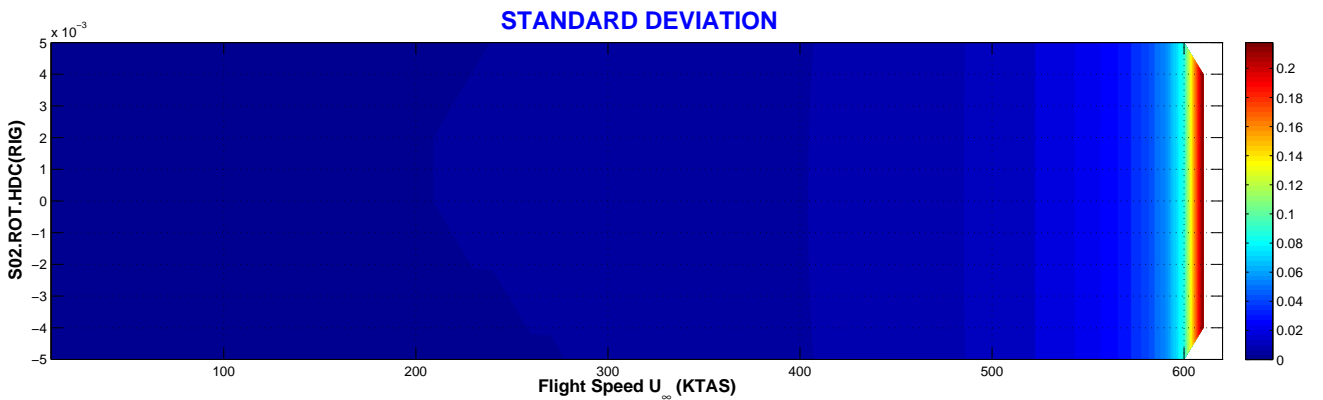
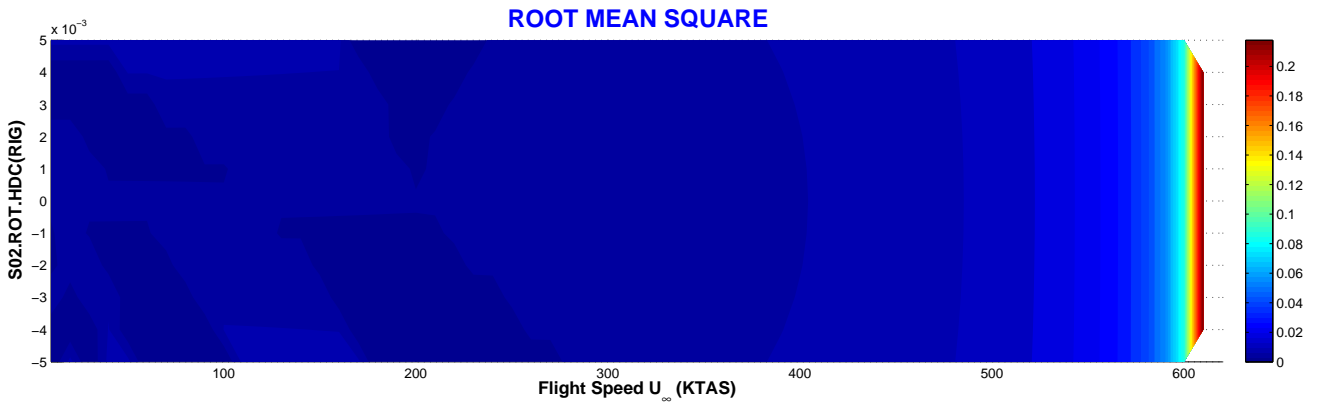
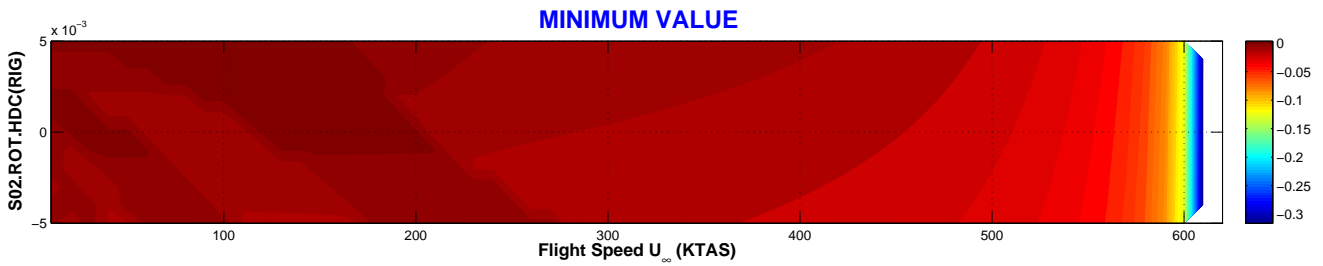
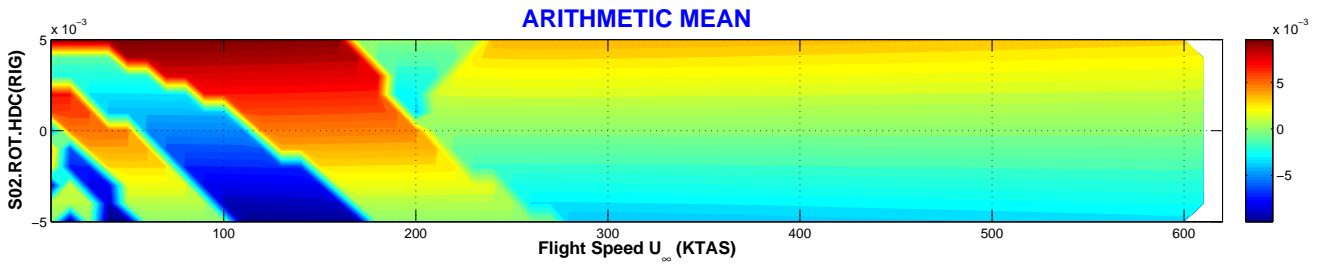
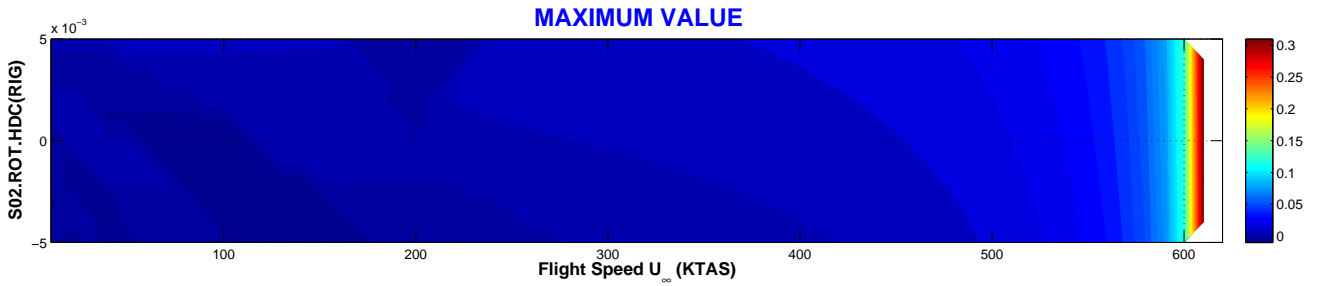
Tipo de Respuesta	DMP	Movimiento amortiguado hasta una velocidad que depende de la holgura. A mayor holgura, menor es la velocidad a la que la respuesta deja de ser amortiguada para pasar a armónica de tipo LCO.
	LCO	Movimiento LCO de distintas frecuencias desde una velocidad que depende de la amplitud de la holgura hasta alcanzar la velocidad de <i>flutter</i> .
	CHA	No existe respuesta de tipo caótico.
	FLT	La velocidad de <i>flutter</i> es 620 KTAS aprox., y es independiente de la holgura de la no linealidad.
Transición entre Tipos de Respuesta	La respuesta evoluciona con la velocidad de vuelo U_∞ de la siguiente forma: DMP-LCO[(7)(6)(5)(4)(3)]-LCO[2]-LCO[1]-FLT. La respuesta armónica compleja, i.e LCO[(7)(6)(5)(4)(3)], depende del valor de la holgura. Para valores altos de la holgura se tiene respuestas con un mayor número de frecuencias características (LCO[7]), mientras que para valores pequeños de la holgura la respuesta tiene un número más reducido de frecuencias características (LCO[3]).	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 616$. KTAS / $VF_{(K=0)} = 0$. KTAS.
	No Lineal	Velocidad de <i>flutter</i> es 620 KTAS aprox., independiente de la amplitud de la holgura.
Variación de la Amplitud	con U_∞	La amplitud está próxima a la rotación de aletas que proporciona momento nulo cuando la respuesta está amortiguada, por lo que no depende de la velocidad de vuelo de forma sensible. A partir de la aparición del movimiento con un mayor número de frecuencias características LCO[(7)(6)(5)(4)(3)], la amplitud aumenta de forma exponencial (aprox.) con la velocidad de vuelo U_∞ .
	con ROT.HDA	A mayor holgura, mayor amplitud del movimiento resultante.
Bifurcaciones	Bifurcación en la transición amortiguado-armónico, i.e., DMP-LCO.	
Flutter onset	Entrada en <i>flutter</i> progresiva a la vista del aumento de la amplitud de las distintas respuestas armónicas LCO[(7)(6)(5)(4)(3)] con la velocidad de vuelo.	

VARIACIÓN DEL CENTRO DE LA NOLINEALIDAD

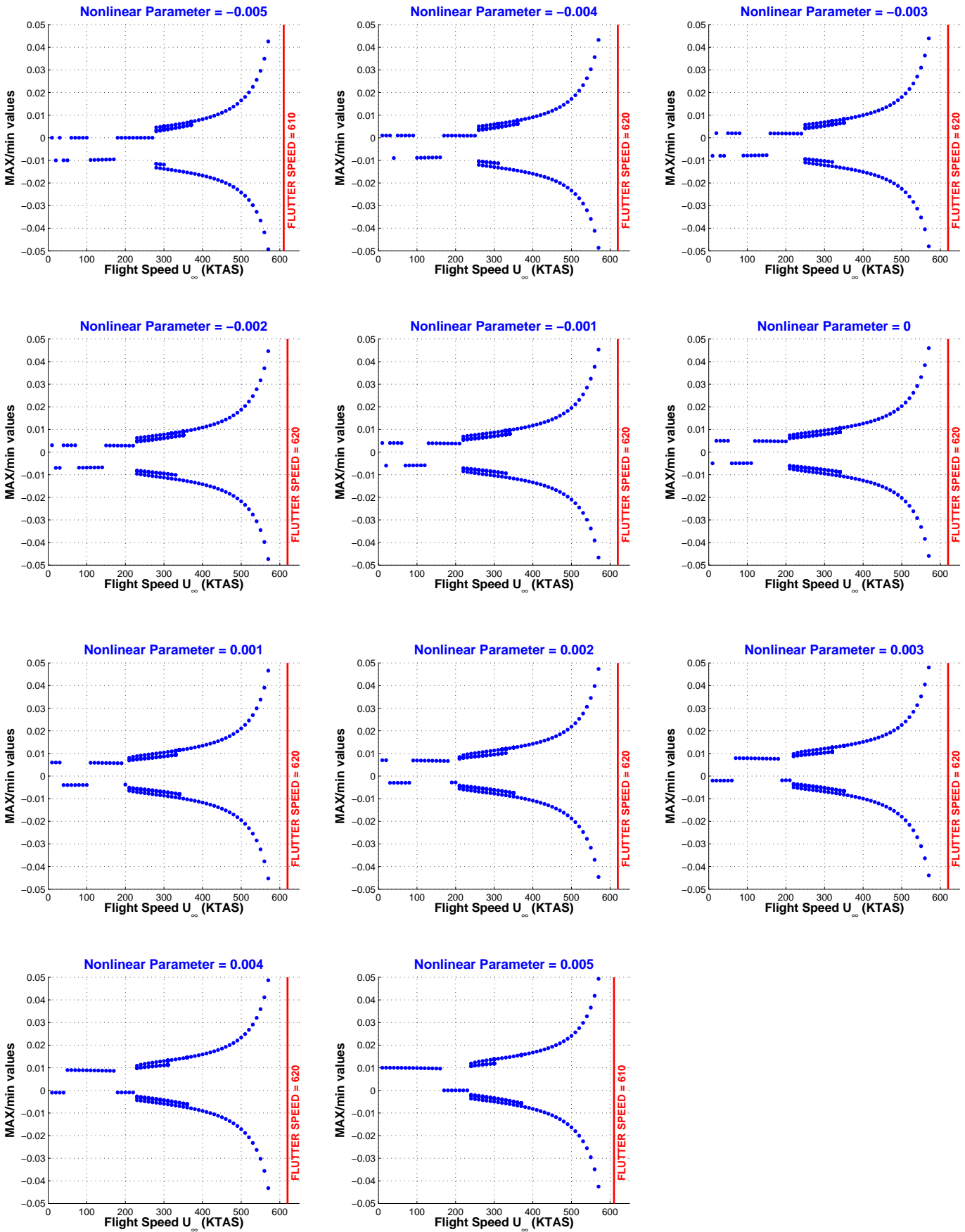
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S02	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Center (DC)	S02.ROT.HDC	1/3



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S02	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Center (DC)	S02.ROT.HDC	2/3



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S02	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Center (DC)	S02.ROT.HDC	3/3



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S02	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Center (DC)	S02.ROT.HDC	4/4

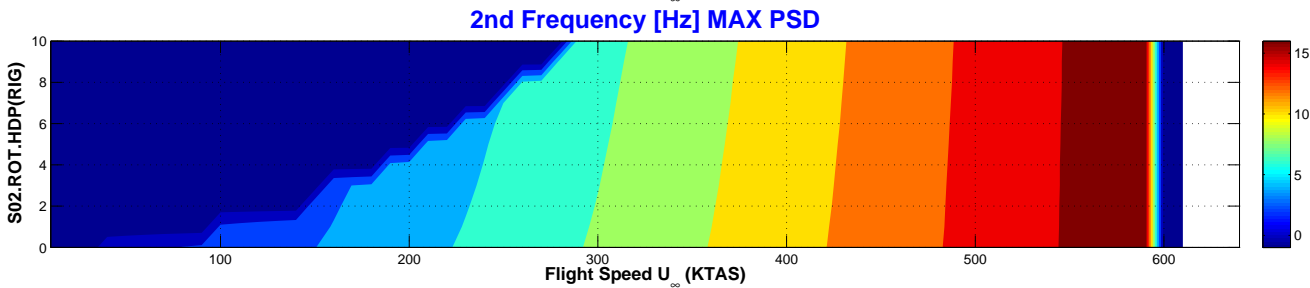
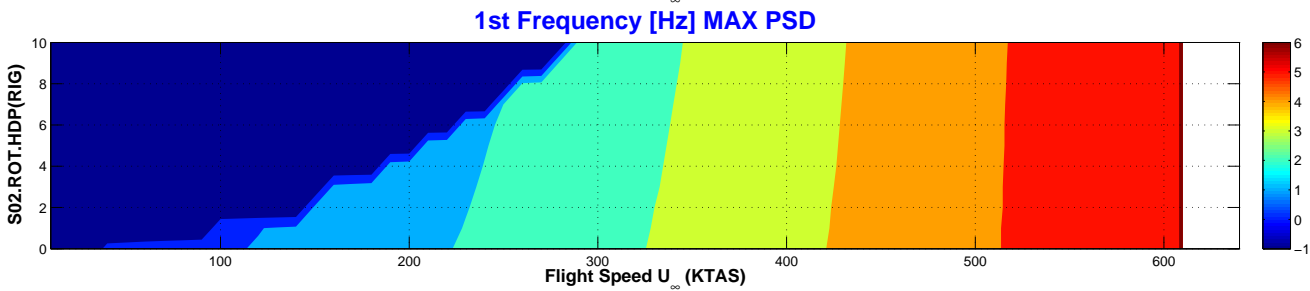
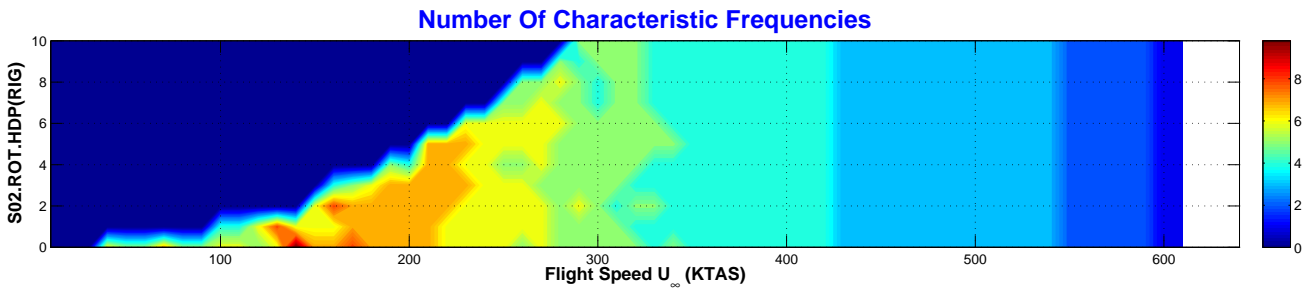
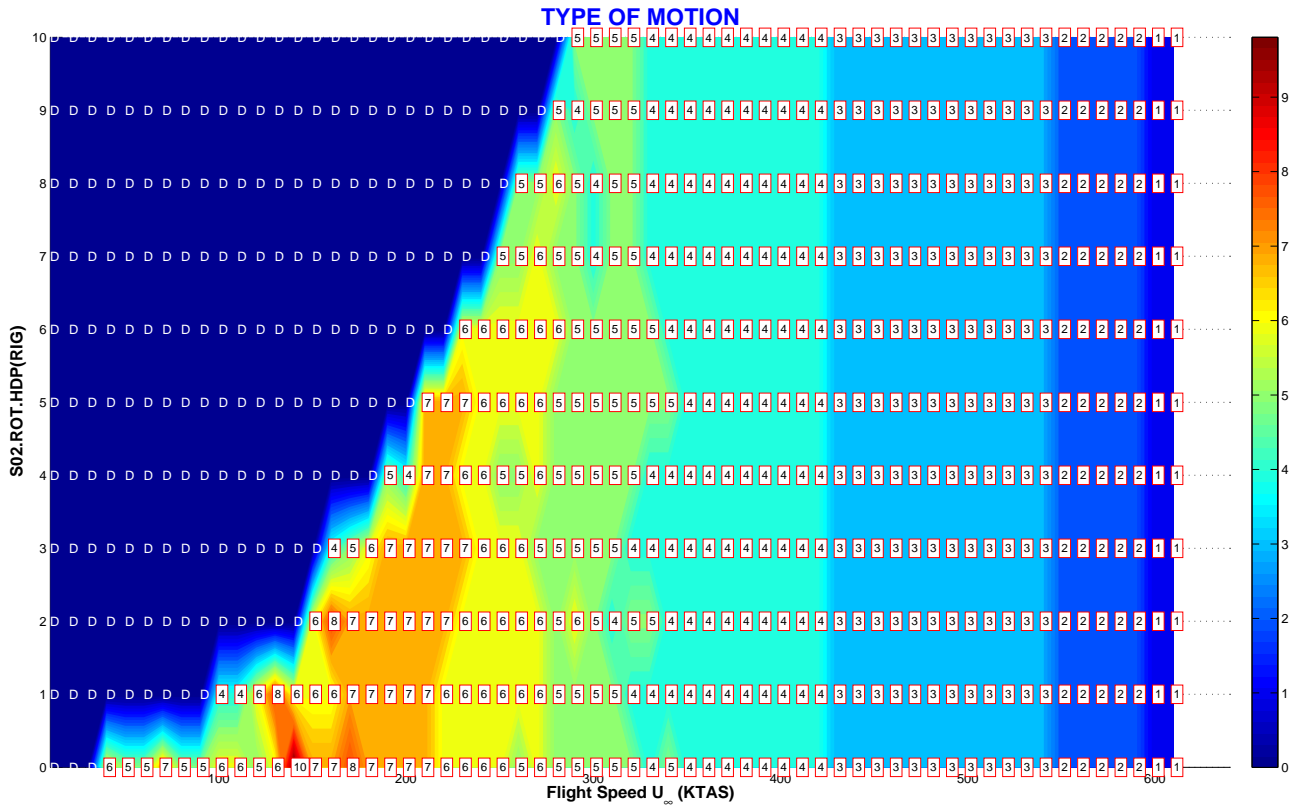
Tipo de Respuesta	DMP	Movimiento amortiguado hasta una velocidad de vuelo en la que aparece respuesta armónica. Esta velocidad depende del descentramiento y oscila entre 210 KTAS para descentramiento nulo y 250 KTAS para un descentramiento de 0,005.
	LCO	Respuesta de tipo armónico con distintas frecuencias características: desde LCO[10], con 10 frecuencias características, hasta un armónico LCO[1] justo antes de llegar a la velocidad de <i>flutter</i> .
	CHA	No existe respuesta de tipo caótico.
	FLT	La velocidad de <i>flutter</i> es 620 KTAS aproximadamente, y es independiente del centro de la no linealidad.
Transición entre Tipos de Respuesta	La respuesta evoluciona con la velocidad de vuelo U_∞ de la siguiente forma: DMP-LCO[(10) a (3)]-LCO[2]-LCO[1]-FLT. El primer movimiento de tipo armónico aparece a una velocidad mayor a medida que se descentra la no linealidad. Este tipo de respuesta con un número elevado de frecuencias características (entre 10 y 6) evoluciona con la velocidad de vuelo disminuyendo su complejidad y por tanto reduciéndose el número de frecuencias características hasta llegar a LCO[3] (3 frecuencias características). Este último tipo de respuesta armónica LCO[3] se mantiene hasta una velocidad de 540 KTAS independiente del centro de la no linealidad. A 540 KTAS cambia de LCO[3] a LCO[2] que se mantiene hasta la velocidad de 600 KTAS (de nuevo independiente del centro de la no linealidad), velocidad a la que aparece un LCO[1] con frecuencia característica la del mecanismo de <i>flutter</i> .	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 616$. KTAS / $VF_{(K=0)} = 0$. KTAS.
	No Lineal	Velocidad de <i>flutter</i> es 620 KTAS independiente del centro de la no linealidad.
Variación de la Amplitud	con U_∞	A velocidades bajas, la respuesta amortiguada tiene una amplitud constante con la velocidad. Una vez que empieza el movimiento armónico, la amplitud aumenta exponencialmente con la velocidad.
	con ROT.HDC	La amplitud de la respuesta no depende apreciablemente del centro de la no linealidad.
Bifurcaciones	Bifurcación de tipo Hopf en la transición de amortiguada a LCO (DMP-LCO).	
Flutter onset	Entrada en <i>flutter</i> progresiva a la vista del aumento de la amplitud de los distintos del LCOs con la velocidad de vuelo.	

NOTA:

Las respuestas armónicas más complejas (mayor número de frecuencias características) corresponden a baja amplitud, de forma que la rotación de las aletas oscilan en torno a las cuatro esquinas del tramo central del ciclo de *hysteresis*. A medida que aumenta la velocidad de vuelo (a partir de unos 350 KTAS), aumenta la amplitud de la respuesta, el sistema *escapa* del tramo central de la *hysteresis* y la respuesta es más simple.

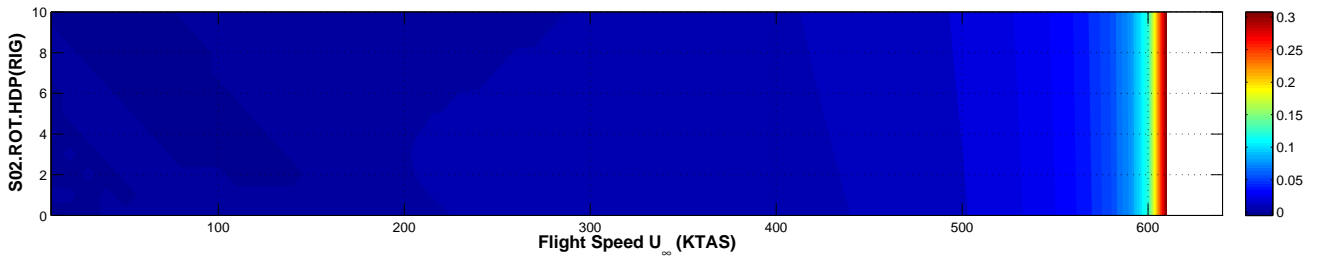
VARIACIÓN DE LA PRECARGA

CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S02	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Preload (DP)	S02.ROT.HDP	1/4

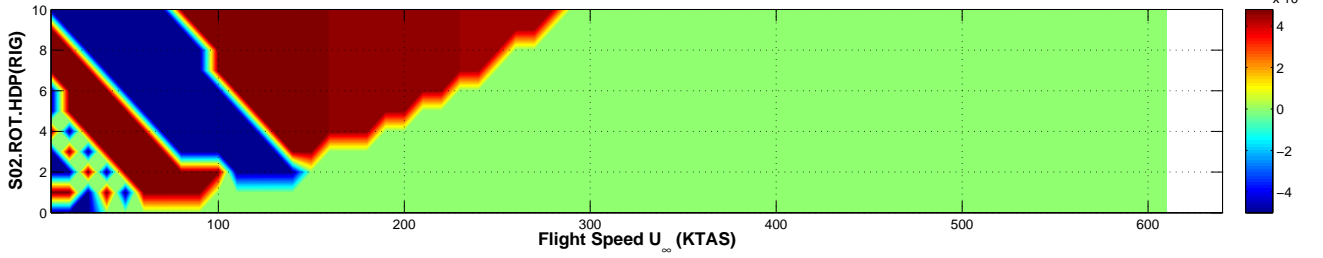


CONFIG	Nonlinear DoF	NONLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S02	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Preload (DP)	S02.ROT.HDP	2/4

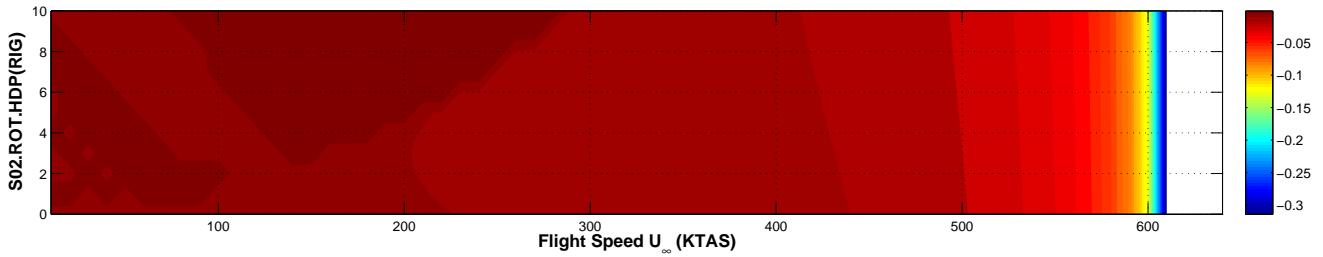
MAXIMUM VALUE



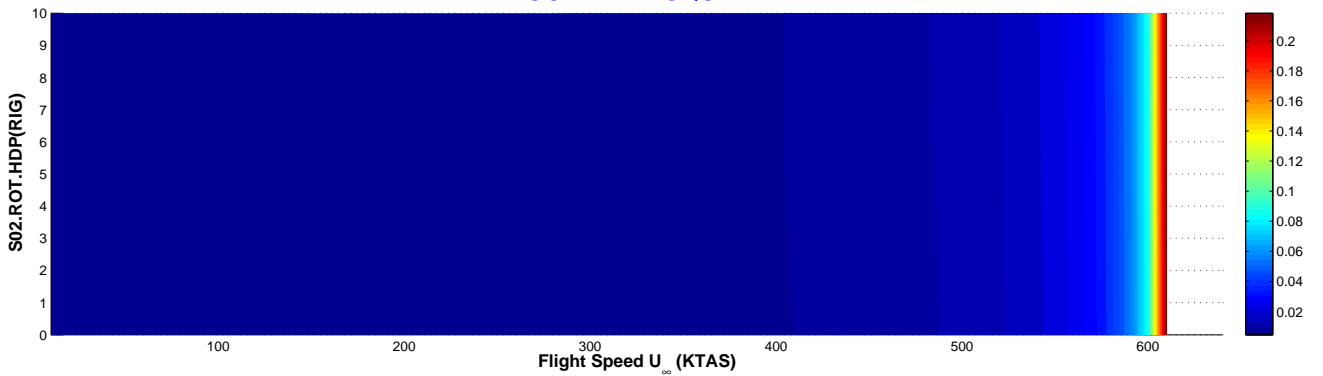
ARITHMETIC MEAN



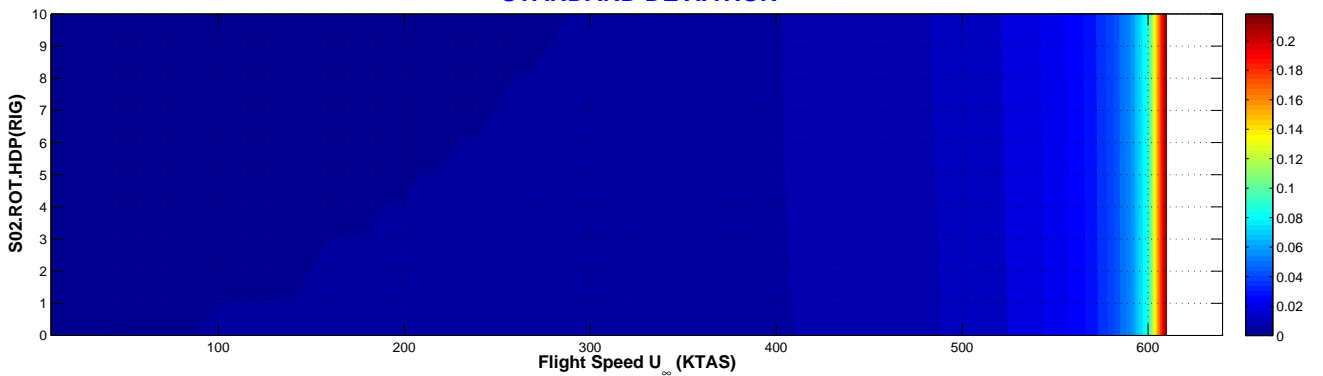
MINIMUM VALUE



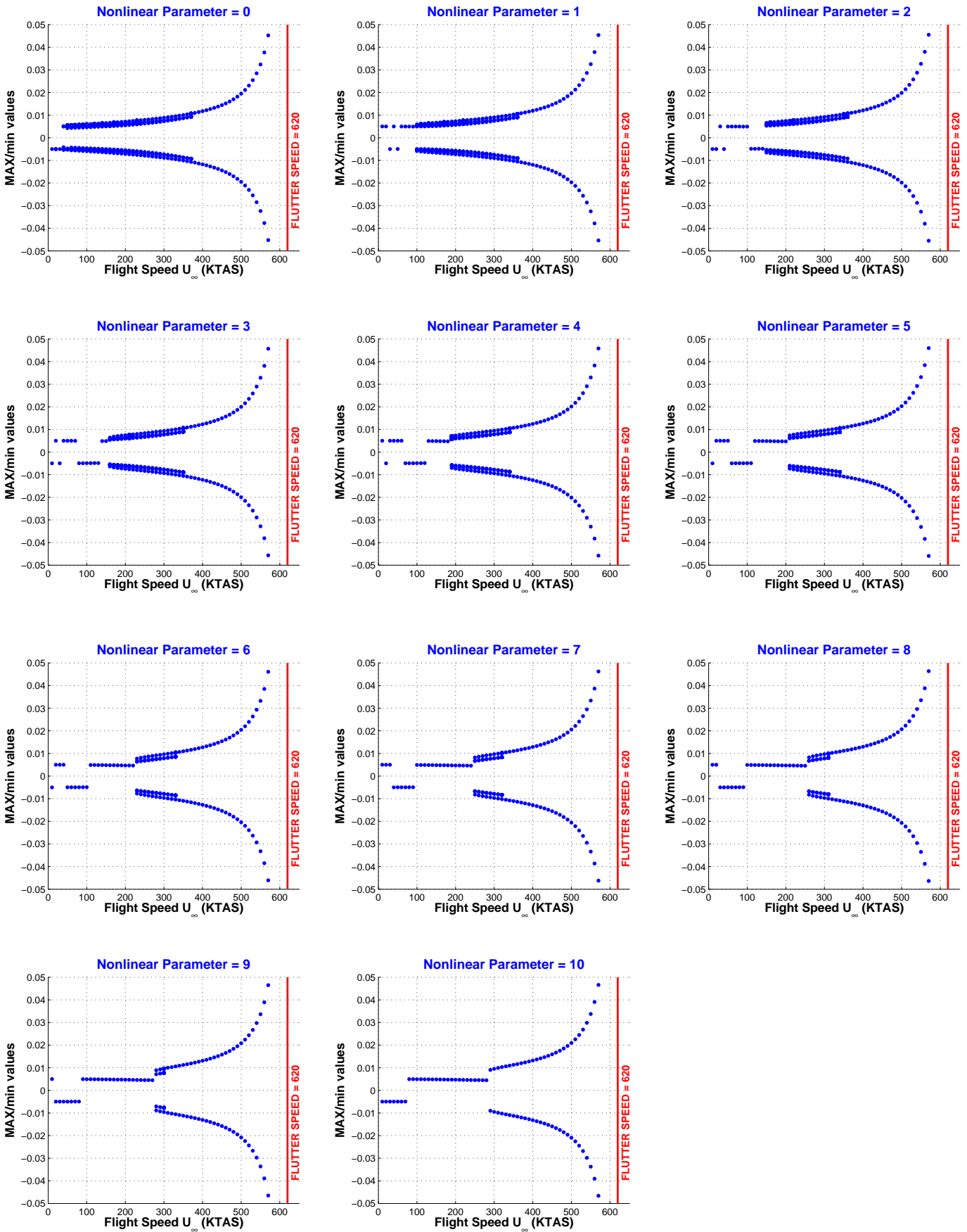
ROOT MEAN SQUARE



STANDARD DEVIATION



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S02	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Preload (DP)	S02.ROT.HDP	3/4



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S02	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Preload (DP)	S02.ROT.HDP	4/4

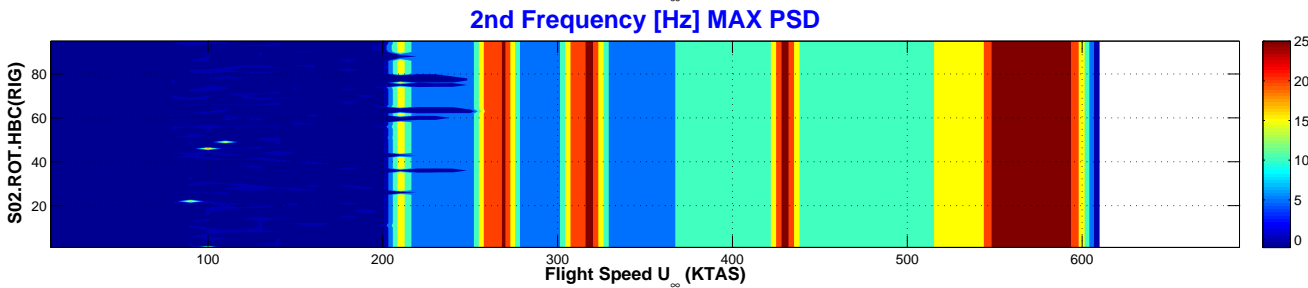
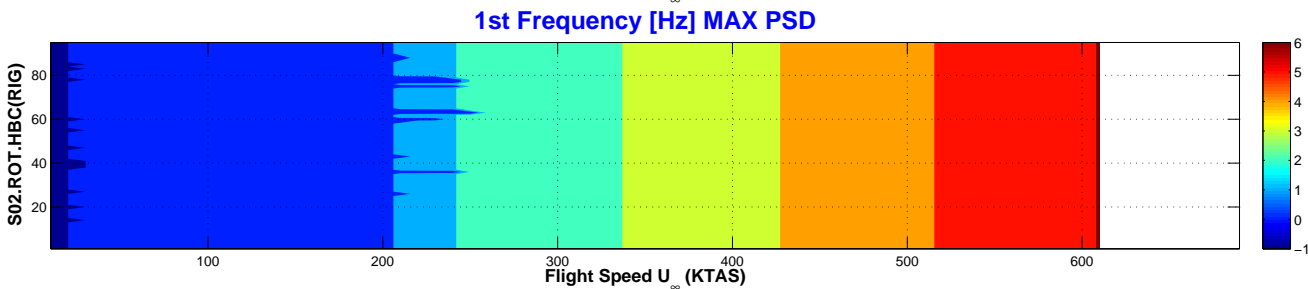
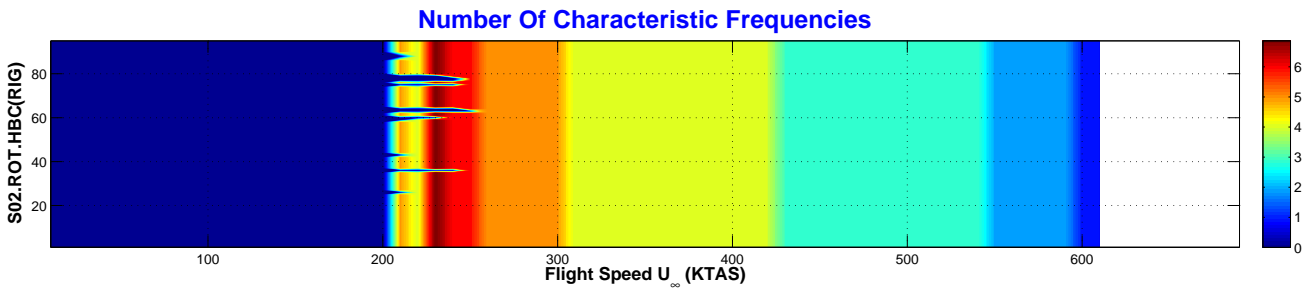
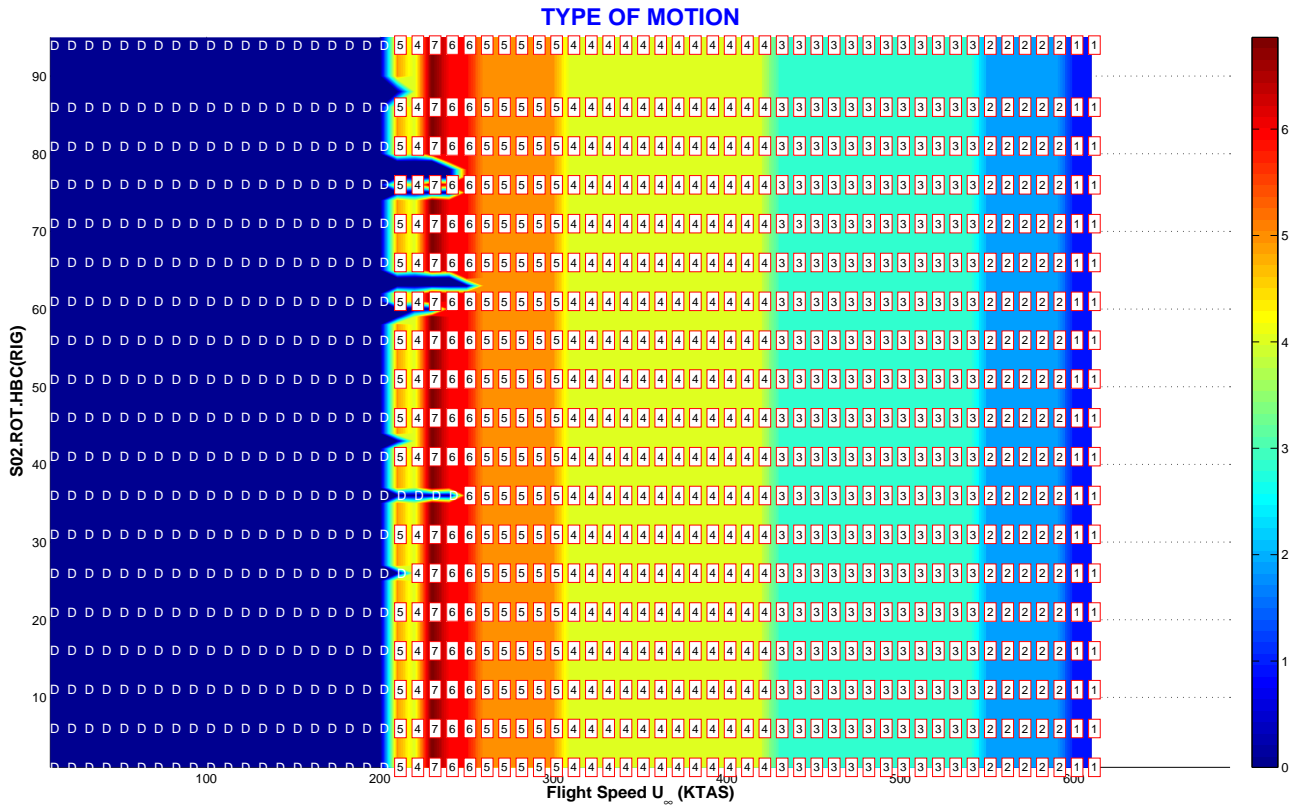
Tipo de Respuesta	DMP	Movimiento amortiguado hasta una velocidad que depende de la precarga de la no linealidad. Cuanto mayor es la precarga, mayor es la velocidad de vuelo a la que aparecen las oscilaciones LCOs.
	LCO	Aparece desde una velocidad que depende de la precarga hasta la velocidad de <i>flutter</i> . La respuesta es de tipo armónico no amortiguado (LCO) con distinto número de frecuencias características.
	CHA	No existe respuesta de tipo caótica.
	FLT	Entrada en <i>flutter</i> a la velocidad de 620 KTAS independiente de la precarga de la no linealidad.
Transición entre Tipos de Respuesta	La respuesta evoluciona con la velocidad de vuelo U_∞ de la siguiente forma: DMP-LCO[(7)-(6)-(5)]-LCO[4]-LCO[3]-LCO[2]-LCO[1]-FLT. Los LCOs más complejos, es decir, con un mayor número de frecuencias características (LCO[7], LCO [6] ó LCO[5]), aparecen con precargas menores. A medida que aumenta la precarga, los LCOs tienen menos frecuencias características. Otra característica es que el tránsito entre dos LCOs con distintos números de frecuencias características ocurre a unas velocidades de vuelo independientes de la precarga de la no linealidad.	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 616$. KTAS / $VF_{(K=0)} = 0$. KTAS.
	No Lineal	La velocidad de <i>flutter</i> no lineal es 620 KTAS aproximadamente, y es independiente de la precarga de la no linealidad de tipo histéresis.
Variación de la Amplitud	con U_∞	Una vez alcanzada la velocidad de vuelo en la que aparecen los LCOs, la amplitud de la respuesta aumenta de forma exponencial con la velocidad de vuelo.
	con ROT.HDP	La precarga de la no linealidad de tipo histéresis no afecta a la amplitud de la respuesta.
Bifurcaciones	Bifurcación de amortiguado a LCO (DMP-LCO) a una velocidad que depende de la precarga de la no linealidad.	
Flutter onset	Entrada en <i>flutter</i> progresiva a la vista del aumento de la amplitud de los distintos del LCOs con la velocidad de vuelo.	

NOTA:

Para cada velocidad en la que la respuesta es amortiguada, la simulación en el tiempo revela que el misil realiza una maniobra con velocidad angular constante (guiñada o ángulo de ataque en el problema longitudinal) y aceleración lineal constante (movimiento lateral o *heaving* en el problema longitudinal). Esto corresponde a una fuerza de aletas constante que se confirma con la comprobación de que el ángulo de ataque local no varía a partir de un cierto instante.

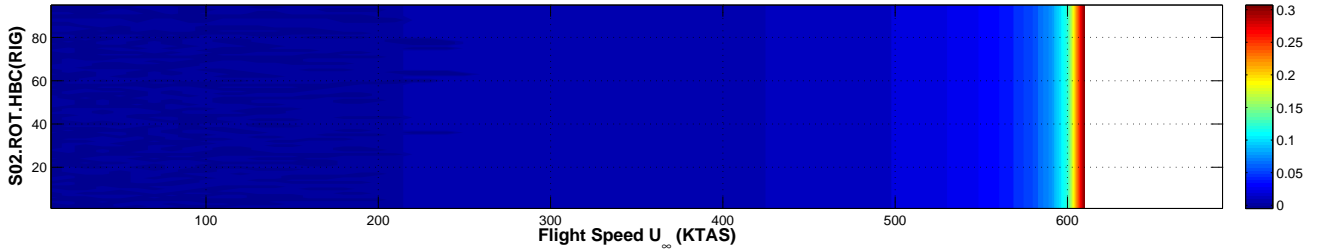
VARIACIÓN DE LAS CONDICIONES INICIALES

CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S02	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Boundary Conditions (BC)	S02.ROT.HBC	1/3

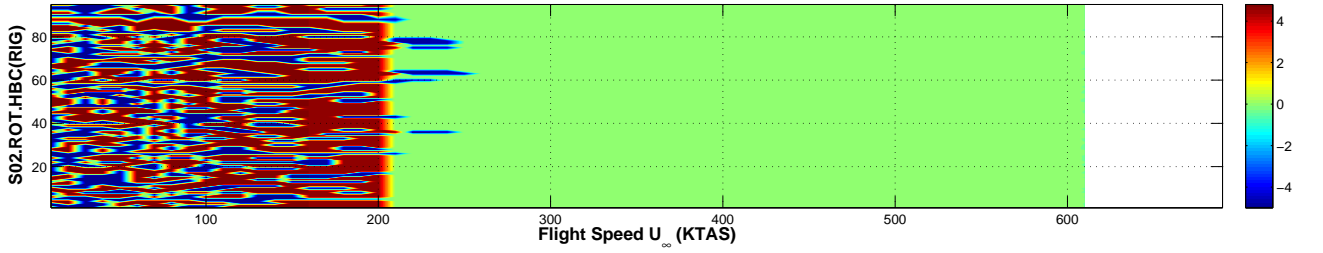


CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S02	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Boundary Conditions (BC)	S02.ROT.HBC	2/3

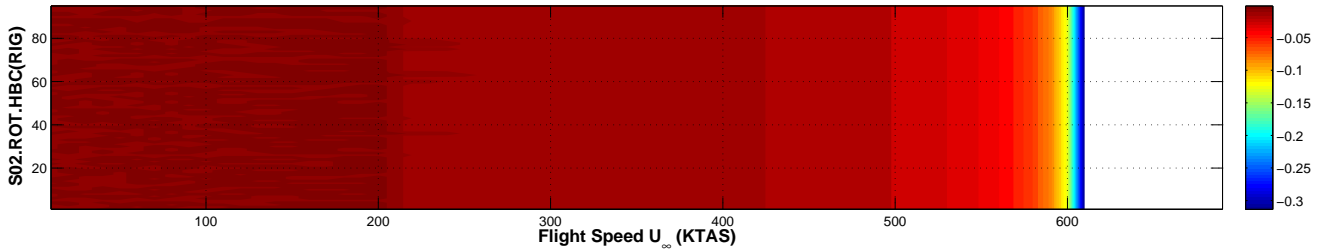
MAXIMUM VALUE



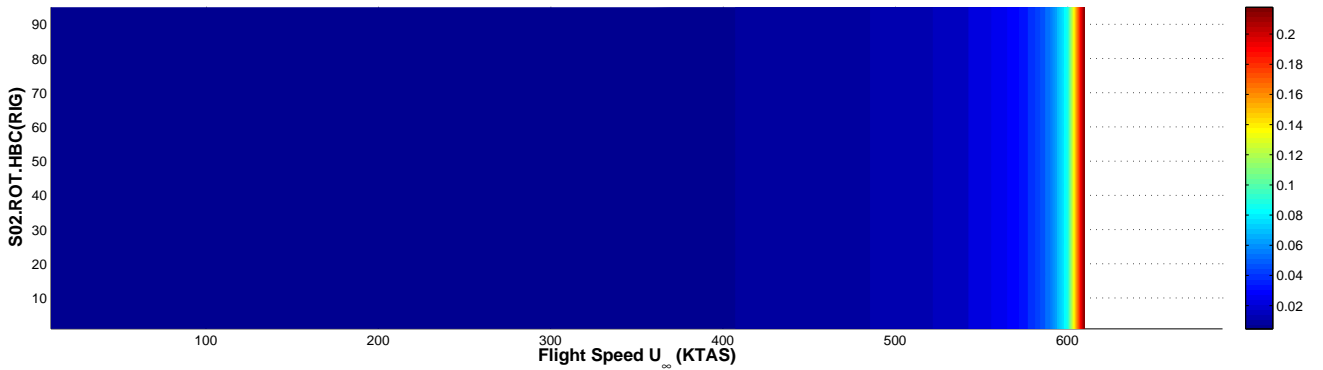
ARITHMETIC MEAN



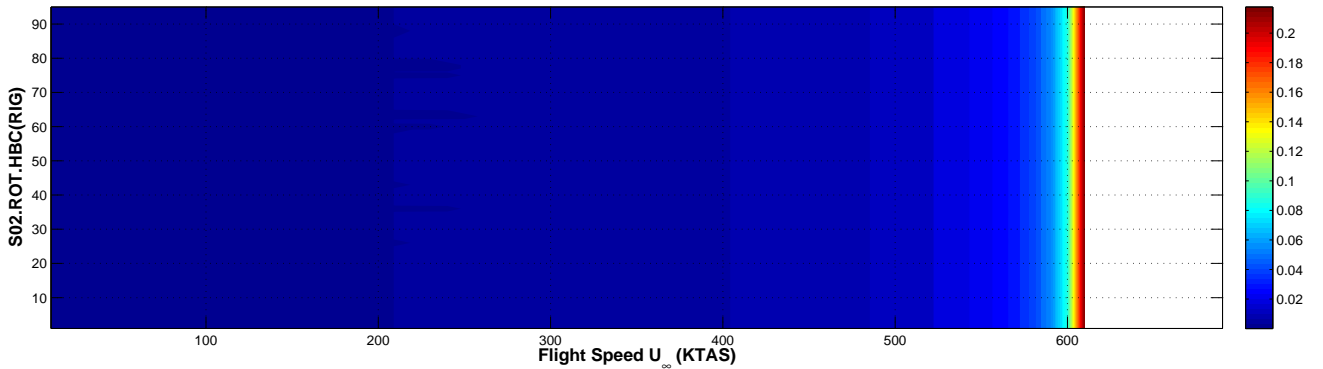
MINIMUM VALUE



ROOT MEAN SQUARE



STANDARD DEVIATION



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
RIG.S02	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Preload (DP)	S02.ROT.HBC	3/3

Tipo de Respuesta	DMP	Respuesta amortiguada a velocidades de vuelo inferiores a 200 KTAS, independiente de las condiciones iniciales.
	LCO	Respuesta armónica no amortiguada con distinto número de frecuencias características, en el rango de velocidades de 200 a 610 KTAS. El tipo de respuesta y el rango de velocidades es independiente de las condiciones iniciales.
	CHA	No existe respuesta de tipo caótica.
	FLT	Respuesta divergente <i>flutter</i> a 610 KTAS, independiente de las condiciones iniciales
Transición entre Tipos de Respuesta	La respuesta evoluciona de la siguiente forma: DMP-LCO[5-1]-FLT. La velocidad de vuelo en la que ocurre la transición entre los distintos tipos de respuesta no depende de las condiciones iniciales.	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 616. \text{ KTAS} / VF_{(K=0)} = 0. \text{ KTAS}.$
	No Lineal	Velocidad de <i>flutter</i> es 610 KTAS aprox., independiente de las condiciones iniciales.
Variación de la Amplitud	con U_{∞}	Una vez alcanzada la velocidad de vuelo a la que aparecen los LCOs, la amplitud de la respuesta aumenta a medida que se incrementa la velocidad de vuelo U_{∞} . La velocidad de crecimiento de la amplitud de la respuesta es independiente de las condiciones iniciales.
	con ROT.HBC	N/A
Bifurcaciones	Bifurcación de tipo <i>Hopf</i> en la transición DMP-LCO[5], que ocurre a la velocidad de 200 KTAS, independiente de las condiciones iniciales.	
Flutter onset	Entrada en <i>flutter</i> previsible a la vista del aumento de la amplitud de la respuesta a medida que la velocidad de vuelo se acerca a la de <i>flutter</i> . La velocidad de <i>flutter</i> es independiente de las condiciones iniciales.	

10.4. Estructura (FLE) / Soportado (S02)

En esta sección se detallan los resultados para la configuración de misil flexible con 4 modos (modo lateral, modo de guiñada, modo de rotación de aletas y 1ª flexión lateral del misil) con condiciones de contorno correspondientes a vuelo equilibrado, i.e., soportado **S02**.

La no linealidad de tipo *hysteresis* se considera localizada en la rotación de las aletas (**ROT**). Por otro lado, se varían distintos parámetros de la no linealidad tipo *hysteresis*: **HDA** corresponde a la variación de la amplitud de la holgura, **HDC** corresponde a la variación del centro de la no linealidad, **HDP** corresponde a la variación de la precarga de la no linealidad y, por último, **HBC** indica variación de las condiciones iniciales.

La tabla 10.3 resume las configuraciones de estudio y la sección en la que se incluyen los resultados.

SECCIÓN	CONFIGURACIÓN
10.4	FLE.S02.ROT.HDA
	FLE.S02.ROT.HDC
	FLE.S02.ROT.HDP
	FLE.S02.ROT.HBC

Tabla 10.3: Configuraciones de estudio para el misil **FLE** (modelo estructural de misil flexible) con soportado **S02** (vuelo libre equilibrado).

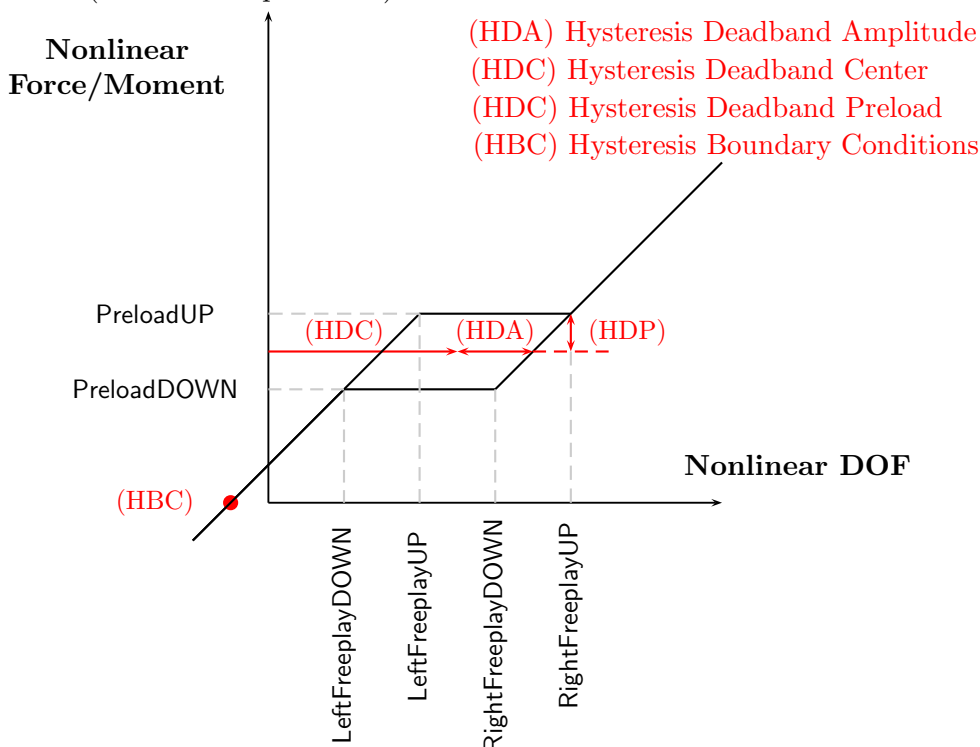


Figura 10.5: No linealidad del tipo *hysteresis* con los principales parámetros que la definen.

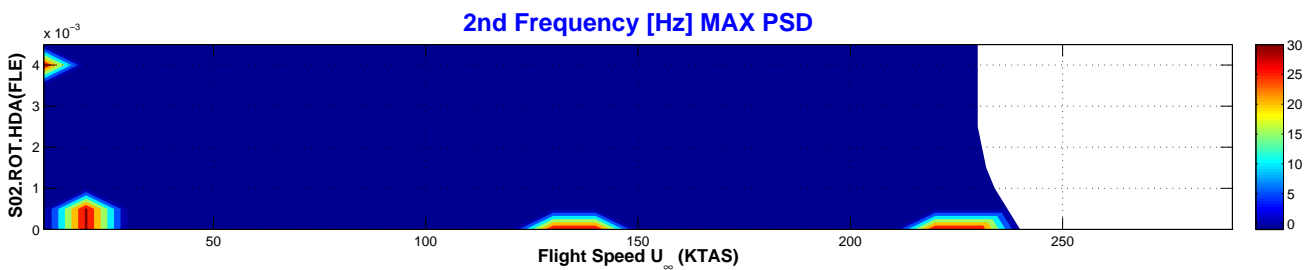
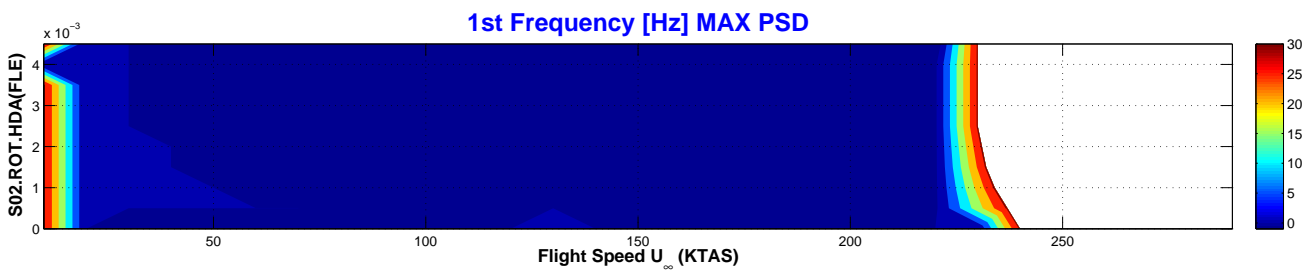
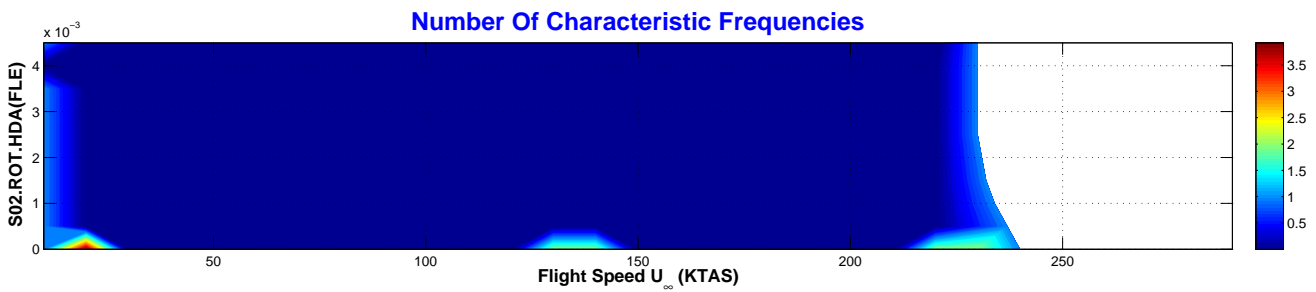
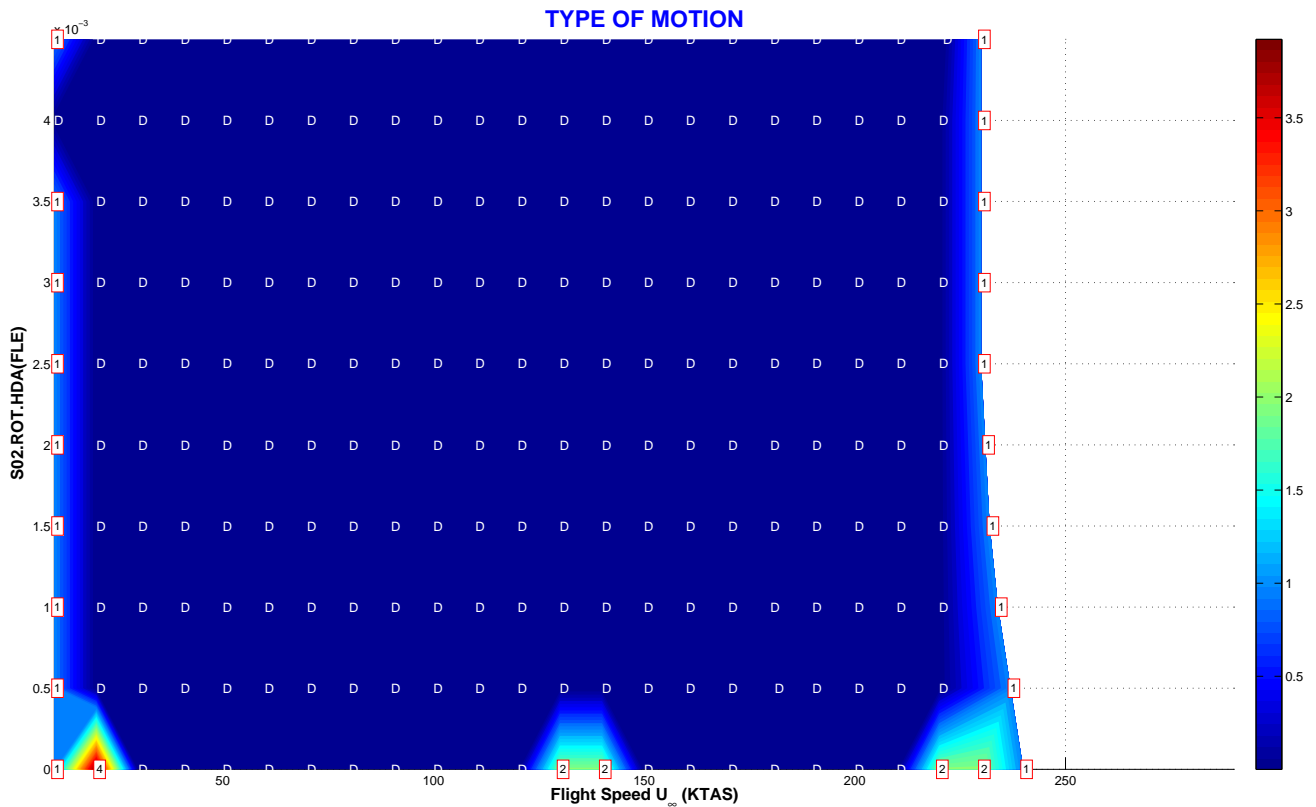
Dado un ciclo de histéresis nominal, de precarga 5,0 [N.m]⁵ y amplitud adimensional $\mp 0,005$ ($\simeq 0,29$ [deg]), se varía uno a uno los parámetros mencionados anteriormente. La condición inicial nominal del vector de estado-espacio $\{x\}$ es:

$$\{x(0)\}_{8 \times 1} = \left[\hat{\xi}_1 \quad \hat{\xi}_2 \quad \hat{\xi}_3 \quad \hat{\xi}_4 \quad \frac{d\hat{\xi}_1}{d\hat{t}} \quad \frac{d\hat{\xi}_2}{d\hat{t}} \quad \frac{d\hat{\xi}_3}{d\hat{t}} \quad \frac{d\hat{\xi}_4}{d\hat{t}} \right]^T = \left[1,30 \quad 0,0 \quad 0,117 \quad 0,238 \quad 1,0 \quad 1,0 \quad 1,0 \quad 1,0 \right]^T$$

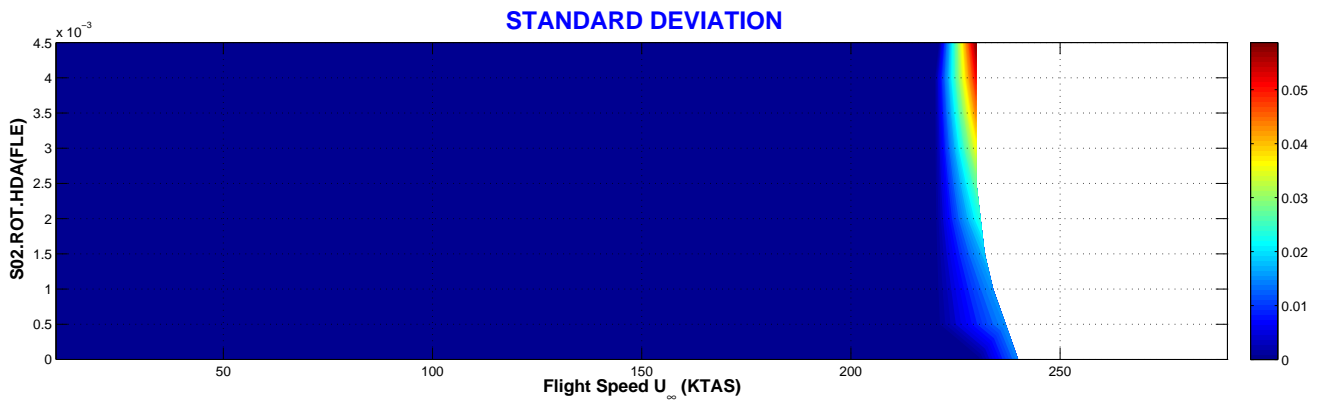
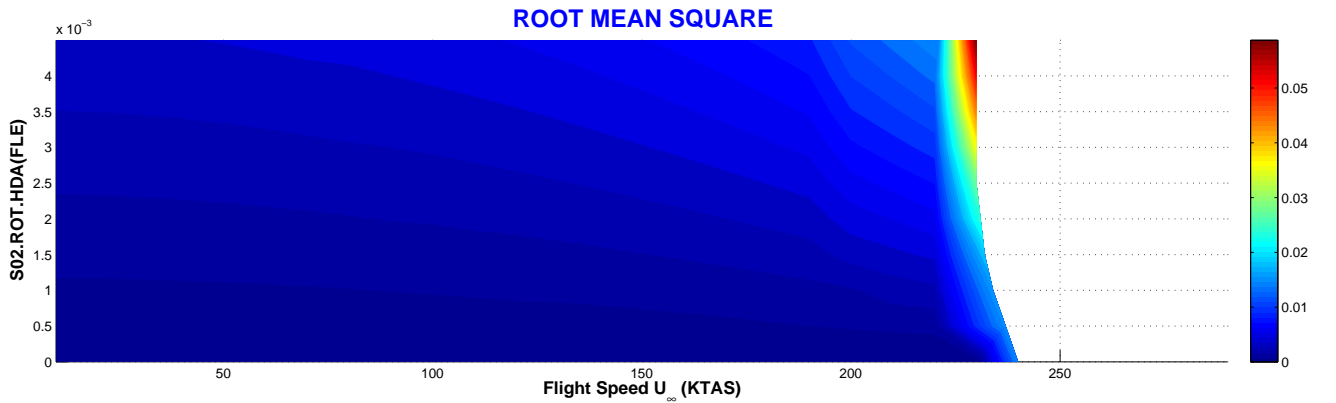
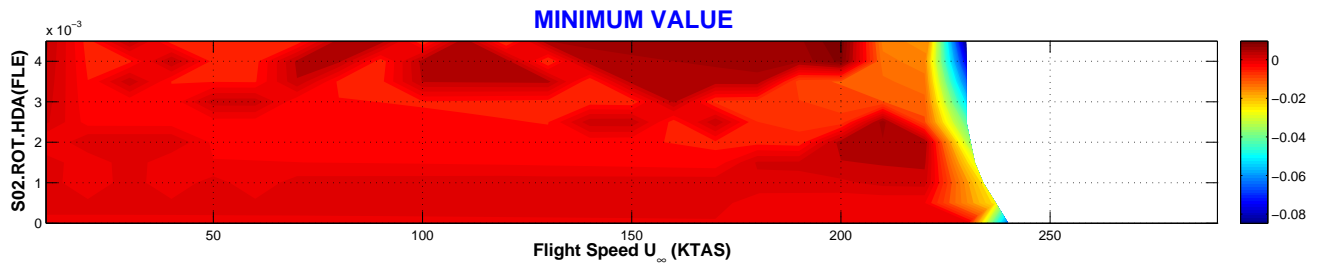
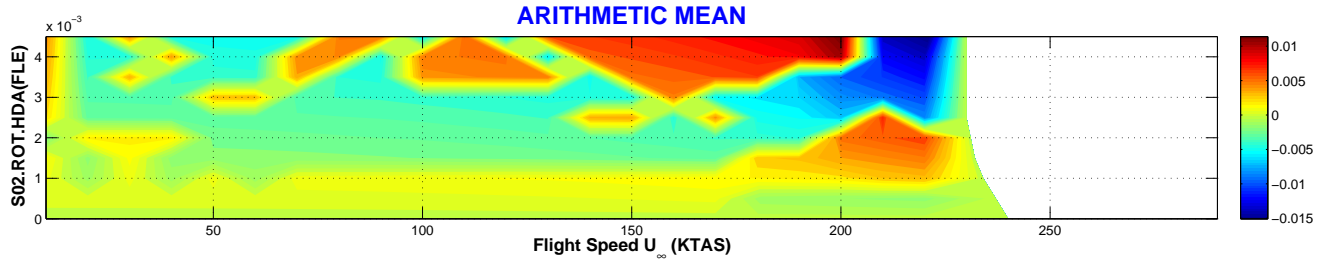
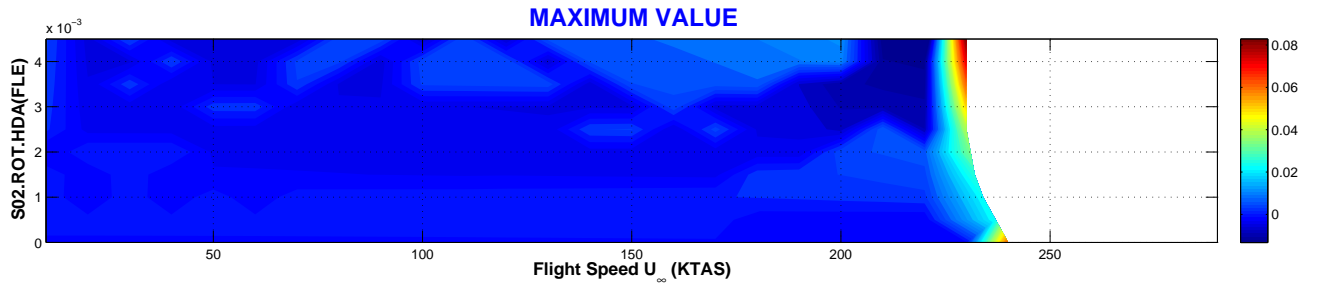
⁵Recuérdese que la precarga adimensional venía dada por $\hat{M}_0^{NLD} = M_0^{NLD} / m_0 U_0^2 L$.

VARIACIÓN DE LA AMPLITUD DE LA HOLGURA

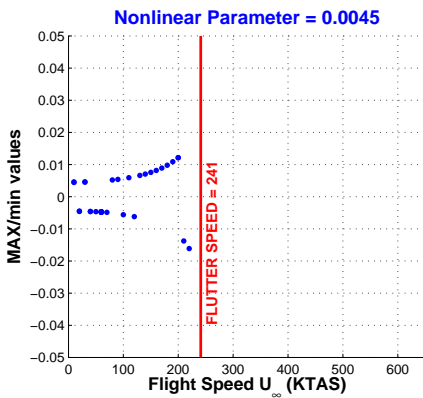
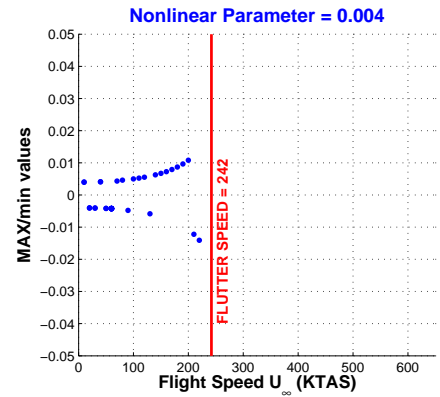
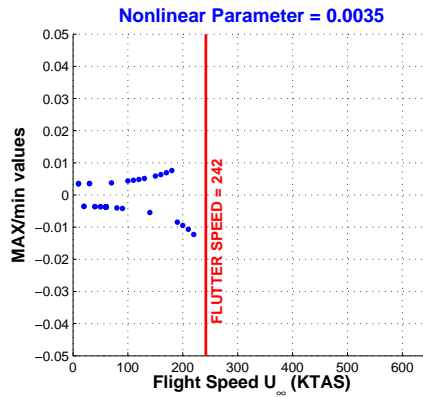
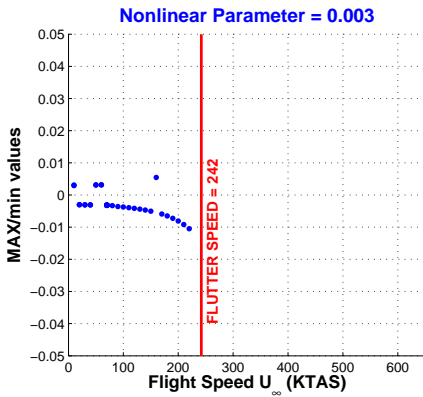
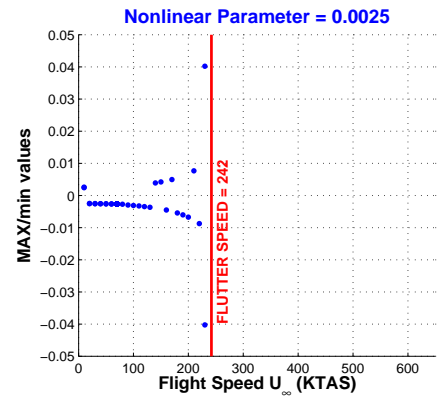
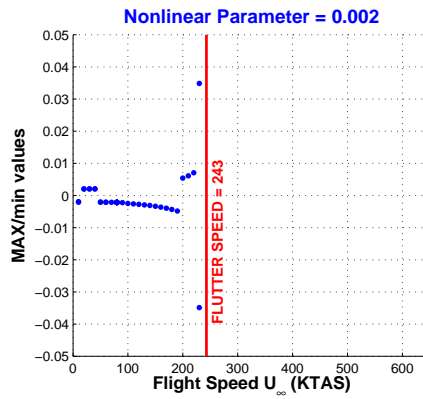
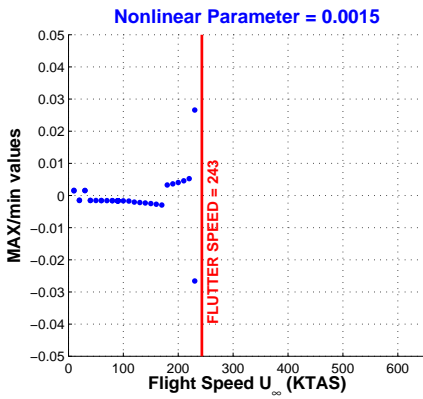
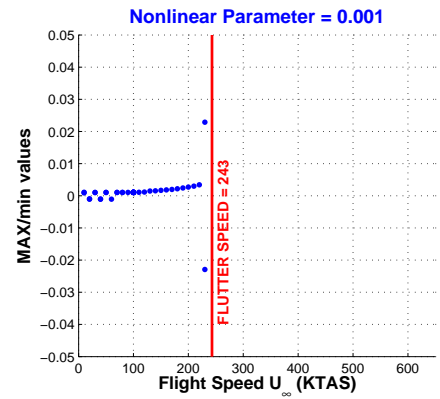
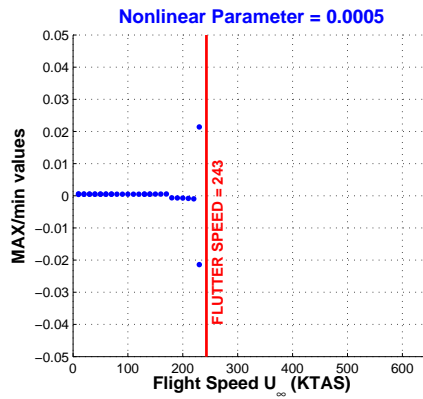
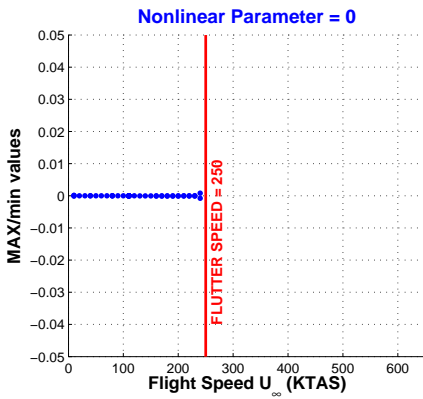
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
FLE.S02	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Amplitude (DA)	S02.ROT.HDA	1/4



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
FLE.S02	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Amplitude (DA)	S02.ROT.HDA	2/4



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
FLE.S02	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Amplitude (DA)	S02.ROT.HDA	3/4



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
FLE.S02	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Amplitude (DA)	S02.ROT.HDA	4/4

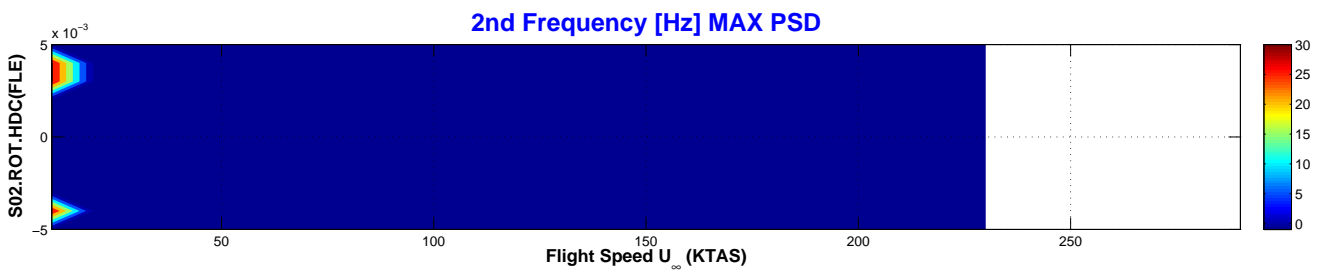
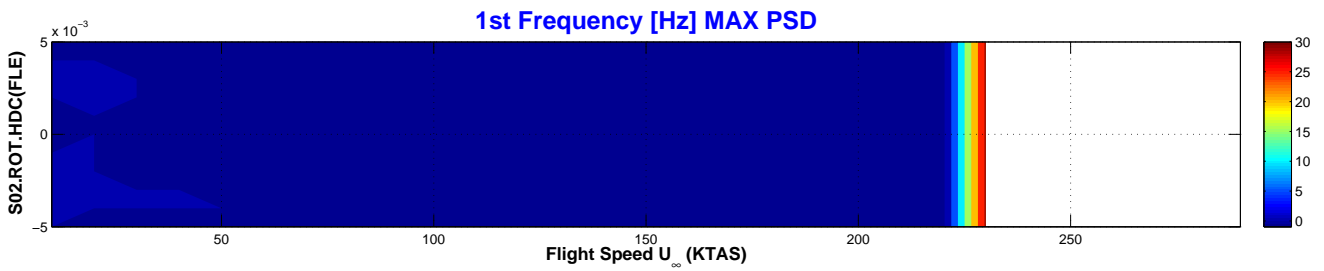
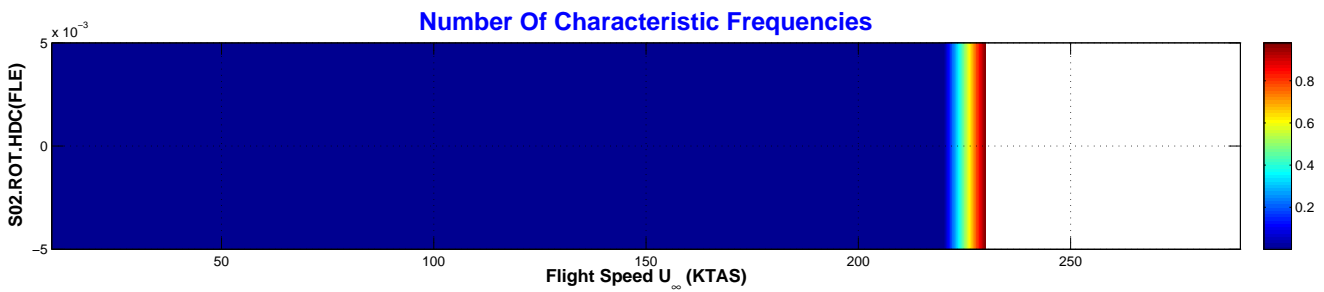
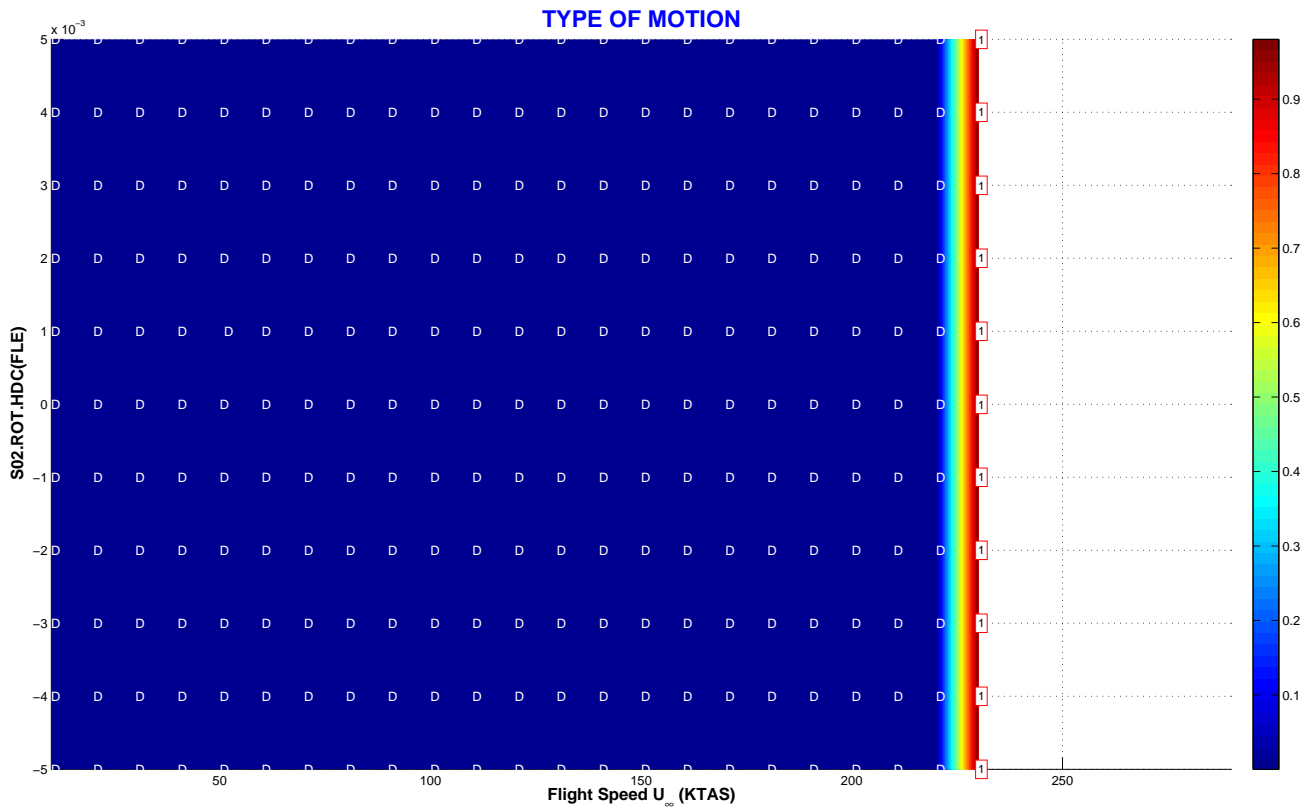
Tipo de Respuesta	DMP	Respuesta amortiguada (DMP) hasta 230 KTAS.
	LCO	Respuesta armónica LCO a 230 KTAS, justo la velocidad aproximada de <i>flutter</i> .
	CHA	No existe respuesta de tipo caótica.
	FLT	Velocidad de <i>flutter</i> es 230 KTAS aprox., e independiente de la amplitud de la holgura.
Transición entre Tipos de Respuesta	La respuesta evoluciona de la siguiente forma: DMP-LCO[1]-FLT. La respuesta es amortiguada para velocidades inferiores a la de <i>flutter</i> . A 230 KTAS aparece un LCO[1] que rápidamente pasa a FLT.	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 241$. KTAS / $VF_{(K=0)} = 0$. KTAS.
	No Lineal	Velocidad de <i>flutter</i> es aproximadamente 230 KTAS, independiente de la amplitud de la holgura.
Variación de la Amplitud	con U_{∞}	Para cada velocidad y una vez eliminados los transitorios, la respuesta amortiguada degenera en un punto en el diagrama de bifurcación.
	con ROT.HDA	La amplitud de la rotación estacionaria aumenta a medida que se incrementa la amplitud de la holgura.
Bifurcaciones	No existen bifurcaciones relevantes, excepto la clásica bifurcación de <i>Hopf</i> en el punto de <i>flutter</i> .	
Flutter onset	Entrada en <i>flutter</i> previsible a la vista del aumento de amplitud a velocidades inmediatamente anteriores a la de <i>flutter</i> .	

NOTA:

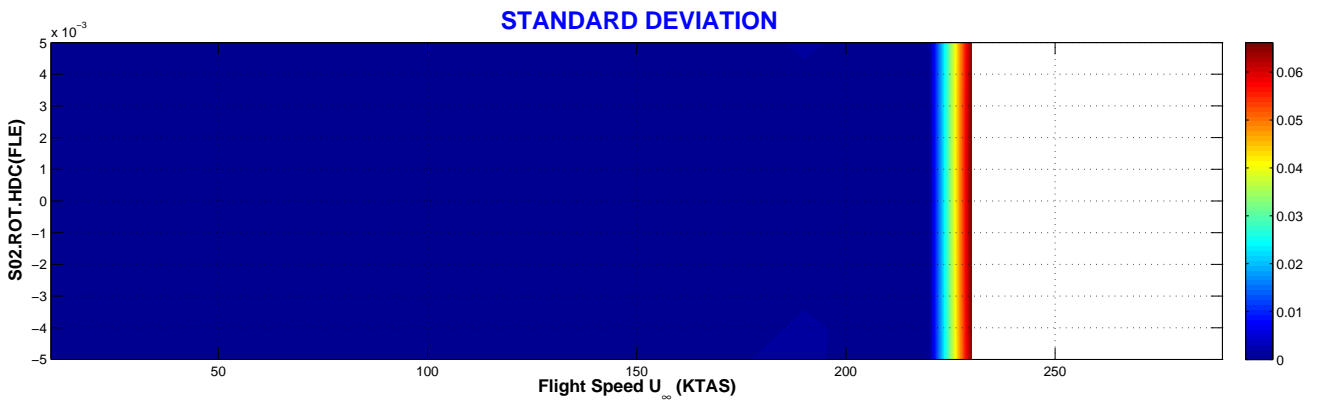
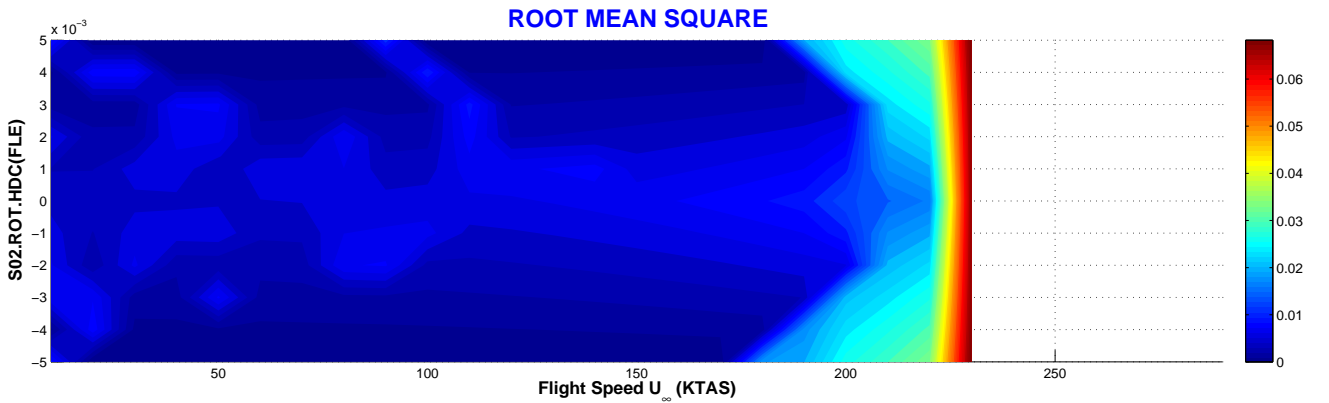
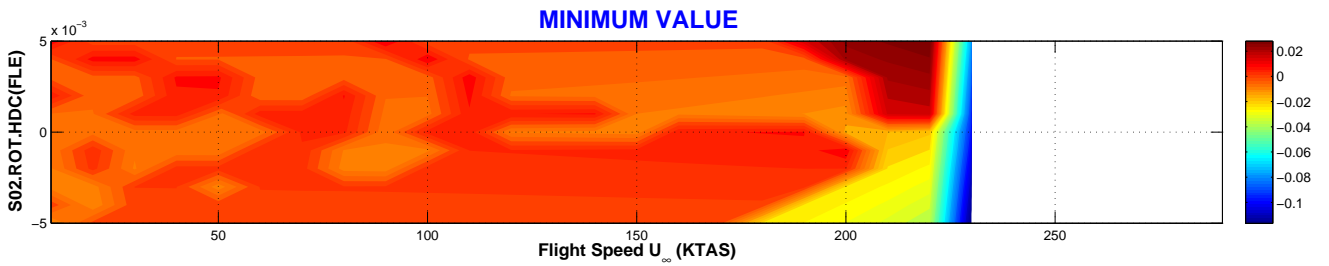
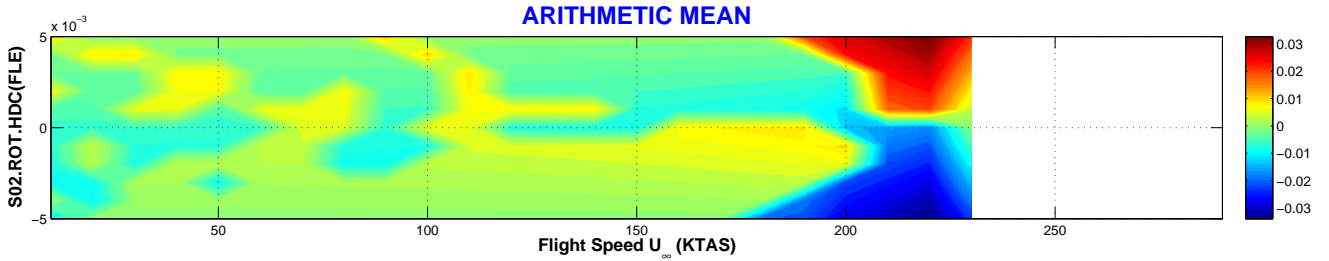
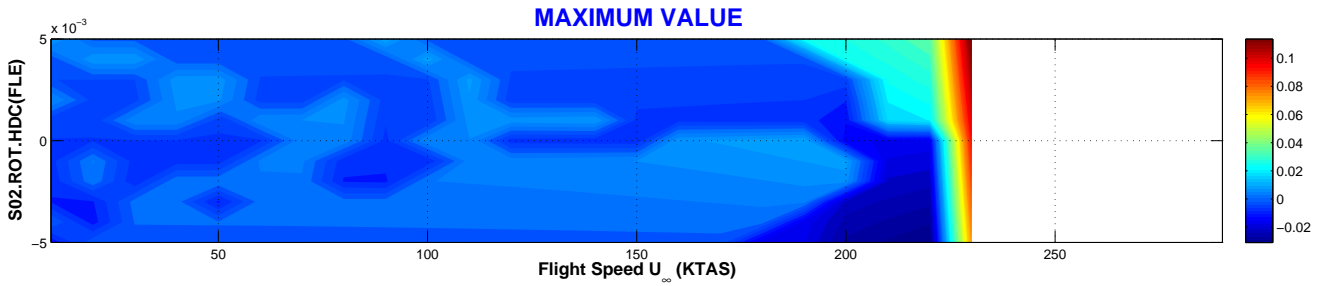
A velocidades muy bajas de 10 y 20 KTAS y para holguras de 0,0 hasta 0,004 (0,23 grados aprox.) aparece una respuesta muy poco amortiguada que es identificada como LCO (ver mapa de frecuencias características). Sin embargo, cuando se acude al diagrama de bifurcación se observa que es prácticamente un punto para cada velocidad de vuelo, lo que confirma que es una respuesta casi amortiguada, con oscilaciones en la rotación de aletas de centésimas de grado en torno a un valor medio de la rotación de aletas.

VARIACIÓN DEL CENTRO DE LA NONLINEALIDAD

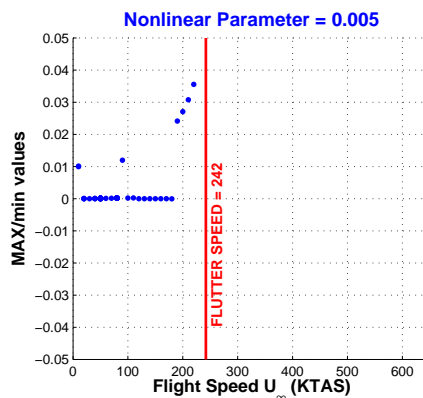
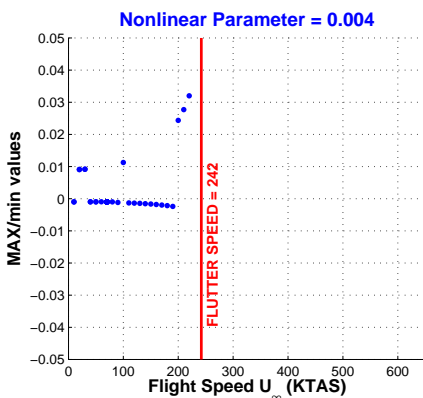
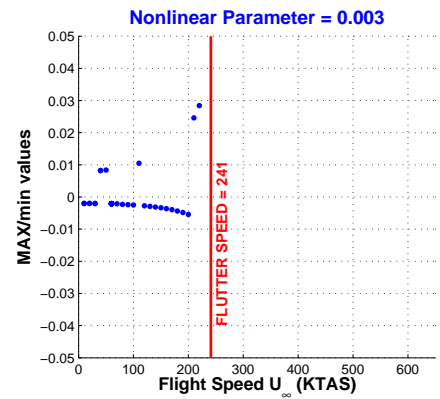
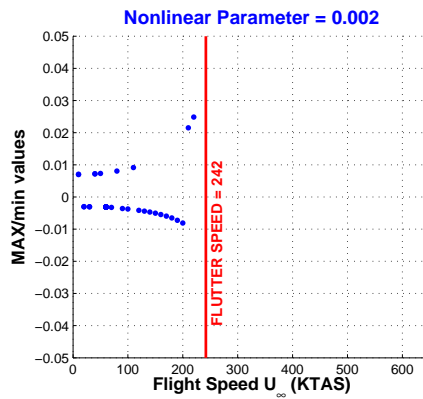
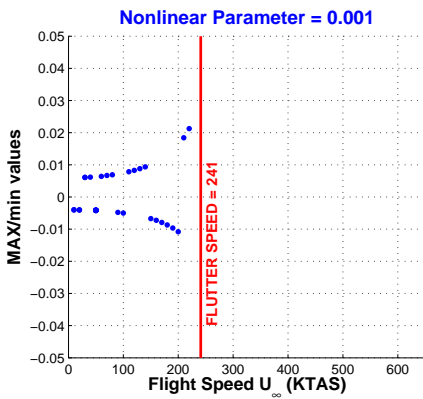
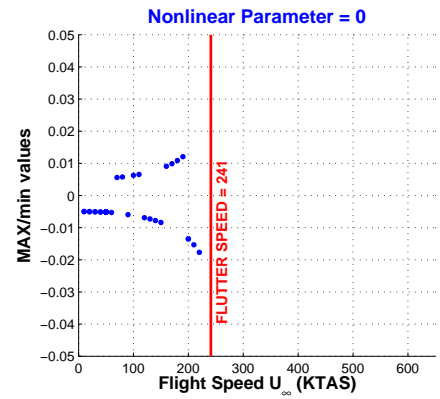
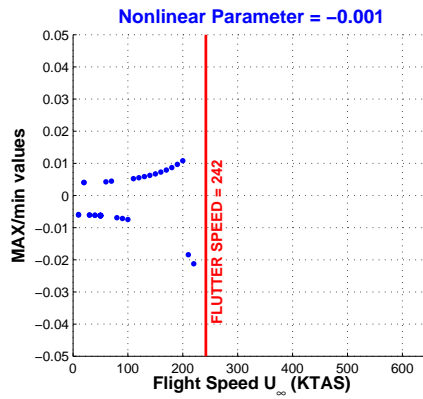
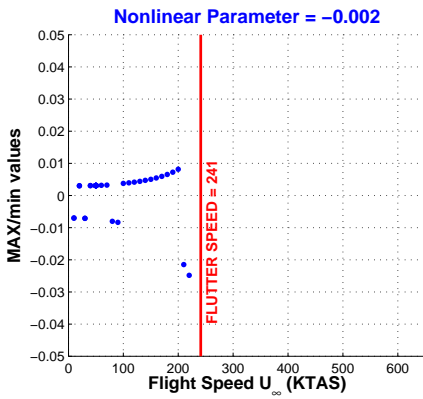
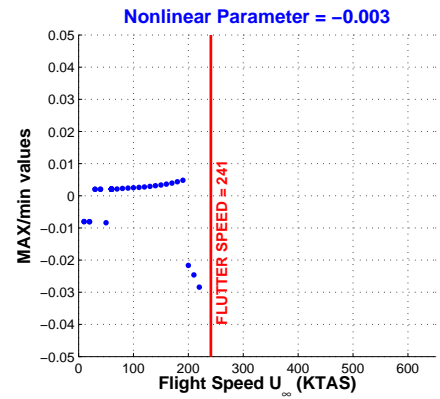
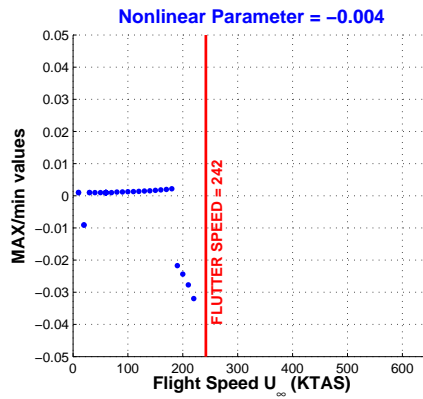
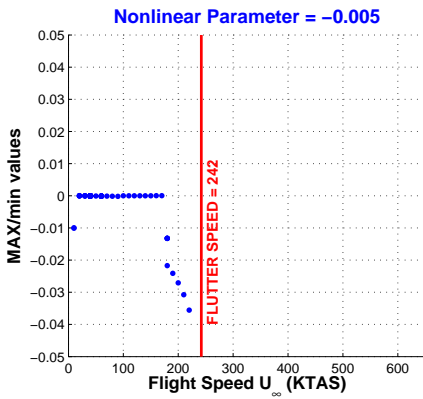
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
FLE.S02	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Center (DC)	S02.ROT.HDC	1/3



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
FLE.S02	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Center (DC)	S02.ROT.HDC	2/3



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
FLE.S02	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Center (DC)	S02.ROT.HDC	3/3



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
FLE.S02	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Center (DC)	S02.ROT.HDC	4/4

Tipo de Respuesta	DMP	Respuesta amortiguada (DMP) hasta la entrada en <i>flutter</i> (230 KTAS).
	LCO	Respuesta de tipo LCO justo a la velocidad de <i>flutter</i> (230 KTAS).
	CHA	No existe respuesta de tipo caótico.
	FLT	Velocidad de <i>flutter</i> es 230 KTAS e independiente del centro de la no linealidad.
Transición entre Tipos de Respuesta	La respuesta evoluciona de la siguiente forma: DMP-LCO[1]-FLT. La respuesta armónica no amortiguada LCO[1] ocurre justo a la velocidad de <i>flutter</i> que en este caso es 230 KTAS e independiente del centro de la no linealidad.	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 241. \text{ KTAS} / VF_{(K=0)} = 0. \text{ KTAS}$.
	No Lineal	Velocidad de <i>flutter</i> es 230 KTAS, independiente del centro de la no linealidad.
Variación de la Amplitud	con U_{∞}	La amplitud de la respuesta aumenta de forma exponencial con la velocidad de vuelo U_{∞} .
	con ROT.HDC	La respuesta estacionaria sigue al centro de la no linealidad, permaneciendo constante la amplitud de la respuesta en torno al centro de la no linealidad.
Bifurcaciones	Bifurcación clásica de tipo <i>Hopf</i> en la transición de amortiguado (DMP) a <i>flutter</i> (FLT).	
Flutter onset	Entrada en <i>flutter</i> previsible a la vista de la evolución de la amplitud de la respuesta a velocidades anteriores a la de <i>flutter</i> .	

NOTAS:

La respuesta estacionaria depende en gran medida de la evolución del ángulo de guiñada del misil. Puede observarse esta diferencia para el descentramiento de 0,005: a velocidades inferiores a 170 KTAS (aprox.), el misil describe una trayectoria con poco ángulo de guiñada y las aletas se sitúan en torno a la rotación que proporciona momento de actuadores nulo. A velocidades superiores a 170 KTAS, el ángulo de guiñada es mayor y las aletas se debe deflectar un ángulo mayor para compensarlo.

La figura 10.6 representa la respuesta en el dominio del tiempo para dos velocidades distintas: 100 y 200 KTAS. A la velocidad de 100 KTAS se obtiene una respuesta del misil con poca carga aerodinámica en las aletas y ángulo de guiñada tendiendo a cero. Sin embargo, a velocidades superiores, en este caso 200 KTAS, la dinámica del misil da lugar a una maniobra con mayor carga aerodinámica en las aletas y ángulo de guiñada mayor.

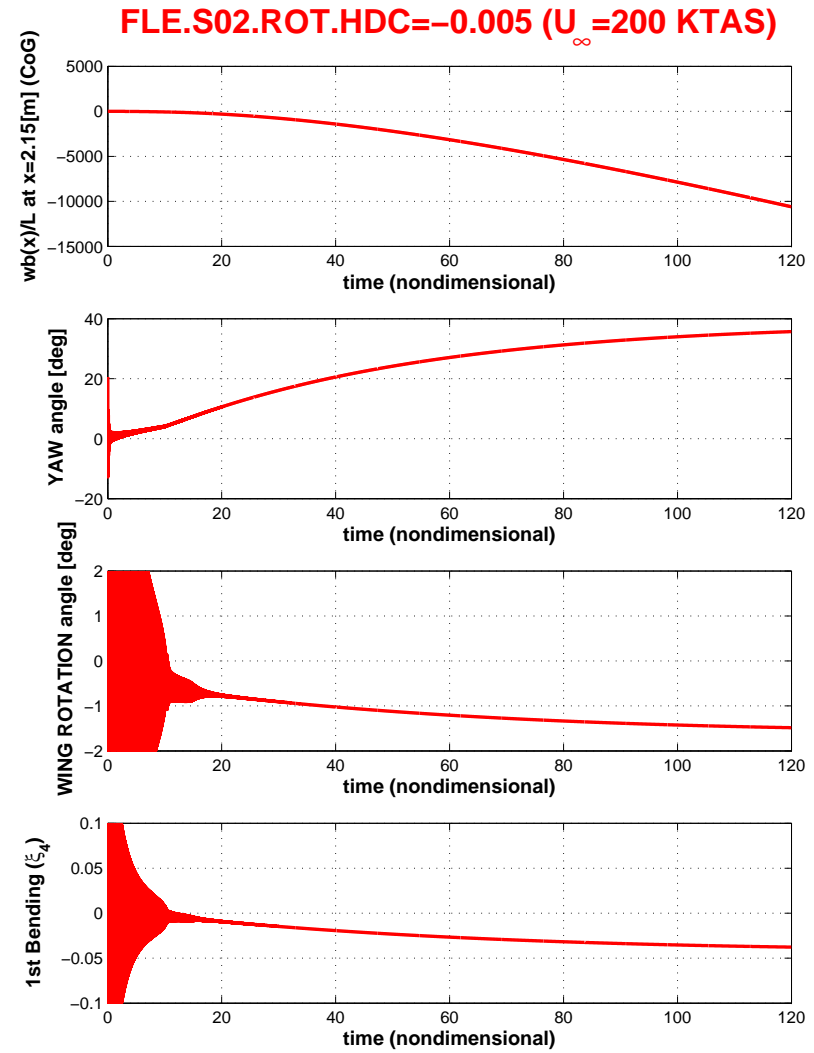
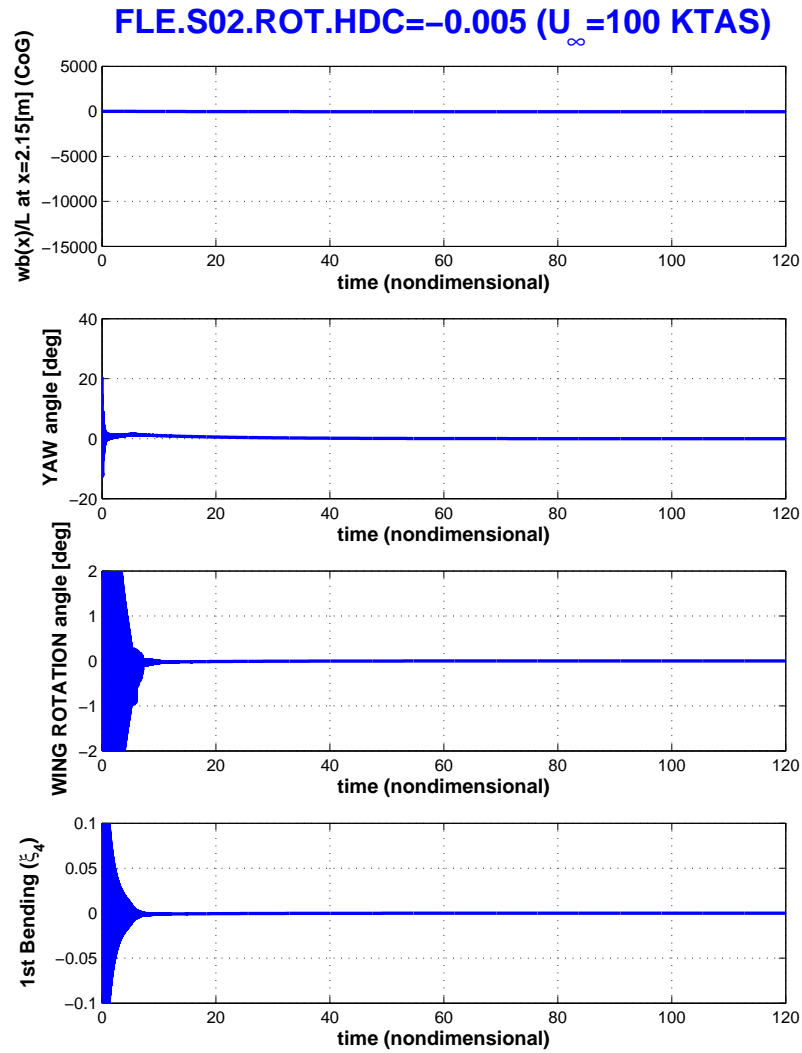
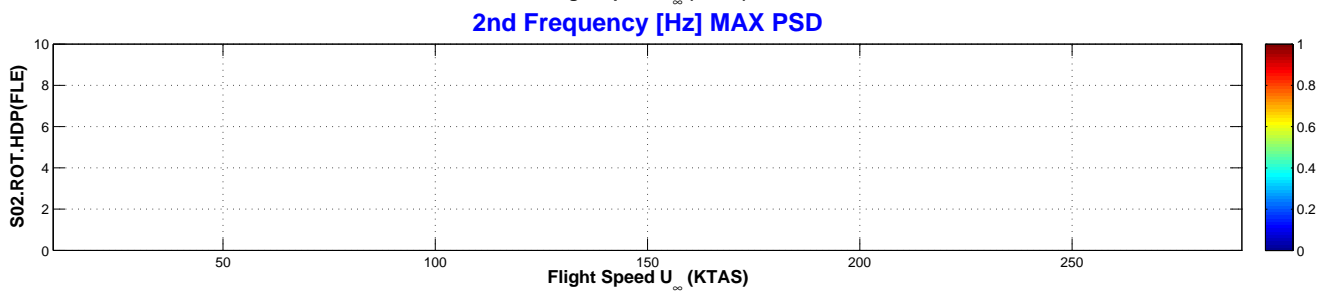
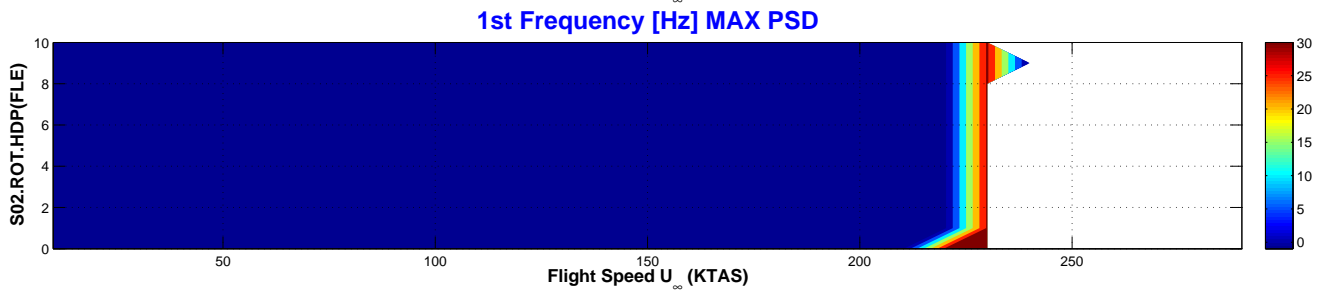
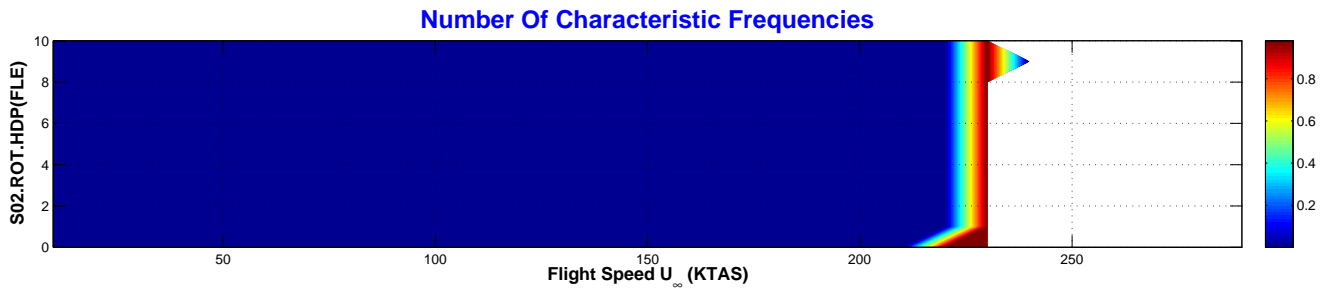
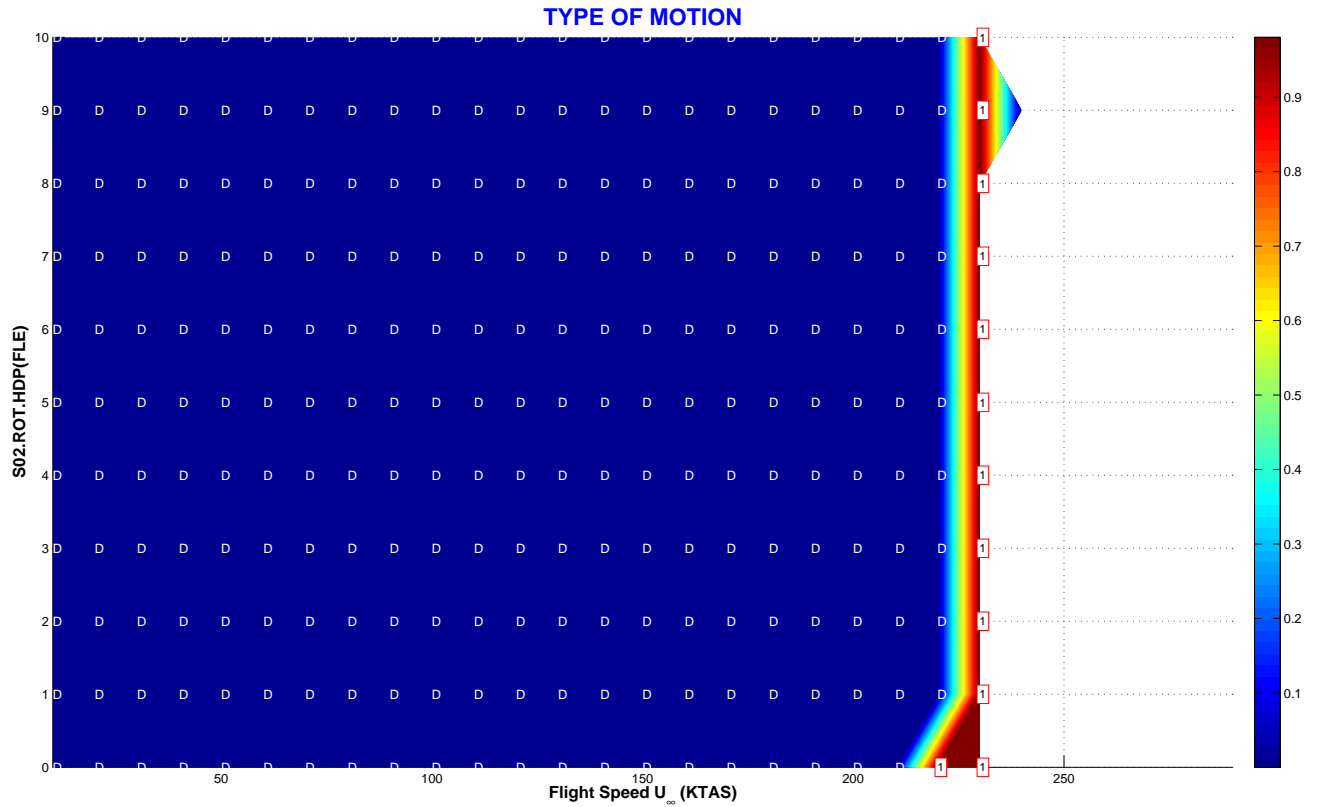


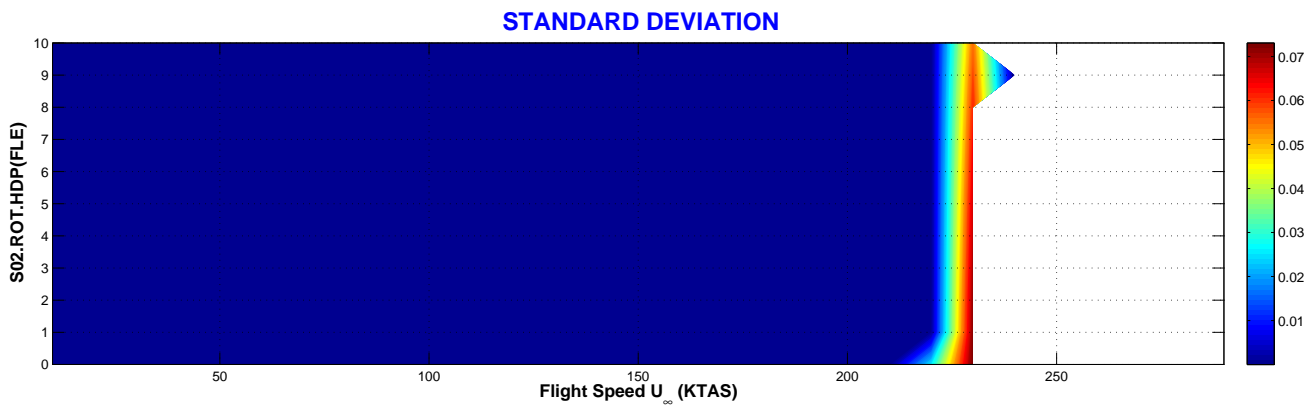
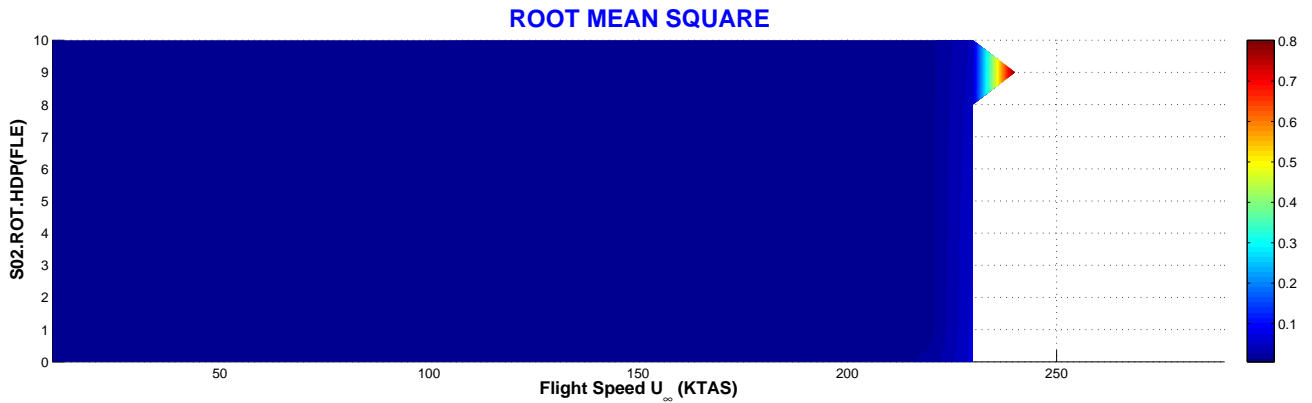
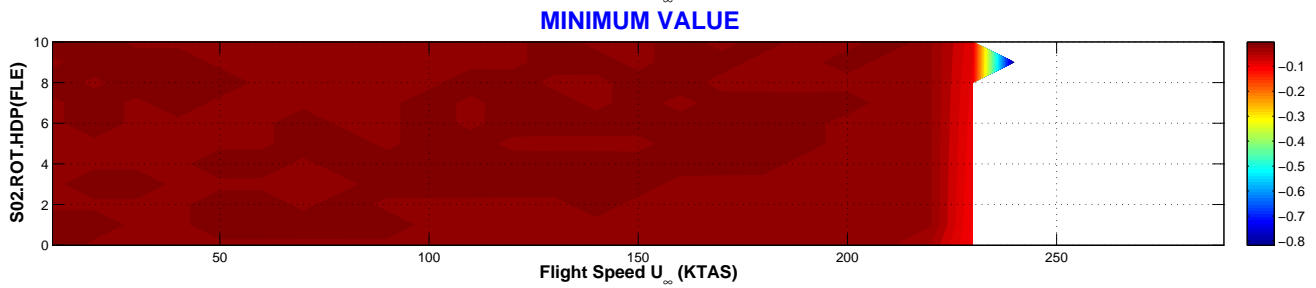
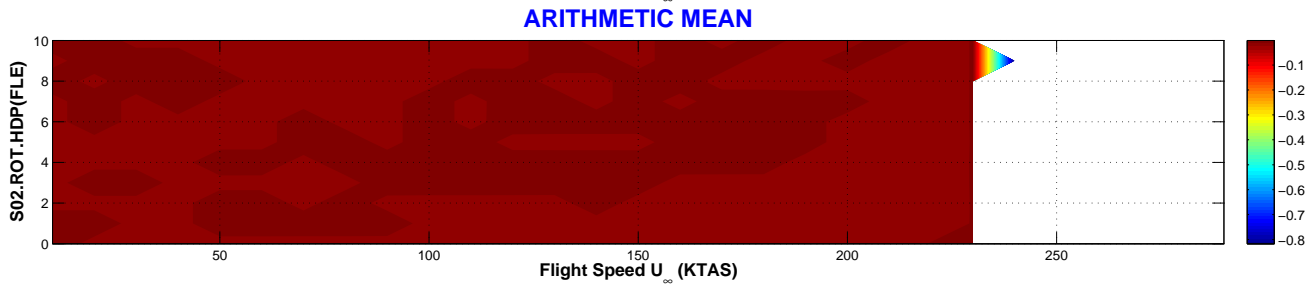
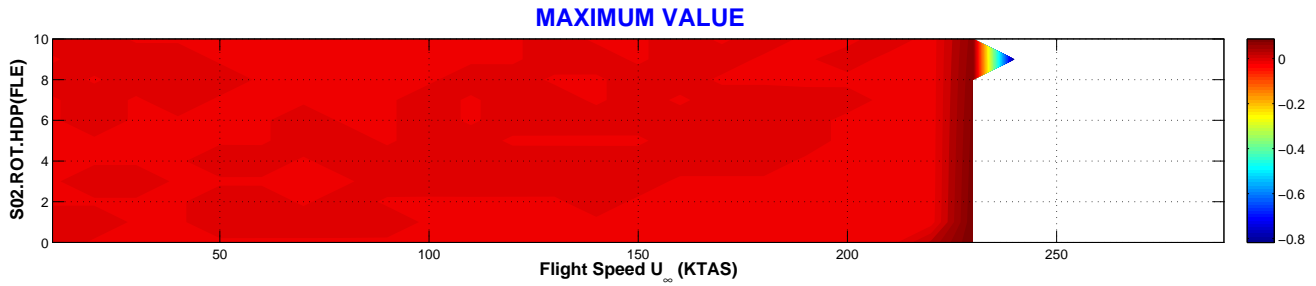
Figura 10.6: Respuesta de la configuración FLE.S02.ROT.HDC para $HDC=-0.005$ y dos velocidades de vuelo: 100 KTAS (izquierda) y 200 KTAS (derecha).

VARIACIÓN DE LA PRECARGA

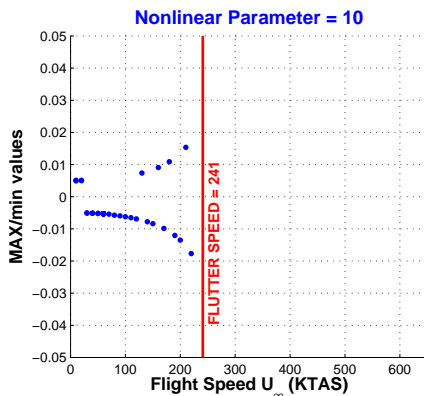
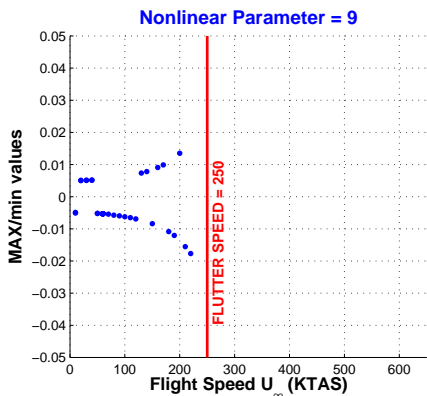
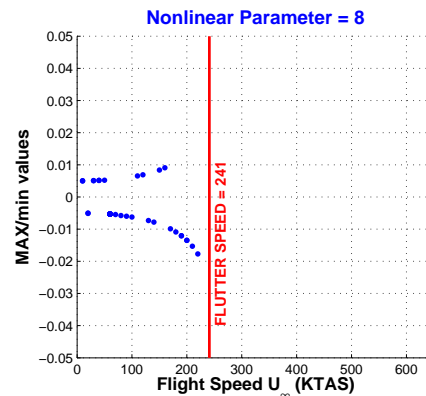
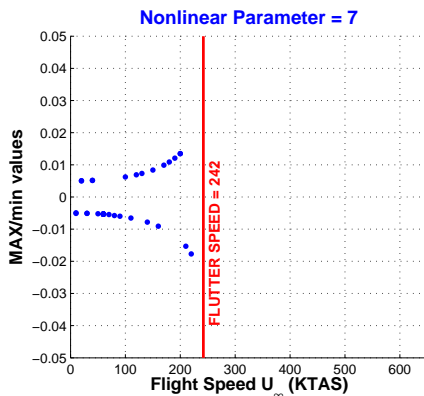
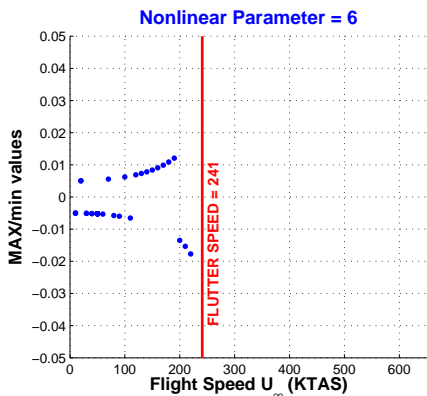
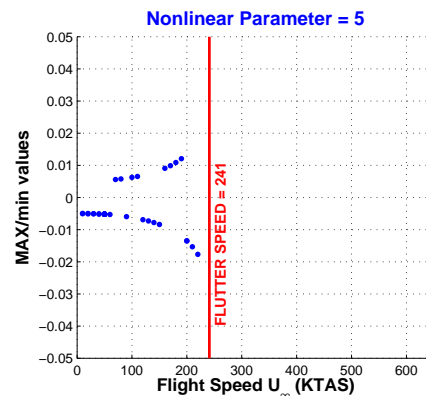
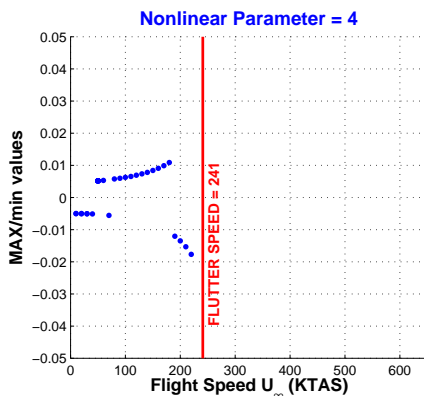
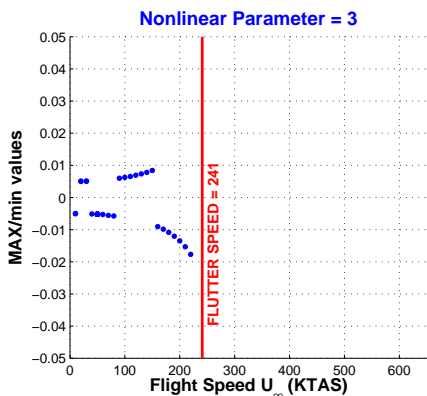
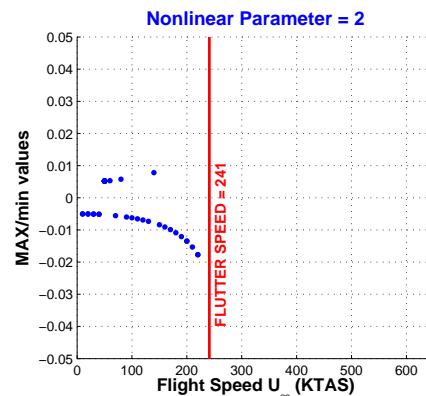
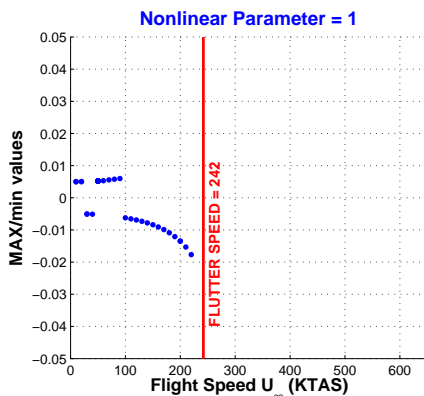
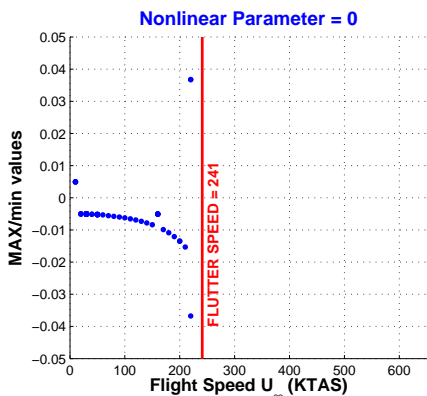
CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
FLE.S02	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Preload (DP)	S02.ROT.HDP	1/4



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
FLE.S02	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Preload (DP)	S02.ROT.HDP	2/4



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
FLE.S02	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Preload (DP)	S02.ROT.HDP	3/4

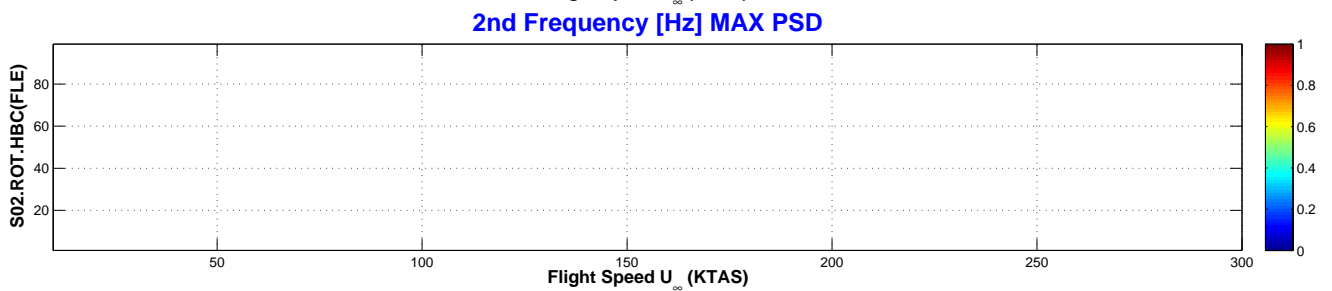
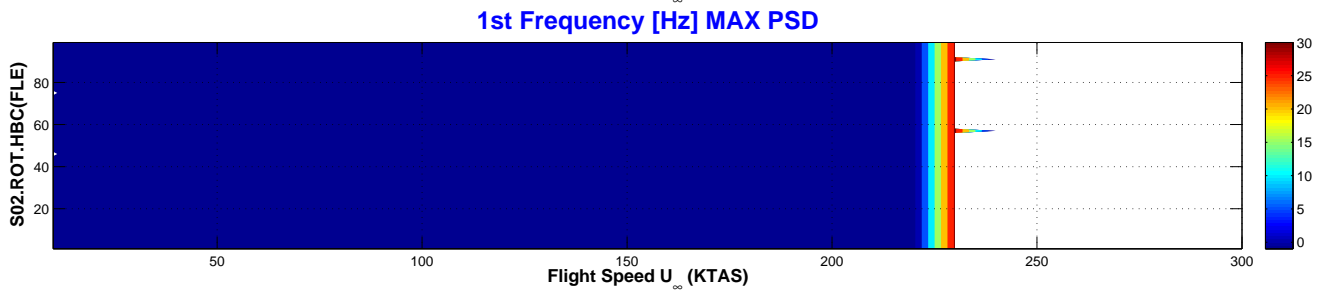
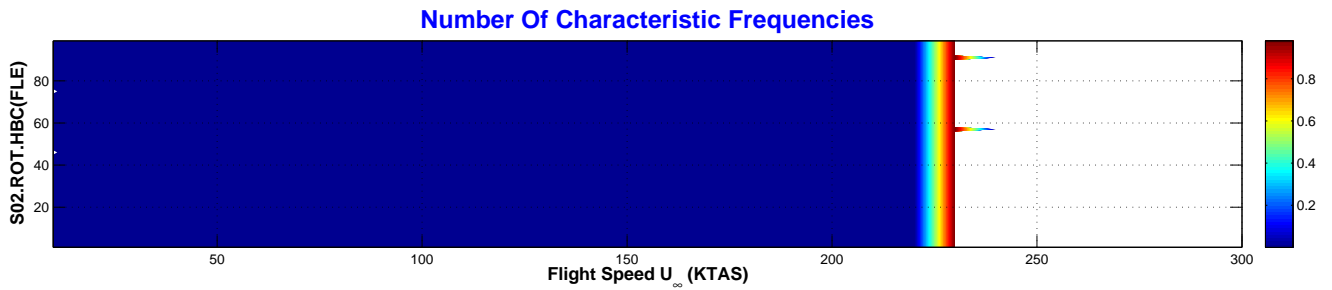
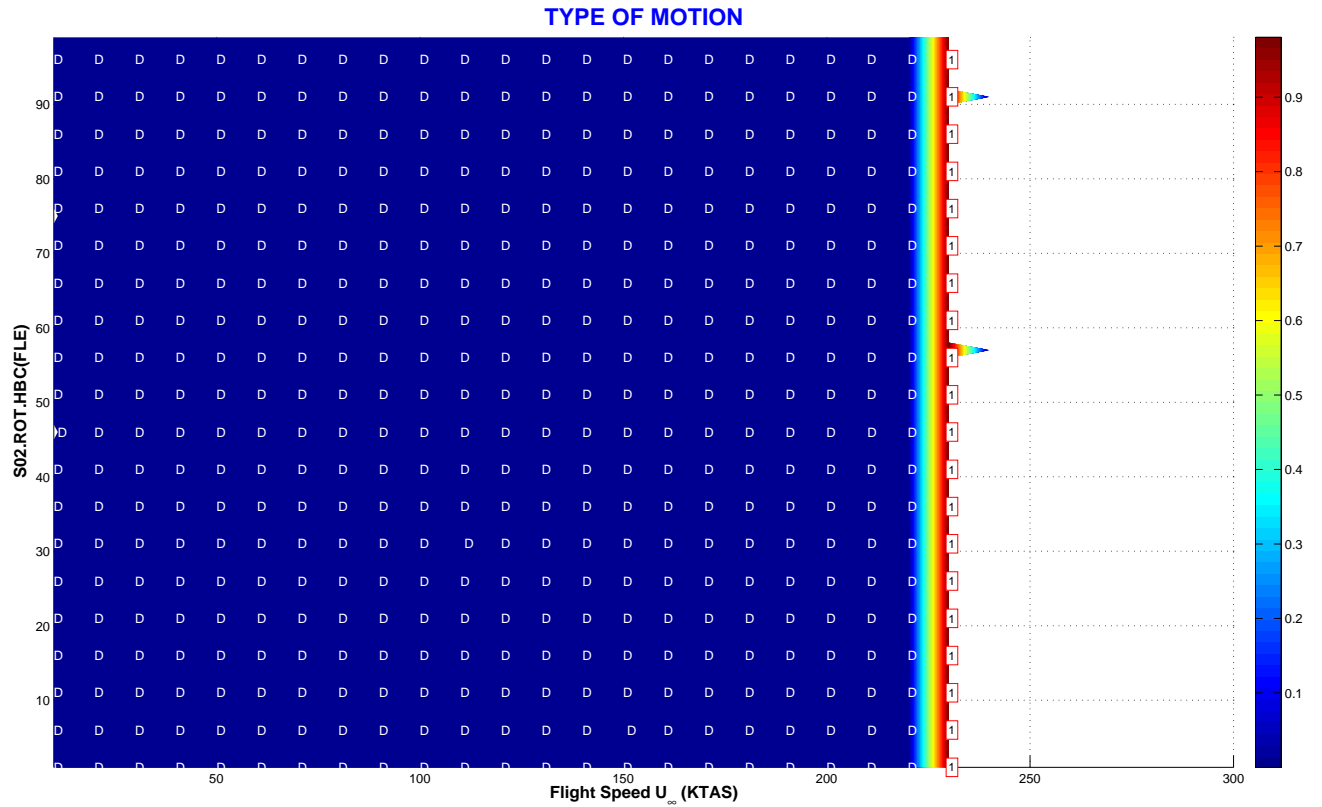


CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
FLE.S02	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Deadband Preload (DP)	S02.ROT.HDP	4/4

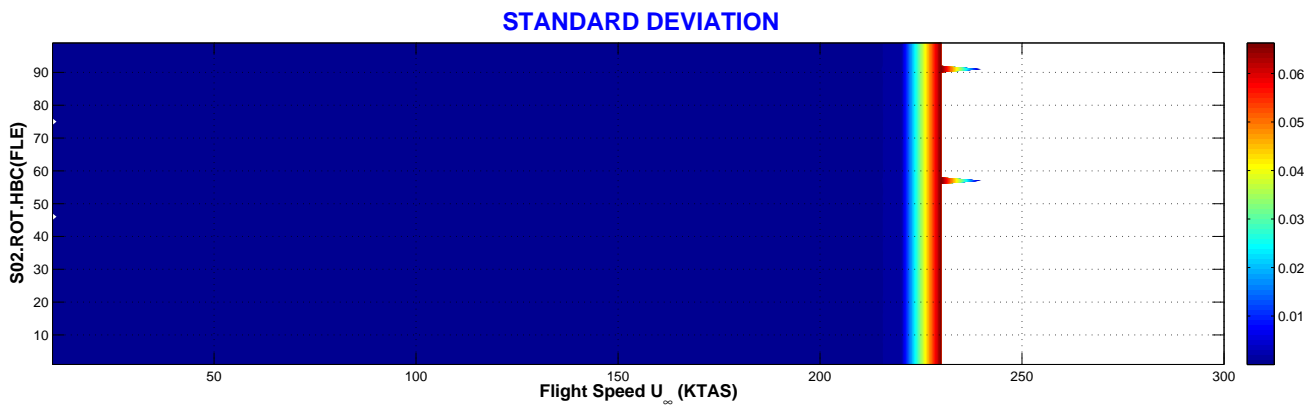
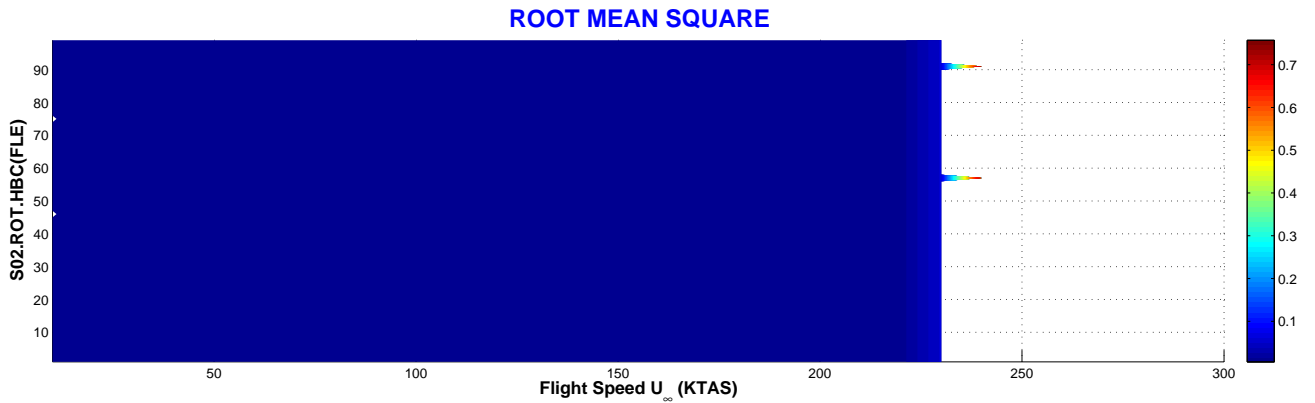
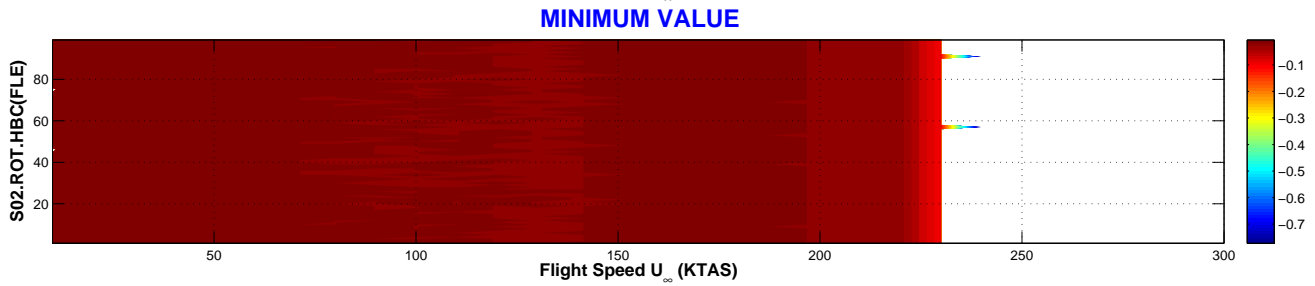
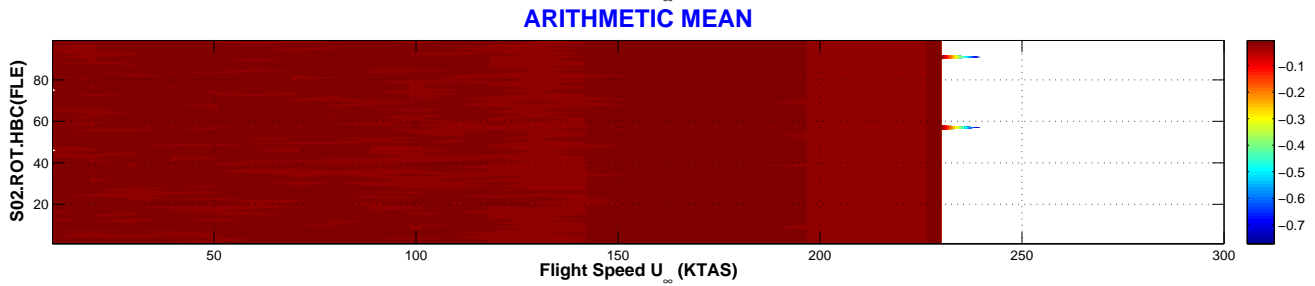
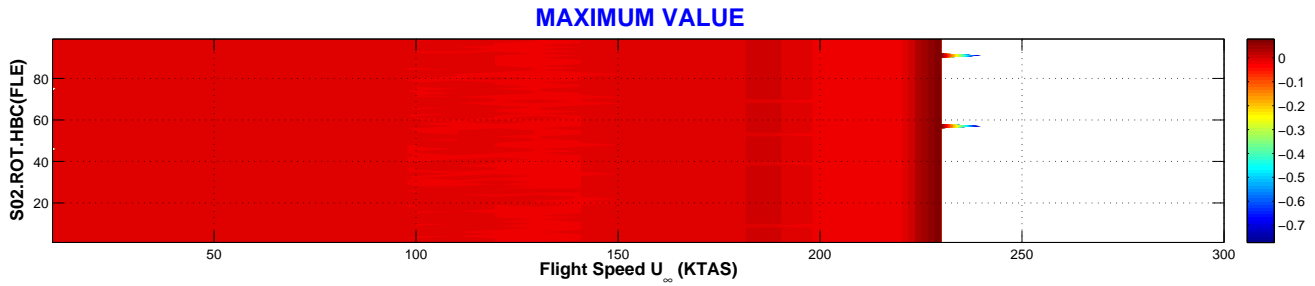
Tipo de Respuesta	DMP	Respuesta amortiguada a velocidades de vuelo inferiores a $U_{\infty} = 230$ KTAS.
	LCO	Respuesta armónica en la velocidad de <i>flutter</i> .
	CHA	No existe respuesta de tipo caótico.
	FLT	Respuesta divergente <i>flutter</i> a velocidades superiores a 230 KTAS.
Transición entre Tipos de Respuesta	La respuesta evoluciona de la siguiente forma: DMP-LCO[1]-FLT. La respuesta LCO[1] ocurre sólo a la velocidad exacta de entrada en <i>flutter</i> , que es 230 KTAS e independiente de la precarga.	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 241$. KTAS / $VF_{(K=0)} = 0$. KTAS.
	No Lineal	Velocidad de <i>flutter</i> es 230 KTAS e independiente de la precarga.
Variación de la Amplitud	con U_{∞}	La amplitud de la respuesta aumenta de forma exponencial con la velocidad de vuelo U_{∞} .
	con ROT.HDP	La amplitud no depende de la precarga.
Bifurcaciones	Bifurcación de tipo <i>Hopf</i> en la entrada en <i>flutter</i> .	
Flutter <i>onset</i>	Entrada en <i>flutter</i> previsible a la vista del aumento de la amplitud de la respuesta con la velocidad de vuelo U_{∞} .	

VARIACIÓN DE LAS CONDICIONES INICIALES

CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
FLE.S02	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Boundary Conditions (BC)	S02.ROT.HBC	1/3



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
FLE.S02	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Boundary Conditions (BC)	S02.ROT.HBC	2/3



CONFIG	Nonlinear DoF	NOLINEALIDAD	PARÁMETRO	CÓDIGO	PAGE
FLE.S02	Rotation (ROT)	Hysteresis (H)	Boundary Conditions (BC)	S02.ROT.HBC	3/3

Tipo de Respuesta	DMP	Respuesta amortiguada a velocidades inferiores a 230 KTAS (aprox.).
	LCO	Respuesta armónica no amortiguada LCO justo a la velocidad de entrada en <i>flutter</i> , i.e., 230 KTAS (aprox.).
	CHA	No existe respuesta de tipo caótico.
	FLT	La velocidad de <i>flutter</i> es 240 KTAS (aprox.), e independiente de las condiciones iniciales.
Transición entre Tipos de Respuesta	La respuesta evoluciona de la siguiente forma: DMP-LCO[1]-FLT. La respuesta LCO[1] sólo ocurre a la velocidad exacta de <i>flutter</i> , y la transición LCO[1]-FLT ocurre a la velocidad de vuelo U_∞ de 230 KTAS (aprox.), independiente de la condición inicial.	
Velocidad de Flutter	Lineal	$VF_{(K=K_{nom})} = 241$. KTAS / $VF_{(K=0)} = 0$. KTAS.
	No Lineal	Velocidad de <i>flutter</i> es 230 KTAS, e independiente de las condiciones iniciales.
Variación de la Amplitud	con U_∞	Independiente de la condición inicial.
	con ROT.HBC	N/A
Bifurcaciones	Bifurcación de tipo <i>Hopf</i> en la transición DMP-LCO[1].	
Flutter onset	Respuesta divergente <i>flutter</i> a velocidades mayores de 240 KTAS (aprox.).	

NOTA:

Las condiciones iniciales son:

$$\{x(0)\}_{8 \times 1} = \left[+1,30 \quad 0,0 \quad \hat{\xi}_3 \quad 0,238 \quad 1,0 \quad 1,0 \quad \frac{d\hat{\xi}_3}{d\hat{t}} \quad 1,0 \right]^T$$

donde $\hat{\xi}_3$ y $d\hat{\xi}_3/d\hat{t}$ se varían aleatoriamente dando un total de 99 condiciones iniciales distintas.

10.5. Consideraciones Finales

En este capítulo se ha presentado la respuesta del sistema en presencia de una no linealidad estructural concentrada tipo *hysteresis*. Las principales conclusiones son:

1. Configuración con soportado **S01** (misil colgado de un pilón del avión plataforma) y modelo rígido **RIG**:

- a) Para una no linealidad concentrada en la rotación de las superficies de control, existe respuesta de tipo armónica y caótica por debajo de la velocidad de *flutter* lineal. La respuesta caótica aparece en la bifurcación de *Hopf* que ocurre a la velocidad de vuelo en la que la respuesta pasa de amortiguada a LCO. Se ha comprobado que un aumento en la amplitud de la holgura disminuye la velocidad a la que aparece la oscilación de ciclo límite, el descentramiento no afecta a la transición amortiguado-LCO, mientras que un aumento en la precarga aumenta la velocidad de vuelo a la que aparece el LCO. De nuevo se vuelve a verificar que la precarga mejora el comportamiento aeroelástico del sistema no lineal. Por último, las condiciones iniciales no afectan al tipo de respuesta.
- b) Una no linealidad en la flexión lateral no varía el comportamiento aeroelástico del sistema lineal. El motivo es que este modo es poco relevante en el mecanismo de *flutter*.
- c) Para una no linealidad concentrada en el modo de guiñada del misil, existe respuesta no amortiguada a velocidades de vuelo menores que la velocidad de *flutter* lineal. La respuesta del sistema aumenta para valores mayores de la holgura, aunque el tipo de respuesta no depende de la amplitud de la holgura. El descentramiento de la no linealidad tiene un efecto semejante al que se observó en el caso de la no linealidad tipo *freeplay*, apareciendo respuesta compleja y caos a velocidades cercanas a la de *flutter*. La precarga no afecta al tipo de respuesta. En general, se observa que la velocidad de vuelo a la que aparece la transición *amortiguado-LCO* depende de los parámetros amplitud, descentramiento y precarga, sin detectarse un patrón lógico, lo que hace pensar que esta transición depende de la evolución de la respuesta y por tanto de las condiciones iniciales. Esto se confirma al comprobar que las condiciones iniciales afectan a la transición amortiguado-LCO.

2. Configuración con soportado **S02** (misil en vuelo libre) y modelo rígido **RIG**:

En este caso, la no linealidad sólo puede estar concentrada en la rotación de la superficie de control o aletas. De nuevo, aparecen oscilaciones de ciclo límite a velocidades inferiores a la de *flutter* lineal. Se comprueba que, al aumentar la amplitud de la holgura, la amplitud de la respuesta aumenta y la velocidad de transición amortiguado-LCO disminuye. El descentramiento de la no linealidad no afecta a la amplitud del LCO resultante, aunque sí influye en la velocidad de aparición del LCO, aumentando para valores mayores del descentramiento. La precarga de la no linealidad vuelve a influir de forma positiva en el comportamiento aeroelástico, aumentando la velocidad de aparición de los LCOs a medida que aumenta la precarga de la no linealidad. Por último, las condiciones iniciales no influyen en el tipo de respuesta.

3. Configuración con soportado **S02** (misil en vuelo libre) y modelo flexible **FLE**:

De nuevo, la no linealidad sólo puede estar concentrada en la rotación de la superficie de control. Se comprueba que la flexibilidad del misil afecta de forma importante al comportamiento aeroelástico lineal, disminuyendo la velocidad de *flutter* debido a la aparición de un mecanismo del tipo *mild flutter* a la velocidad de 240 KTAS. Sin embargo, la presencia de la no linealidad no modifica el comportamiento aeroelástico lineal y no aparecen respuestas no amortiguadas por debajo de la velocidad de *flutter* lineal.

Este estudio demuestra que la presencia de no linealidades estructurales de tipo *hysteresis* puede introducir respuesta no amortiguada a velocidades inferiores a la de *flutter* lineal. Comparada con la no linealidad *freeplay*, la *hysteresis* es más proclive al desarrollo de respuestas de tipo caótico. Por otro lado, la precarga en las superficies de control continúa mejorando el comportamiento aeroelástico no lineal, retrasando a velocidades mayores la aparición de oscilaciones de ciclo límite.

Con este capítulo se cierra la presentación de resultados. Se han estudiado los dos tipos de no linealidad *freeplay* e *hysteresis*, localizándolas en distintas posiciones y variando sus parámetros fundamentales para cuantificar su efecto en la respuesta aeroelástica a diferentes velocidades de vuelo. Con estos resultados se ha caracterizado el comportamiento aeroelástico detectado las tres características más importantes en la aparición de ciclos límite: la velocidad de transición amortiguado-LCO, la frecuencia del LCO y la amplitud.

En el capítulo siguiente se procede a analizar de una forma *cualitativa* el tipo de respuesta, analizando su evolución con el tiempo, el diagrama de fases (velocidad generalizada vs coordenada generalizada), la existencia de respuesta caótica, etc. Para ello, se ha seleccionado la configuración con un tipo de soportado y modelo estructural que proporciona todos los tipos de movimiento: amortiguado, armónico LCO, caos y *flutter*.

Capítulo 11

RESUMEN DE RESULTADOS: TIPOS DE RESPUESTA

11.1. Introducción

En este capítulo se detallan los distintos tipos de respuesta que se han obtenido en los capítulos anteriores 9 y 10, que se pueden catalogar en: respuesta amortiguada, respuesta armónica con un número discreto de frecuencias características, respuesta caótica, y respuesta divergente o *flutter*.

De todos los tipos de no linealidad estudiados anteriormente, se ha seleccionado la no linealidad de tipo *histéresis* en la *rotación de las aletas*, con misil *rígido* e instalado en el avión. Esta configuración de misil con este tipo de no linealidad es la que se ha denominado previamente como **RIG.S01.ROT.HDA**, y se ha seleccionado por el hecho de que para esta configuración de misil (**RIG.S01**) y este tipo de no linealidad (**ROT.HDA**) se han obtenido todos los tipos de respuesta mencionados anteriormente.

La figura 11.1, que ya fue presentada en el capítulo anterior como parte de los resultados, representa la frecuencia característica de la respuesta en función de la velocidad de vuelo U_∞ (eje x) y la *amplitud* de la holgura en el ciclo de *histéresis* (eje y). Con un fondo de colores variando desde el rojo (alto número de frecuencias reducidas) hasta el azul (movimiento amortiguado con cero frecuencias características), puede observarse los distintos tipos de respuesta: amortiguada, armónica, caótica o divergente (*flutter*). Una primera caracterización del movimiento caótico puede basarse en el número de frecuencias características; el hecho de que la respuesta no tenga patrón definido da lugar a una respuesta con un número elevado de frecuencias características. Se puede decir que un alto número de frecuencias características le hace *candidato* a ser movimiento *caótico*, pero esto se debe comprobar con otros indicadores como los *exponentes de Lyapunov*, *mapas de Poincaré*, etc... De hecho, existen respuestas periódicas con un período muy grande que hace que, si la integración se realiza en un intervalo de tiempo menor que el período, un análisis de Fourier resulte en un número elevado de frecuencias características y sin embargo la respuesta es periódica.

En la figura 11.1 puede verse que la no linealidad con amplitud adimensional (**HDA**) de 0,006 ($\simeq 0,006$ [rad] $\simeq 0,34$ [deg]) a la velocidad 260 KTAS presenta el movimiento con mayor número de frecuencias características. Para esta misma amplitud de 0,006 y a velocidades bajas, la respuesta está amortiguada (ver etiqueta D en el fondo azul a baja velocidad), mientras que a velocidades

mayores a 260 KTAS la respuesta pasa a ser armónica con una o dos frecuencias características. Cuando la velocidad se aproxima a la velocidad de *flutter*, el movimiento pasa a ser armónico con una frecuencia característica que corresponde a la frecuencia del mecanismo de *flutter*. Los resultados que se presentan a continuación están basados en esta amplitud de holgura 0,006, ya que presenta el movimiento más probable de ser *caótico* sin renunciar al resto de tipos de respuesta.

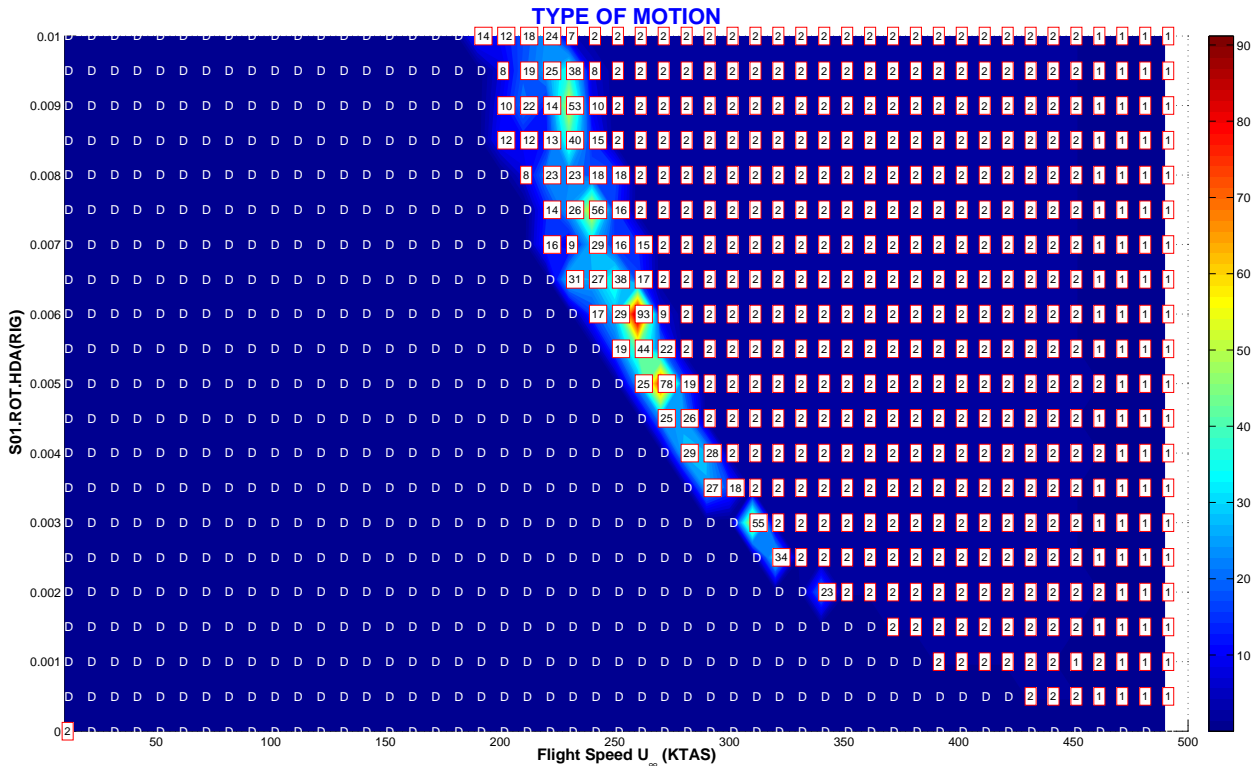


Figura 11.1: Frecuencia característica de la respuesta en función de la velocidad de vuelo U_{∞} (eje x) y amplitud adimensional de la holgura (eje y).

A continuación se analizan las distintas respuestas que aparecen para la no linealidad de tipo histéresis en la rotación de las aletas con una holgura adimensional de 0,006. Recuérdese que la configuración del misil es la denominada **RIG.S01**, es decir, misil *rígido* (**RIG**) y *soportado* **S01** (instalado en el avión). El estudio se divide en las siguientes secciones:

1. Sección 11.2: Estudio y caracterización de la respuesta *amortiguada*.
2. Sección 11.3: Estudio y caracterización de la respuesta de tipo *armónico*.
3. Sección 11.4: Se estudia y caracteriza la respuesta de tipo *caótico*, analizando los métodos actuales para la detección de caos e introduciendo un factor, el denominado DIRA (*Dispersal Rate*), que se utiliza para determinar el grado de caos de una determinada respuesta caótica.

Por último, recordar que en este capítulo se utilizan los módulos del código **FHSWB** desarrollados en Matlab para el análisis, postproceso y caracterización de la respuesta.

11.2. Respuesta Amortiguada

La figura 11.2 muestra la respuesta del sistema a la velocidad de 100 KTAS. En la columna izquierda se representan la evolución en el tiempo de las coordenadas generalizadas, mientras que la columna derecha representa los planos de fase, es decir, velocidad generalizada $d\hat{\xi}/d\hat{t}$ vs coordenada generalizada $\hat{\xi}$. Cada fila corresponde a una coordenada generalizada: $\hat{\xi}_1$ es la coordenada generalizada asociada al desplazamiento lateral del misil (LAT), la coordenada generalizada $\hat{\xi}_2$ corresponde al giro en guiñada del misil (YAW) y, por último, en la tercera fila se representa la coordenada generalizada $\hat{\xi}_3$ correspondiente a la rotación de aletas (ROT), que es donde se tiene la no linealidad. El punto verde corresponde al instante de tiempo (adimensional) a partir del que se empieza a registrar la respuesta (no tiene por qué ser el instante $\hat{t} = 0$), mientras que el punto rojo corresponde al instante de tiempo (adimensional) en el que se ha terminado la integración. Puede observarse que la respuesta

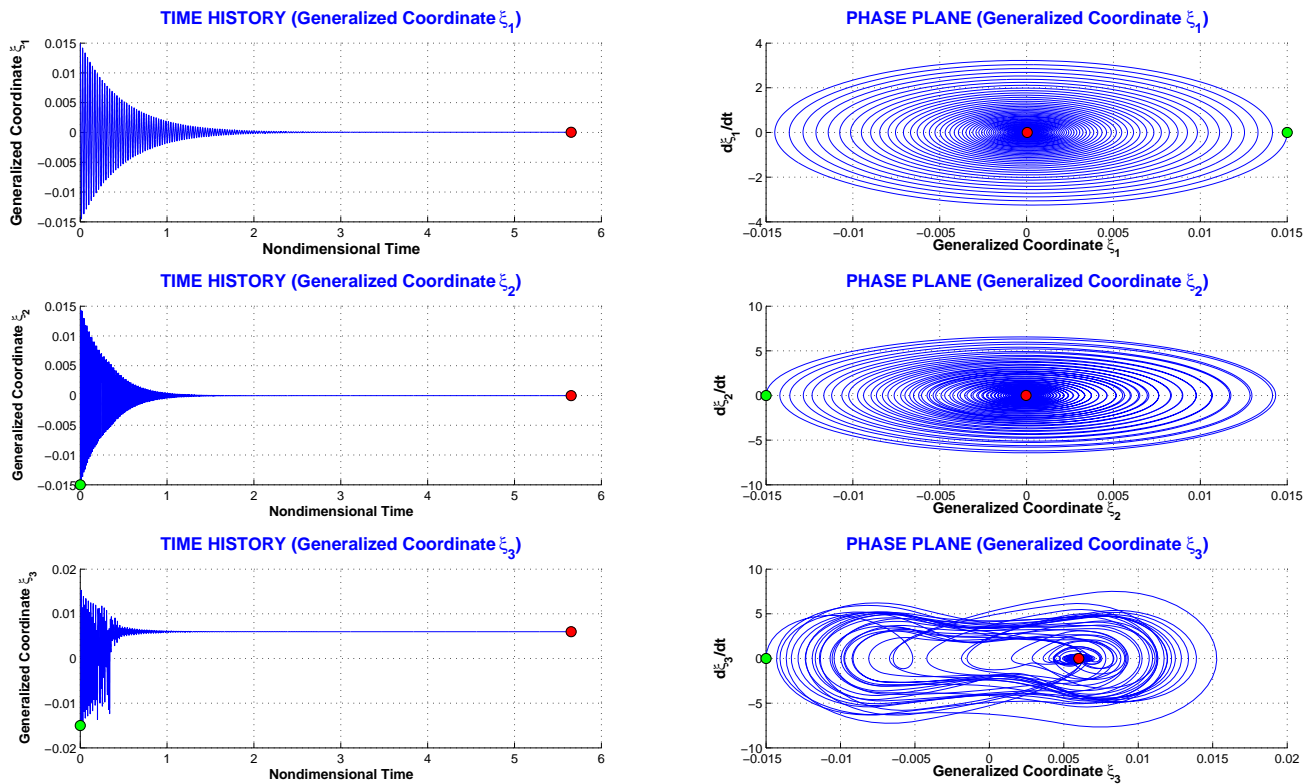


Figura 11.2: Coordenadas Generalizadas en función del tiempo (columna izquierda) y plano de fases para $U_\infty = 100$ KTAS (columna derecha).

está completamente amortiguada en las tres coordenadas generalizadas y la rotación de las aletas (coordenada generalizada $\hat{\xi}_3$) tiende a una de las esquinas de la no linealidad en la que se consigue el equilibrio entre el momento aerodinámico y momento que transmite el actuador de las aletas.

El instante de tiempo inicial es $t = 0$ (condiciones iniciales), por lo que se incluyen el transitorio inicial y esa es la causa por la que el mapa de fases no queda reducido a un punto del eje x con la velocidad generalizada $d\hat{\xi}_i/d\hat{t} = 0$ (amortiguado). Se ha preferido muestrear la señal desde $t = 0$ para ilustrar la velocidad de amortiguamiento de la respuesta.

11.3. Respuesta de tipo armónica

Las figuras 11.3 y 11.4 representan la respuesta del sistema a la velocidad de 350 KTAS. En la columna izquierda se representan la evolución en el tiempo de las coordenadas generalizadas, mientras que la columna derecha representa los planos de fase, es decir, velocidad generalizada $d\hat{\xi}/d\hat{t}$ vs coordenada generalizada $\hat{\xi}$. Cada fila corresponde a una coordenada generalizada: $\hat{\xi}_1$ es la coordenada generalizada asociada al desplazamiento lateral, la coordenada generalizada $\hat{\xi}_2$ corresponde al modo de guiñada del misil y, por último, en la tercera fila se representa la coordenada generalizada $\hat{\xi}_3$ correspondiente a la rotación de aletas, que es donde se encuentra la no linealidad. El punto verde corresponde al instante de tiempo (adimensional) a partir del que se empieza a registrar la respuesta (no tiene por qué ser el instante $\hat{t} = 0$, en este caso es $\hat{t} = 10$), mientras que el punto rojo corresponde al instante de tiempo (adimensional) en el que se ha terminado la integración.

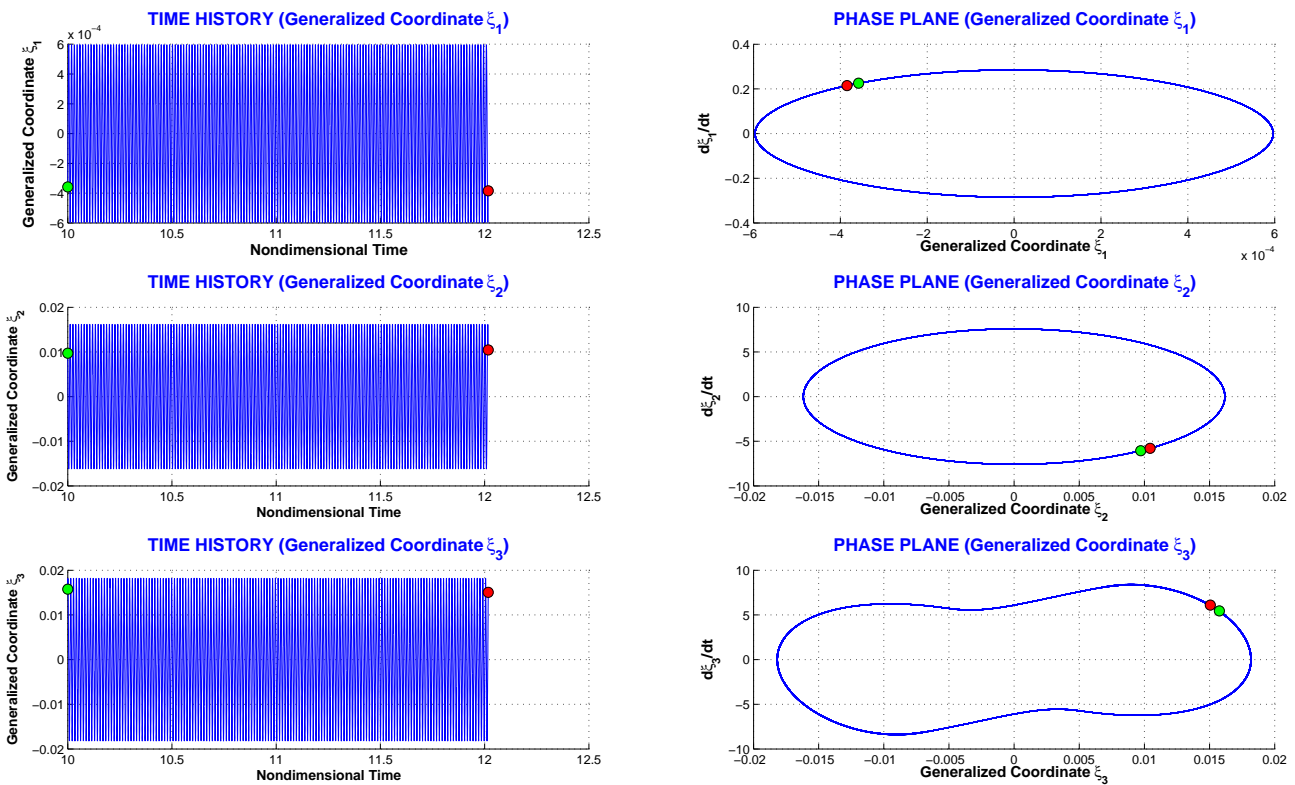


Figura 11.3: Coordenadas Generalizadas en función del tiempo (columna izquierda) y plano de fases (columna derecha) para $U_\infty = 350$ KTAS. Se representa de 10 a 12 en tiempo adimensional.

La transformada de Fourier para el tramo de tiempo adimensional [10, 12] indica la existencia de frecuencias características discretas, lo que es indicio de respuesta armónica. Esto se confirma con los planos de fases (ver columna derecha en la figura 11.3) que se reducen a trayectorias por las que transcurren la respuesta indicando que es periódica pasando por los mismos puntos $(\hat{\xi}_i, d\hat{\xi}_i/d\hat{t})$ a lo largo del tiempo. Por otro lado, reduciendo el muestreo al intervalo [13, 13.5] (ver figura 11.4), la columna izquierda con la evolución en el tiempo de las coordenadas generalizadas demuestra que la respuesta es periódica.

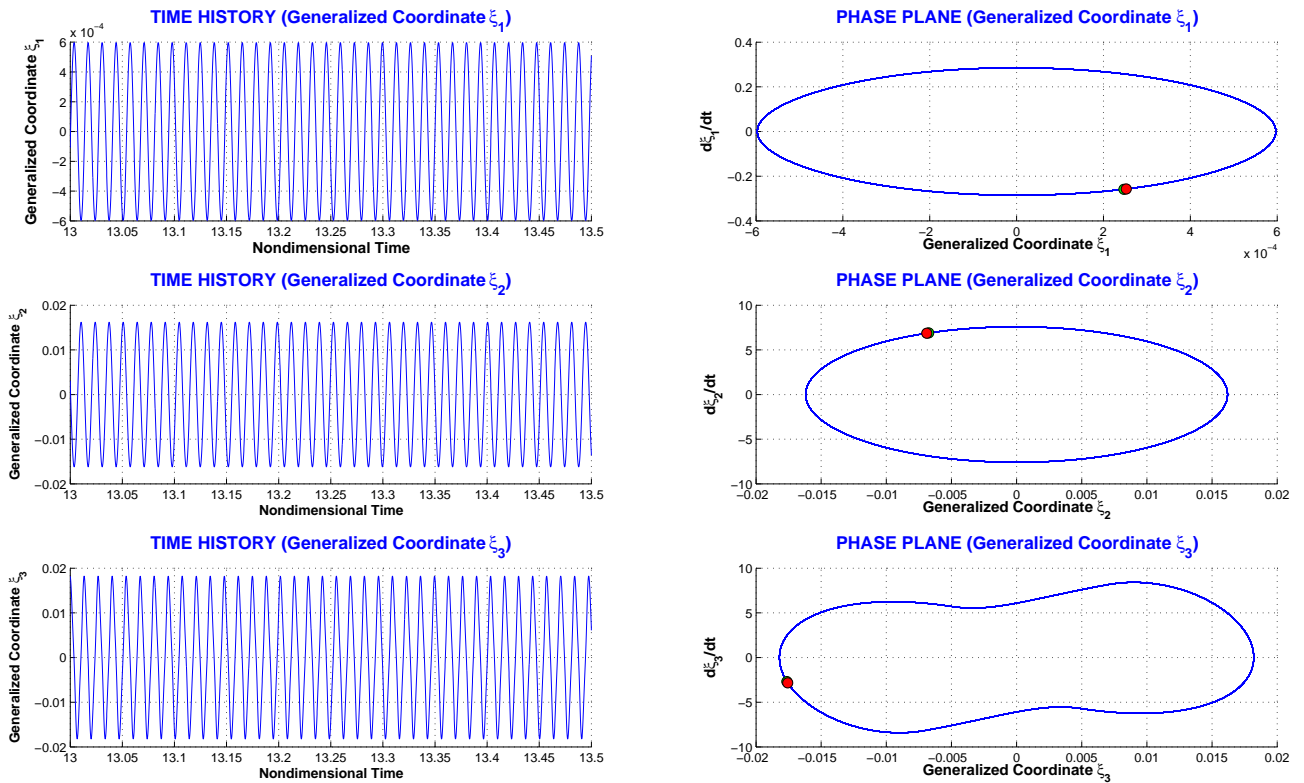


Figura 11.4: Coordenadas Generalizadas en función del tiempo (columna izquierda) y plano de fases (columna derecha) para $U_\infty = 350$ KTAS. Se representa el último medio segundo adimensional para poder visualizar la forma de la respuesta.

11.4. Respuesta de tipo caótica

Las figuras 11.5 y 11.6 representan la respuesta del sistema a la velocidad de 260 KTAS, la velocidad para la que se tenían un número elevado de frecuencias características y que por tanto era *candidata* a ser caos.

Las oscilaciones *irregulares* que no tienen unas frecuencias características se denominan *caóticas*, *aperiódicas* o *erráticas* ([Sey94]). Esta es la definición de *caos* en sentido amplio. Sin embargo, es necesario profundizar en esta definición ya que algunos sistemas dinámicos exhiben oscilaciones que a simple vista parecen *aperiódicas*, y sin embargo son periódicas. Un ejemplo es la *ecuación de Duffing* que modeliza los desplazamientos verticales de una viga sometida a una carga de compresión constante y una carga vertical oscilatoria¹. Para unos determinados valores de carga, la solución tiene un período anormalmente grande ([Sey94], página 342), y una solución en el dominio del tiempo durante unos segundos puede parecer *aperiódica*, cuando bastaría con continuar la integración un tiempo necesario para poder reproducir el período y darse cuenta que en realidad no se trata de *caos*. Una de las características fundamentales del *caos* es la dependencia de las *condiciones iniciales*. Una pequeña perturbación en las condiciones iniciales da lugar a respuestas completamente distintas. Esta condición no la cumple la anteriormente mencionada *ecuación de Duffing*.

Por tanto, es necesario establecer unas criterios que actúen como detectores de caos. Para sistemas dinámicos, las herramientas de detección de caos son las que se detallan a continuación.

¹Para más detalle consultar [Sey94], página 50.

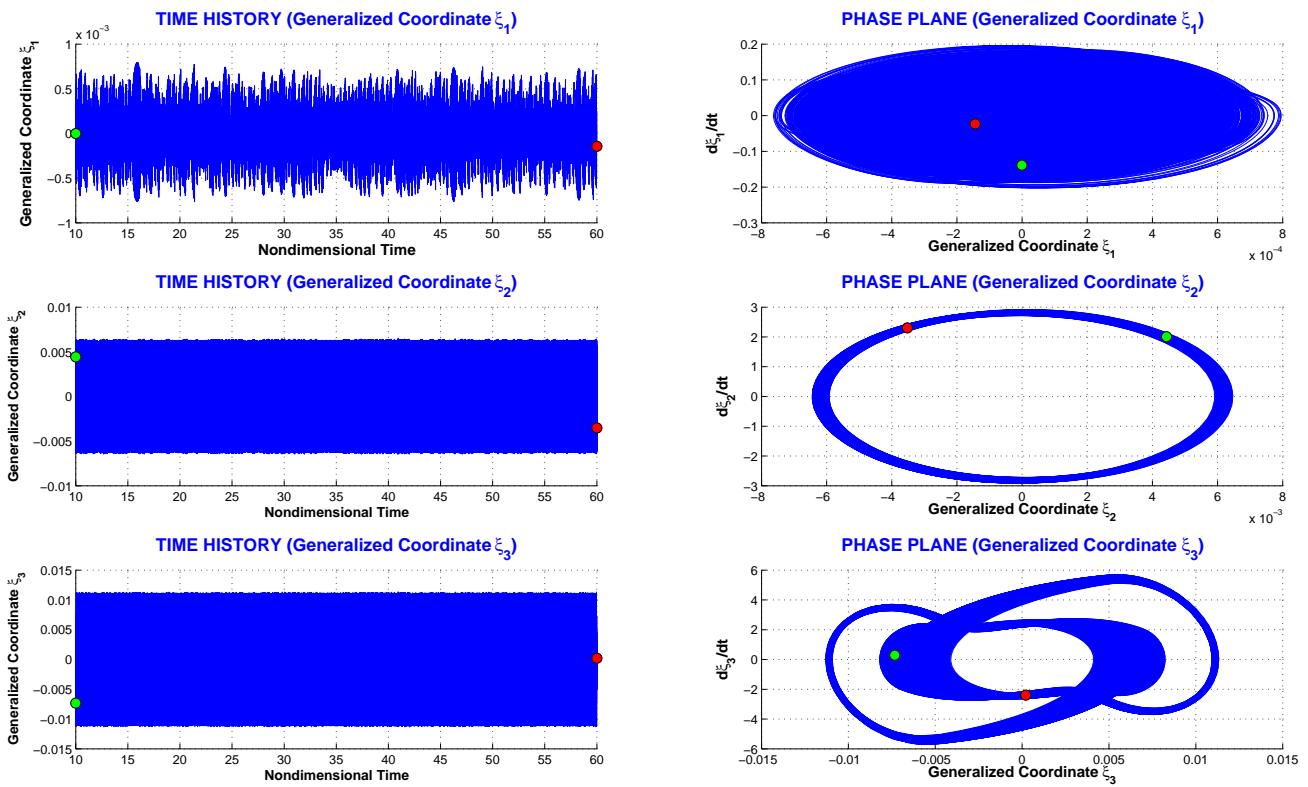


Figura 11.5: Coordenadas Generalizadas en función del tiempo (columna izquierda) y plano de fases (columna derecha) para $U_\infty = 260$ KTAS. Se representa de 10 a 60 en tiempo adimensional.

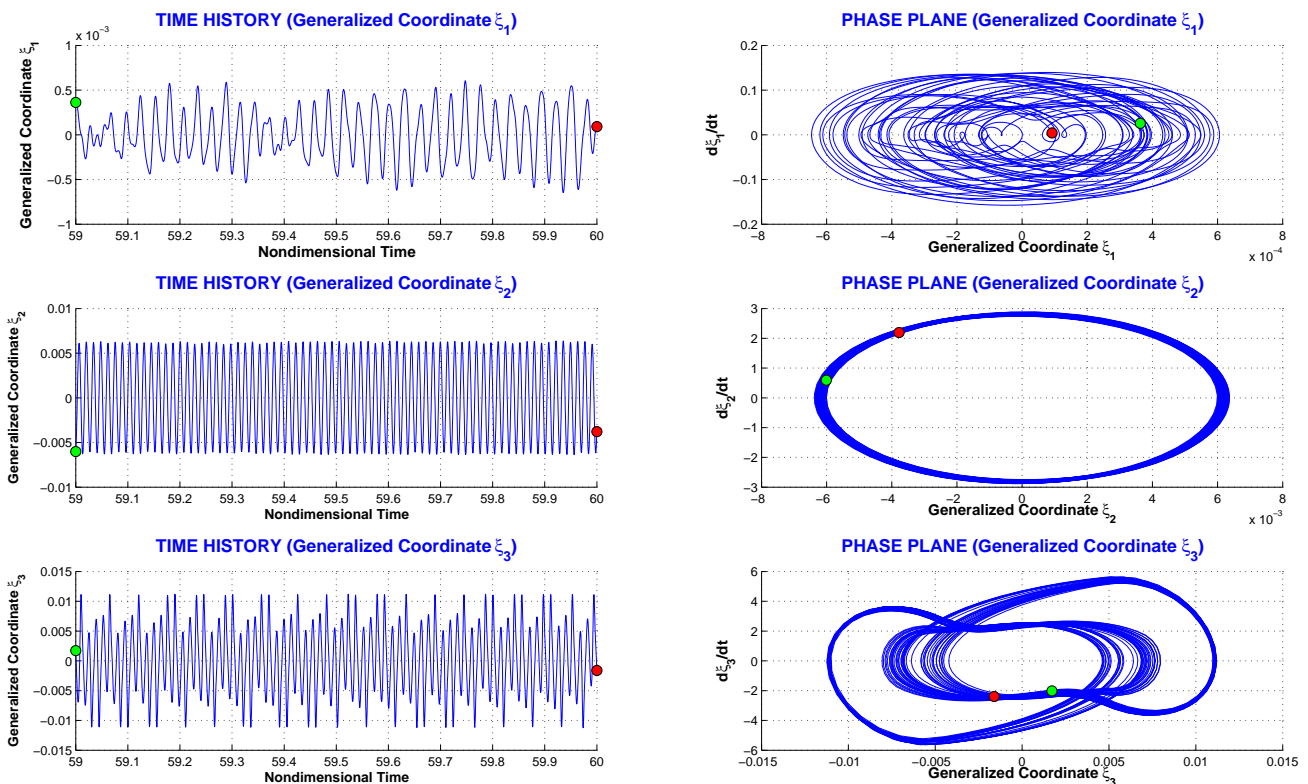


Figura 11.6: Coordenadas Generalizadas en función del tiempo (columna izquierda) y plano de fases (columna derecha) para $U_\infty = 260$ KTAS. Se representa el último segundo adimensional con el objetivo de visualizar la forma de la respuesta.

11.4.1. Detección de Respuesta Caótica.

A continuación se describen las principales herramientas para determinar si una respuesta es de tipo caótico:

1. Transformada de Fourier:

La densidad espectral de potencia (PSD o *Power Spectral Density*) en señales *periódicas* se caracteriza por la existencia de unas frecuencias características que, por otro lado, están relacionadas con el problema que se resuelve (ver figura 11.7). Sin embargo, si la respuesta del sistema es caótica, su densidad espectral se caracteriza por tener un nivel de ruido (el denominado *broadband noise*) en todo el ancho de banda y sobre este nivel un elevado número de picos en frecuencia sin significado físico directo con el problema (figura 11.8). El hecho de que el PSD de una señal tenga un número elevado de picos de frecuencia es *síntoma* de caos y, de hecho, ha sido un método estándar para la detección de caos (ver [Sey94], pág. 357).

Las dos siguientes figuras 11.7 y 11.8 se han obtenido de la referencia [Sey94].

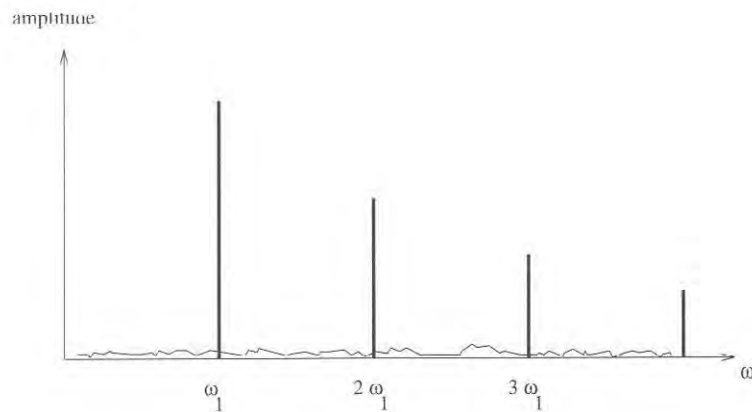


Figura 11.7: Transformada de Fourier de una respuesta de tipo armónica. Se caracteriza por tener un número discreto de frecuencias características.

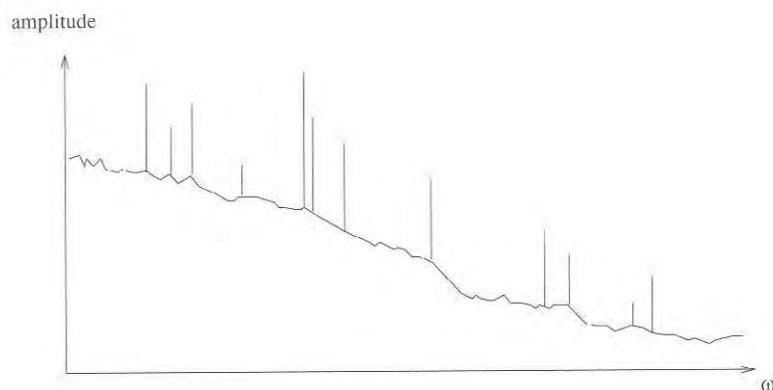


Figura 11.8: Transformada de Fourier de una respuesta de tipo caótica. Se caracteriza por no tener frecuencias características de forma que la energía se distribuye en una banda de frecuencias.

2. Diagramas de Bifurcación:

Los *diagramas de bifurcación* representan puntos estacionarios de la respuesta ($d\hat{\xi}/d\hat{t} = 0$) en función de un parámetro del sistema. Si para un valor del parámetro el diagrama de bifurcación se reduce a un punto indica que la respuesta está amortiguada, si existen un número discreto de puntos indica que la respuesta alcanza los mismos máximos/mínimos en el tiempo, síntoma de periodicidad, y, por último, si el diagrama de bifurcación degenera en una banda, indica que la respuesta no alcanza máximos/mínimos definidos y es síntoma de caos.

3. Mapas de Poincaré de la respuesta en un tiempo t / Dimensión Fractal.

Los *mapas de Poincaré* en un tiempo t representan Velocidad Generalizada vs Coordenada Generalizada de un modo, los pares $(\xi_i(t), \dot{\xi}_i(t))$, en un instante de tiempo t para diferentes respuestas del sistema correspondientes a diferentes condiciones iniciales muy próximas. Según [Sey94], una diferencia menor de un 1% es suficiente para poder considerar dos condiciones iniciales *próximas*. El número de condiciones iniciales a estudiar puede variar entre 8000 ([Sey94], página 336) y 15000 ([Str94], página 143) para tener una muestra estadística suficiente. Por tanto, se trata de lanzar 8000-15000 integraciones numéricas, cada una de las cuales se parará en el instante t , y se representará el par $(\xi_i(t), \dot{\xi}_i(t))$. Los mapas de Poincaré de una respuesta caótica exhiben una geometría de tipo fractal, que se caracteriza por tener una *dimensión* no entera (ver [AP92], página 280).

[Str94] propone una simplificación a los anteriores Mapas de Poincaré. Consiste en el *mapa estroboscópico de Poincaré* que se basa en muestrear una señal de tipo caótica en intervalos discretos de tiempo. Si el movimiento es caótico, la probabilidad de encontrar un par $(\xi_i(t), \dot{\xi}_i(t))$ con este tipo de muestreo es la misma que el mapa clásico de Poincaré para un tiempo t . La figura 11.9 (extraída de [Sey94]) representa un Mapa de Poincaré de la ecuación de Duffing.

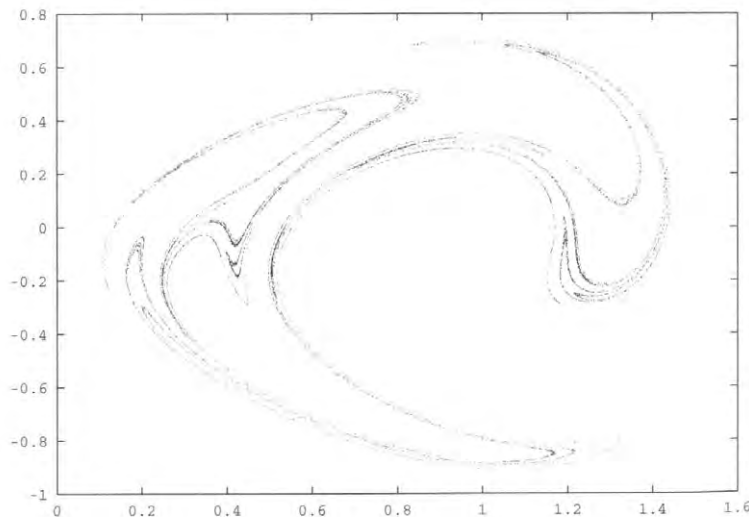


Figura 11.9: Mapa de Poincaré de la Ecuación de Duffing (ver [Sey94], págs. 335 y 336)

4. Comprobar la evolución de dos respuestas del sistema con dos condiciones iniciales ($t=0$) muy próximas / Exponentes de Lyapunov:

Analizar la evolución de dos respuestas con condiciones iniciales muy próximas. Si el vector de estado-espacio de estas dos respuestas se separa en el tiempo de forma divergente implica que el exponente de Lyapunov es positivo y el sistema responde de forma caótica. La figura 11.10 representan dos soluciones de la ecuación de Lorenz con condiciones iniciales muy próximas (extraída de [Sey94]).

Los exponentes de Lyapunov es una forma rápida de detectar caos pero sin embargo no *cuantifica* el *grado de caos* como lo hace los *mapas de Poincaré*.

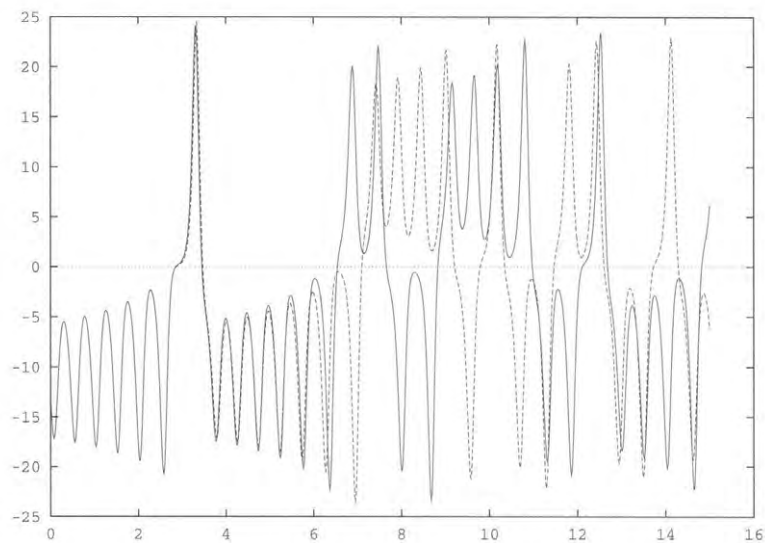


Figura 11.10: Dos soluciones de la Ecuación de Lorenz con condiciones iniciales muy próximas (ver [Sey94], pág. 333)

5. Planos de fase:

Los planos de fase representan las trayectorias que describen los pares velocidad vs. desplazamiento, i.e., $(\hat{\xi}, d\hat{\xi}/d\hat{t})$. La figura descrita por estas trayectorias depende del tipo de movimiento: en caso de respuesta amortiguada, una vez eliminada la respuesta transitoria inicial, el plano de fase se reduce a un punto, en respuesta periódica el plano de fase se reduce a una única trayectoria cerrada que se irá repitiendo a medida que transcurre el tiempo (periodicidad), y en el caso de respuesta caótica el plano de fase pasa a ser un conjunto de trayectorias que barren un área acotada. Se dice que en el caso de respuesta caótica existe un *strange attractor* que confina las trayectorias a un área acotada pero las distribuye según probabilidades de paso por zonas. La figura 11.11, extraída de [Sey94], muestra un ejemplo de plano de fase para una respuesta caótica.

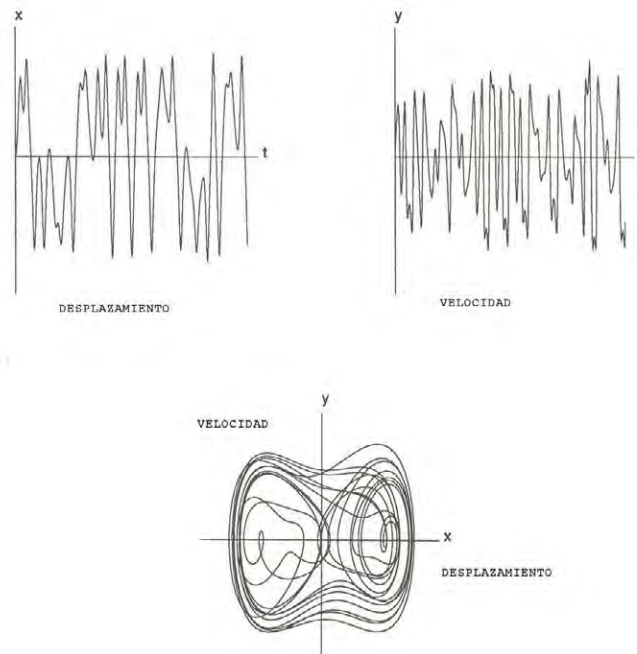


Figura 11.11: Plano de fase (velocidad vs. desplazamiento) característico en respuestas de tipo caótico.

6. Comprobar el cambio en la frecuencia característica del sistema:

La aparición de resonancias (frecuencias múltiplo de otras) en un sistema puede dar lugar a la aparición de LCOs tal y como indican varias referencias (consultar [SPSY91], [Gil97] o [GSK98]).

7. Representar el segundo pico de la transformada de Fourier frente al primero ([DI88]):

Una forma de determinar si la respuesta es caótica es realizar análisis de Fourier de distintos tramos de la respuesta y comprobar las frecuencias características. La referencia [DI88] realiza una aproximación de este tipo y representa un mapa de Poincaré de la segunda frecuencia característica frente a la primera, obteniéndose el gráfico de la figura 11.12.

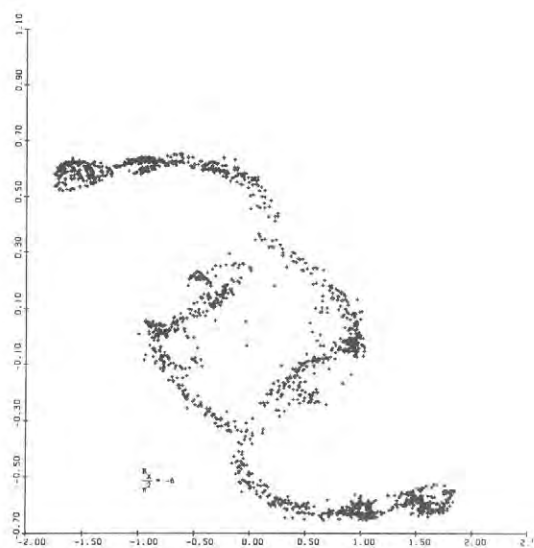


Fig. 4a. Poincaré map, second vs. first Fourier coefficient, $N = 6$.

Figura 11.12: Mapa de Poincaré de la segunda frecuencia característica frente a la primera.

Los métodos anteriores permiten determinar la existencia de una respuesta de tipo caótico. Sin embargo, se hace necesario introducir una valoración del *grado de caos* ya que, como se demostrará a continuación, no todas las respuestas de tipo caos tienen el mismo grado de caoticidad. Aunque la dimensión fractal podría cuantificar el *grado de caos*, es un método muy específico y se nos antoja demasiado matemático para poder ser aplicado a cualquier sistema. El siguiente apartado desarrolla un método numérico aplicado en esta tesis para caracterizar el grado de caos.

11.4.2. Tasa de Dispersión o *Dispersal Rate*

El término **Tasa de Dispersión** o *Dispersal Rate* se aplica en biología para definir la dispersión de especies del mismo tipo. Un valor alto de la Tasa de Dispersión indica que la especie está distribuida espacialmente, mientras que un valor bajo indica que la especie se concentra geográficamente en una zona. Tiene gran aplicación en el estudio del desarrollo y/o extirpación de una determinada especie.

En este caso, un alto grado de dispersión (valor alto de la Tasa de Dispersión) significará que soluciones con similares condiciones iniciales (lo que en biología podría ser *misma especie*) se separan en el tiempo dando lugar a muy distintas soluciones para un tiempo posterior t . Un valor bajo de la Tasa de Dispersión indica que las soluciones, aún siendo caóticas, no se separan demasiado en el tiempo.

La forma de calcular el valor del *Factor de Dispersión* es la siguiente. En un diagrama *Velocidad Generalizada vs Coordenada Generalizada* (figura 11.13), se representa el par $(\hat{\xi}_{NL}, d\hat{\xi}_{NL}/d\hat{t})$ del modo asociado a la no linealidad (subíndice NL) y resultado de integrar las ecuaciones aeroelásticas hasta un tiempo $\hat{t} = \hat{t}^*$ para distintas condiciones iniciales cercanas a una nominal. Este diagrama es en realidad una *sección de Poincaré* de la variable de estado-espacio $\vec{x}(\hat{t})$. Sobre este diagrama, se realiza una cuadrícula tal y como se indica en la figura 11.13. Esta cuadrícula dará lugar a un número N de rectángulos. De todos estos rectángulos, sólo algunos de ellos contienen una solución de la sección de Poincaré. Cuanto mayor sea el número de rectángulos afectados por un *disparo* de la solución, mayor será la dispersión y por tanto mayor será el *caos* en la solución. Se define el *Factor de Dispersión* o *Dispersal Rate DIRA* como:

$$DIRA(I, P) = \frac{N - N_0}{N} \cdot 100 \quad (11.1)$$

donde N es el número de intervalos \mathbb{R}^2 en los que se ha particionado el intervalo I de \mathbb{R}^2 y N_0 es el número de intervalos de I que no contienen ninguna solución (intervalos *vacíos*). Puede observarse que el factor $DIRA(I, P)$ depende del intervalo escogido para encerrar el mapa de Poincaré (en la figura 11.13 sería el intervalo $I = [-0,015, 0,015] \times [-6, 6]$), y de la partición P que determina las divisiones que darán lugar a los subintervalos en los que se divide el intervalo I .

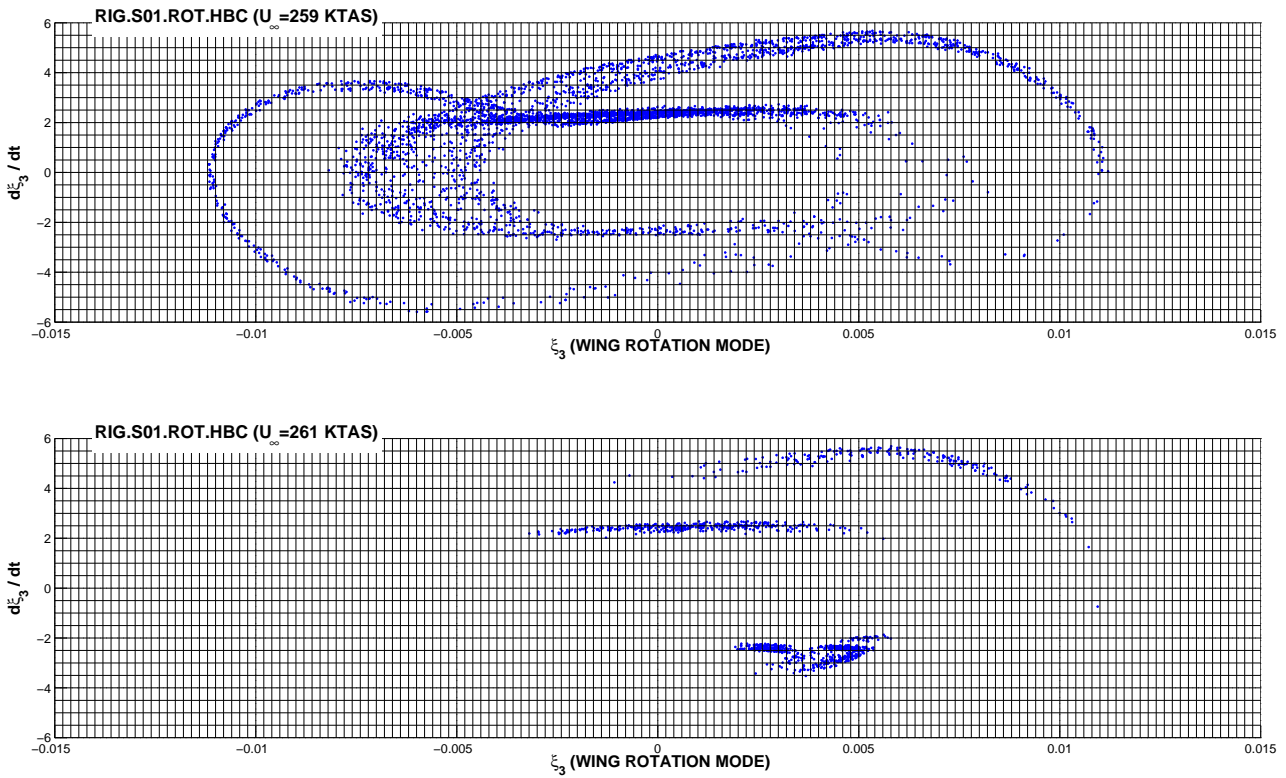


Figura 11.13: Dos secciones de Poincaré para dos velocidades de vuelo distintas: $U_\infty = 259$ KTAS y $U_\infty = 261$ KTAS.

La figura 11.14 representa un conjunto de secciones de Poincaré para distintas velocidades de vuelo, desde 240 a 350 KTAS. Para cada velocidad, se representa el par $(\hat{\xi}_3, d\hat{\xi}_3/d\hat{t})$ resultado de integrar las ecuaciones de estado-espacio hasta un tiempo determinado $\hat{t} = \hat{t}^*$ y para distintas condiciones iniciales. Las condiciones iniciales se calculan como pequeñas perturbaciones arbitrarias alrededor de una condición inicial. Se consideran variaciones menores del uno por ciento con respecto a la condición inicial nominal. En la figura 11.14, debajo de la velocidad asociada a cada mapa de Poincaré, se detalla en rojo el número de condiciones iniciales y el factor *DIRA*. Por ejemplo, para conseguir el mapa de Poincaré a la velocidad $U_\infty = 350$ KTAS, se ha integrado el sistema de ecuaciones con 1793 condiciones iniciales distintas y el *Factor de Dispersión DIRA* ha resultado ser de 0,017778. Un número típico de condiciones iniciales distintas para construir un mapa de Poincaré suele ser del orden de 8000 a 10000; sin embargo, es intencionado considerar sólo del orden de 1000 – 2000 puntos ya que el objetivo de este primer conjunto de secciones de Poincaré es acotar la zona de caos. Una vez determinado el rango de velocidades en el que aparece caos, se realiza un cálculo más preciso de las secciones de Poincaré con un mayor número de condiciones iniciales y a las velocidades de vuelo de interés. Esto último se representa en la figura 11.15, en la que el rango de velocidades se ha reducido de 255 a 270 KTAS y se han incluido otras velocidades intermedias de interés.

Por último, la figura 11.16 representa la *Tasa de Dispersión* en función de la velocidad de vuelo U_∞ para el rango de velocidades [255, 270] KTAS, observándose el mayor grado de caos para la velocidad de 260 KTAS.

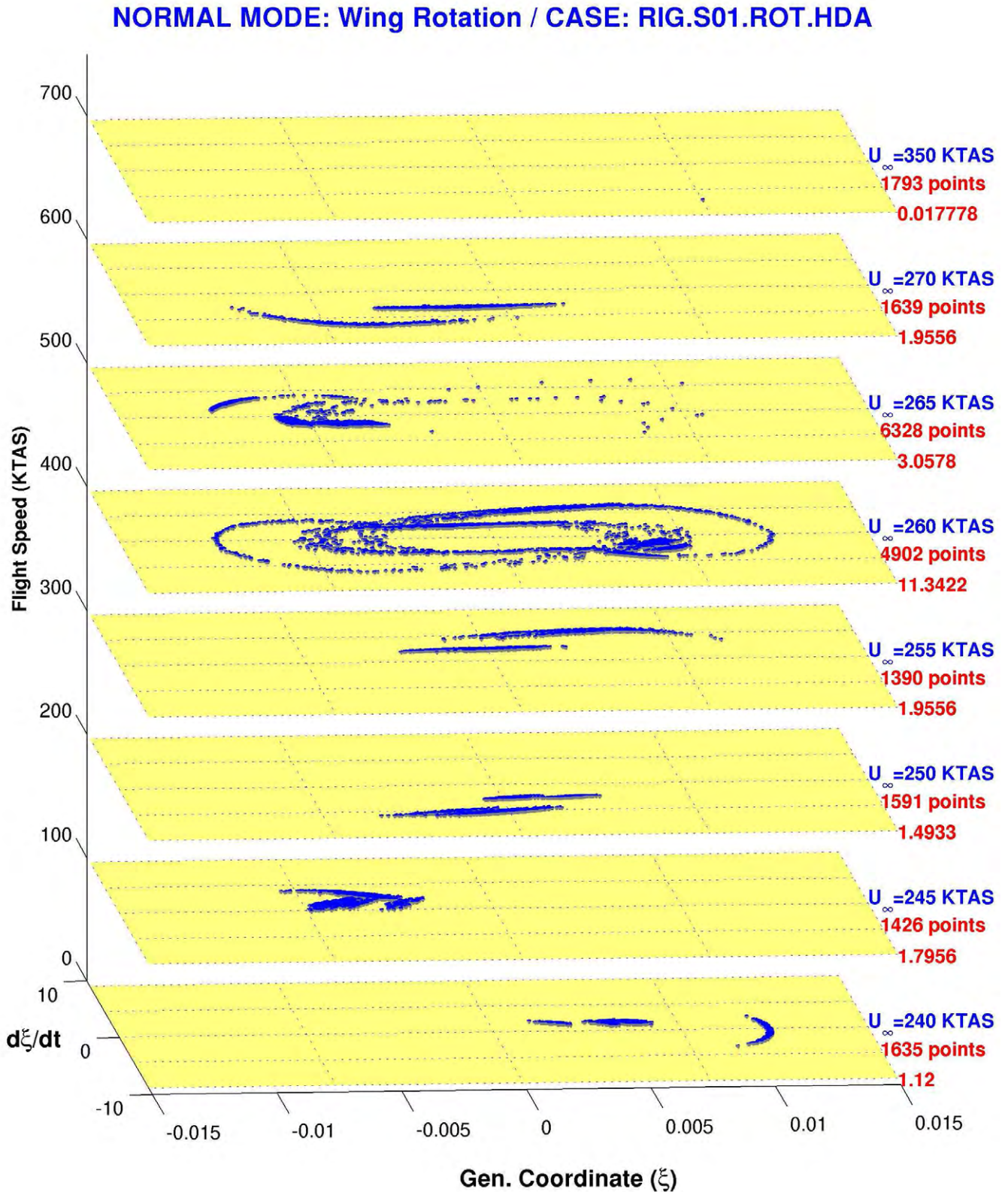


Figura 11.14: Secciones de Poincaré basadas en el par $(\hat{\xi}_3, d\hat{\xi}_3/d\hat{t})$ en $\hat{t} = 30$ para distintas velocidades de vuelo. La coordenada generalizada $\hat{\xi}_3$ corresponde al modo de rotación de aleta (grado de libertad no lineal).

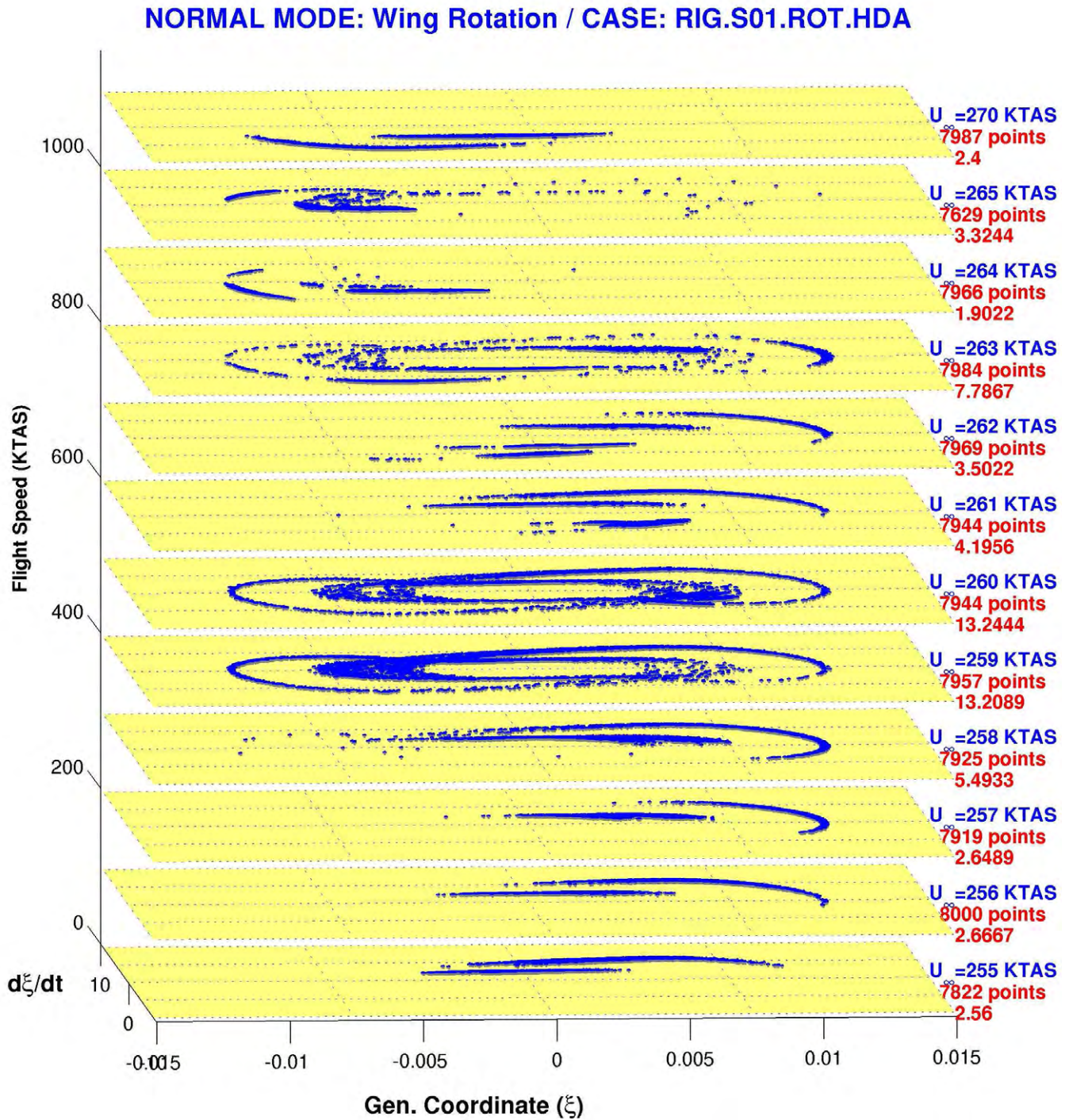


Figura 11.15: Secciones de Poincaré basadas en el par $(\hat{\xi}_3, d\hat{\xi}_3/d\hat{t})$ en $\hat{t} = 30$ para distintas velocidades de vuelo. La coordenada generalizada $\hat{\xi}_3$ corresponde al modo de rotación de aleta (grado de libertad no lineal).

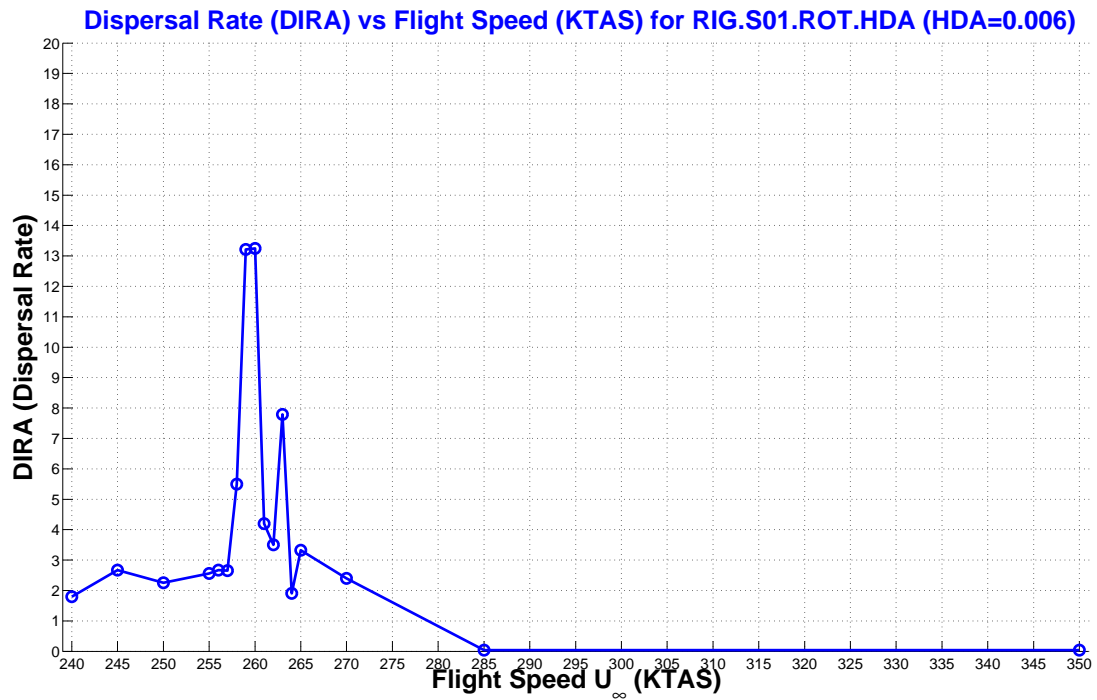


Figura 11.16: Tasa de Dispersión (*Dispersal Rate* DIRA) en función de la velocidad de vuelo U_∞ .

11.5. Consideraciones Finales

En este capítulo se ha analizado de forma *cualitativa/cuantitativa* la respuesta aeroelástica del sistema no lineal. Se han utilizado los módulos del código **FHSWB** desarrollados en Matlab explícitamente para el análisis y post-proceso de la respuesta aeroelástica. Las herramientas principales utilizadas son:

- Representación de la respuesta vs tiempo.
- Diagrama de fases, representando velocidad de variación de una variable frente al valor de esa variable: permite determinar el tipo de LCO desarrollado e incluso si la respuesta tiene cierta caoticidad.
- Transformada de Fourier o PSD: permite determinar el número de frecuencias características, obteniéndose el grado de complejidad de la misma.
- Mapas de Poincaré: es fundamental en la determinación de la respuesta de tipo caótico.
- Evaluación del factor *Factor de Dispersión* o *Dispersal Rate* **DIRA**: desarrollado en esta tesis para cuantificar del grado de caoticidad de una respuesta.

Todas estas herramientas se han revelado útiles en la caracterización del tipo de respuesta.

Capítulo 12

CONCLUSIONES

Se resumen a continuación los principales resultados y contribuciones de esta tesis doctoral:

1. Respecto a la **formulación teórica**.

Se han desarrollado las ecuaciones aeroelásticas de una configuración esbelta cuerpo/ala en presencia de no linealidades estructurales concentradas. Esta formulación teórica incluye el cálculo de las propiedades inerciales, estructurales y aerodinámicas de configuraciones esbeltas *flexibles*, y ha sido validada con resultados teóricos y experimentales de diversos autores.

La formulación teórica es novedosa en dos aspectos:

- a) Desarrolla el cálculo de aerodinámica no estacionaria para modos de deformación genéricos, incluyendo modos flexibles con deformación longitudinal no sólo en el cuerpo sino también de las superficies de control. La deformación según la cuerda en las superficies de control o aletas estabilizadoras puede ser importante en algunos misiles/cohetes.
- b) Integra en las ecuaciones aeroelásticas de estado-espacio el tratamiento de las no linealidades estructurales de tipo *freeplay* o *hysteresis*.

2. Respecto al **desarrollo de códigos** (en Fortran 90 y Matlab)

Dentro de esta tesis se ha desarrollado y validado el código **FHSWB** con los siguientes módulos principales programados en Fortran 90 o Matlab:

- a) Módulo de cálculo de propiedades inerciales, estructurales y aerodinámicas de configuraciones esbeltas cuerpo/ala. Este código es especialmente útil en el cálculo de *coeficientes aerodinámicos no estacionarios* de este tipo de configuraciones y puede complementar a códigos como el ESDUpac A8310 desarrollado dentro de la ESDU 8310 para cuerpos esbeltos aislados.
- b) Módulo de formulación de las ecuaciones aeroelásticas de configuraciones esbeltas, con solución de las mismas mediante el método k (dominio de la frecuencia) o solución directa en el dominio del tiempo (estado-espacio), con la posibilidad de inclusión de no linealidades estructurales concentradas.
- c) Módulo de *integración en el dominio del tiempo de las ecuaciones de estado-espacio* en presencia de no linealidades estructurales del tipo *freeplay* o *hysteresis*. Este módulo incluye las siguientes utilidades:

- Durante la integración se captura el tiempo de paso por las *esquinas de las no linealidades*, realizando el cambio de sistema de forma exacta y evitando acumulación de errores por este motivo, algo que es fundamental con no linealidades de este tipo.
 - En tiempo de ejecución se está procesando la respuesta, obteniéndose información del amortiguamiento, el número de frecuencias características, la repetitividad de la respuesta (existencia de LCO), etc. El objetivo de esta caracterización en tiempo real de la respuesta es identificarla lo antes posible y pasar el siguiente valor del parámetro de estudio (velocidad de vuelo U_∞ , holgura de la no linealidad, etc.). Esta disminución del tiempo de cálculo es especialmente útil en el diseño preliminar de una aeronave, en la que se debe estudiar su comportamiento aeroelástico en toda su envuelta de vuelo, lo que puede dar lugar a decenas de puntos de vuelo combinados con decenas de estado máxicos y variaciones a su vez de los principales parámetros de la no linealidad.
- d) Adicionalmente, y dentro del entorno **FHSWB**, se han desarrollado los siguientes módulos en Matlab para el postproceso de la respuesta del sistema:
- Módulos para representación de las principales características de la respuesta en función del par (U_∞, λ) , siendo λ el valor del parámetro de la no linealidad que se está estudiando (holgura, descentramiento, precarga, condiciones iniciales, etc.).
 - Módulo para representar los *diagramas de bifurcación* de la respuesta, representando los mínimos y máximos de la respuesta en función de la velocidad de vuelo U_∞ .
 - Módulo de cálculo del factor *DIRA* (*Dispersal Rate*), un concepto numérico nuevo introducido en la tesis para cuantificar el grado de caoticidad de la respuesta.

Resultado de lo anterior, el código **FHSWB** es autocontenido para el diseño aeroelástico preliminar de configuraciones esbeltas cuerpo/ala, incluyendo aeroelasticidad no lineal con presencia de no linealidades estructurales concentradas.

Para otras configuraciones más complejas, y una vez conocida la planta en la formulación estado-espacio, el código **FHSWB** ofrece herramientas útiles para la integración, caracterización y post-proceso de la respuesta.

3. Respecto a la aplicación del código **FHSWB** a la configuración de estudio.

El código **FHSWB** y la metodología expuesta en esta tesis se ha aplicado a una configuración esbelta cuerpo/ala tipo misil. Se han analizado el efecto de no linealidades estructurales concentradas localizadas en el soporte del misil al pilón del avión plataforma o la rotación de las superficies de control, con los siguientes resultados:

- a) Las no linealidades del tipo *freeplay* o *hysteresis* introducen oscilaciones de ciclo límite LCOs a velocidades inferiores a la velocidad de *flutter* lineal. Por otro lado, se ha comprobado que la velocidad de vuelo a la que aparecen las oscilaciones no se puede predecir en general mediante modelos lineales. Como ejemplo, pueden verse los resultados para la configuración **RIG.S01.ROT.HDA** (ver sección 10.2.1), para la que se obtiene una velocidad de *flutter no lineal* no relacionada con la velocidad de *flutter* nominal ($VF_{K=K_{nom}}$) ni con la velocidad de *flutter* con actuador desconectado ($VF_{K=0}$).

-
- b) Se han obtenido todos los tipos de respuesta aeroelástica no lineal: amortiguada, oscilación armónica LCO, caos y *flutter*. La no linealidad de tipo *hysteresis* es más proclive a respuestas más complejas, incluyendo caos.
 - c) Una mayor precarga en el soporte no lineal aumenta la velocidad de vuelo U_∞ a la que aparecen oscilaciones LCOs. Este resultado coincide con lo encontrado en ensayos en vuelo de varias aeronaves: los timones de profundidad tienden a presentar menos oscilaciones debido a la precarga aerodinámica asociada al trimado longitudinal del avión; sin embargo, los timones de dirección presentan más oscilaciones debido a la precarga nula durante el vuelo horizontal.
 - d) Las no linealidades sólo provocan respuesta no lineal si están localizadas en un modo del mecanismo de *flutter* lineal. Por ejemplo, una no linealidad en el modo de flexión lateral del pilón no modifica la respuesta aeroelástica lineal.
 - e) La inclusión de la flexibilidad del misil modifica de forma importante la respuesta aeroelástica, apareciendo un *mild flutter* que reduce de forma considerable la velocidad de *flutter*. En lo que se refiere oscilaciones de ciclo límite, la flexibilidad del misil tiende a amortiguar la respuesta.
 - f) Se ha validado el correcto funcionamiento de los distintos módulos del código **FHSWB**, comprobando el acoplamiento de los mismos y verificando la metodología explicada en la tesis para el análisis paramétrico de las no linealidades.

4. Respecto al desarrollo de *herramientas* y *metodologías* para futuras aplicaciones.

- a) La formulación de las ecuaciones aeroelásticas con la denominada *base modal mixta* [ψ_{io}] proporciona buenos resultados. Esta base modal se construye completando la *base nominal* [ψ_{out}] con modos adicionales de la base con rigidez nula o *base cero* [ψ_{in}], y es la primera vez que se utiliza esta aproximación en este tipo de problemas no lineales.
- b) Los módulos de integración de las ecuaciones de estado-espacio y de postproceso de la respuesta son directamente aplicables a configuraciones más complejas tipo avión. La única condición que requiere el código **FHSWB** es conocer a priori las ecuaciones aeroelásticas en la formulación estado-espacio.

Por otro lado, la metodología expuesta es aplicable al diseño aeroelástico de cualquier vehículo y de hecho está siendo aplicada actualmente en la industria (EADS/CASA) para el estudio de no linealidades estructurales en las superficies de control.

Capítulo 13

ESTUDIOS FUTUROS

Queda aún mucho trabajo para llegar a predecir y caracterizar de forma analítica las oscilaciones producidas por no linealidades estructurales en aeronaves. Hace un mes, en una conferencia de M. Karpel (ver por ejemplo [GK08]), conocido aeroelástico de prestigio internacional, declaró lo siguiente:

Weather men are proud of predicting the three main characteristics of the climatic phenomena: where, when, and how. Aeroelasticians are proud of predicting one of the three characteristics of the LCOs, the frequency. The other two characteristics that remain unpredictable are the amplitude and the flight speed at which the LCOs appear.

Cuando escuché esto, internamente pensé. . . pues tenemos un problema. Y es que aún es imprescindible, como en muchas otras áreas de la Aeroelasticidad, recurrir a ensayos en túnel y/o en vuelo.

El código desarrollado en esta tesis es un primer paso y puede servir de gran utilidad en la etapa de diseño preliminar de la aeronave, estudiando el efecto aeroelástico de dos de las no linealidades estructurales más típicas: *freeplay* e *hysteresis*. Sin embargo, aún queda un largo trabajo. A continuación se enumeran una serie de actividades interesantes que formarán parte de futuras ampliaciones del código:

1. Estudio de otros tipos de no linealidades:

- a) No linealidad de tipo *freeplay bilineal* como se indica en la figura 13.1. La zona interior o *deadband* corresponde a momento nulo en la superficie de control debido a holguras en los actuadores. Cuando se gira la superficie de control superando la zona anterior *deadband*, algunos cojinetes de articulación del eje de charnela entran en contacto y aparece una rigidez intermedia (en la figura *Partial Kmech*). Si se continúa girando la superficie de control, llegará un momento en el que todos los cojinetes de articulación entran en contacto y se consigue la rigidez total (en la figura *Overall Kmech*). Esto ocurre por ejemplo en superficies de control de aeronaves de gran tamaño, en los que la flexibilidad de las superficies de control producen este contacto diferencial entre los cojinetes de articulación a lo largo del eje de charnela. De hecho, una de las recomendaciones de la FAA en la referencia [FAA04] era:

. . . Human factors of the inspection procedure of very large control surfaces should be assessed to avoid the possibility that the free-play is not measured accurately.

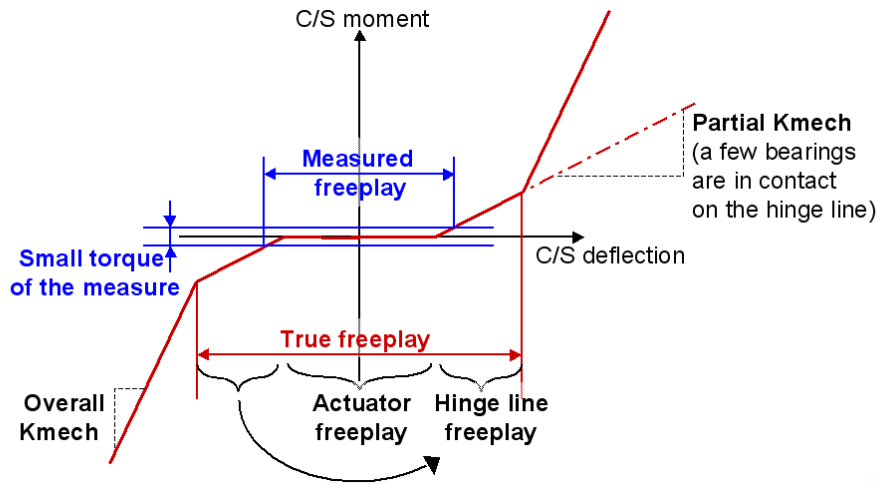


Figura 13.1: Nolinealidad bilineal de tipo *freeplay*. C/S es acrónimo del término **C**ontrol **S**urface.

- b) Endurecimiento del modo de torsión (nolinealidad cúbica de tipo *hardening*).
- c) Saturación, etc.

2. Introducción de la aerodinámica del pilón del misil.
3. Estudio de la respuesta con variación de las condiciones de vuelo: altura, i.e., densidad $\hat{\rho}_\infty$, y velocidad de vuelo \hat{U}_∞ . Este estudio permite determinar posibles fenómenos de histéresis del sistema con un aumento/disminución de la velocidad o de la altura de vuelo. Para estudiar estos fenómenos el sistema a resolver sería:

$$\frac{d\{x\}}{dt} = [A(\hat{\rho}_\infty, \hat{U}_\infty)]\{x\} + [B(\hat{\rho}_\infty)]\{u\} \quad (13.1)$$

$$\frac{d\hat{U}_\infty}{dt} = F(t) \quad (13.2)$$

$$\frac{d\hat{\rho}_\infty}{dt} = G(t) \quad (13.3)$$

4. Introducir capacidad de control de las oscilaciones de ciclo límite mediante realimentación (lazo cerrado).
5. Aplicación del módulo de integración de las ecuaciones aeroelásticas a configuraciones complejas tipo avión, optimizando principalmente el tiempo de cálculo para abordar los cientos de simulaciones necesarias.
6. Planteamiento estadístico de la variación paramétrica para reducir el tiempo de cálculo: hasta ahora realizamos un mallado rectangular de Parámetro λ vs U_∞ , pero sería mejor utilizar una campana de Gauss para el valor de la nolinealidad.
7. Simulación de efectos transónicos, especialmente en la configuración **S01** de la tesis, i.e., con el misil instalado en el avión.

Apéndice A

Informes de las Autoridades de Aeronavegabilidad.

A.1. FAA: Free-play Limits and Inspection Procedures

Las dos páginas siguientes incluyen un memorando emitido por la FAA en el año 2000 en relación a la necesidad de considerar las no linealidades tipo *freeplay* como parte de las tareas de certificación de la aeronave.

U.S. Department of Transportation
Federal Aviation Administration

Subject: INFORMATION: Free-play limits and inspection
procedures for flutter prevention, § 25.629 and
Advisory Circular (AC) 25.629-1A

Date: September 27, 2000

From: Manager, Transport Airplane Directorate, Aircraft
Certification Service, ANM-100

Reply to 00-115-17
Attn. of:

To: SEE DISTRIBUTION LIST

The establishment of free-play (or backlash) limits for control surfaces, and the associated periodic inspection procedures for excessive free-play, has been a long standing certification practice for compliance with § 25.629, as discussed in AC 25.629-1A.

Recent service experience with in-flight vibration incidents indicate that there is a greater need to focus on this aspect of compliance with section 25.629. The in-service vibration events that arise from excessive free-play, are self-excited oscillations in which the amplitude is limited due to the non-linearity caused by the backlash in the control system. Although this aeroelastic phenomenon may mimic a forced structural vibration, it has no external exciting force. It is, in fact, a type of flutter, although it is not the classical divergent flutter more commonly associated with the name. Even in its limited amplitude state, the oscillation can cause rapid wear, fatigue, or other damage. The oscillation can evolve into divergent flutter once the free-play increases beyond a certain level that is difficult or impossible to predict by analysis. In order to avoid the serious connotations associated with divergent flutter, the manufacturers prefer to call this limited amplitude phenomena a "vibration" or an "oscillation." Irrespective of what name is applied, it is still a very serious occurrence that must be prevented and it falls under the purview of § 25.629.

One of the reasons for some of the recent in-service events is related to changing technology. The control of free-play is usually associated with irreversible control surfaces. These are control surfaces that are not balanced to preclude flutter but prevent flutter by having a high degree of rotational stiffness with respect to forces applied to the surface. Formerly such irreversible control surfaces were mainly limited to small tabs, but since the mid-1980's manufacturers have come to rely on retained stiffness in powered actuators for the main control surfaces and they have dispensed with the mass balance weights on the elevators, rudders, and ailerons. Controlling free-play on these larger control surfaces is even more important since they have a much larger destructive potential if they should vibrate with a significant amplitude or develop divergent flutter. Trimable stabilizers are also large irreversible surfaces that can lead to severe vibration events if adequate free play limits and procedures are not prescribed for the stabilizer actuators and pivot bearings.

The FAA has historically considered the very conservative free-play limits of Military Specification MIL-A-8870 to provide assurance of freedom from vibration and has accepted these limits for certification without further question. However, in many cases, these limits are considered too conservative and too small to be practically controlled in a realistic service environment. In such cases the manufacturers have provided analyses and/or flight tests to confirm the adequacy of the larger amounts of free-play.

Service experience is showing that some of the free-play check procedures that have been established during certification may not be reliable for checking for all the relevant free-play in the system. Free-play in the control surface hinges as well as in the actuator attachments all contribute to the total surface free-play and the check procedure must be able to reliably measure the total free-play. One factor effecting the ability to check for free-play is the large size of the main control surfaces. For small tabs, the inspector could simply move the surface with a hand while using a dial indicator to measure trailing edge motion. With the unbalanced main control surfaces it takes a much greater force to move them and for the surfaces envisioned for larger airplanes it may be impossible to check for free-play without some automatic powered means.

In some cases, free-play in individual parts may exist, but the system rigging can be purposely cross rigged or otherwise set so that the overall free-play is apparently eliminated. Although this practice may be useful for preventing low level vibrations that might contribute to rapid wear, it may also mask increasing wear in the individual parts. If this wear occurs undetected to a significant level, then, after a single failure in the system, a very large amount of free-play could suddenly exist with very severe consequences. This should be taken into account in developing free-play check procedures.

In summary, reliable free-play inspection procedures, suitable inspection intervals, and free-play limits for all the unbalanced control surfaces and trimable stabilizer should be established as part of the compliance determination for § 25.629. The limits, intervals, and associated procedures should be evaluated and approved as part of the certification process and subsequently prescribed as maintenance limitations for the airplane.

If you have any questions regarding this memorandum, contact Jim Haynes at 425-227-2131.

Original signed by Dorenda Baker for
John J. Hickey

DISTRIBUTION:

Manager, Seattle Aircraft Certification Office, ANM-100S
Manager, Los Angeles Aircraft Certification Office, ANM-100L
Manager, Denver Aircraft Certification Office, ANM-100D
Manager, Atlanta Aircraft Certification Office, ACE-115A
Manager, Wichita Aircraft Certification Office, ACE-115W
Manager, Chicago Aircraft Certification Office, ACE-115C
Manager, Anchorage Aircraft Certification Office, ACE-115N
Manager, Boston Aircraft Certification Office, ANE-1150
Manager, New York Aircraft Certification Office, ASW-150
Manager, Rotorcraft Aircraft Certification Office, ASW-170
Manager, Special Aircraft Certification Office, ASW-190
Manager, Brussels Aircraft Certification Office, AEU-100

A.2. FAA: Memorandum ANM-05-115-019



Federal Aviation Administration

Memorandum

Date: Proposed

To: See Distribution

From: Manager, Transport Airplane Directorate, Aircraft Certification Service,
ANM-100

Prepared by: Gerald Lakin, ANM-113

Subject: Interim Guidelines for Certification and Continued Airworthiness of
Unbalanced Control Surfaces with Freeplay and Other Nonlinear
Features

Memo No.: ANM-05-115-019

Regulatory Reference: § 25.629 and related sections, § 25.1529, Appendix H, AC 25.629-1A

Summary

This memorandum clarifies Federal Aviation Administration (FAA) interim guidelines for the design, certification, and continued airworthiness of control surfaces that rely on retention of restraint stiffness for flutter prevention. These control surfaces typically do not have added mass balance; however, these interim guidelines would apply to some control surfaces that are partially mass balanced. Specifically, this memorandum provides acceptable means of establishing and certifying freeplay limits and inspection procedures, guidance for managing freeplay over the airplane service life, and a means of finding compliance for control system designs whose failure can result in a nonlinear aeroelastic configuration and limit cycle oscillation (LCO).

Although the regulations may not specifically refer to the design, certification, and continued airworthiness of control surfaces that rely on retention of restraint stiffness for flutter prevention, the regulations or requirements that apply to these control surfaces are identified in *italics*. The FAA has found Advisory Circular (AC) 25.629-1A guidance is inadequate and not standardized when applying these airworthiness requirements to certain unbalanced control surfaces. This memorandum provides interim guidance and standardized methods of compliance to support the design, certification, and continued airworthiness of unbalanced control surfaces until the FAA revises AC 25.629-1A. The freeplay discussed in this memorandum is the overall rotational freeplay of the control surface and includes contributions to freeplay of the control surface actuating system, hinges and supporting structure.

Figura A.1: Memorando ANM-05-115-019 emitido por la *Federal Aviation Administration* FAA en relación a *recomendaciones para la certificación de superficies de control con holguras tipo freeplay y otras no linealidades* (1/8).

Definition of Key Terms

In the policy statement below, the formatting (*italics*, plain text, or [square brackets]) and terms used (“must,” “should,” or “recommend”) have a specific meaning that is explained in Attachment 1.

Current Regulatory and Advisory Material

The applicable regulations relative to the certification and continued airworthiness of unbalanced control surfaces with freeplay and other nonlinear features are Title 14, Code of Federal Regulations (14 CFR) 25.629, 25.1529, and *Appendix H* to part 25. These lay out the regulatory basis for the certification and continued airworthiness to ensure the aeroelastic stability of unbalanced control surfaces with freeplay and other nonlinear features. For guidance about preventing flutter and excessive vibration of control surfaces, see AC 25.629-1A, “Aeroelastic Stability Substantiation of Transport Airplanes,” dated 7/23/98, and Transport Airplane Directorate (TAD) Memorandum No. 00-115-17, “Free-play limits and inspection procedures for flutter prevention, dated 9/27/00.

Although freeplay-induced vibration of control surfaces mimics a forced structural vibration, it has no external exciting force and can be described as a self-excited LCO that is subject to the aeroelastic stability requirements of § 25.629. The preamble to Amendment 25-77 defines flutter as, “The unstable self-excited structural oscillation at a definite frequency ... The deformation and motion of the structure result in forces on the structure that tend to *maintain* or augment the motion.” This definition ensures that an LCO, in which the amplitude is “*maintained*,” fell under the definition of flutter and thus the purview of § 25.629. The safety concern is that excessive vibration or LCO could lead to structural damage, divergent flutter, or reduced controllability of the airplane.

Relevant Past Practice

In-flight vibration incidents occurring during the past ten years indicate that some transport airplanes with unbalanced control surfaces have been prone to chronic vibration in service. In several of the in-flight vibration incidents, troubleshooting or inspections found the cause, and corrections were made before the vibration became excessive. However, in some cases the presence of freeplay in control surfaces was not addressed until excessive vibration resulted. Subsequent evaluation of these vibration incidents revealed that this type of vibration was caused by freeplay in the control system and/or supporting structure. Following a review of existing guidance material, the FAA concluded that supplementing AC 25.629-1A would clarify and standardize guidance on the certification of control surface configurations with freeplay and other nonlinear features. The current guidance is inadequate for validating maintenance requirements during certification, as well as for preparing instructions for continued airworthiness to manage wear and freeplay during the airplane service life.

Accounting for the effect of control surface freeplay on airplane flutter margins has been a long-standing certification practice for compliance with § 25.629, as discussed in AC 25.629-1A. In addition, it is general industry practice to manage freeplay of irreversible control surfaces in service by making periodic checks and adjustments. Troubleshooting procedures used by operators to detect and correct wear-induced freeplay have generally resolved vibration problems. When control systems and supporting structures on certain airplane models were found to be subject to persistent wear, design changes were made to improve wear qualities and

Figura A.2: Memorando ANM-05-115-019 emitido por la *Federal Aviation Administration* FAA en relación a *recomendaciones para la certificación de superficies de control con holguras tipo freeplay y otras no linealidades* (2/8).

reduce maintenance action. However, the procedure did not usually distinguish nuisance vibration from freeplay-induced LCO of control surfaces that could have safety implications. The LCO events on unbalanced control surfaces in transport category airplanes during normal operation are unacceptable.

To ensure compliance with § 25.629 throughout an airplane's service life, it has been FAA policy to certify and maintain in-service freeplay limits for control surfaces that depend on retention of stiffness for flutter prevention. However, this policy has not been followed consistently. This memorandum discusses the need to establish freeplay limits, and provides an acceptable means of compliance for establishing these limits. In the past, the FAA considered the freeplay limits of military specification MIL-A-8870C adequate to provide assurance of freedom from control surface vibration and has accepted these limits for certification without further proof. The FAA has also accepted higher freeplay limits than the military limits when based on service experience or flight test. This memorandum recognizes that MIL-A-8870C limits are often conservative and provides for the use of higher freeplay limits using a demonstration of adequate service experience or a validated analytical approach.

Advisory Circular 25.629-1A states that freeplay should be accounted for analytically by making a change in control surface restraint stiffness and calculating the effect on flutter margins in a conventional linear flutter analysis. In the same manner, the velocity-squared damping provided by hydraulic actuators has been approximated by a linear damping element and included in the flutter analysis, again assessing the effect on flutter margins. Accounting for freeplay by linear analysis, while adequate to prove freedom from divergent flutter, has been inadequate to prove freedom from LCO. Thus, in the past the stability and structural integrity of LCO has not been adequately addressed in the compliance finding for § 25.629. Freedom from LCO should be established by including freeplay, velocity-squared damping, or any other non-linear element into the equations of motion and solving for the resulting motion, forces, and stability of the aeroelastic system. The FAA recognizes this deficiency in AC 25.629-1A and provides guidance in this memo for a validated nonlinear aeroelastic analysis to establish the stability and structural integrity of these configurations.

Interim Guidelines

These interim guidelines address the design, certification testing and analysis, and continued airworthiness of control surfaces that rely on retention of restraint stiffness for flutter prevention (that is, unbalanced control surfaces). Specifically, this guidance provides an acceptable means of establishing and certifying adequate freeplay limits and inspection procedures, and managing freeplay over the airplane service life. This guidance also provides a means of finding compliance for failure cases that result in a nonlinear aeroelastic configuration and LCO.

a. Freeplay In Control Surface Design

Section 25.629 requires that control surfaces and tabs, actuating systems and supporting structure be designed such that the airplane is free from aeroelastic instability and will not result in an aeroelastic LCO (freeplay-induced vibration) in any airplane configuration during normal operation in any phase of flight.

Figura A.3: Memorando ANM-05-115-019 emitido por la *Federal Aviation Administration* FAA en relación a *recomendaciones para la certificación de superficies de control con holguras tipo freeplay y otras no linealidades* (3/8).

Meeting one or more of the following conditions will satisfy this requirement:

(1) The control surface or tab is demonstrated by analysis or test to be free from flutter to V_D/M_D with all restraint stiffness and damping lost.

(2) The control surface in-service freeplay limits will not exceed the values established using the criteria in section b, below, "Freeplay Limits For Unbalanced Control Surfaces," throughout the service life of the airplane.

(3) The control surface in-service freeplay limits will not exceed the values established using the criteria in section b. Additionally, a design feature(s) is provided to compensate for the loss of restraint in the control system due to freeplay.

i. The design feature may be a structural element added in parallel with the control system to provide adequate restraint stiffness to preclude freeplay-induced vibration. It should be established that the design feature is effective over the permitted range of freeplay expected to occur in service.

ii. The compensating feature for some designs may be a continuous aerodynamic loading of the control surface. For such a design, it should be shown by tests or analyses that the aerodynamic loading is sufficient in any phase of flight with the control surface at the in-service freeplay limits.

b. Freeplay Limits For Unbalanced Control Surfaces

In-service freeplay limits should be established for all control surfaces that depend on the retention of stiffness to comply with the aeroelastic stability requirements of § 25.629. The criteria of military specification MIL-A-8870C, reproduced below, provide acceptable limits of freeplay. These may be used without additional substantiation.

Trailing Edge Control Surface	Extends outboard of 75% main surface span – 0.13 degree	Extends outboard to between 50% to 75% main surface span – 0.57 degree	Extends outboard to less than 50% main surface span – 1.15 degree
Tab	Tab span equal to or greater than 35% control surface span – 0.57 degree	Tab span less than 35% control surface span – 1.15 degree	
All-movable Control Surface	0.034 degree		
CONTROL SURFACE AND TAB IN-SERVICE FREEPLAY LIMITS			

Aircraft have demonstrated acceptable service experience using freeplay limits greater than those in MIL-A-8870C. If those control surfaces are used on a new derivative model with similar

Figura A.4: Memorando ANM-05-115-019 emitido por la *Federal Aviation Administration* FAA en relación a *recomendaciones para la certificación de superficies de control con holguras tipo freeplay y otras no linealidades* (4/8).

aeroelastic characteristics, the same freeplay limits may be applied without additional substantiation.

For new or modified control surfaces, MIL-A-8870C limits may be too small to be practically controlled in a realistic service environment. In such cases, the applicants may provide analyses and/or flight tests to confirm the adequacy of larger freeplay limits. For these larger freeplay limits, the applicants should verify the absence of freeplay-induced vibration by flight or wind tunnel test to V_{DF}/M_{DF} , and/or by aeroelastic analysis to V_D/M_D using a configuration containing the proposed in-service freeplay limits. They should use a validated method of analysis, as described in section c, for verification.

c. Aeroelastic Stability Analyses

Applicants should evaluate the effect on flutter margins of freeplay due to in-service wear in components, such as control surface actuators and hinge bearings, when showing compliance with the aeroelastic stability requirements of § 25.629. Freeplay may be addressed as a variation in nominal control surface restraint stiffness in the conventional linear flutter analysis. Applicants should evaluate the effect of the variability of other nonlinear elements, such as hydraulic damping, on flutter margins in a similar manner. If, however, aeroelastic stability margins are found to be sensitive to these parameters, then additional verification in the form of model or flight tests may be required. The analysis should account for freeplay that could develop between freeplay checks, and should demonstrate that LCO will not develop.

In addition to conventional flutter analyses, nonlinear aeroelastic analyses may be necessary to establish the stability and oscillatory amplitude of configurations with LCO. Examples are failure cases that result in freeplay-induced vibration or failure cases where divergent flutter is prevented by devices with nonlinear characteristics, such as a hydraulic damper. Applicants should validate the analysis methodology by flight test, if it can be done safely, or by wind tunnel test. They should use a combination of ground vibration test, component test, and lab tests to establish essential nonlinear characteristics for analytical model validation.

d. Failure Conditions

For any failure condition addressed by §§ 25.571, 25.629 or 25.671 that results in LCO, it should be determined by test or analysis at the critical flight conditions that the LCO would:

- (1) Result in a stable condition, and should decay to an acceptable limited amplitude once an external perturbing force is removed;
- (2) Not result in loads that would cause static or fatigue failure of structure;
- (3) Not result in repeated loads that would preclude safe flight and landing before the failure is detected; and
- (4) Not result in a vibration condition on the flight deck that is severe enough to interfere with control of the airplane or to cause excessive fatigue to the crew.

Figura A.5: Memorando ANM-05-115-019 emitido por la *Federal Aviation Administration* FAA en relación a *recomendaciones para la certificación de superficies de control con holguras tipo freeplay y otras no linealidades* (5/8).

An example is failure of one of two control surface actuators, where the remaining actuator provides a damping force for flutter prevention that is proportional to velocity-squared. The applicant should demonstrate that the resulting LCO would meet these criteria.

For control surfaces that depend on a design feature that provides redundant restraint stiffness or aerodynamic preload to preclude LCO, the applicant should consider the consequences of failure of the feature in demonstrating compliance with §§ 25.671 and 25.1309.

e. Instructions for Continued Airworthiness

The applicant should establish maintenance instructions to ensure that control surface mass balance limits or freeplay limits are not exceeded throughout the life of the airplane. This includes incorporation of necessary maintenance actions into the instructions for continued airworthiness required by § 25.1529 and *Appendix H*.

(1) *Section 25.671* requires designing or marking each element of the flight control systems to minimize the potential for incorrect assembly or installation. The applicant should prepare the maintenance manuals, which include any reassembly and reinstallation, instructions with a similar objective.

(2) During certification, the applicant should establish static and/or dynamic balance limits for control surfaces that depend on mass balance for flutter prevention. The applicant should also establish mass balancing procedures that ensure the control surface will remain within these balance limits while in service. The applicant should give particular importance to maintaining the required mass balance following repaint, repair, or any other event that might alter the control surface mass properties. The applicant should prepare instructions for continued airworthiness that will include the mass balance requirements as a One-Star Certification Maintenance Requirement (CMR) or Airworthiness Limitation Item (ALI). An FAA engineering approval will be required to change the certified balance requirements. The engineering approval must be by the Aircraft Certification Office (ACO) or the office of the Transport Airplane Directorate (TAD) having oversight responsibility for the relevant type certificate.

(3) Freeplay in control surfaces that rely on the retention of stiffness for flutter prevention should be certified and managed throughout the life of the airplane. The applicant should account for wear and growth in freeplay between inspection intervals so the certified freeplay limits are not exceeded. The applicant should give special attention to areas of the control surfaces where the control system and supporting structure can wear, allowing freeplay and looseness to develop. The applicant should include the inspection intervals and related inspection procedures, which include freeplay limits and measurement procedures, in their instructions for continued airworthiness. The freeplay limits and inspection intervals should be included as a CMR or ALI. An FAA engineering approval will be required to escalate the freeplay limits or inspection intervals. The engineering approval must be by the ACO or the office of the TAD having oversight responsibility for the relevant type certificate.

Figura A.6: Memorando ANM-05-115-019 emitido por la *Federal Aviation Administration* FAA en relación a *recomendaciones para la certificación de superficies de control con holguras tipo freeplay y otras no linealidades* (6/8).

4. The applicant should establish reliable inspection procedures during certification and validate them by engineering test, which would include a determination of load versus deflection characteristics to isolate freeplay from elastic deformation of the airframe. The applicant should assess the human factors of the inspection procedure to avoid the possibility of not measuring freeplay accurately.

In some cases, freeplay in individual parts may exist, but the control system rigging is purposely set to eliminate overall freeplay. Although this practice may prevent low-level vibrations that might contribute to rapid wear, it may also mask increasing wear in the individual parts. If this wear occurs and is undetected to a significant level, and a single failure in the system occurs, a large amount of freeplay could suddenly exist with severe consequences. This masked wear condition should be taken into account in developing freeplay check procedures.

Control surfaces vary in size and weight so inspection procedures are generally tailored for each surface. For small tabs, an inspector can simply move the surface with his hand while using a dial indicator to measure trailing edge freeplay. On the other hand, it might be impossible to check for freeplay in large unbalanced control surfaces without the assistance of ground equipment to move the surface. Some manufacturers have employed automatic powered means, including on-board systems that check or continuously monitor freeplay.

Effect of These Interim Guidelines

These interim guidelines do not constitute a new regulation or create what the courts refer to as a “binding norm.” The FAA individual or designee should follow these guidelines when applicable to the specific project. Whenever a proposed method of compliance is outside these guidelines, it must be coordinated with the Transport Standards Staff (TSS).

The project officer and technical specialists, in coordination, will determine if an issue paper is needed, or if an item of record is more appropriate for providing consistency. Similarly, if the implementing office becomes aware of reasons that an applicant’s proposal should not be approved, the office must coordinate its response with the TSS.

Applicants should expect that the certificating officials would consider this information when making findings of compliance relevant to new certificate actions. In addition, as with all advisory material, this memorandum identifies one means, but not the only means, of compliance.

Implementation

Apply these compliance methods to type, amended, supplemental, and amended supplemental type certification programs whose application date is on or after the date of issue of this memorandum. For existing certification programs where the application precedes the effective date of this memorandum, and the methods of compliance have been coordinated with and approved by the FAA or its designee, the applicant may continue to follow the previously acceptable methods of compliance or may follow this guidance.

Figura A.7: Memorando ANM-05-115-019 emitido por la *Federal Aviation Administration* FAA en relación a *recomendaciones para la certificación de superficies de control con holguras tipo freeplay y otras no linealidades* (7/8).

Conclusion

This memorandum supplements AC 25.629-1A by including guidelines pertaining to the certification and continued airworthiness of unbalanced control surfaces with freeplay and other nonlinear features. This guidance has been coordinated informally with members of the Aviation Rulemaking Advisory Committee Loads and Dynamics Harmonization Working Group, and U.S. and European aviation industry specialists. The FAA may include these guidelines in a future revision to AC 25.629-1A.

Attachment: Definition of Key Terms

Figura A.8: Memorando ANM-05-115-019 emitido por la *Federal Aviation Administration* FAA en relación a *recomendaciones para la certificación de superficies de control con holguras tipo freeplay y otras no linealidades* (8/8).

Apéndice B

Fundamentos de Mecánica de Fluidos

Existen muchas referencias en las que el lector puede encontrar los fundamentos de la Mecánica de Fluidos y las ecuaciones que la gobiernan. De todas ellas, destacar las referencias [AL65] y [Bat67].

Asumiendo que:

- El fluido cumple la denominada *Hipótesis del Continuo*: las cantidades físicas tales como masa, momento cinético, temperatura, velocidad, etc. . . , asociadas con la materia en un pequeño volumen dado se consideran uniformemente distribuidas sobre ese volumen.
- El fluido es no viscoso y adiabático.
- El fluido es un gas perfecto.
- Las discontinuidades tales como ondas de choque o estelas (regiones de vórtices) se consideran por separado de forma que intervienen en las ecuaciones como *condiciones de contorno* de regiones de fluido *continuas*.

las ecuaciones diferenciales que gobiernan el campo de velocidades \vec{V} del fluido son:

1. Ecuación de Continuidad o Ley de Conservación de la Masa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \equiv \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (\text{B.1})$$

donde p es la presión estática, ρ la densidad, T la temperatura y \vec{V} la velocidad del fluido.

2. Segunda Ecuación de Newton del Movimiento o Ley de Conservación del Momento

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{f} - \frac{\nabla p}{\rho} \quad (\text{B.2})$$

donde \vec{f} es la fuerza másica por unidad de masa, que a menudo puede escribirse como derivada de un potencial $\vec{f} = \nabla G$, siendo G el potencial del campo de fuerzas \vec{f} . En el caso de vuelo de un vehículo, las únicas fuerzas por unidad de masa sobre el fluido es la fuerza de la gravedad que puede asumirse constante en magnitud y dirección:

$$\vec{f} = -g \vec{k} \quad (\text{B.3})$$

y que deriva del potencial $G = -gz_t$, donde g es la aceleración de la gravedad y z_t es la coordenada vertical al terreno *apuntando* hacia arriba.

3. Ley de Conservación de la Energía Termodinámica (Flujo adiabático)

$$\frac{D}{Dt} \left[e + \frac{V^2}{2} \right] = -\frac{\nabla \cdot (p\vec{V})}{\rho} + \vec{f} \cdot \vec{V} \quad (\text{B.4})$$

donde e es la energía interna por unidad de masa. Introduciendo la ecuación de continuidad y la definición de *entalpía*, $h = e + p/\rho$, la ecuación anterior (B.4) se escribe:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left[h + \frac{V^2}{2} \right] = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \vec{f} \cdot \vec{V} \quad (\text{B.5})$$

4. Ecuaciones de Estado

Para un *gas perfecto* se cumple:

$$\begin{aligned} p &= R \rho T \\ c_p, c_v &= \text{constantes} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

siendo c_p y c_v los calores específicos a presión constante y volumen constante respectivamente, los cuales suelen aparecer en las ecuaciones de la Mecánica de Fluidos a través de su relación $\gamma = c_p/c_v$.

B.1. Flujo Irrotacional

Se dice que un movimiento es irrotacional en una región del campo fluido cuando:

$$\nabla \times \vec{V} = \vec{0} \quad (\text{B.7})$$

en todos los puntos de la región. El teorema de Stokes asegura la ausencia de circulación de la velocidad del fluido \vec{V} en toda línea cerrada interior al dominio de irrotacionalidad, i.e.:

$$\oint \vec{V} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (\text{B.8})$$

Del mismo modo puede asegurarse que la circulación de \vec{V} a lo largo de cualquier línea que una dos puntos \vec{x} y \vec{x}_0 del dominio es independiente de la línea, para líneas reducibles unas a otras por deformación continua. Esta circulación es pues, fijado \vec{x}_0 , función únicamente de \vec{x} (y del tiempo t que interviene en la integración como parámetro):

$$\Omega(\vec{x}) - \Omega(\vec{x}_0) = \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \vec{V} \cdot d\vec{l} \quad (\text{B.9})$$

y por lo tanto:

$$\vec{V} = \nabla \Omega \quad (\text{B.10})$$

donde el potencial de velocidades $\Omega(\vec{x})$ queda definido salvo la definición de $\Omega(\vec{x}_0)$, que no afecta a \vec{V} .

Si el dominio de irrotacionalidad es simplemente conexo, se cumple que toda línea cerrada interior al dominio es reducible y el potencial de velocidades es unívoco. En cambio, si el dominio fluido de irrotacionalidad es múltiplemente conexo, existirán líneas cerradas no reducibles que pueden tener circulación distinta de cero. El potencial de velocidades es, en ese caso, multiforme. La multiplicidad de conexión del dominio fluido irrotacional está algunas veces ligada a la existencia de regiones de vorticidad no nula en el fluido, como es el caso de las capas o tubos de torbellinos, que aparecen en la estela en el movimiento alrededor de cuerpos a grandes números de Reynolds. La irrotacionalidad del movimiento se traduce en una simplificación grande en la descripción del movimiento fluido y las ecuaciones que lo determinan. Una función escalar, el potencial de velocidades Ω , en lugar de las tres componentes del vector velocidad, determina el campo de velocidades.

B.1.1. Condiciones para Flujo Irrotacional

La evolución de la vorticidad $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$ de una partícula fluida viene dada por la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$\rho \left[\frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) - \frac{\vec{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \vec{V} \right] = \nabla p \times \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) + \nabla \times \vec{f} + \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \tau' \right) \quad (\text{B.11})$$

siendo τ' el *tensor de esfuerzos de viscosidad* y \vec{f} son las fuerzas másicas por unidad de masa. Si en el instante inicial fuese nula la vorticidad y la contribución a la evolución de la misma de los términos que aparecen en el segundo miembro de (B.11) fuese nula, la vorticidad se mantendría nula.

Del mismo modo se puede utilizar el teorema de Bjerkness-Kelvin para estudiar la evolución de la vorticidad. Este teorema demuestra que la variación por unidad de tiempo de la circulación de la velocidad \vec{V} alrededor de una línea cerrada fluida es igual a la circulación de la aceleración $D\vec{V}/Dt$:

$$\frac{d}{dt} \oint \vec{V} \cdot d\vec{l} = \oint \frac{D\vec{V}}{Dt} \cdot d\vec{l} \quad (\text{B.12})$$

Si la aceleración derivase de un potencial, la circulación de la aceleración a lo largo de la línea cerrada sería nula y la circulación de la velocidad se mantendría constante. Si inicialmente el movimiento fuese irrotacional, el movimiento se mantendría posteriormente irrotacional. Así pues, hemos condicionado la irrotacionalidad del movimiento en todo instante a su irrotacionalidad inicial y a la existencia del potencial de aceleraciones en todo instante. La aceleración del fluido es:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{f} + \frac{\nabla \cdot \tau'}{\rho} \quad (\text{B.13})$$

Si la fuerza por unidad de masa que aparece en el segundo miembro de (B.13) resultante de las fuerzas de presión $-\nabla p/\rho$, las fuerzas másicas \vec{f} y de viscosidad $\nabla \cdot \tau'/\rho$ fuese irrotacional, estaría garantizada la conservación de la circulación para toda línea fluida cerrada. Aunque pueden imaginarse movimientos en los que sin ser potenciales cada una de las fuerzas que aparecen en (B.13) lo sea la resultante, su interés sería puramente académico. En general, la rotacionalidad de las fuerzas másicas no será compensada por la rotacionalidad opuesta de las fuerzas de presión y viscosidad. Así pues, aunque en realidad las condiciones escritas a continuación sean sólo *suficientes*, para la existencia del potencial de aceleraciones podemos exigir:

1. Fuerzas de viscosidad despreciables (pues salvo casos triviales, son rotacionales). Para ello es preciso que el número de Reynolds Re o del producto del Reynolds por el número de Strouhal sea grande frente a la unidad.
2. Las fuerzas másicas \vec{f} deriven de un potencial.
3. Que las fuerzas de presión por unidad de masa $-\nabla p/\rho$ deriven de un potencial. Este es el caso si el movimiento es *barótopo*, es decir, si existe una relación de barotropía $\rho = \rho(p, t)$ que proporciona en cada instante la densidad como función de la presión solamente.

Si se conoce la relación de barotropía, podemos introducir una función ω_p :

$$\omega_p = \omega_p(p, t) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p, t)} \quad (\text{B.14})$$

donde el límite inferior de integración puede elegirse arbitrariamente. Es fácil demostrar que ω_p es el *potencial de las fuerzas de presión por unidad de masa*, i.e.:

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \nabla \omega_p \quad (\text{B.15})$$

Existe relación de barotropía cuando el movimiento es *homentrópico* (todas las partículas fluidas tienen la misma entropía¹), ya que si $\nabla s = \vec{0}$:

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \nabla h \quad (\text{B.16})$$

de modo que la entalpía h es entonces el potencial de las fuerzas de presión por unidad de masa. La homentropía inicial y la isentropía, o conservación de la entropía en el movimiento de una partícula, da lugar a la homentropía del movimiento en todo instante. Si el número de Reynolds Re (o el producto Reynolds-Strouhal) es suficientemente grande y es despreciable la adición de calor por reacción química o radiación, el movimiento es isentrópico, eso sí, fuera de ondas de choque, capa límite y estela.

B.1.2. Ecuaciones de la Mecánica de Fluidos para Flujo Irrotacional

La existencia del potencial Ω permite reducir las tres componentes de la velocidad del fluido a una sola variable, lo que da lugar a las siguientes dos ecuaciones que determinan el campo fluido:

1. Ecuación de Bernoulli para flujo irrotacional o ecuación de Kelvin

De la definición de la derivada sustancial de la velocidad \vec{V} :

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) - \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V}) = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) \quad (\text{B.17})$$

donde ya se ha tenido en cuenta que $\nabla \times \vec{V} = \vec{0}$ en flujo irrotacional. Por otro lado, haciendo uso de la *Ecuación de Conservación del Momento*:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \nabla \left[G - \int \frac{dp}{\rho} \right] \quad (\text{B.18})$$

¹Movimiento isentrópico ($DS/Dt = 0$) + Entropía inicial uniforme = movimiento homentrópico

donde G es el potencial asociado a las fuerzas por unidad de masa sobre el fluido. Igualando ambas expresiones:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) = \nabla \left[G - \int \frac{dp}{\rho} \right] \quad (\text{B.19})$$

A continuación se reemplaza velocidad del fluido \vec{V} por su expresión $\vec{V} = \nabla \Omega$ (flujo irrotacional):

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\nabla \Omega)}{\partial t} + \nabla \left[\frac{(\nabla \Omega)^2}{2} \right] + \nabla \left[\int \frac{dp}{\rho} - G \right] = \\ = \nabla \left[\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{(\nabla \Omega)^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} - G \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Que el gradiente de la magnitud fluida encerrada entre paréntesis en la ecuación anterior sea nulo, implica que esa magnitud depende sólo del tiempo, y no de las coordenadas del punto donde se evalúe, es decir:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{(\nabla \Omega)^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} - G = F(t) \quad (\text{B.21})$$

donde $F(t)$ se puede calcular considerando las condiciones del flujo en el *infinito no perturbado* por la presencia del vehículo:

$$F(t) = \frac{Q_\infty^2}{2} + \int_{p_\infty}^p \frac{dp}{\rho} - G_\infty \quad (\text{B.22})$$

sustituyendo:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{1}{2} [(\nabla \Omega)^2 - Q_\infty^2] + \int_{p_\infty}^p \frac{dp}{\rho} + (G_\infty - G) = 0 \quad (\text{B.23})$$

Por otro lado, la integral en la presión del fluido puede reducirse de la siguiente forma:

$$\int_{p_\infty}^p \frac{dp}{\rho} = \int_{a_\infty^2}^{a^2} \frac{d(a^2)}{\gamma - 1} = \frac{1}{\gamma - 1} [a^2 - a_\infty^2] \quad (\text{B.24})$$

siendo a la velocidad del sonido local y a_∞ la velocidad del sonido en el fluido no perturbado, de forma que la expresión (B.23) conduce a la siguiente relación:

$$a^2 = a_\infty^2 - (\gamma - 1) \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{1}{2} [(\nabla \Omega)^2 - Q_\infty^2] + (G_\infty - G) \right\} \quad (\text{B.25})$$

El término $G_\infty - G$ asociado a las fuerzas por unidad de masa es despreciable en aplicaciones aeronáuticas, de forma que la ecuación anterior se escribe:

$$a^2 = a_\infty^2 - (\gamma - 1) \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{1}{2} [(\nabla \Omega)^2 - Q_\infty^2] \right\} \quad (\text{B.26})$$

2. Ecuación Diferencial en Derivadas Parciales del Potencial de Velocidades Ω

Según la Ecuación de Continuidad (B.1):

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (\text{B.27})$$

Teniendo en cuenta la condición de flujo irrotacional $\vec{V} = \nabla \Omega$:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot (\nabla \Omega) = \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \Delta \Omega = 0 \quad (\text{B.28})$$

El término $(1/\rho)D\rho/Dt$ puede escribirse en función del potencial de velocidades a través de la Ecuación de Bernoulli (B.23):

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} + \frac{1}{2} [(\nabla\Omega)^2 - Q_\infty^2] + \int_{p_\infty}^p \frac{dp}{\rho} = 0 \quad (\text{B.29})$$

en la que se ha tenido en cuenta que el término $G_\infty - G$ es despreciable en aplicaciones aeronáuticas. Despejando la integral en presión y calculando la diferencial sustancial $D(\)/Dt$:

$$\frac{D}{Dt} \int_{p_\infty}^p \frac{dp}{\rho} = -\frac{D}{Dt} \left\{ \frac{\partial\Omega}{\partial t} + \frac{1}{2} [(\nabla\Omega)^2 - Q_\infty^2] \right\} \quad (\text{B.30})$$

El lado izquierdo de la anterior ecuación se puede simplificar con:

$$\frac{D}{Dt} \int_{p_\infty}^p \frac{dp}{\rho} = \left[\frac{d}{dp} \int_{p_\infty}^p \frac{dp}{\rho} \right] \frac{Dp}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dp} \frac{Dp}{Dt} = \frac{a^2}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \quad (\text{B.31})$$

de forma que dividiendo por a^2 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} &= -\frac{1}{a^2} \frac{D}{Dt} \left\{ \frac{\partial\Omega}{\partial t} + \frac{(\nabla\Omega)^2}{2} \right\} = \\ &= -\frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nabla\Omega \cdot \nabla \right) \left\{ \frac{\partial\Omega}{\partial t} + \frac{(\nabla\Omega)^2}{2} \right\} = \\ &= -\frac{1}{a^2} \left\{ \frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2} + 2 \nabla\Omega \cdot \frac{\partial(\nabla\Omega)}{\partial t} + \nabla\Omega \cdot \nabla \left[\frac{(\nabla\Omega)^2}{2} \right] \right\} = \\ &= -\frac{1}{a^2} \left\{ \frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} [(\nabla\Omega)^2] + \frac{1}{2} (\nabla\Omega \cdot \nabla) [(\nabla\Omega)^2] \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

Sustituyendo esta expresión en (B.28):

$$\Delta\Omega - \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} [(\nabla\Omega)^2] + \frac{1}{2} (\nabla\Omega \cdot \nabla) [(\nabla\Omega)^2] \right\} = 0 \quad (\text{B.33})$$

donde la velocidad del sonido a también tiene una expresión en función del potencial que ha sido demostrada en el punto anterior, i.e.:

$$a^2 = a_\infty^2 - (\gamma - 1) \left\{ \frac{\partial\Omega}{\partial t} + \frac{1}{2} [(\nabla\Omega)^2 - Q_\infty^2] \right\}$$

por lo que la ecuación (B.33) es una ecuación en derivadas parciales para el potencial de velocidades.

B.2. Coeficiente de Presión Local

Se define *coeficiente de presión local* C_p a la relación dada por:

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty Q_\infty^2} = \frac{2 \left(\frac{p}{p_\infty} - 1 \right)}{\gamma M_\infty^2} \quad (\text{B.34})$$

En flujo isentrópico, la ecuación de Bernoulli relaciona la presión local con la velocidad del fluido a través de:

$$a^2 - a_\infty^2 = -(\gamma - 1) \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{1}{2} [(\nabla \Omega)^2 - Q_\infty^2] \right\} \quad (\text{B.35})$$

donde $a^2 = \gamma p / \rho$ y $a_\infty^2 = \gamma p_\infty / \rho_\infty$. Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma p}{\rho} - \frac{\gamma p_\infty}{\rho_\infty} &= \frac{\gamma p_\infty}{\rho_\infty} \left[\frac{p}{p_\infty} \frac{\rho_\infty}{\rho} - 1 \right] = a_\infty^2 \left[\frac{p}{p_\infty} \frac{\rho_\infty}{\rho} - 1 \right] = \\ &= -(\gamma - 1) \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{1}{2} [(\nabla \Omega)^2 - Q_\infty^2] \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Teniendo en cuenta que:

$$\left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^{\gamma-1} = \left(\frac{p}{p_\infty} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \Rightarrow \frac{\rho}{\rho_\infty} = \left(\frac{p}{p_\infty} \right)^{1/\gamma} \quad (\text{B.37})$$

la ecuación anterior queda:

$$\frac{p}{p_\infty} = \left(1 - \frac{\gamma-1}{a_\infty^2} \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{1}{2} [(\nabla \Omega)^2 - Q_\infty^2] \right\} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (\text{B.38})$$

y sustituyendo esta relación en la fórmula del coeficiente local de presión:

$$C_p = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left\{ \left[1 - \frac{\gamma-1}{a_\infty^2} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{(\nabla \Omega)^2 - Q_\infty^2}{2} \right) \right]^{\gamma/(\gamma-1)} - 1 \right\} \quad (\text{B.39})$$

donde $M_\infty = Q_\infty / a_\infty$ es el número de Mach del fluido en el infinito no perturbado.

Apéndice C

Sistema de Ejes Cuerpo

Sea la configuración cuerpo/ala de la figura C.1 y C.2 con los sistemas de referencia *Ejes Viento* $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ y *Ejes Cuerpo* (x, y, z) .

Las coordenadas (x, y, z) en *ejes cuerpo* de un punto P cuyas coordenadas en *ejes viento* son $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ se construyen de la siguiente forma:

1. Se proyecta el punto $P(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ sobre el plano $\tilde{y} = 0$, obteniéndose el punto $Q(\tilde{x}, 0, \tilde{z})$. Desde el punto $Q(\tilde{x}, 0, \tilde{z})$ se traza la perpendicular al eje elástico del cuerpo, dando lugar al punto intersección $Q_c(\tilde{x}_c, 0, -w(\tilde{x}_c, t))$.
2. La coordenada z del punto P es la distancia $\overline{QQ_c}$, positiva si el punto queda por encima del eje elástico, negativa en caso contrario.
3. La coordenada x es la longitud de la curva definida por el eje elástico desde el origen, tomado en la punta del cuerpo, hasta el punto intersección $Q_c(\tilde{x}_c, 0, -w(\tilde{x}_c, t))$, i.e.:

$$x = \int_0^{\tilde{x}_c} \sqrt{1 + \left[\frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(u, t) \right]^2} du \quad (\text{C.1})$$

4. Por último, la coordenada y coincide con la coordenada \tilde{y} en *ejes viento*.

Como se ha descrito en el primer punto anterior, las coordenadas en *ejes cuerpo* se definen a partir de una normal al eje elástico desde el punto $Q(\tilde{x}, 0, \tilde{z})$, proyección sobre el plano $\tilde{y} = 0$ de $P(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$. Dependiendo de la forma del eje elástico y/o del punto $P(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, esta perpendicular puede que:

1. Exista y sea única, por lo que se asegura la *biunicidad* entre los dos sistemas de ejes.
2. No exista.
3. Exista pero no sea única.

Las dos últimas posibilidades se estudian en el siguiente apartado con el objeto de imponer condiciones en la deformada del eje elástico o en sus derivadas parciales respecto a \tilde{x} que eviten su aparición.

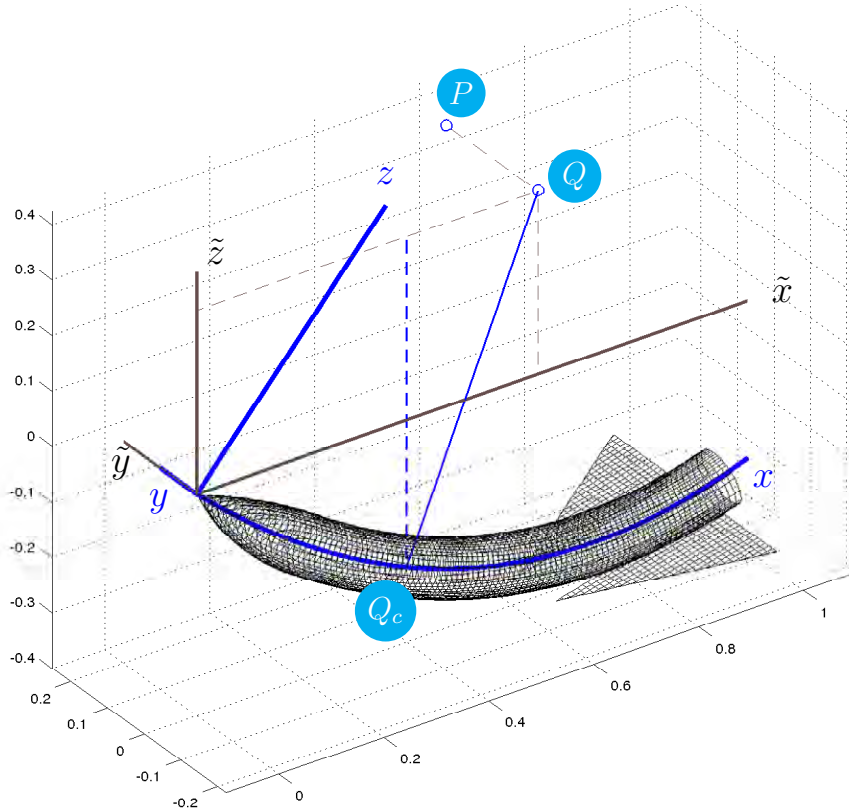


Figura C.1: Figura 3D de la configuración cuerpo/ala deformada.

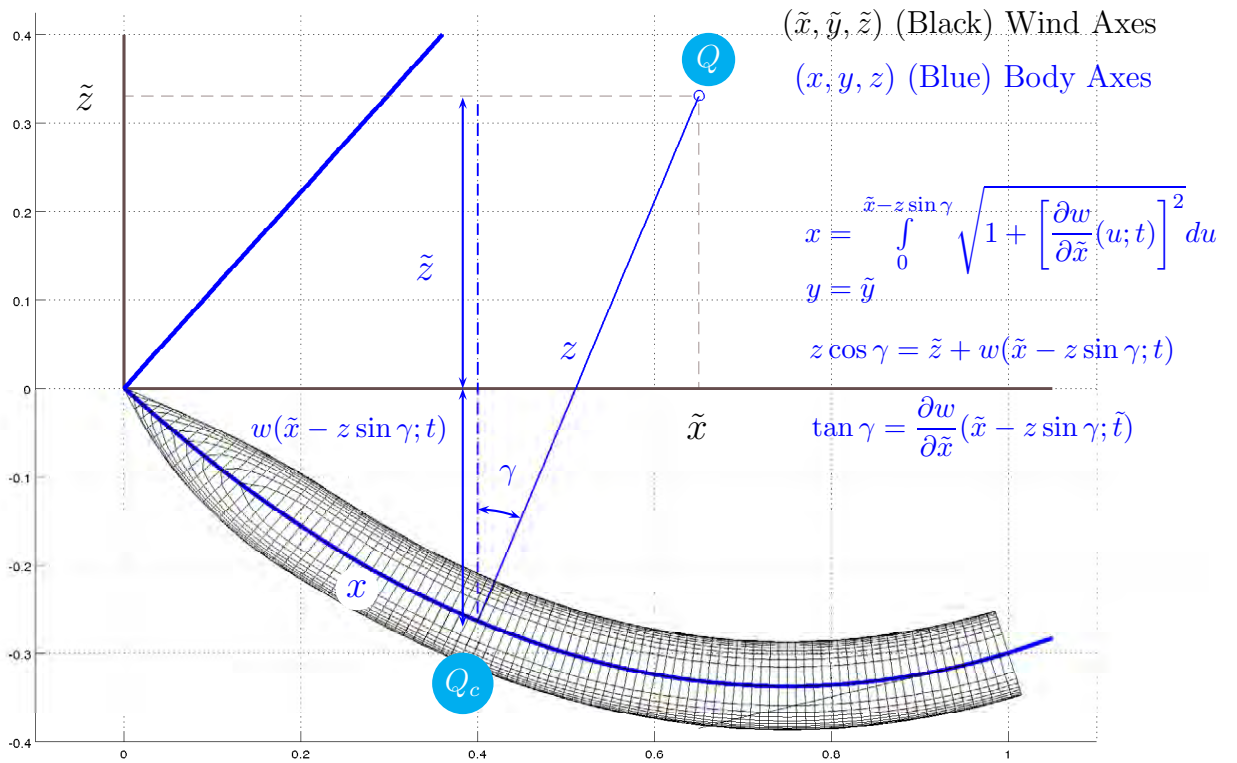


Figura C.2: Figura 2D (plano xz) de la configuración cuerpo/ala deformada

C.1. Correspondencia Biunívoca entre Ejes Cuerpo y Ejes Viento

Por las características intrínsecas a la definición de los dos sistemas de ejes, se cumple lo siguiente:

1. Dado un punto de coordenadas en *ejes cuerpo* $P(x, y, z)$, existen unas únicas coordenadas en *ejes viento* $P(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$.
2. Sin embargo, dado un punto de coordenadas en *ejes viento* $P(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, es posible que no tenga una terna única de coordenadas en *ejes cuerpo* $P(x, y, z)$. Esta última posibilidad que rompe la unicidad de las coordenadas en *ejes cuerpo* se analiza a continuación.

Si un punto de coordenadas en *ejes viento* $P(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ no tiene unas coordenadas únicas en *ejes cuerpo* $P(x, y, z)$, implica que desde su punto proyección en el plano $\tilde{y} = 0$ se pueden trazar dos perpendiculares (al menos) distintas al eje elástico, dando lugar a dos ternas distintas de coordenadas en *ejes cuerpo*. Sea $Q(\tilde{x}, 0, \tilde{z})$ las coordenadas del punto proyección desde el que se traza la perpendicular al eje elástico para definir las coordenadas en *ejes cuerpo*, y supongamos que se pueden trazar dos perpendiculares distintas. Sean $(\tilde{x}_0, 0, -w(\tilde{x}_0; t))$ y $(\tilde{x}_0 + \Delta\tilde{x}_0, 0, -w(\tilde{x}_0 + \Delta\tilde{x}_0; t))$ los puntos del eje elástico intersección con las perpendiculares trazadas desde $Q(\tilde{x}, 0, \tilde{z})$. Las ecuaciones de las perpendiculares son:

$$\begin{aligned}\tilde{z} &= -w(\tilde{x}_0; t) + \left[\frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}_0; t) \right]^{-1} (\tilde{x} - \tilde{x}_0) \\ \tilde{z} &= -w(\tilde{x}_0 + \Delta\tilde{x}_0; t) + \left[\frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}_0 + \Delta\tilde{x}_0; t) \right]^{-1} (\tilde{x} - \tilde{x}_0 - \Delta\tilde{x}_0)\end{aligned}\tag{C.2}$$

Operando en las dos expresiones anteriores:

$$\begin{aligned}\tilde{x} - \tilde{x}_0 &= \frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}_0; t) [\tilde{z} + w(\tilde{x}_0; t)] \\ \tilde{x} - \tilde{x}_0 &= \Delta\tilde{x}_0 + \frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}_0 + \Delta\tilde{x}_0; t) [\tilde{z} + w(\tilde{x}_0 + \Delta\tilde{x}_0; t)]\end{aligned}\tag{C.3}$$

e igualando las dos se obtendrá el punto intersección:

$$\frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}_0; t) [\tilde{z} + w(\tilde{x}_0; t)] = \Delta\tilde{x}_0 + \frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}_0 + \Delta\tilde{x}_0; t) [\tilde{z} + w(\tilde{x}_0 + \Delta\tilde{x}_0; t)]\tag{C.4}$$

Despejando la coordenada \tilde{z} :

$$\begin{aligned}\tilde{z} &= -\frac{\Delta\tilde{x}_0}{\frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}_0 + \Delta\tilde{x}_0; t) - \frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}_0; t)} - \\ &\quad - \frac{w(\tilde{x}_0 + \Delta\tilde{x}_0; t) \frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}_0 + \Delta\tilde{x}_0; t) - w(\tilde{x}_0; t) \frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}_0; t)}{\frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}_0 + \Delta\tilde{x}_0; t) - \frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}_0; t)}\end{aligned}\tag{C.5}$$

Teniendo en cuenta que $w \sim \epsilon$ y $\partial w / \partial \tilde{x} \sim \epsilon / L$ en teoría de pequeñas perturbaciones, las expresiones anteriores se evalúan en función de $\Delta\tilde{x}_0$:

1. $\Delta\tilde{x}_0 \gg L$:

$\Delta\tilde{x}_0 \gg L$ implica que no habría posibilidad de trazar dos perpendiculares a puntos distintos pertenecientes al eje elástico, por lo que se cumpliría la correspondencia biunívoca.

2. $\Delta\tilde{x}_0 \sim L$, siendo L la longitud característica en la dirección de vuelo (eje x):

Analizando órdenes de magnitud en la expresión anterior:

$$\tilde{z} \sim \frac{L}{\epsilon/L} + \frac{\epsilon^2/L}{\epsilon/L} \sim \epsilon + \frac{L^2}{\epsilon} \Rightarrow \frac{\tilde{z}}{L} \sim \frac{L}{\epsilon} \gg 1 \quad (\text{C.6})$$

por lo que la zona de NO correspondencia binunívoca queda limitada a entornos alejados de la configuración ($\tilde{z}/L \gg 1$).

3. $\Delta\tilde{x}_0 \ll L$ o, lo que es lo mismo, $\Delta\tilde{x}_0 \rightarrow 0$:

Desarrollando en serie de Taylor $w(\tilde{x}_0 + \Delta\tilde{x}_0; t)$ y $\partial w/\partial\tilde{x}(\tilde{x}_0 + \Delta\tilde{x}_0; t)$:

$$\begin{aligned} w(\tilde{x}_0 + \Delta\tilde{x}_0; t) &= w(\tilde{x}_0; t) + \frac{\partial w}{\partial\tilde{x}}(\tilde{x}_0; t)\Delta\tilde{x}_0 + o(\Delta\tilde{x}_0) \\ \frac{\partial w}{\partial\tilde{x}}(\tilde{x}_0 + \Delta\tilde{x}_0; t) &= \frac{\partial w}{\partial\tilde{x}}(\tilde{x}_0; t) + \frac{\partial^2 w}{\partial\tilde{x}^2}(\tilde{x}_0; t)\Delta\tilde{x}_0 + o(\Delta\tilde{x}_0) \end{aligned}$$

y sustituyendo en (C.5):

$$\begin{aligned} \tilde{z} \simeq & - \frac{\Delta\tilde{x}_0}{\frac{\partial w}{\partial\tilde{x}}(\tilde{x}_0 + \Delta\tilde{x}_0; t) - \frac{\partial w}{\partial\tilde{x}}(\tilde{x}_0; t)} - \\ & - \frac{w(\tilde{x}_0; t)\frac{\partial^2 w}{\partial\tilde{x}^2}(\tilde{x}_0; t)\Delta\tilde{x}_0 + \left[\frac{\partial w}{\partial\tilde{x}}(\tilde{x}_0; t)\right]^2 \Delta\tilde{x}_0}{\frac{\partial w}{\partial\tilde{x}}(\tilde{x}_0 + \Delta\tilde{x}_0; t) - \frac{\partial w}{\partial\tilde{x}}(\tilde{x}_0; t)} \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

y calculando el límite:

$$\tilde{z} = -w(\tilde{x}_0; t) - \frac{1 + \left[\frac{\partial w}{\partial\tilde{x}}(\tilde{x}_0; t)\right]^2}{\frac{\partial^2 w}{\partial\tilde{x}^2}(\tilde{x}_0; t)} \sim \epsilon + \frac{L^2}{\epsilon} \Rightarrow \frac{\tilde{z}}{L} \sim \frac{L}{\epsilon} \quad (\text{C.8})$$

Como resultado adicional, se puede demostrar que la ecuación anterior está relacionada con el *radio de curvatura* del eje elástico. La distancia sobre la perpendicular al punto intersección es (ver figura C.2).

$$\begin{aligned} d &= \frac{\tilde{z} + w(\tilde{x}_0; t)}{\cos\gamma} = [\tilde{z} + w(\tilde{x}_0; t)] \sqrt{1 + \left[\frac{\partial w}{\partial\tilde{x}}(\tilde{x}_0; t)\right]^2} = \\ &= - \frac{\left(1 + \left[\frac{\partial w}{\partial\tilde{x}}(\tilde{x}_0; t)\right]^2\right)^{3/2}}{\frac{\partial^2 w}{\partial\tilde{x}^2}(\tilde{x}_0; t)} = R_c(\tilde{x}_0; t) = \frac{1}{\kappa_c(\tilde{x}_0; t)} \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

siendo $R_c(\tilde{x}_0; t)$ el *radio de curvatura* y $\kappa_c(\tilde{x}_0; t)$ la *curvatura* del eje elástico $w(\tilde{x}; t)$ en \tilde{x}_0 .

Este resultado indica que, si el *radio de curvatura* $R_c(\tilde{x}_0; t)$ del eje elástico es suficientemente alto, la zona de NO correspondencia biunívoca entre los sistemas de ejes cuerpo y ejes viento queda alejada del entorno del vehículo.

C.2. Transformación de Coordenadas entre Ejes Viento y Ejes Cuerpo

Dado un punto P , sus coordenadas en el sistema de *ejes viento* y *ejes cuerpo* serán respectivamente:

$$P|_w = \tilde{x} \vec{i} + \tilde{y} \vec{j} + \tilde{z} \vec{k} \quad (\text{C.10})$$

$$P|_b = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z \quad (\text{C.11})$$

siendo $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canónica ortonormal asociada al sistema de *ejes viento* y $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ la base ortogonal¹ (no necesariamente ortonormal) asociada al sistema de *ejes cuerpo*.

Las componentes del vector \vec{e}_x en *ejes viento* se calcularán derivando las coordenadas de un punto genérico $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ (en ejes viento) respecto a x , i.e.:

$$\vec{e}_x = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} \vec{j} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} \vec{k} \quad (\text{C.12})$$

y lo mismo con los vectores \vec{e}_y y \vec{e}_z :

$$\vec{e}_y = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} \vec{i} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial y} \vec{k} \quad (\text{C.13})$$

$$\vec{e}_z = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial z} \vec{i} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial z} \vec{j} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \vec{k} \quad (\text{C.14})$$

sustituyendo en (C.11):

$$\begin{aligned} P|_b &= x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z = \\ &= x \left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} \vec{j} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} \vec{k} \right) + y \left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} \vec{i} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial y} \vec{k} \right) + z \left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial z} \vec{i} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial z} \vec{j} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \vec{k} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

y agrupando en $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$P|_b = \left(x \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} + y \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} + z \frac{\partial \tilde{x}}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(x \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} + y \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} + z \frac{\partial \tilde{y}}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(x \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} + y \frac{\partial \tilde{z}}{\partial y} + z \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \right) \vec{k} \quad (\text{C.16})$$

coordenadas que debe igualarse a las coordenadas del punto P en *ejes viento*, i.e., $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} + y \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} + z \frac{\partial \tilde{x}}{\partial z} \\ \tilde{y} &= x \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} + y \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} + z \frac{\partial \tilde{y}}{\partial z} \\ \tilde{z} &= x \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} + y \frac{\partial \tilde{z}}{\partial y} + z \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

o en formulación matricial introduciendo la matriz jacobiana $[J_{wb}] = [\partial(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})/\partial(x, y, z)]$:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} & \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} & \frac{\partial \tilde{x}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} & \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} & \frac{\partial \tilde{y}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} & \frac{\partial \tilde{z}}{\partial y} & \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ \partial(x, y, z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [J_{wb}] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

¹En el siguiente apartado se demostrará su ortogonalidad.

siendo $[J_{wb}]$ la matriz de cambio de coordenadas de *ejes cuerpo* a *ejes viento*.

De forma idéntica se demuestra la relación inversa para el cambio de coordenadas de *ejes viento* a *ejes cuerpo*, en este caso a través de la matriz $[J_{bw}] = [\partial(x, y, z)/\partial(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})]$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial x}{\partial \tilde{y}} & \frac{\partial x}{\partial \tilde{z}} \\ \frac{\partial y}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial y}{\partial \tilde{y}} & \frac{\partial y}{\partial \tilde{z}} \\ \frac{\partial z}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial z}{\partial \tilde{y}} & \frac{\partial z}{\partial \tilde{z}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})} \right] \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = [J_{bw}] \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}$$

Por otro lado, es fácil demostrar la relación entre las dos matrices de cambio de coordenadas:

$$[J_{bw}] = [J_{wb}]^{-1}$$

una matriz inversa que existe siempre y cuando las columnas/filas de la matriz $[J_{wb}]$ sean linealmente independientes o, lo que es lo mismo, los versores \vec{e}_x , \vec{e}_y y \vec{e}_z sean linealmente independientes. El siguiente apartado demuestra la ortogonalidad del Sistema de Ejes Cuerpo, es decir, la ortogonalidad de los versores \vec{e}_x , \vec{e}_y y \vec{e}_z o, lo que es lo mismo, la independencia lineal de éstos, asegurando la existencia de la matriz inversa $[J_{wb}]^{-1}$.

C.3. Comprobación de Ortogonalidad del Sistema de Ejes Cuerpo

Por la forma de construcción anterior de las coordenadas en *ejes cuerpo*, las curvas $x = cte$, $y = cte$ o $z = cte$ se pueden definir tomando como base los puntos $(\tilde{x}_c, 0, -h(\tilde{x}_c, t))$ del eje elástico:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \tilde{x}_c + z \frac{\frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}_c, t)}{\sqrt{1 + \left[\frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}_c, t) \right]^2}} \\ \tilde{y} &= y \\ \tilde{z} &= -w(\tilde{x}_c, t) + z \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}_c, t) \right]^2}} \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

donde $\tilde{x}_c(x)$ es la abscisa en *ejes viento* tal que:

$$x = \int_0^{\tilde{x}_c} \sqrt{1 + \left[\frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(u, t) \right]^2} du \quad (\text{C.19})$$

de forma que $x = x(\tilde{x}_c)$ y viceversa², i.e., $\tilde{x}_c = \tilde{x}_c(x)$. Introduciendo el vector $\vec{r} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ y calculando su diferencial:

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} dz \quad (\text{C.20})$$

²En el apartado anterior ya se ha demostrado la *biunicidad* entre el sistema de *Ejes Viento* y *Ejes Cuerpo*.

se obtienen las direcciones de los *ejes cuerpo* en el punto $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, i.e.,

$$\vec{e}_x = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \text{ es la dirección del eje } x \quad (\text{C.21})$$

$$\vec{e}_y = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \text{ es la dirección del eje } y \quad (\text{C.22})$$

$$\vec{e}_z = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \text{ es la dirección del eje } z \quad (\text{C.23})$$

Derivando en las expresiones (C.18) se obtiene:

$$\vec{e}_x = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{d\tilde{x}_c}{dx}(x) + z \frac{\frac{\partial^2 w}{\partial \tilde{x}^2}(\tilde{x}_c, t)}{\left(1 + \left[\frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}_c, t)\right]^2\right)^{3/2}} \frac{d\tilde{x}_c}{dx}(x) \\ \dots\dots\dots \\ 0 \\ \dots\dots\dots \\ -\frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}_c, t) \frac{d\tilde{x}_c}{dx}(x) - z \frac{\frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}_c, t) \frac{\partial^2 w}{\partial \tilde{x}^2}(\tilde{x}_c, t)}{\left(1 + \left[\frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}_c, t)\right]^2\right)^{3/2}} \frac{d\tilde{x}_c}{dx}(x) \end{array} \right\} \quad (\text{C.24})$$

$$\vec{e}_y = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (\text{C.25})$$

$$\vec{e}_z = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}_c, t)}{\left(1 + \left[\frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}_c, t)\right]^2\right)^{1/2}} \\ \dots\dots\dots \\ 0 \\ \dots\dots\dots \\ 1 \\ \frac{1}{\left(1 + \left[\frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}_c, t)\right]^2\right)^{1/2}} \end{array} \right\} \quad (\text{C.26})$$

donde se ha tenido en cuenta que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}_c, t) \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial \tilde{x}^2}(\tilde{x}_c, t) \frac{d\tilde{x}_c}{dx}(x) \quad (\text{C.27})$$

Puede comprobarse fácilmente que los vectores anteriores son ortogonales dos a dos, por lo que definen un *sistema de referencia ortogonal*, por lo que queda comprobado que el sistema de *ejes cuerpo* es un sistema de referencia ortogonal.

Apéndice D

Derivada Parcial respecto al Tiempo

En este apéndice se demuestra la relación que permite relacionar las derivadas temporales de una magnitud, que se representa con la letra griega Λ , en el sistema de referencia *ejes viento* y el sistema de referencia *ejes cuerpo*.

Por definición, la derivada respecto al tiempo de una magnitud en el sistema de *ejes viento*, que se representa a partir de ahora como $(\partial\Lambda/\partial t)_w$, es la derivada de esa magnitud en un punto manteniendo las coordenadas $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ constantes, i.e.:

$$\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right)_w = \frac{\partial\Lambda}{\partial t}\Big|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} \quad (D.1)$$

De forma similar, la derivada con respecto al tiempo de una magnitud en el sistema de *ejes cuerpo*, que se representa como $(\partial\Lambda/\partial t)_b$, es la derivada parcial respecto al tiempo de esa magnitud en un punto manteniendo constantes sus coordenadas en el sistema de *ejes cuerpo*, es decir, sus coordenadas (x, y, z) :

$$\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right)_b = \frac{\partial\Lambda}{\partial t}\Big|_{(x, y, z)=cte} \quad (D.2)$$

Derivando respecto al tiempo aplicando la regla de la cadena a la magnitud Λ :

$$\Lambda(x, y, z, t) = \Lambda(x(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t), y(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t), z(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t), t) \quad (D.3)$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right)_w &= \frac{\partial\Lambda}{\partial t}\Big|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} = \frac{\partial\Lambda}{\partial t}\Big|_{(x, y, z)=cte} + \\ &+ \frac{\partial\Lambda}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t}\Big|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} + \frac{\partial\Lambda}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}\Big|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} + \frac{\partial\Lambda}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}\Big|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} \\ &= \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right)_b + \left[\frac{\partial\Lambda}{\partial(x, y, z)}\right] \cdot \left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial t}\right]_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} \end{aligned} \quad (D.4)$$

donde:

$$\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial(x, y, z)}\right] = \left[\frac{\partial\Lambda}{\partial x} \quad \frac{\partial\Lambda}{\partial y} \quad \frac{\partial\Lambda}{\partial z}\right] \quad (D.5)$$

$$\left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial t} \right]_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial t} \Big|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} \\ \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} \\ \frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} \end{array} \right\} \quad (D.6)$$

D.1. Sistemas de Referencia Ortonormales

En el caso de que el sistema de referencia (x, y, z) sea *ortonormal*, las derivadas parciales $\partial x/\partial t$, $\partial y/\partial t$ y $\partial z/\partial t$, que se calculan para $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ constantes, corresponden a las coordenadas de la velocidad de un punto *ligado al sistema de referencia inercial* ($(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ constantes) respecto al *sistema de referencia ligado al vehículo*, es decir, la variación con respecto al tiempo de las coordenadas (x, y, z) de un punto de coordenadas $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ constantes.

Por otro lado, el vector cuyas componentes son las derivadas de la magnitud Λ respecto a las variables x, y y z , coincide con el gradiente de la magnitud Λ en el sistema de referencia (x, y, z) , es decir:

$$\left[\frac{\partial \Lambda}{\partial(x, y, z)} \right] = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial \Lambda}{\partial x} & \frac{\partial \Lambda}{\partial y} & \frac{\partial \Lambda}{\partial z} \end{array} \right] \quad (D.7)$$

Por tanto, las dos derivadas temporales se relacionan a través de la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial t} \Big|_w = \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \Big|_b + \nabla \Lambda \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t} \right)_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} \quad (D.8)$$

Puede verse la diferencia entre las dos derivadas parciales respecto al tiempo. La $(\partial \Lambda / \partial t)_w$ corresponde a la variación con respecto al tiempo de Λ en un punto con $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ constantes, es decir, la derivada con respecto al tiempo en un punto fijo para un observador que se mueve con el sistema de *ejes viento*. Por otro lado, la $(\partial \Lambda / \partial t)_b$ de Λ corresponde a la variación respecto al tiempo manteniendo las coordenadas (x, y, z) constantes, es decir, la variación con respecto al tiempo que vería un observador en un punto fijo y montado en el sistema de *ejes cuerpo*.

Existe una forma alternativa de obtener la expresión anterior teniendo en cuenta la siguiente relación funcional:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \tilde{x}(x, y, z, t) \\ \tilde{y} &= \tilde{y}(x, y, z, t) \\ \tilde{z} &= \tilde{z}(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (D.9)$$

y derivando respecto al tiempo aplicando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} \Big|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} &= 0 = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} \Big|_{(x, y, z)=cte} + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} \Big|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} &= 0 = \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} \Big|_{(x, y, z)=cte} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} \Big|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} &= 0 = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} \Big|_{(x, y, z)=cte} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \end{aligned} \quad (D.10)$$

donde las derivadas $\partial x/\partial t$, $\partial y/\partial t$ y $\partial z/\partial t$ se calculan manteniendo $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ constantes en las expresiones recíprocas de (D.9):

$$\begin{aligned} x &= x(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t) \\ y &= x(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t) \\ z &= x(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t) \end{aligned} \tag{D.11}$$

En forma matricial queda:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} & \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} & \frac{\partial \tilde{x}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} & \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} & \frac{\partial \tilde{y}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} & \frac{\partial \tilde{z}}{\partial y} & \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix}_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} \\ \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} \\ \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} \end{bmatrix}_{(x, y, z)=cte}$$

e introduciendo la matriz jacobiana $[J_{bw}] = [\partial(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})/\partial(x, y, z)]^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix}_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} = - \left[\frac{\partial(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}{\partial(x, y, z)} \right]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} \\ \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} \\ \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} \end{bmatrix}_{(x, y, z)=cte} = -[J_{bw}] \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} \\ \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} \\ \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} \end{bmatrix}_{(x, y, z)=cte} \tag{D.12}$$

siendo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial t}, \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t}, \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} \right)_{(x, y, z)=cte} & \text{ la velocidad de un punto asociado a los } \textit{ejes cuerpo} \text{ en el} \\ & \text{ sistema de referencia } \textit{ejes viento}. \\ [J_{bw}] = \left[\frac{\partial(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}{\partial(x, y, z)} \right]^{-1} & \text{ es la matriz de cambio de coordenadas de } \textit{ejes viento} \text{ a } \textit{ejes} \\ & \text{ cuerpo}. \end{aligned}$$

por lo que el vector en el lado izquierdo de la ecuación (D.12) es el *vector opuesto a la velocidad de un punto ligado al sistema de ejes cuerpo respecto al sistema de ejes viento y expresada en ejes cuerpo*, y que se denotará con el símbolo $-\vec{V}$. De esta forma, la ecuación (D.4) se puede escribir como:

$$\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right)_w = \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right)_b + \nabla \Lambda \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t} \right) \Big|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} = \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right)_b - \vec{V} \cdot \nabla \Lambda \tag{D.13}$$

En el siguiente apartado se desarrolla la formulación anterior para el caso particular de que los *ejes viento* y *ejes cuerpo* sean sistemas de referencia cartesianos.

D.2. Sistemas de Referencia Cartesianos

Sea $\vec{R}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ la posición de un punto respecto al sistema de *ejes viento* y $\vec{r}(x, y, z)$ la posición del mismo punto genérico respecto al sistema de *ejes cuerpo*. Ambos vectores se relacionan mediante la siguiente ecuación:

$$\vec{r} = \vec{R} - \vec{R}_0 \tag{D.14}$$

Con el objetivo de calcular las derivadas $\partial x/\partial t$, $\partial y/\partial t$ y $\partial z/\partial t$ para $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ constantes que intervienen en la ecuación (D.4), se deriva la expresión (D.14) respecto al tiempo en el sistema de *ejes cuerpo*:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_b &= \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_b - \left(\frac{d\vec{R}_0}{dt}\right)_b = \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_w + \vec{\omega}_{wb} \times \vec{R} - \left(\frac{d\vec{R}_0}{dt}\right)_w - \vec{\omega}_{wb} \times \vec{R}_0 = \\ &= \frac{d\tilde{x}}{dt}\vec{i} + \frac{d\tilde{y}}{dt}\vec{j} + \frac{d\tilde{z}}{dt}\vec{k} + \vec{\omega}_{wb} \times (\vec{R} - \vec{R}_0) - \left(\frac{d\vec{R}_0}{dt}\right)_w \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

donde el subíndice b en el paréntesis $()_b$ indica derivada respecto a *ejes cuerpo*, el subíndice w en $()_w$ indica derivación respecto a *ejes viento* y el vector $\vec{\omega}_{wb}$ es la velocidad angular del sistema *ejes viento* respecto al sistema de *ejes cuerpo*.

Teniendo en cuenta que $\vec{r} = \vec{R} - \vec{R}_0$, que las coordenadas $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ permanecen constantes, i.e.,

$$d\tilde{x}/d\tilde{t} = d\tilde{y}/d\tilde{t} = d\tilde{z}/d\tilde{t} = 0$$

y que la relación entre las velocidades angulares relativas entre los dos sistemas de referencia $\vec{\omega}_{wb} = -\vec{\omega}_{bw}$, se obtiene:

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_b = -\left(\frac{d\vec{R}_0}{dt}\right)_w - \vec{\omega}_{bw} \times \vec{r} = -\vec{V}_0 - \vec{\omega}_{bw} \times \vec{r} = -(\vec{V}_0 + \vec{\omega}_{bw} \times \vec{r}) = -\vec{V} \quad (\text{D.16})$$

siendo \vec{V}_0 la velocidad del origen del sistema de *ejes cuerpo* respecto al sistema *ejes viento*, y la velocidad \vec{V} es la velocidad del punto (x, y, z) como perteneciente al sistema *ejes cuerpo*. Sustituyendo en la ecuación (D.4):

$$\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial t}\right)_w = \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial t}\right)_b + \nabla \Lambda \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}\right) \Big|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})=cte} = \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial t}\right)_b - \vec{V} \cdot \nabla \Lambda \quad (\text{D.17})$$

Pocos libros desarrollan en detalle la formulación arriba descrita y aún menos la aplican a sistemas de referencia curvilíneos. Destacar la referencia [Kat91] que desarrolla la relación entre sistemas cartesianos y realiza varios ejemplos de aplicación para flujo no estacionario incompresible.

Apéndice E

Bifurcación en Sistemas No Lineales

La formulación Estado-Espacio permite plantear las ecuaciones que gobiernan un problema físico como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs) de primer orden:

$$\begin{aligned}\frac{d\{x\}}{dt} &= \vec{f}(\{x\}, \{u\}, \{\lambda\}) \\ \{y\} &= [C]\{x\} + [D]\{u\} + [E]\{\lambda\}\end{aligned}$$

donde $\{x\}$ es el vector de estado del sistema, $\{y\}$ es un vector formado por las variables de salida, $\{u\}$ es un vector formado por entradas al sistema y $\{\lambda\}$ es un vector con los parámetros de los que depende el problema.

En el caso que nos ocupa, el vector de parámetros está formado por la velocidad de vuelo \hat{U}_∞ y las principales características de la no linealidad (tipo de no linealidad, holgura, precarga, etc.), mientras que la función vectorial $\vec{f}(\{y\}, \{u\}, \{\lambda\})$ es no lineal, más concretamente, *lineal a trozos* (o, en terminología inglesa, *Piecewise Linear Nonlinearity*).

En sistemas no lineales resulta interesante representar en dos dimensiones xy alguna característica de la respuesta $\{y\}$ (en el eje y) en función de alguno de los parámetros de los que depende el sistema λ_i (en el eje x). En el problema que nos ocupa se tiene un claro candidato a ser ese parámetro a variar: la velocidad de vuelo adimensional \hat{U}_∞ . El resto de parámetros λ_j están asociados a la no linealidad estructural y se pueden considerar fijos para una configuración determinada para la que se varía la velocidad de vuelo \hat{U}_∞ .

Una vez fijado el parámetro a variar (en el eje x), queda por determinar la variable que se representará en el eje y . En la literatura se suele representar las siguientes magnitudes:

- $[y] = y_k$ para algún índice $1 \leq k \leq n$ siendo n la dimensión del vector $\{y\}$.
- $[y] = \|y\|_2 = (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)^{1/2}$.
- $[y] = \|y\|_\infty = \text{máx}\{|y_1|, |y_2|, \dots, |y_n|\}$.

Las dos últimas magnitudes son normas del vector $\{y\}$, la *norma euclídea* $\|y\|_2$ y la *norma infinito* $\|y\|_\infty$. Las magnitudes anteriores son apropiadas para respuestas estacionarias $\{y\}$, aunque son fácilmente extrapolables a soluciones genéricas $\{y(t)\}$ de ecuaciones diferenciales sin más que especificar un tiempo t_0 en el que se evalúa la respuesta.

La elección de la magnitud $[y]$ es esencial para detectar las distintas respuestas del sistema: amortiguado, armónico, caótico o divergente. En ecuaciones diferenciales no lineales, suele ser interesante determinar la evolución con los parámetros λ_i de alguna magnitud $y_k(t_0)$ con significado físico asociada a la no linealidad, es decir, la primera elección para la magnitud escalar $[y]$ (ver referencia [Sey94], capítulo 2). Por otro lado, las otras dos normas suelen ser interesantes para detectar características globales de la respuesta. Por ejemplo, la norma $\|y(t_0)\|_2$ puede utilizarse para detectar movimiento amortiguado (tiende a cero), divergente (tiende a infinito), u oscilatorio no amortiguado (no tiene a cero pero tampoco diverge), mientras que la norma $\|y(t_0)\|_\infty$ puede utilizarse para detectar movimiento divergente debido a la tendencia a infinito de alguna de las coordenadas y_k .

Un diagrama representando la magnitud $[y]$ vs λ_i se denomina *diagrama de bifurcación*. En este trabajo se utiliza la primera elección de $[y] = y_k(t^*)$, donde t^* son los instantes de tiempo en el que la respuesta alcanza un mínimo o máximo, i.e., $dy_k/dt(t^*) = 0$. En caso de movimiento amortiguado, existirá un único valor de $[y]$; en caso de armónico LCO, $[y]$ tendrá dos o más valores discretos y, en caso de respuesta caótica, la magnitud $[y]$ quedará representada mediante trazos más continuos. Las normas $\|y\|_2$ e $\|y\|_\infty$ se utilizan para determinar respuesta amortiguada o divergente.

Como ejemplo se adjunta la figura E.1, extraída de la referencia [Aré07], que representa la magnitud $[y]$ correspondiente al ángulo de giro de las aletas de un misil en función de la velocidad de vuelo U_∞ (eje x). La rotación de las aletas tiene una no linealidad de tipo *hysteresis*. A velocidades bajas, las aletas tienden a una posición estacionaria. Poco antes de llegar a la velocidad $U_\infty = 250$ KTAS, la solución estacionaria se rompe y aparece un movimiento no amortiguado de tipo caótico que se convierte en un movimiento armónico (con un mínimo y un máximo) a partir de unos 275 KTAS. El rango de velocidades en el que ocurre la transición amortiguado/caos y caos/armónico se amplía en el cuadro de la derecha.

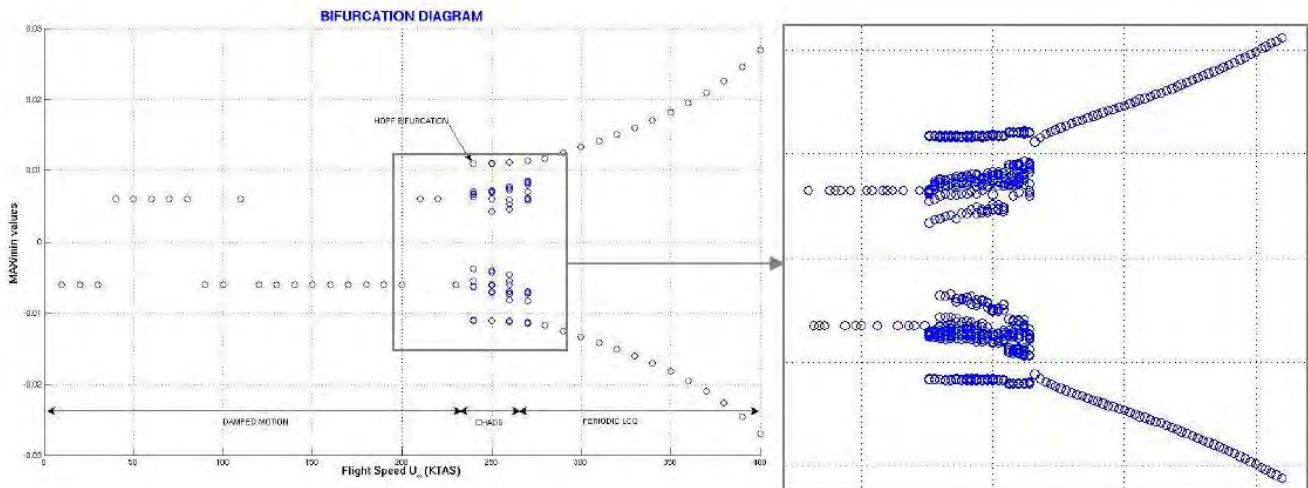


Figura E.1: Ejemplo de diagrama de bifurcación extraído de la referencia [Aré07]

Si el lector desea ampliar conocimientos en relación al tratamiento de sistemas no lineales, diagramas de bifurcación y otros temas relacionados, son recomendables los libros [Sey94], [Coo94], [Str94] y [AP92].

Apéndice F

Modelo de elementos finitos MSC.NASTRAN del vehículo

1

THIS PROGRAM IS CONFIDENTIAL AND A TRADE SECRET OF THE MACNEAL-SCHWENDLER CORP. THE RECEIPT OR POSSESSION OF THIS PROGRAM DOES NOT CONVEY ANY RIGHTS TO REPRODUCE OR DISCLOSE ITS CONTENTS, OR TO MANUFACTURE, USE, OR SELL ANYTHING HEREIN, IN WHOLE OR IN PART, WITHOUT THE SPECIFIC WRITTEN CONSENT OF THE MACNEAL-SCHWENDLER CORPORATION.

```
*****
*****
**
**          THE          **
**    MACNEAL-SCHWENDLER  **
**      CORPORATION      **
**
**    M S C / N A S T R A N  **
**
**    VERSION - 70.5.2     **
**
**    OCT 23, 1998       **
**
**
**    Sun Microsystems Computer Co.  **
**
** *MODEL UltraSPARC/1200 (multivac) * **
**
**          SunOS 5.9      **
**
**    COMPILED FOR v8plus  **
**
*****
*****
```

1

Welcome to MSC/NASTRAN Version 70.5

MSC/NASTRAN Version 70.5 includes all the rich functionality provided in Version 70 and offers the following features and enhancements to extend the power and performance of MSC/NASTRAN.

New Features:

- Geometric and material nonlinear spring and damper element (BUSH1D)
- Generic control systems for Aeroelastic trim analysis.
- A modeling tool to model gaps between two coaxial cylinders.
- Interface elements that allow for 2-D and 3-D non-conforming meshes.
- Gap constraints in linear statics (SOL 101).

New Enhancements:

- Externalization of error messages.
- R-type element shape sensitivities and removal of problem size limit for optimization.
- Several enhancements for Aeroelasticity such as (a) improvements to 2-D

spline technology, (b) allowing aero models to be in superelement, (c) multi-disciplinary optimization with static analysis, and (d) performance improvements.

- Partitioned external superelement applicable for all solution sequences.
- MPC force output in OP2 and XDB files.
- Inclusion of MPC forces in grid point force balance output.
- Adjoint sensitivity with multiple boundary conditions.
- Count of bulk data entries in the F04 file.
- More accurate NORM module.
- Beam library server on Cray systems.
- More user-friendly estimate utility.
- MSC/ACCESS libraries on HP systems conform to typical Unix naming practice.
- Removal of memory size limit on Intel Windows NT.

Performance Improvements:

- For large solid models with both the direct and iterative solvers.
- For data recovery of composite elements on 64-bit machines.
- For frequency dependent acoustic absorber elements.
- For data recovery of (a) normal modes for very large models and (b) transient and frequency response with multiple subcases.

Quality and Reliability:

- A consistent use of initial temperatures for all the element types
- Over 250 error corrections, including corrections to defects in the FLEXlm licensing, the ability to run external programs, the Adjoint sensitivity method, the new superelement methodology, etc.
- More robust normal modes, buckling, and complex eigenvalue analyses.
- As additional ports of MSC/NASTRAN Version 70.5 have been added to the Version 70.5 CD, MSC has taken the opportunity to include even more error corrections and minor performance improvements. This upgraded system is Version 70.5.2.
- Automatic restarts from V70.5.0/70.5.1 to V70.5.2 are only possible using the "read-only" restart capability. See the LOGICAL keyword on the RESTART FMS statement.

Multi-MASTER restarts are supported between V70.5.0/70.5.1 to V70.5.2.

DBLOCATE may be used to locate a V70.5.0 or V70.5.1 database in V70.5.2.

A V70.5.0 or V70.5.1 database may be converted to V70.5.2 with the following commands:

```
ACQUIRE NDDL
ASSIGN MYDB='physical filename of the V70.5.0/70.5.1 MASTER DBset'
DBLOCATE LOGICAL=MYDB COPY WHERE(VERSION=* and PROJECT=*)
ENDJOB
```

This "news" information can be turned off by setting news=no in a runtime configuration (RC) file. Placing this keyword in a system RC file will affect all users; setting it in a local RC file will only affect one user or specific jobs. The news can be viewed at any time with the command 'msc705 nastran news' or by setting news=yes on the command line or in a local RC file.

1 SEPTEMBER 14, 2007 MSC/NASTRAN 10/23/98 PAGE 1

0 N A S T R A N F I L E A N D S Y S T E M P A R A M E T E R E C H O
0

```
NASTRAN SYSTEM(252)=0 $(/CAE/LOCUS/CAL/MS/OLD/MS/CONF/SOLARIS/NAST705RC[1])
NASTRAN BUFFSIZE=32769
NASTRAN SYSTEM(265)=0 $ MSC/NASTRAN V70.5.2
$
$ -----
$ EXECUTIVE CONTROL
$ -----
$
```

1 SEPTEMBER 14, 2007 MSC/NASTRAN 10/23/98 PAGE 2

0 N A S T R A N E X E C U T I V E C O N T R O L D E C K E C H O
0

```
SOL 103
$ INCLUDE '/HOME/DINAMICA/NAST/705/ALT145_MOD_INTERP.V705'
CEND
```

1 B5 SEPTEMBER 14, 2007 MSC/NASTRAN 10/23/98 PAGE 3

0
0

CASE CONTROL DECK ECHO

CARD
COUNT
1 \$
2 \$ -----
3 \$ CASE CONTROL
4 \$ -----
5 \$
6 TITLE = B5
7 ECHO = SORT
8 SPC=200
9 \$
10 METHOD 100
11 DISPLACEMENT=ALL
12 \$
13 \$ -----
14 \$ BULK DATA
15 \$ -----
16 \$
17 BEGIN BULK

0
1 B5

INPUT BULK DATA CARD COUNT = 181

SEPTEMBER 14, 2007 MSC/NASTRAN 10/23/98 PAGE 4

0
0

SORTED BULK DATA ECHO

CARD
COUNT . 1 .. 2 .. 3 .. 4 .. 5 .. 6 .. 7 .. 8 .. 9 .. 10 .
1- CBEAM 501502 501502 501 502 1.0 1.0 0.0
2- CBEAM 502503 502503 502 503 1.0 1.0 0.0
3- CBEAM 503504 503504 503 504 1.0 1.0 0.0
4- CBEAM 504505 504505 504 505 1.0 1.0 0.0
5- CBEAM 505506 505506 505 506 1.0 1.0 0.0
6- CBEAM 506507 506507 506 507 1.0 1.0 0.0
7- CBEAM 507508 507508 507 508 1.0 1.0 0.0
8- CBEAM 508509 508509 508 509 1.0 1.0 0.0
9- CBEAM 509510 509510 509 510 1.0 1.0 0.0
10- CBEAM 510511 510511 510 511 1.0 1.0 0.0
11- CBEAM 511512 511512 511 512 1.0 1.0 0.0
12- CBEAM 512513 512513 512 513 1.0 1.0 0.0
13- CBEAM 513514 513514 513 514 1.0 1.0 0.0
14- CBEAM 513515 513515 514 515 1.0 1.0 0.0
15- CBEAM 513516 513516 515 516 1.0 1.0 0.0
16- CBEAM 513517 513517 516 517 1.0 1.0 0.0
17- CBEAM 513518 513518 517 518 1.0 1.0 0.0
18- CBEAM 513519 513519 518 519 1.0 1.0 0.0
19- CBEAM 513520 513520 519 520 1.0 1.0 0.0
20- CBEAM 513521 513521 520 521 1.0 1.0 0.0
21- CBEAM 513522 513522 521 522 1.0 1.0 0.0
22- CBEAM 513523 513523 522 523 1.0 1.0 0.0
23- CBEAM 513524 513524 523 524 1.0 1.0 0.0
24- CBEAM 513525 513525 524 525 1.0 1.0 0.0
25- CBEAM 513526 513526 525 526 1.0 1.0 0.0
26- CBEAM 513527 513527 526 527 1.0 1.0 0.0
27- CBEAM 513528 513528 527 528 1.0 1.0 0.0
28- CBEAM 513529 513529 528 529 1.0 1.0 0.0
29- CBEAM 513530 513530 529 530 1.0 1.0 0.0
30- CBEAM 513531 513531 530 531 1.0 1.0 0.0
31- CBEAM 513532 513532 531 532 1.0 1.0 0.0
32- CBEAM 513533 513533 532 533 1.0 1.0 0.0
33- CBEAM 513534 513534 533 534 1.0 1.0 0.0
34- CBEAM 513535 513535 534 535 1.0 1.0 0.0
35- CBEAM 513536 513536 535 536 1.0 1.0 0.0
36- CBEAM 513537 513537 536 537 1.0 1.0 0.0
37- CBEAM 633733 633733 633 733 1.0 1.0 0.0
38- CBEAM 633833 633833 633 833 1.0 1.0 0.0
39- CELAS2 5076071 1.E09 533 1 633 1
40- CELAS2 5076072 1.E09 533 2 633 2
41- CELAS2 5076073 1.E09 533 3 633 3
42- CELAS2 5076074 1.E09 533 4 633 4
43- CELAS2 5076075 4.8E03 533 5 633 5
44- CELAS2 5076076 1.E09 533 6 633 6
45- CONM2 100 100 200 3.418 +000003
46- ++0000030.0 0.0 0.1899330.0 0.0 0.0 +000004
47- CORD2R 200 3.17 0.0 0.0 3.17 0.0 1.0 +000001
48- ++0000014.17 0.0 0.0 +000002
49- EIGRL 100 4
50- GRID 100 3.17 0.0 0.0

1 B5

SEPTEMBER 14, 2007 MSC/NASTRAN 10/23/98 PAGE 5

0

APÉNDICE F. MODELO DE ELEMENTOS FINITOS MSC.NASTRAN DEL VEHÍCULO

0

SORTED BULK DATA ECHO

CARD	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
COUNT										
51-	GRID	501		0.000	0.0	0.0				
52-	GRID	502		0.100	0.0	0.0				
53-	GRID	503		0.200	0.0	0.0				
54-	GRID	504		0.300	0.0	0.0				
55-	GRID	505		0.400	0.0	0.0				
56-	GRID	506		0.500	0.0	0.0				
57-	GRID	507		0.600	0.0	0.0				
58-	GRID	508		0.700	0.0	0.0				
59-	GRID	509		0.800	0.0	0.0				
60-	GRID	510		0.900	0.0	0.0				
61-	GRID	511		1.000	0.0	0.0				
62-	GRID	512		1.100	0.0	0.0				
63-	GRID	513		1.200	0.0	0.0				
64-	GRID	514		1.300	0.0	0.0				
65-	GRID	515		1.400	0.0	0.0				
66-	GRID	516		1.500	0.0	0.0				
67-	GRID	517		1.600	0.0	0.0				
68-	GRID	518		1.700	0.0	0.0				
69-	GRID	519		1.800	0.0	0.0				
70-	GRID	520		1.900	0.0	0.0				
71-	GRID	521		2.000	0.0	0.0				
72-	GRID	522		2.100	0.0	0.0				
73-	GRID	523		2.200	0.0	0.0				
74-	GRID	524		2.300	0.0	0.0				
75-	GRID	525		2.400	0.0	0.0				
76-	GRID	526		2.500	0.0	0.0				
77-	GRID	527		2.600	0.0	0.0				
78-	GRID	528		2.700	0.0	0.0				
79-	GRID	529		2.800	0.0	0.0				
80-	GRID	530		2.900	0.0	0.0				
81-	GRID	531		3.000	0.0	0.0				
82-	GRID	532		3.100	0.0	0.0				
83-	GRID	533		3.170	0.0	0.0				
84-	GRID	534		3.300	0.0	0.0				
85-	GRID	535		3.400	0.0	0.0				
86-	GRID	536		3.500	0.0	0.0				
87-	GRID	537		3.657	0.0	0.0				
88-	GRID	633		3.17	0.0	0.0				
89-	GRID	733		3.17	-0.2	0.0				
90-	GRID	833		3.17	+0.2	0.0				
91-	GRID	6331		3.17	0.0	+0.1				
92-	GRID	6332		3.17	0.0	-0.1				
93-	GRID	7331		2.50	-0.2	0.0				
94-	GRID	7332		3.50	-0.2	0.0				
95-	GRID	8331		2.50	+0.2	0.0				
96-	GRID	8332		3.50	+0.2	0.0				
97-	MAT1	101	60.E+9		0.33	2.1E03				
98-	MAT1	102	60.E+9		0.33	0.0E03				
99-	PARAM	BAILOUT	-1							
100-	PARAM	GRDPNT	0							

1 B5

SEPTEMBER 14, 2007 MSC/NASTRAN 10/23/98 PAGE 6

0

0

SORTED BULK DATA ECHO

CARD	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
COUNT										
101-	PARAM	LMODES	4							
102-	PARAM	POST	-1							
103-	PBEAM	501502	101	0.01223	1.E-3	1.E-05		1.E-3		
104-	PBEAM	502503	101	0.01288	1.E-3	1.E-05		1.E-3		
105-	PBEAM	503504	101	0.01353	1.E-3	1.E-05		1.E-3		
106-	PBEAM	504505	101	0.01418	1.E-3	1.E-05		1.E-3		
107-	PBEAM	505506	101	0.01483	1.E-3	1.E-05		1.E-3		
108-	PBEAM	506507	101	0.01549	1.E-3	1.E-05		1.E-3		
109-	PBEAM	507508	101	0.01614	1.E-3	1.E-05		1.E-3		
110-	PBEAM	508509	101	0.01679	1.E-3	1.E-05		1.E-3		
111-	PBEAM	509510	101	0.01744	1.E-3	1.E-05		1.E-3		
112-	PBEAM	510511	101	0.01809	1.E-3	1.E-05		1.E-3		
113-	PBEAM	511512	101	0.01874	1.E-3	1.E-05		1.E-3		
114-	PBEAM	512513	101	0.01939	1.E-3	1.E-05		1.E-3		
115-	PBEAM	513514	101	0.02004	1.E-3	1.E-05		1.E-3		
116-	PBEAM	513515	101	0.02069	1.E-3	1.E-05		1.E-3		
117-	PBEAM	513516	101	0.02135	1.E-3	1.E-05		1.E-3		
118-	PBEAM	513517	101	0.02200	1.E-3	1.E-05		1.E-3		
119-	PBEAM	513518	101	0.02265	1.E-3	1.E-05		1.E-3		
120-	PBEAM	513519	101	0.02330	1.E-3	1.E-05		1.E-3		
121-	PBEAM	513520	101	0.02395	1.E-3	1.E-05		1.E-3		
122-	PBEAM	513521	101	0.02460	1.E-3	1.E-05		1.E-3		

0
0

E I G E N V A L U E A N A L Y S I S S U M M A R Y (READ MODULE)

BLOCK SIZE USED 7
NUMBER OF DECOMPOSITIONS 2
NUMBER OF ROOTS FOUND 4
NUMBER OF SOLVES REQUIRED 9

1 B5 SEPTEMBER 14, 2007 MSC/NASTRAN 10/23/98 PAGE 13

0

R E A L E I G E N V A L U E S						
MODE NO.	EXTRACTION ORDER	EIGENVALUE	RADIANS	CYCLES	GENERALIZED MASS	GENERALIZED STIFFNESS
1	1	-1.066569E-04	1.032748E-02	1.643670E-03	1.000000E+00	-1.066569E-04
2	2	1.536682E-08	1.239630E-04	1.972932E-05	1.000000E+00	1.536682E-08
3	3	2.489842E+04	1.577923E+02	2.511343E+01	1.000000E+00	2.489842E+04
4	4	3.593664E+04	1.895696E+02	3.017094E+01	1.000000E+00	3.593664E+04

1 B5 SEPTEMBER 14, 2007 MSC/NASTRAN 10/23/98 PAGE 14

0

*** USER INFORMATION MESSAGE 4114 (OUTPX2)

DATA BLOCK OUGV1 WRITTEN ON FORTRAN UNIT 12, TRL =
101 0 1504 0 0 0 0
(MAXIMUM POSSIBLE FORTRAN RECORD SIZE = 65538 WORDS.)
(MAXIMUM SIZE OF FORTRAN RECORDS WRITTEN = 376 WORDS.)
(NUMBER OF FORTRAN RECORDS WRITTEN = 50 RECORDS.)
(TOTAL DATA WRITTEN FOR DATA BLOCK = 2145 WORDS.)

1 B5 SEPTEMBER 14, 2007 MSC/NASTRAN 10/23/98 PAGE 15

0

EIGENVALUE = -1.066569E-04
CYCLES = 1.643670E-03 R E A L E I G E N V E C T O R N O . 1

POINT ID.	TYPE	T1	T2	T3	R1	R2	R3
100	G	1.050602E-11	-1.126151E-12	7.366477E-02	-6.245005E-17	-7.236706E-02	-9.405069E-15
501	G	0.0	0.0	-1.557378E-01	0.0	-7.236675E-02	0.0
502	G	0.0	0.0	-1.485012E-01	0.0	-7.236675E-02	0.0
503	G	0.0	0.0	-1.412645E-01	0.0	-7.236675E-02	0.0
504	G	0.0	0.0	-1.340278E-01	0.0	-7.236675E-02	0.0
505	G	0.0	0.0	-1.267911E-01	0.0	-7.236675E-02	0.0
506	G	0.0	0.0	-1.195545E-01	0.0	-7.236675E-02	0.0
507	G	0.0	0.0	-1.123178E-01	0.0	-7.236675E-02	0.0
508	G	0.0	0.0	-1.050811E-01	0.0	-7.236675E-02	0.0
509	G	0.0	0.0	-9.784445E-02	0.0	-7.236675E-02	0.0
510	G	0.0	0.0	-9.060778E-02	0.0	-7.236675E-02	0.0
511	G	0.0	0.0	-8.337110E-02	0.0	-7.236675E-02	0.0
512	G	0.0	0.0	-7.613443E-02	0.0	-7.236675E-02	0.0
513	G	0.0	0.0	-6.889775E-02	0.0	-7.236675E-02	0.0
514	G	0.0	0.0	-6.166108E-02	0.0	-7.236675E-02	0.0
515	G	0.0	0.0	-5.442440E-02	0.0	-7.236675E-02	0.0
516	G	0.0	0.0	-4.718772E-02	0.0	-7.236676E-02	0.0
517	G	0.0	0.0	-3.995105E-02	0.0	-7.236676E-02	0.0
518	G	0.0	0.0	-3.271437E-02	0.0	-7.236676E-02	0.0
519	G	0.0	0.0	-2.547770E-02	0.0	-7.236676E-02	0.0
520	G	0.0	0.0	-1.824102E-02	0.0	-7.236676E-02	0.0
521	G	0.0	0.0	-1.100434E-02	0.0	-7.236676E-02	0.0
522	G	0.0	0.0	-3.767669E-03	0.0	-7.236676E-02	0.0
523	G	0.0	0.0	3.469007E-03	0.0	-7.236676E-02	0.0
524	G	0.0	0.0	1.070568E-02	0.0	-7.236677E-02	0.0
525	G	0.0	0.0	1.794236E-02	0.0	-7.236677E-02	0.0
526	G	0.0	0.0	2.517904E-02	0.0	-7.236677E-02	0.0
527	G	0.0	0.0	3.241571E-02	0.0	-7.236677E-02	0.0
528	G	0.0	0.0	3.965239E-02	0.0	-7.236677E-02	0.0
529	G	0.0	0.0	4.688907E-02	0.0	-7.236677E-02	0.0
530	G	0.0	0.0	5.412574E-02	0.0	-7.236677E-02	0.0
531	G	0.0	0.0	6.136242E-02	0.0	-7.236677E-02	0.0
532	G	0.0	0.0	6.859910E-02	0.0	-7.236677E-02	0.0
533	G	0.0	0.0	7.366477E-02	0.0	-7.236677E-02	0.0
534	G	0.0	0.0	8.307245E-02	0.0	-7.236677E-02	0.0
535	G	0.0	0.0	9.030913E-02	0.0	-7.236677E-02	0.0
536	G	0.0	0.0	9.754580E-02	0.0	-7.236677E-02	0.0

APÉNDICE F. MODELO DE ELEMENTOS FINITOS MSC.NASTRAN DEL VEHÍCULO

537	G	0.0	0.0	1.089074E-01	0.0	-7.236677E-02	0.0
633	G	9.245958E-12	-1.071284E-12	7.366477E-02	-4.399317E-18	-7.236706E-02	8.471469E-26
733	G	1.090565E-11	-1.143373E-12	7.366477E-02	-6.838077E-16	-7.236706E-02	1.169778E-15
833	G	1.094644E-11	-1.143373E-12	7.366477E-02	6.750085E-16	-7.236706E-02	-1.141712E-15
6331	G	-7.236705E-03	-1.071283E-12	7.366477E-02	-4.399317E-18	-7.236706E-02	8.471469E-26
6332	G	7.236705E-03	-1.071284E-12	7.366477E-02	-4.399317E-18	-7.236706E-02	8.471469E-26
7331	G	1.090565E-11	-1.144156E-12	2.517884E-02	-6.838077E-16	-7.236706E-02	1.169778E-15
7332	G	1.090565E-11	-1.142987E-12	9.754590E-02	-6.838077E-16	-7.236706E-02	1.169778E-15
8331	G	1.094644E-11	-1.142608E-12	2.517884E-02	6.750085E-16	-7.236706E-02	-1.141712E-15
8332	G	1.094644E-11	-1.143749E-12	9.754590E-02	6.750085E-16	-7.236706E-02	-1.141712E-15

1 B5 SEPTEMBER 14, 2007 MSC/NASTRAN 10/23/98 PAGE 16

0
 EIGENVALUE = 1.536682E-08
 CYCLES = 1.972932E-05 REAL EIGENVECTOR NO. 2

POINT ID.	TYPE	T1	T2	T3	R1	R2	R3
100	G	5.895275E-13	-1.520031E-14	-7.327142E-02	4.987838E-17	8.161180E-07	-1.269457E-16
501	G	0.0	0.0	-7.326884E-02	0.0	8.161053E-07	0.0
502	G	0.0	0.0	-7.326892E-02	0.0	8.161070E-07	0.0
503	G	0.0	0.0	-7.326900E-02	0.0	8.161125E-07	0.0
504	G	0.0	0.0	-7.326908E-02	0.0	8.161155E-07	0.0
505	G	0.0	0.0	-7.326917E-02	0.0	8.161115E-07	0.0
506	G	0.0	0.0	-7.326925E-02	0.0	8.161079E-07	0.0
507	G	0.0	0.0	-7.326933E-02	0.0	8.161107E-07	0.0
508	G	0.0	0.0	-7.326941E-02	0.0	8.161134E-07	0.0
509	G	0.0	0.0	-7.326949E-02	0.0	8.161109E-07	0.0
510	G	0.0	0.0	-7.326958E-02	0.0	8.161099E-07	0.0
511	G	0.0	0.0	-7.326966E-02	0.0	8.161114E-07	0.0
512	G	0.0	0.0	-7.326974E-02	0.0	8.161102E-07	0.0
513	G	0.0	0.0	-7.326982E-02	0.0	8.161086E-07	0.0
514	G	0.0	0.0	-7.326990E-02	0.0	8.161105E-07	0.0
515	G	0.0	0.0	-7.326998E-02	0.0	8.161107E-07	0.0
516	G	0.0	0.0	-7.327006E-02	0.0	8.161070E-07	0.0
517	G	0.0	0.0	-7.327014E-02	0.0	8.161083E-07	0.0
518	G	0.0	0.0	-7.327022E-02	0.0	8.161110E-07	0.0
519	G	0.0	0.0	-7.327031E-02	0.0	8.161066E-07	0.0
520	G	0.0	0.0	-7.327039E-02	0.0	8.161047E-07	0.0
521	G	0.0	0.0	-7.327047E-02	0.0	8.161086E-07	0.0
522	G	0.0	0.0	-7.327055E-02	0.0	8.161101E-07	0.0
523	G	0.0	0.0	-7.327063E-02	0.0	8.161051E-07	0.0
524	G	0.0	0.0	-7.327072E-02	0.0	8.161026E-07	0.0
525	G	0.0	0.0	-7.327080E-02	0.0	8.161070E-07	0.0
526	G	0.0	0.0	-7.327088E-02	0.0	8.161094E-07	0.0
527	G	0.0	0.0	-7.327096E-02	0.0	8.161051E-07	0.0
528	G	0.0	0.0	-7.327104E-02	0.0	8.161022E-07	0.0
529	G	0.0	0.0	-7.327113E-02	0.0	8.161057E-07	0.0
530	G	0.0	0.0	-7.327121E-02	0.0	8.161069E-07	0.0
531	G	0.0	0.0	-7.327129E-02	0.0	8.161056E-07	0.0
532	G	0.0	0.0	-7.327137E-02	0.0	8.161054E-07	0.0
533	G	0.0	0.0	-7.327142E-02	0.0	8.161042E-07	0.0
534	G	0.0	0.0	-7.327154E-02	0.0	8.161041E-07	0.0
535	G	0.0	0.0	-7.327161E-02	0.0	8.161066E-07	0.0
536	G	0.0	0.0	-7.327169E-02	0.0	8.161057E-07	0.0
537	G	0.0	0.0	-7.327183E-02	0.0	8.161028E-07	0.0
633	G	5.188209E-13	-1.445974E-14	-7.327142E-02	4.380952E-18	8.161180E-07	-1.459678E-28
733	G	6.128209E-13	-1.543276E-14	-7.327142E-02	-3.891054E-17	8.161180E-07	6.504203E-17
833	G	6.133715E-13	-1.543276E-14	-7.327142E-02	4.767305E-17	8.161180E-07	-6.466321E-17
6331	G	8.161231E-08	-1.446018E-14	-7.327142E-02	4.380952E-18	8.161180E-07	-1.459678E-28
6332	G	-8.161128E-08	-1.445930E-14	-7.327142E-02	4.380952E-18	8.161180E-07	-1.459678E-28
7331	G	6.128209E-13	-1.547634E-14	-7.327088E-02	-3.891054E-17	8.161180E-07	6.504203E-17
7332	G	6.128209E-13	-1.541130E-14	-7.327169E-02	-3.891054E-17	8.161180E-07	6.504203E-17
8331	G	6.133715E-13	-1.538944E-14	-7.327088E-02	4.767305E-17	8.161180E-07	-6.466321E-17
8332	G	6.133715E-13	-1.545410E-14	-7.327169E-02	4.767305E-17	8.161180E-07	-6.466321E-17

1 B5 SEPTEMBER 14, 2007 MSC/NASTRAN 10/23/98 PAGE 17

0
 EIGENVALUE = 2.489842E+04
 CYCLES = 2.511343E+01 REAL EIGENVECTOR NO. 3

POINT ID.	TYPE	T1	T2	T3	R1	R2	R3
100	G	8.093752E-12	-1.215933E-12	3.762979E-03	0.0	-2.257037E+00	-1.015489E-14
501	G	0.0	0.0	3.659761E-02	0.0	3.489188E-02	0.0
502	G	0.0	0.0	3.310832E-02	0.0	3.488213E-02	0.0
503	G	0.0	0.0	2.962086E-02	0.0	3.483476E-02	0.0
504	G	0.0	0.0	2.614088E-02	0.0	3.471463E-02	0.0
505	G	0.0	0.0	2.267741E-02	0.0	3.448890E-02	0.0
506	G	0.0	0.0	1.924265E-02	0.0	3.412746E-02	0.0
507	G	0.0	0.0	1.585164E-02	0.0	3.360327E-02	0.0
508	G	0.0	0.0	1.252194E-02	0.0	3.289270E-02	0.0
509	G	0.0	0.0	9.273314E-03	0.0	3.197583E-02	0.0

510	G	0.0	0.0	6.127280E-03	0.0	3.083677E-02	0.0
511	G	0.0	0.0	3.106752E-03	0.0	2.946386E-02	0.0
512	G	0.0	0.0	2.355786E-04	0.0	2.784987E-02	0.0
513	G	0.0	0.0	-2.461899E-03	0.0	2.599210E-02	0.0
514	G	0.0	0.0	-4.961308E-03	0.0	2.389247E-02	0.0
515	G	0.0	0.0	-7.238701E-03	0.0	2.155751E-02	0.0
516	G	0.0	0.0	-9.271014E-03	0.0	1.899824E-02	0.0
517	G	0.0	0.0	-1.103652E-02	0.0	1.623005E-02	0.0
518	G	0.0	0.0	-1.251523E-02	0.0	1.327244E-02	0.0
519	G	0.0	0.0	-1.368932E-02	0.0	1.014866E-02	0.0
520	G	0.0	0.0	-1.454346E-02	0.0	6.885341E-03	0.0
521	G	0.0	0.0	-1.506513E-02	0.0	3.511953E-03	0.0
522	G	0.0	0.0	-1.524491E-02	0.0	6.024254E-05	0.0
523	G	0.0	0.0	-1.507662E-02	0.0	-3.436442E-03	0.0
524	G	0.0	0.0	-1.455749E-02	0.0	-6.943882E-03	0.0
525	G	0.0	0.0	-1.368817E-02	0.0	-1.042780E-02	0.0
526	G	0.0	0.0	-1.247273E-02	0.0	-1.385474E-02	0.0
527	G	0.0	0.0	-1.091851E-02	0.0	-1.719296E-02	0.0
528	G	0.0	0.0	-9.035894E-03	0.0	-2.041342E-02	0.0
529	G	0.0	0.0	-6.838015E-03	0.0	-2.349079E-02	0.0
530	G	0.0	0.0	-4.340305E-03	0.0	-2.640449E-02	0.0
531	G	0.0	0.0	-1.559983E-03	0.0	-2.913971E-02	0.0
532	G	0.0	0.0	1.484578E-03	0.0	-3.168850E-02	0.0
533	G	0.0	0.0	3.762917E-03	0.0	-3.336132E-02	0.0
534	G	0.0	0.0	8.141614E-03	0.0	-3.392838E-02	0.0
535	G	0.0	0.0	1.154952E-02	0.0	-3.418384E-02	0.0
536	G	0.0	0.0	1.497618E-02	0.0	-3.431462E-02	0.0
537	G	0.0	0.0	2.037048E-02	0.0	-3.437508E-02	0.0
633	G	7.123007E-12	-1.156692E-12	3.763238E-03	-2.247297E-19	-2.257036E+00	6.403797E-25
733	G	8.395311E-12	-1.234528E-12	3.762887E-03	2.412732E-10	-2.257036E+00	9.055275E-16
833	G	8.439356E-12	-1.234528E-12	3.762887E-03	-2.412732E-10	-2.257036E+00	-8.752243E-16
6331	G	-2.257037E-01	-1.156692E-12	3.763238E-03	-2.247297E-19	-2.257036E+00	6.403797E-25
6332	G	2.257037E-01	-1.156692E-12	3.763238E-03	-2.247297E-19	-2.257036E+00	6.403797E-25
7331	G	8.395311E-12	-1.235134E-12	-1.508452E+00	2.412732E-10	-2.257036E+00	9.055275E-16
7332	G	8.395311E-12	-1.234229E-12	7.485849E-01	2.412732E-10	-2.257036E+00	9.055275E-16
8331	G	8.439356E-12	-1.233941E-12	-1.508452E+00	-2.412732E-10	-2.257036E+00	-8.752243E-16
8332	G	8.439356E-12	-1.234817E-12	7.485849E-01	-2.412732E-10	-2.257036E+00	-8.752243E-16

1 B5

SEPTEMBER 14, 2007 MSC/NASTRAN 10/23/98 PAGE 18

0

EIGENVALUE = 3.593664E+04

CYCLES = 3.017094E+01

REAL EIGENVECTOR NO. 4

POINT ID.	TYPE	T1	T2	T3	R1	R2	R3
100	G	8.065278E-10	6.240413E-10	3.602650E-02	-6.938894E-17	4.059735E-01	5.211690E-12
501	G	0.0	0.0	1.857055E-01	0.0	1.976705E-01	0.0
502	G	0.0	0.0	1.659378E-01	0.0	1.975991E-01	0.0
503	G	0.0	0.0	1.461834E-01	0.0	1.972538E-01	0.0
504	G	0.0	0.0	1.264834E-01	0.0	1.963823E-01	0.0
505	G	0.0	0.0	1.069032E-01	0.0	1.947529E-01	0.0
506	G	0.0	0.0	8.752970E-02	0.0	1.921578E-01	0.0
507	G	0.0	0.0	6.846963E-02	0.0	1.884163E-01	0.0
508	G	0.0	0.0	4.984609E-02	0.0	1.833765E-01	0.0
509	G	0.0	0.0	3.179578E-02	0.0	1.769190E-01	0.0
510	G	0.0	0.0	1.446567E-02	0.0	1.689578E-01	0.0
511	G	0.0	0.0	-1.990515E-03	0.0	1.594425E-01	0.0
512	G	0.0	0.0	-1.741587E-02	0.0	1.483593E-01	0.0
513	G	0.0	0.0	-3.165401E-02	0.0	1.357314E-01	0.0
514	G	0.0	0.0	-4.455275E-02	0.0	1.216189E-01	0.0
515	G	0.0	0.0	-5.596780E-02	0.0	1.061180E-01	0.0
516	G	0.0	0.0	-6.576631E-02	0.0	8.935998E-02	0.0
517	G	0.0	0.0	-7.383023E-02	0.0	7.150831E-02	0.0
518	G	0.0	0.0	-8.005945E-02	0.0	5.275633E-02	0.0
519	G	0.0	0.0	-8.437461E-02	0.0	3.332337E-02	0.0
520	G	0.0	0.0	-8.671942E-02	0.0	1.345048E-02	0.0
521	G	0.0	0.0	-8.706266E-02	0.0	-6.604612E-03	0.0
522	G	0.0	0.0	-8.539957E-02	0.0	-2.657303E-02	0.0
523	G	0.0	0.0	-8.175261E-02	0.0	-4.618094E-02	0.0
524	G	0.0	0.0	-7.617167E-02	0.0	-6.515618E-02	0.0
525	G	0.0	0.0	-6.873354E-02	0.0	-8.323515E-02	0.0
526	G	0.0	0.0	-5.954069E-02	0.0	-1.001701E-01	0.0
527	G	0.0	0.0	-4.871931E-02	0.0	-1.157366E-01	0.0
528	G	0.0	0.0	-3.641664E-02	0.0	-1.297406E-01	0.0
529	G	0.0	0.0	-2.279748E-02	0.0	-1.420263E-01	0.0
530	G	0.0	0.0	-8.040066E-03	0.0	-1.524830E-01	0.0
531	G	0.0	0.0	7.668811E-03	0.0	-1.610519E-01	0.0
532	G	0.0	0.0	2.413933E-02	0.0	-1.677325E-01	0.0
533	G	0.0	0.0	3.602141E-02	0.0	-1.713148E-01	0.0
534	G	0.0	0.0	5.866985E-02	0.0	-1.764279E-01	0.0
535	G	0.0	0.0	7.644704E-02	0.0	-1.786987E-01	0.0
536	G	0.0	0.0	9.438975E-02	0.0	-1.798474E-01	0.0

APÉNDICE F. MODELO DE ELEMENTOS FINITOS MSC.NASTRAN DEL VEHÍCULO

```

537   G   0.0      0.0      1.226859E-01  0.0      -1.803729E-01  0.0
633   G   7.097949E-10  5.936374E-10  3.602584E-02  3.218450E-18  4.059733E-01  -5.896948E-22
733   G   8.500746E-10  6.335844E-10  3.602673E-02  -6.161374E-10  4.059733E-01  8.094825E-14
833   G   8.274697E-10  6.335844E-10  3.602673E-02  6.161375E-10  4.059733E-01  -9.650046E-14
6331  G   4.059733E-02  5.936374E-10  3.602584E-02  3.218450E-18  4.059733E-01  -5.896948E-22
6332  G   -4.059733E-02  5.936374E-10  3.602584E-02  3.218450E-18  4.059733E-01  -5.896948E-22
7331  G   8.500746E-10  6.335301E-10  3.080288E-01  -6.161374E-10  4.059733E-01  8.094825E-14
7332  G   8.500746E-10  6.336111E-10  -9.794446E-02  -6.161374E-10  4.059733E-01  8.094825E-14
8331  G   8.274697E-10  6.336490E-10  3.080288E-01  6.161375E-10  4.059733E-01  -9.650046E-14
8332  G   8.274697E-10  6.335525E-10  -9.794446E-02  6.161375E-10  4.059733E-01  -9.650046E-14
1   B5                                     SEPTEMBER 14, 2007 MSC/NASTRAN 10/23/98 PAGE 19

```

```

0
*** USER INFORMATION MESSAGE 4110 (OUTPX2)
      END-OF-DATA SIMULATION ON FORTRAN UNIT 12
      (MAXIMUM SIZE OF FORTRAN RECORDS WRITTEN = 1 WORDS.)
      (NUMBER OF FORTRAN RECORDS WRITTEN = 1 RECORDS.)
      (TOTAL DATA WRITTEN FOR EOF MARKER = 1 WORDS.)
1   B5                                     SEPTEMBER 14, 2007 MSC/NASTRAN 10/23/98 PAGE 20

```

```

0
* * * * D B D I C T   P R I N T   * * * *   SUBDMAP = PRSUM , DMAP STATEMENT NO. 13

```

```

0
* * * * A N A L Y S I S   S U M M A R Y   T A B L E   * * * *
0 SEID PEID PROJ VERS APRCH SEMG SEMR SEKR SELG SELR MODES DYNRED SOLLIN PVALID SOLNL LOOPID DESIGN CYCLE SENSITIVITY
-----
0 0 1 1 ' ' T T T F F T F T 0 F -1 0 F

```

```

0SEID = SUPERELEMENT ID.
PEID = PRIMARY SUPERELEMENT ID OF IMAGE SUPERELEMENT.
PROJ = PROJECT ID NUMBER.
VERS = VERSION ID.
APRCH = BLANK FOR STRUCTURAL ANALYSIS. HEAT FOR HEAT TRANSFER ANALYSIS.
SEMG = STIFFNESS AND MASS MATRIX GENERATION STEP.
SEMR = MASS MATRIX REDUCTION STEP (INCLUDES EIGENVALUE SOLUTION FOR MODES).
SEKR = STIFFNESS MATRIX REDUCTION STEP.
SELG = LOAD MATRIX GENERATION STEP.
SELR = LOAD MATRIX REDUCTION STEP.
MODES = T (TRUE) IF NORMAL MODES OR BUCKLING MODES CALCULATED.
DYNRED = T (TRUE) MEANS GENERALIZED DYNAMIC AND/OR COMPONENT MODE REDUCTION PERFORMED.
SOLLIN = T (TRUE) IF LINEAR SOLUTION EXISTS IN DATABASE.
PVALID = P-DISTRIBUTION ID OF P-VALUE FOR P-ELEMENTS
LOOPID = THE LAST LOOPID VALUE USED IN THE NONLINEAR ANALYSIS. USEFUL FOR RESTARTS.
SOLNL = T (TRUE) IF NONLINEAR SOLUTION EXISTS IN DATABASE.
DESIGN CYCLE = THE LAST DESIGN CYCLE (ONLY VALID IN OPTIMIZATION).
SENSITIVITY = SENSITIVITY MATRIX GENERATION FLAG.
1
* * * * E N D   O F   J O B   * * * *

```


Bibliografía

- [A3204] A320AMM. A318/A319/A320/A321 Aircraft Maintenance Program - Systems/Powerplant; Task 2: Check elevator servo-control and hinge bearings for excessive play and condition. 2004.
- [Abe79] I. Abel. An Analytical Technique for Predicting the Characteristics of a Flexible Wing Equipped with an Active Flutter Suppression System and Comparison with Wind Tunnel Data. *NASA TP 1367*, 1979.
- [AC204] AC236291B. Means of Compliance with Title 14 CFR, Part 23, Section 23.629, Flutter. Federal Aviation Administration FAA. 2004.
- [ACO⁺07] L.H. Abbas, Q. Chen, K. O'Donnell, D. Valentine, and P. Marzocca. Bifurcation and Chaotic Behaviour of Hypersonic Lifting Surfaces with Freeplay including the Stiffness and Damping Non-linearities. *48th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 23-26 April 2007, Honolulu, Hawaii. AIAA 2007-2208*, 2007.
- [ACP04] A. Akmese, M.D. Cömert, and B.E. Platin. Aeroservoelastic Analysis Of Missile Control Surfaces Via Robust Control Methods. *16th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace, 14-18 June, St. Petersburg, Russia*, 2004.
- [AD52] Gaynor J. Adams and Duane W. Dugan. Theoretical Damping in Roll and Rolling Moment due to Differential Wing Incidence for Slender Cruciform Wings and Wing-Body Combinations. *Report 1088*, 1952.
- [AGF01] F. Arévalo and Pablo García-Fogeda. Aeroelastic Study of a Slender Wing/Body Configuration with Structural Nonlinearities. *International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics (IFASD2001)*, II, 2001.
- [AH02] H. Alighanbari and S.M. Hashemi. Bifurcation Analysis of an Airfoil Containing a Cubic Structural Nonlinearity and Subjected to Two-Dimensional Incompressible Flow. *43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. 22-25 April 2002, Denver, Colorado. AIAA 2002-1206*, 2002.
- [AL65] H. Ashley and M. Landahl. *Aerodynamics of Wings and Bodies*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1965.
- [AL01] H. Alighanbari and B.H.K. Lee. Analysis of Nonlinear Aeroelastic Signals. *42nd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. 16-19 April 2001, Seattle, WA. AIAA 2001-1657*, 2001.
- [AP51] H.J. Allen and E.W. Perkins. Characteristics of Flow over Inclined Bodies of Revolution. *Tech. Rep. NACA RM A50L07*, 1951.
- [AP92] D.K. Arrowsmith and C.M. Place. *Dynamic Systems. Differential Equations, Maps and Chaotic Behaviour*. Chapman and Hall Mathematics, 1992.

- [AR69] E. Albano and W.P. Rodden. A doublet-lattice method for calculating lift distribution on oscillating surfaces in subsonic flows. *AIAA Journal*, 7(2):279–285, 1969.
- [Aré98a] F. Arévalo. Aerodinámica No Estacionaria en Configuraciones Cuerpo(s)/Ala(s); código UWBC2000 (Unsteady Wing/Body Configurations 2000). 1998.
- [Aré98b] F. Arévalo. Unsteady Subsonic Flow over Wing/Body Configurations. *EADS/CASA Technical Note NT-T-ADD-98002*, 1998.
- [Aré03] F. Arévalo. Dynamic Analysis by Numerical Integration: Newmark’s Time-integration Method. *EADS/CASA Technical Note NT-T-AA0-03003*, 2003.
- [Aré07] F. Arévalo. An Approach for Characterizing the Aerodynamics/Structure Coupling at the Aircraft Design Stage in the Presence of Structural Nonlinearities. *19th International Congress on Acoustics (ICA2007)*, 2007.
- [ASR⁺07] F. Arévalo, A. Strömberg, F. Rosich, L. Anguita, and H. Climent. Refuelling Boom Aeroelasticity. *International Forum of Structural Dynamics and Aeroelasticity IFASD2007*, 2007.
- [Bat67] G.K. Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Editorial Cambridge, 1967.
- [BD00] R.W. Bunton and C.M. Denegri. Limit Cycle Oscillation Characteristics of Fighter Aircraft. *Journal of Aircraft*, 37(5):916–918, 2000.
- [BE88] O. Brase and W. Eversman. Application of Transient Aerodynamics to the Structural Nonlinear Flutter Problem. *Journal of Aircraft*, 25(11):1060–1068, 1988.
- [BG97] J.J. Block and H. Gilliatt. Active Control of an Aeroelastic Structure. *35th Aerospace Science Meeting and Exhibit, AIAA Paper 97-0016*, 1997.
- [BGC02] P.B. Bornemann, U. Galvanetto, and M.A. Crisfield. Some Remarks on the Numerical Time Integration of Non-Linear Dynamical Systems. *Journal of Sound and Vibration*, 252(2):935–944, 2002.
- [BK05] W.B. Blake and E.D. Karni. A Cambered Body Method for Missile Datcom. *23rd AIAA Applied Aerodynamics Conference. 6-9 June 2005. Toronto, Ontario, Canada*, 2005.
- [BL02] J.-S. Bae and I. Lee. Nonlinear Aeroelastic Characteristics of a Fighter-type Wing with Control Surface. *Proceedings of 2002 ASME Int’l Mechanical Engineering Congress and Exposition, 17-22 November, New Orleans, Louisiana*, 2002.
- [Bla98] W.B. Blake. Missile Datcom User’s Manual - 5/97 Fortran 90 Revision. *AFRL-VA-WP-TR-1998-3009*, 1998.
- [Blo96] J.J. Block. Active Control of an Aeroelastic Structure. *Thesis, Department of Aerospace Engineering, Texas A&M University. Presented at 35th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, AIAA Paper 97-0016, 1997*, 1996.
- [BLSL02] J.-S. Bae, I. Lee, Y.-S. Shin, and Y.-W. Lee. Limit Cycle Oscillation Characteristics of 2D Model with Bilinear Plunge Spring. *Proceedings of Aircraft Symposium*, 40:79–82, 2002.
- [BM05] E. Bollt and P. Marzocca. Active Aeroelastic Control of Lifting Surfaces via Jet Reaction Limiter Control. *46th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. Austin, Texas, 18-21 April*, 2005.
- [BR97] P. Bäck and U.T. Ringertz. Convergence for Methods for Nonlinear Eigenvalue Problems. *AIAA Journal*, 35(6):1084–1087, 1997.

- [Bre78] E. Breitbach. Effects of Structural Nonlinearities on Aircraft Vibration and Flutter. *Advisory Group for Aerospace Research and Development Report, AGARD-R-665*, 1978.
- [Bre80] E.J. Breitbach. Flutter Analysis of an Airplane with Multiple Structural Nonlinearities in the Control System. *NASA TP 1620*, 1980.
- [Bro98] B.M. Brooking. Flutter Analysis of a Two-Dimensional Airfoil Containing Structural Hysteresis Nonlinearities. *PhD Thesis. Ottawa-Carleton Institute for Mechanical & Aerospace Engineering. Carleton University. Ottawa, Ontario. Canada*, 1998.
- [Bro07] M.B. Brooks. Limited Evaluation of Stations 3 and 7 Pylon and Stations 1 and 9 Launcher Bolt Torques on F-16B (CORAL PHOENIX) LCO Characteristics. *International Forum of Structural Dynamics and Aeroelasticity, IFASD2007*, 2007.
- [BS98] J.J. Block and T.W. Strganac. Applied Active Control for a Nonlinear Aeroelastic Structure. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 21(6):838–845, 1998.
- [Bur77] T.H. Burkhart. Subsonic Transient Lifting Surface Aerodynamics. *Journal of Aircraft*, pages 44–50, 1977.
- [Bur94] Juan de Burgos. *Cálculo Infinitesimal de una Variable*. McGraw-Hill, 1994.
- [CCL07] K.W. Chung, C.L. Chan, and B.H.K. Lee. Bifurcation Analysis of a Two-Degree-of-Freedom Aeroelastic System with Freeplay Structural Nonlinearity by a Perturbation-Incremental Method. *Journal of Sound and Vibration*, 299, 2007.
- [CdSG78] M.R.M. Crespo da Silva and C.C. Glynn. Nonlinear Flexural-Torsional Dynamics of Inextensional Beams. Equations of Motion. *Journal of Structural Mechanics*, 6(4):437–448, 1978.
- [CGS07] P.G.A. Cizmas, J.I. Gargoloff, and T.W. Strganac. A Numerical Method for Nonlinear Aeroelastic Analysis of Wings with Large Deformation. *International Forum of Structural Dynamics and Aeroelasticity, IFASD2007*, 2007.
- [CH03] S. Chae and D.H. Hodges. Dynamics and Aeroelastic Analysis of Missiles. *44th AIAA/ASME/ASCE/AHS Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. 7-10 April 2003, Norfolk, Virginia. AIAA 2003-1968*, 2003.
- [Che00] P.C. Chen. A Damping Perturbation Method for Flutter Solution: The g-Method. *AIAA Journal*, 38(9):1519–1524, 2000.
- [Coo94] P.A. Cook. *Nonlinear Dynamical Systems (Second Edition)*. Prentice Hall International Series in Systems and Control Engineering, 1994.
- [CSLD02] P.C. Chen, E. Sulaeman, D.D. Liu, and Jr. Denegri, C.M. Influence of External Store Aerodynamics on Flutter/LCO of a Fighter Aircraft. *43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. 22-25 April 2002, Denver, Colorado*, 2002.
- [Cum04] P.A. Cummings. Continuation Methods for Qualitative Analysis of Aircraft Dynamics. *National Institute of Aerospace NIA, Hampton, Virginia, Report No. 2004-06*, NASA/CR-2004-213035, 2004.
- [CV97] M.D. Conner and L.N. Virgin. Nonlinear Behaviour of a Typical Airfoil Section with Control Surface Freeplay: A Numerical and Experimental Study. *Journal of Fluid and Structures*, 11(1):89–109, 1997.
- [CVD96] M.D. Conner, L.N. Virgin, and E.H. Dowell. Accurate Numerical Integration of State-Space Models for Aeroelastic Systems with Freeplay. *AIAA Journal*, 34(10):2202–2205, 1996.

- [DCSJ01] S. Dominguez, P. Campoy, J.M. Sebastián, and A. Jiménez. *Control en el Espacio de Estado*. Prentice Hall, 2001.
- [Def99] Design Requirements for Weapons and Associated Systems. Part 3: Supporting Information. *Ministry of Defence. Defence Standard 07-85 Part 3*, Issue 1, 1999.
- [Def06a] Design Requirements for Weapons and Associated Systems. Part 1: Mandatory Design Requirements. *Ministry of Defence. Defence Standard 07-85 Part 1*, Issue 3, 2006.
- [Def06b] Design Requirements for Weapons and Associated Systems. Part 2: Supplementary and Design Process Requirements. 2006.
- [Def07a] DEF STAN 00-970 PART 1/3. SECTION 4. LEAFLET 24. Aero-elasticity. Main Surface Flutter. Issue 5, 2007.
- [Def07b] DEF STAN 00-970 PART 1/3. SECTION 4. LEAFLET 25. Aero-elasticity. Flutter of Control Surfaces (Ailerons, Elevators and Rudders). Issue 5, 2007.
- [Den00] C.M. (Jr.) Denegri. Limit Cycle Oscillation Flight Test Results of a Fighter with External Stores. *Journal of Aircraft*, 37(5):761–769, 2000.
- [DGKR03] A. Dhooge, W. Govaerts, Mestram W. Kutnetsov, Y.A., and A.M. Riet. Cl MatCont: A Continuation Toolbox in Matlab. *Proceedings of the 2003 ACM Symposium on Applied Computing, March 9-12, 2003, Melbourne, Florida*, 2003.
- [DI88] E.H. Dowell and M. Ilgamov. *Studies in Nonlinear Aeroelasticity*. Springer-Verlag, 1988.
- [Dim07] G. Dimitriadis. Approximate Numerical Continuation for Aeroelastic Systems Undergoing Aperiodic Limit Cycle Oscillations. *International Forum of Structural Dynamics and Aeroelasticity, IFASD2007.*, 2007.
- [DK54] D.W. Dugan and H. Katsumi. Theoretical investigation of the effects upon lift of a gap between wing and body of a slender wing-body combination. *NACA Technical Note*, (3224), 1954.
- [DK86] E.J. Doedel and J.P. Kernevez. AUTO: Software for Continuation and Bifurcation Problems in Ordinary Differential Equations. *Applied Mathematics Report, California Institute of Technology*, pages 1–226, 1986.
- [Don02] M.A. Donolo. An ODE solver for constrained state spaces: with applications to hybrid-system simulations. *PhD Thesis (Virginia Polytechnic Institute of Technology and State University)*, 2002.
- [Dow80] E.H. Dowell. A Simple Method for Converting Frequency-Domain Aerodynamics to the Time Domain. *NASA Technical Memorandum 81844*, 1980.
- [DP07] F. Demourant and A. Pavie. Frequency Domain Analysis of the Aeroelastic Stability with a Control Surface Freeplay. *Int. Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics IFASD2007.*, 2007.
- [DPC⁺01] E.J. Doedel, R.C. Paffenroth, A.R. Champneys, T.F. Fairgrieve, Y.A. Kuznetsov, B. Sandstede, and X. Wang. AUTO 2000: Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations (with HomCont). *Technical Report, Caltech*, 2001.
- [DTH77] E.H. Dowell, J. Traybar, and D.H. Hodges. An Experimental-Theoretical Correlation Study of Nonlinear Bending and Torsion Deformations of a Cantilever Beam. *Journal of Sound and Vibration*, 50:533–544, 1977.
- [DTH01] E.H. Dowell, J.P. Thomas, and K.C. Hall. Transonic Limit Cycle Oscillation Analysis Using Reduced Order Aerodynamic Models. *42nd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit, Seattle, WA. AIAA-2001-1212*, 2001.

- [Ell06] D. Eller. On an Efficient Method for Time-domain Computational Aeroelasticity. *Technical Report TRITA/AVE 2006:1, AVE, Kungliga Tekniska Högskolan, Stockholm, PhD Thesis*, 2006.
- [Ell07] D. Eller. Friction, Freeplay and Flutter of Manually Controlled Aircraft. *International Forum of Structural Dynamics and Aeroelasticity IFASD 2007*, pages 581–595, 2007.
- [FAA] FAA. Interim Guidelines for Certification and Continued Airworthiness of Unbalanced Control Surfaces with Freeplay and Other Nonlinear Features. Memo No. ANM-05-115-019. *FAA*.
- [FAA98] FAA. Aeroelastic Stability. Substantiation of Transport Category Airplanes. *FAA*, 1998.
- [FAA00] FAA. Free-play limits and inspection procedures for flutter prevention, 25.629 and Advisory Circular (AC) 25.629-1A. *FAA*, 2000.
- [FAA04] FAA. Flutter considerations for unbalanced control surfaces. Item: A-16, Stage:3, Branch Action: ANM-115,116,113. Project No. CP101. *FAA*, 2004.
- [Fai00] F.W. Fairman. *Linear Control Theory. The State Space Approach*. Wiley, 2000.
- [FPEN94] G.F. Franklin, J.D. Powell, and A. Emani-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Addison Wesley, 1994.
- [Fra22] L.E. Fraenkel. Incompressible Flow Past Quasi-Cylindrical Bodies and Some Associated Problems. *Quart. Jour. Mech. and Appl. Math.*, Vol.1, Pt.2, 1958, pp. 212-222.
- [Fun93] Y.C. Fung. *An Introduction to the Theory of Aeroelasticity*. Dover Publications Inc., 1993.
- [GAC04] R. Gómez, F. Arévalo, and H. Climent. A310-MRTT Dynamic FE Model Matched to GVT. *EADS/CASA Technical Document DT-FA-AA0-04001*, 2004.
- [Gan03] F.R. Gantmájér. *Mecánica Analítica*. Editorial URSS, 2003.
- [GD52] A. Gaynor and D.W. Dugan. Theoretical damping in roll and rolling moment due to differential wing incidence for slender cruciform wings and wing-body combinations. *NACA Technical Reports*, (1088), 1952.
- [GGL07] R. Gil, J. Guido, and J Luiz. A Sensitivity Investigation on the Aeroelastic Dynamic Stability of Slender Spinning Sounding Rockets. *International Forum of Structural Dynamics and Aeroelasticity, IFASD 2007*, 2007.
- [Gil97] H.C. Gilliat. Investigations of Internal Resonance Phenomena and Related Nonlinear Pathologies in Aeroelastic Systems. *M.S. Thesis, Texas A&M University*, 1997.
- [GK08] P. Gold and M. Karpel. Reduced-Size Aeroservoelastic Modeling and LCO Simulations with Structurally Non-Linear Actuators. *Journal of Aircraft*, 45(2), 2008.
- [Gre53] H.D. Greif. Describing Function Method of Servomechanism Analysis Applied to Most Commonly Encountered Nonlinearities. *AIEE Transactions, Part II*, pages 243–248, 1953.
- [Gre95] P.L. Green. Dynamic Aspects of Army Missile Systems. *The Journal of Environmental Sciences. Presented at the 2nd National Conference and Workshop on Application of the DoD Streamlining Initiative in Acquisition Programs, sponsored by the Institute of Environmental Sciences in cooperation with the Department of Defense, Leesburg, Virginia.*, 1995.
- [GSK98] H.C. Gilliat, T.W. Strganac, and A.J. Kurdila. On the Presence of Internal Resonances in Aeroelastic Systems. *Proceedings of the 39th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. Long Beach, California. AIAA-98-1955*, pages 2045–2055, 1998.

- [GVV86] A. Gelb and W.E. Vander Velder. *Multiple-Input Describing Functions and Nonlinear System Design*. McGraw-Hill, New York, 1986.
- [HBC95] M. Holden, R. Brazier, and A. Cal. Effects of Structural Non-Linearities on a Tailplane Flutter Mode. *Int. Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics*, 1995.
- [HCdSP98] D.H. Hodges, M.R.M. Crespo da Silva, and D.A. Peters. Nonlinear Effects in the Static and Dynamic Behaviour of Beams and Rotor Blades. *Vertica*, 12(3):243–256, 1998.
- [HD74] D.H. Hodges and E.H. Dowell. Nonlinear Equations of Motion for the Elastic Bending and Torsion of Twisted Nonuniform Rotor Blades. *NASA TN D-7818*, 1974.
- [Hen82] M. Henon. On the numerical computation of Poincaré maps. *Physica*, 5:412–414, 1982.
- [Hin83] A.C. Hindmarsh. ODEPACK, A Systematized Collection of ODE Solvers. *Scientific Computing, R.S. Stepleman at al. (eds.), North-Holland, Amsterdam (vol. 1 of IMACS Transactions on Scientific Computing)*, pages 55–64, 1983.
- [HJ99] S. Hedlund and M. Johansson. A Toolbox for Computational Analysis of Piecewise Linear Systems. 1999.
- [HLG] A.J. Hauenstein, R.M. Laurenson, and J.L. Gubser. Investigations of an Asymptotic Expansion Technique to Analyze Surfaces with Structural Nonlinearities. *Final Rept. Air Force Office of Scientific Research (AFSOR), Contract F49620-84-C-0123*.
- [Hod90] D.H. Hodges. A Mixed Variational Formulation Based on Exact Intrinsic Equations for Dynamics of Moving Beams. *International Journal of Solids and Structures*, 26(11):1253–1273, 1990.
- [Hou50] J.C. Houbolt. A Recurrence Matrix Solution for the Dynamic Response of Elastic Aircraft. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 17(9):540–550, 1950.
- [HS80] K.L. Hiebert and L.F. Shampine. Implicitly Defined Output Points for Solutions of ODEs. *Sandia Report SAND80-0180*, 5, 1980.
- [HWS85] G.J. Hancock, J.R. Wright, and A. Simpson. On the Teaching of the Principle of Wing Flexure-Torsion Flutter. *Aeronautical Journal*, pages 285–305, 1985.
- [JL85] D.J. Jones and B.H.K. Lee. Time Marching Numerical Solutions of the Dynamic Response of Nonlinear Systems. *National Research Council of Canada Rept. NAE-AN-25, Ottawa, Canada*, 1985.
- [Jon46] Robert T. Jones. Properties of Low-Aspect-Ratio Wings at Speeds Below and Above the Speed of Sound. *NACA Report*, No.(1032), 1946.
- [JSS98] JSSG-2006. Joint Service Specification Guide JSSG-2006. Department of Defence, USA. 1998.
- [Kar82] M. Karpel. Design for Active Flutter Suppression and Gust Alleviation Using State-Space Aeroelastic Modeling. *Journal of Aircraft*, 19(3):221–227, 1982.
- [Kat91] Plotkin A. Katz, J. *Low-Speed Aerodynamics: From Wing Theory to Panel Methods*. Editorial McGraw-Hill, 1991.
- [KB47] N Kryloff and N. Bogoliuboff. *Introduction to Nonlinear Dynamics (a free translation by S. Lefschetz)*. Princeton University Press, Princeton, 1947.
- [KBHB07] G. Kuruvila, R.E. Bartels, M.S. Hong, and K.G. Bhatia. Nonlinear Aeroelastic Analysis Using a Time-Accurate Navier-Stokes Equations Solver. *International Forum of Aeroelasticity and Structural Dynamics, 2007. Stockholm., 2007*.

- [KJ56] E.D. Katzen and H.L. Jorgensen. Aerodynamics of Missiles Employing Wings of Very Low Aspect Ratio. *NACA RM A55L13b*, 1956.
- [KKS97a] J. Ko, A.J. Kurdila, and T.W. Strganac. Nonlinear Control of a Prototypical Wing Section with Torsional Nonlinearity. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 20(6):1181–1189, 1997.
- [KKS97b] J. Ko, A.J. Kurdila, and T.W. Strganac. Nonlinear Control Theory for a Class of Structural Nonlinearities in a Prototypical Wing Section. *35th AIAA Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. AIAA Paper 97-0580.*, 1997.
- [KKS97c] J. Ko, A.J. Kurdila, and T.W. Strganac. Nonlinear Dynamics and Control for a Structurally Nonlinear Aeroelastic System. *Proceedings of the 38th AIAA Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, (AIAA Paper No. 97-1024):24–36, 1997.
- [KL96] S.H. Kim and I. Lee. Aeroelastic Analysis of a Flexible Airfoil with a Freeplay Non-Linearity. *Journal of Sound and Vibration*, 193(4):823–846, 1996.
- [Koc50] R.J. Kochenburger. A Frequency Response Method of Analyzing and Synthesizing Contactor Servomechanisms. *Trans. AIEE*, 69:270–284, 1950.
- [Kra85] N.F. Krasnov. *Aerodynamics (volume 2). Methods of Aerodynamic Calculations*. USSR, Moscow, 1985.
- [KS02] K. Kim and T.W. Strganac. Aeroelastic Studies of a Cantilever Wing with Structural and Aerodynamic Nonlinearities. *43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. 22-25 April 2002, Denver, Colorado. AIAA 2002-1412*, 2002.
- [KSK98a] J. Ko, T.W. Strganac, and A.J. Kurdila. Nonlinear, Adaptive Control of an Aeroelastic System via Geometric Methods. *39th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. April 20-23, Long Beach, CA. AIAA 98-1795*, 1998.
- [KSK98b] J. Ko, T.W. Strganac, and A.J. Kurdila. Stability and Control of a Structurally Nonlinear Aeroelastic System. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 21(5):718–725, 1998.
- [KSK99] J. Ko, T.W. Strganac, and A.J. Kurdila. Adaptive Feedback Linearization of the Control of a Typical Wing Section With Structural Nonlinearities. *Nonlinear Dynamics*, 18(3):289–301, 1999.
- [KTDH02] D.B. Kholodar, J.P. Thomas, E.H. Dowell, and K.C. Hall. A Parameter Study of Transonic Airfoil Flutter and Limit Cycle Oscillation Behaviour. *43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit. April 22-25, 2002. Denver, CO. AIAA 2002-1211*, 2002.
- [LB51] H. Lomax and P.F. Byrd. Theoretical Aerodynamic Characteristics of a Family of Slender Wing-Tail-Body Combinations. *National Advisory Committee for Aeronautics NACA Technical Note 2554*, 1951.
- [LD86] B.H.K. Lee and J. Desrochers. Flutter Analysis of a Two-Dimensional Airfoil Containing Structural Nonlinearities. *National Aeronautical Establishment, Aeronautical Rept. LR-618. National Research Council (Canada)*, 1986.
- [LD05] L. Liu and E.H. Dowell. Harmonic Balance Approach for an Airfoil with a Freeplay Control Surface. *AIAA Journal*, 43(4):802–815, 2005.
- [Lee86] C.L. Lee. An Iterative Procedure for Nonlinear Flutter Analysis. *AIAA Journal (ver también Proceedings of the 26th AIAA-85-0688, AIAA/ASM/ASCE/AHS Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, April 15-17, 1985)*, 24(5):833–840, 1986.

- [Lee90] H.W. Lee. Unsteady Subsonic Flow over Elastic and Rigid Bodies including Wake Effect. *A Dissertation Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree Doctor of Philosophy*, Arizona State University, 1990.
- [Lig02] M.J. Lighthill. Supersonic Flow Past Slender Bodies of Revolution The Slope of Whose Meridian Section is Discontinuous. *Quart. Jour. Mech. and Appl. Math.*, Vol.1, Pt. 1, 1948, pp. 90-102.
- [Lin93] Cheng W.H. Lin, W.B. Nolinear Flutter of Loaded Lifting Surfaces (I) and (II). *Journal of the Chinese Society of Mechanical Engineers*, 14(5), 446-466, 1993.
- [LK95] I. Lee and S.H. Kim. Aeroelastic Analysis of a Flexible Control Surface with Structural Nonlinearity. *Journal of Aircraft*, 32(4):868–874, 1995.
- [LL86] B.H.K. Lee and P. LeBlanc. Flutter Analysis of a Two-Dimensional Airfoil with Cubic Nonlinear Restoring Force. *National Aeronautical Establishment, Aeronautical Note 36, National Research Council (Canada)*, 1986.
- [LSB01] R. Lind, K. Snyder, and M. Brenner. Wavelet Analysis to Characterise Non-linearities and Predict Limit Cycles of an Aeroelastic System. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 15(2):337–356, 2001.
- [LT51] R.M. Laurensen and R.M. Trn. Flutter of Control Surfaces with Structural Nonlinearities. *McDonnell Douglas Astronautics Co., St. Louis, Mo., MDC E1734, AIAA Journal*, 1977 (AIAA Journal en 1980, volume 18, pages 1245-1251).
- [LT80] R.M. Laurensen and R.M. Trn. Flutter Analysis of Missile Control Surfaces Containing Structural Nonlinearities. *AIAA Journal*, 18(10):1245–1251, 1980.
- [LT89] B.H.K. Lee and A. Tron. Effects of Structural Nonlinearities on Flutter Characteristics of the CF-18 Aircraft. *Journal of Aircraft*, 26(8):781–786, 1989.
- [LWL02a] L. Liu, Y.S. Wong, and B.H.K. Lee. Non-linear Aeroelastic Analysis Using the Point Transformation Method, Part 1: Freeplay Model. *Journal of Sound and Vibration*, 252(2):447–469, 2002.
- [LWL02b] L. Liu, Y.S. Wong, and B.H.K. Lee. Non-linear Aeroelastic Analysis Using the Point Transformation Method, Part 2: Hysteresis Model. *Journal of Sound and Vibration*, 253, 2002.
- [LY99] P.H. Lewis and C. Yang. *Sistemas de Control en Ingeniería*. Prentice Hall, 1999.
- [MAB87] MIL-A-8870B(AS). Military Specification Airplane Strength and Rigidity Vibration, Flutter, and Divergence. 1987.
- [MAC93] MIL-A-8870C(AS). Military Specification Airplane Strength and Rigidity Vibration, Flutter, and Divergence. 1993.
- [Mag65] K. Magnus. *Vibrations*. Blackie & Sons Ltd., London, pp. 108-112, 1965.
- [Mar58] D.J. Martin. Summary of Flutter Experiences as a Guide to the Preliminary Design of Lifting Surfaces on Missiles. *Langley Aeronautical Laboratory, Langley Field, Va., Washington. NACA Technical Note 4197*, 1958.
- [MB99] F. Mastroddi and A. Bettoli. Non-Linear Aeroelastic Identification via Wavelet Analysis in the Neighbourhood of a Limit Cycle. *Int. Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics*, pages 857–866, 1999.
- [MCC⁺07a] F.D. Marques, E. Camilo, De Marqui C., J.L.F. Azevedo, and K.J. Badcock. Structural Nonlinearities Parameter Analysis for Typical Section Transonic Aeroelasticity. *International Forum of Structural Dynamics and Aeroelasticity, IFASD 2007*, 2007.

- [MCC07b] J. Martínez Carreño and H. Climent. Normal Modes Comparison of A330-MRTT Dynamic FE Model (July 07) and GVT results. Mass and Suspension Conditions of GVT. Configuration Pods ON Boom ON. *EADS/CASA Technical Note NT-FA-AA0-07010*, 2007.
- [MD02] G. Mortchelewicz and L. Daudois. Limit Cycle Analysis of a Structure in an Inviscid Compressible Flow in Presence of Freeplay Nonlinearities. *42nd Israel Annual Conference on Aerospace Sciences. Haifa (Israel), February 21-22, 2002*.
- [MHB05] MIL-HDBK-516B. MIL-HDBK-516B. Airworthiness Certification Criteria. Department of Defense. USA. 2005.
- [Mil50] J.W. Miles. On Non-Steady Motion of Slender Bodies. *Aero. Quarterly*, II, pt. III:183–194, 1950.
- [Mil72] M.Z. Miller. Two Degree of Freedom Flutter Analysis Including Effects of Structural Nonlinearities. *McDonnell Douglas Astronautics, St. Louis, M.O., E236-ATN-001*, 1972.
- [MM96] F. Mastroddi and L. Morino. Limit-cycle Taming by Nonlinear Control with Applications to Flutter. *Aeronautical Journal*, pages 389–396, 1996.
- [MP07] C.C. Marsden and S.J. Price. Transient and Limit Cycle Simulation of a Nonlinear Aeroelastic System. *Journal of Aircraft*, 44(1), 2007.
- [MRR81] S.C. McIntosh, (Jr.) Reed, R.E., and W.P. Rodden. Experimental and Theoretical Study of Non-linear Flutter. *Journal of Aircraft*, 18(12):1057–1063, 1981.
- [Mun24] Max M. Munk. The Aerodynamic Forces on Airship Hulls. *NACA Report*, No.(184), 1924.
- [Nar95] Narayanan, S., and Sekar, P. Periodic and Chaotic Responses of an SDF System with Piecewise Linear Stiffness Subjected to Combined Harmonic and Flow Induced Excitations. *Journal of Sound and Vibration*, 184(2):281–298, 1995.
- [New59] N.M. Newmark. A Method of Computation for Structural Dynamics. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, (85):67–94, 1959.
- [Nie60] J.N. Nielsen. *Missile Aerodynamics*. McGraw-Hill Book Company, Inc., 1960.
- [NM69] J.A. Nelder and J. Mead. A simplex method for function minimization. *Computer Journal*, 7:279–285, 1969.
- [NPA04] NPA112004. Notice of Proposed Amendment (NPA) No. 11/2004. Draft Decision of the Executive Director of the Agency, on Certification Specifications for Large Aeroplanes (CS-25). Miscellaneous Structure. 2004.
- [OB94] L. Ortiz Berrocal. *Resistencia de Materiales*. McGraw-Hill Interamericana de España, S.A., 1994.
- [Oga98] K. Ogata. *Ingeniería de Control Moderna*. Prentice Hall, 1998.
- [OGS96] T. O’Neil, H.C. Gilliat, and T.W. Strganac. Investigations of Aeroelastic Response for a System with Continuous Structural Nonlinearities. *37th AIAA Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, AIAA Paper 96-1390*, 1996.
- [OS98] T. O’Neil and T.W. Strganac. Aeroelastic Response of a Rigid Wing Supported by Nonlinear Springs. *Journal of Aircraft*, 35(4):612–622, 1998.
- [PAL94a] S.J. Price, H. Alighanbari, and B.H.K. Lee. Postinstability Behaviour of a Two-Dimensional Airfoil with Structural Nonlinearity. *Journal of Aircraft*, 31(6):1395–1401, 1994.

- [PAL94b] S.J. Price, H. Alighanbari, and B.H.K. Lee. The Aeroelastic Response of a Two-Dimensional Airfoil with Bilinear and Cubic Nonlinearities. *Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 35th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, AIAA / Journal of Fluids and Structures, Vol. 9, 1995, pp. 175-193*, pages 1771–1780, 1994.
- [Pet94] D.A. Peters. Finite-State Airloads for Deformable Airfoils on Fixed and Rotating Wings. *Symposium on Aeroelasticity and Fluid/Structure Interaction, American Society of Mechanical Engineers, Winter Annual Meeting*, 1994.
- [PH00a] M.J. Patil and D.H. Hodges. Nonlinear Aeroelastic Analysis of Complete Aircraft in Subsonic Flow. *Journal of Aircraft*, 37(5):753–760, 2000.
- [PH00b] M.J. Patil and D.H. Hodges. On the Importance of Aerodynamic and Structural Geometrical Nonlinearities on Aeroelastic Behaviour of High-Aspect-Ratio Wings. *AIAA Paper 2000-1448*, 2000.
- [PHC99] M.J. Patil, D.H. Hodges, and C.E.S. Cesnik. Nonlinear Aeroelasticity and Flight Dynamics of High-Altitude Long-Endurance Aircraft. *Proceeding of the 40th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Saint Louis, Missouri. April 12-15. AIAA Paper 99-1470*, pages 2224–2232, 1999.
- [PHC00] M.J. Patil, D.H. Hodges, and C.E.S. Cesnik. Limit Cycle Oscillations of a Complete Aircraft. *AIAA Paper 2000-1395*, 2000.
- [Pit98] D.M. Pitt. Further Physical Explanation of Free Play Effects on Chaotic Flutter Reponse of All-Movable Control Surfaces. *Second International Conference on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace / 36th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference (April 10-13, 1995 / New Orleans LA)*, 1998.
- [PN90] P.F. Pai and A.H. Nayfeh. Three-Dimensional Nonlinear Vibrations of Composite Beams. Equations of Motion. *Nonlinear Dynamics*, 1:477–502, 1990.
- [PP97] D.C. Poirel and S.J. Price. Post-Instability Behaviour of a Structurally Nonlinear Airfoil in Longitudinal Turbulence. *AIAA Journal*, 34(5):619–626, 1997.
- [PS90] C.P. Pagwiwoko and A. Said. Three-Dimensional Nonlinear Vibrations of Composite Beams. Equations of Motion. *Nonlinear Dynamics*, 1:477–502, 1990.
- [PS02] G. Platanitis and T.W. Strganac. Control of a Wing Section with Structural Nonlinearities Using a Leading Edge and Trailing Edge Control Surfaces. *43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. 22-25 April 2002, Denver, Colorado*, 2002.
- [PVTF96] W.H. Press, W.T. Vetterling, S.A. Teukolsky, and B.P. Flannery. *Numerical Recipes in Fortran 77. The Art of Scientific Computing (Vol. 1 of Fortran Numerical Recipes)*. Cambridge University Press, 1996.
- [PW02] C. Popescu and S.Y. Wong. A Nonlinear Statistical Approach for Aeroelastic Response Prediction. *43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. 22-25 April 2002, Denver, Colorado. AIAA-2002-1281*, 2002.
- [RC07] J. Rajadas and A. Chattopadhyay. Modeling Structural Nonlinearities including Damage using Reduced Order Methods. *48th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. 23-26 April 2007, Honolulu, Hawaii*, 2007.
- [RGLJ05] I. Roberts, A.L. Gaitonde, N.A.J. Lieven, and D.P. Jones. Identification of limit-cycles for piecewise non-linear transonic aeroelastic systems. *AIAA 2005-5132, 35th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit, 6-9 June 2005, Toronto, Ontario, Canada*, 2005.

- [RHB79] W.P. Rodden, R.L. Harder, and E.D. Bellinger. Aeroelastic Addition to NASTRAN. *NASA CR*, (3094), 1979.
- [RJD⁺01] I. Roberts, Jones, D.P., N.A.J. Lieven, M. di Bernardo, and A.R. Champneys. Analysis of Piecewise Linear Aeroelastic Systems Using Numerical Continuation. *Departments of Aerospace Engineering and Engineering Mathematics, Bristol University, Bristol*, 2001.
- [RLK00] D.E. Raveh, Y. Levy, and M. Karpel. Aircraft Aeroelastic Analysis and Design Using CFD-Based Unsteady Loads. *41st Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit, Atlanta, GA, April 2000. AIAA-00-1325*, 2000.
- [Sac54] A.H. Sacks. Aerodynamic Forces, Moments, and Stability Derivatives for Slender Bodies of General Cross Sections. *NACA Technical Note 3283, Ames Aeronautical Laboratory, Moffet Field, Calif.*, 1954.
- [SCWL00a] A. Sedaghat, J. Cooper, J.R. Wright, and A.Y.T. Leung. Prediction of Nonlinear Aeroelastic Instabilities. *ICAS 2000 Congress, Harrogate, UK*, 464.1-464.10, 2000.
- [SCWL00b] A. Sedaghat, J.E. Cooper, J.R. Wright, and A.Y.T. Leung. Limit Cycle Oscillation Prediction for Aeroelastic Systems with Continuous Non-linearities. *AIAA-2000-1397. AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit, 41st Atlanta, GA, 3-6 April*, 2000.
- [Sey94] Rüdinger Seydel. *Practical Bifurcation and Stability Analysis. From Equilibrium to Chaos*. IAM Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer-Verlag, 1994.
- [Sha05] U. Sharma. Effects of Cubic Hardening Nonlinearities on the Flutter of a Three Degree of Freedom Airfoil. *Georgia Institute of Technology*, 2005.
- [She59] S.F. Shen. An approximate analysis of nonlinear flutter problem. *Journal of Aerospace Sciences*, 28:25–32, 45, 1959.
- [SHTS00] E.F. Sheta, V.J. Harrand, D.E. Thompson, and T.W. Strganac. Computational and Experimental Investigation of Limit Cycle Oscillations in Nonlinear Aeroelastic Systems. *41st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Atlanta, GA - April 3-6, 2000. AIAA 2000-1399*, 2000.
- [SHW62] B.L. Sewall, R.W. Hess, and C.E. Watkins. Analytical and Experimental Investigation of Flutter and Divergence of Spring-Mounted Cone Configurations at Supersonic Speeds. *NASA Technical Note NASA TN D-1021*, 1962.
- [SKTK00] T.W. Strganac, J. Ko, D.E. Thompson, and A.J. Kurdila. Identification and Control of Limit Cycle Oscillations in Aeroelastic Systems. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 23(6):1127–1133, 2000.
- [SM72] L.L. Smith and L. Morino. Stability Analysis of Nonlinear Differential Autonomous Systems with Applications to Flutter. *AIAA Journal*, 14(3):333–341, 1972.
- [SMTU04] J. San Martín, V. Tomeo, and S. Uña. *Métodos Matemáticos. Ampliación de Matemáticas para Ciencias e Ingeniería*. Thomson, 2004.
- [Soc84] Royal Aeronautical Society. *Nonlinear Systems: An Introduction To Describing Functions*. 1984.
- [Soc92] Royal Aeronautical Society. *Oscillatory Aerodynamics of Slender Bodies (associated software: ES-DUpac A8310)*. 1992.
- [Spr50] John R. Spreiter. The aerodynamic forces on slender plane- and cruciform-wing and body combinations. *NACA Report*, No.(962), 1950.

- [SPSY91] R.O. Stearman, E.J. Powers, J. Schwartz, and R. Yurkovich. Aeroelastic System Identification of Advanced Technology Aircraft Through Higher Order Signal Processing. *Proceedings of the 9th International Modal Analysis Conference, Florence, Italy, April 15-18*, pages 1607–1616, 1991.
- [Str94] S.H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: with applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
- [SVCW00] A. Sedaghat, G.A. Vio, J.E. Cooper, and J.R. Wright. Modelling of Non-linear Aerodynamics During Limit Cycle Oscillations. *ISMA 25*, 2000.
- [TA88] S.H. Tiffany and (Jr.) Adams, W.M. Nonlinear programming extensions to rotational approximation methods of unsteady aerodynamic forces. *NASA TP-2776*, 1988.
- [TD92] D.M. Tang and E.H. Dowell. Flutter and Stall Response of a Helicopter Blade with Structural Nonlinearity. *Journal of Aircraft*, 29(5):953–960, 1992.
- [TD02] D. Tang and E.H. Dowell. Limit-Cycle Hysteresis Response for a High-Aspect-Ratio Wing Model. *Journal of Aircraft*, 39(5):885–888, 2002.
- [TD06] D. Tang and E.H. Dowell. Flutter and Limit-Cycle Oscillations for a Wing-Store Model with Freeplay. *Journal of Aircraft*, 43(2):487–503, 2006.
- [TDD00] D. Tang, Kholodar D., and E.H. Dowell. Nonlinear response of Airfoil Section with Control Surface Freeplay to Gust Loads. *AIAA Journal*, 38(9):1543–1557, 2000.
- [TDV98] D.M. Tang, E.H. Dowell, and L.N. Virgin. Limit Cycle Behaviour of an Airfoil with a Control Surface Freeplay. *Journal of Fluids and Structures*, 12:839–858, 1998.
- [THD00] D. Tang, J.K. Henry, and E.H. Dowell. Nonlinear Aeroelastic Response of Delta Wing to Periodic Gust. *Journal of Aircraft*, 37(1):155–164, 2000.
- [The35] T. Theodorsen. General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter. *NACA Rept. 496*, 1935.
- [Tho01] D. Thompson. Nonlinear Analysis of Store-Induced Limit Cycle Oscillations. *Master of Science Thesis, Department of Aerospace Engineering, Texas A&M University, August*, 2001.
- [TKD00] D.M. Tang, D. Kholodar, and E.H. Dowell. Nonlinear Aeroelastic Reponse of a Typical Airfoil Section with Control Surface Freeplay. *41st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. 3-8 April, Atlanta, GA. AIAA 2000-1621*, 2000.
- [Tru55] J.G. Truxal. *Control System Synthesis (chapter 10)*. McGraw-Hill Book Co., 1955.
- [TS00] D.E. Thompson and T.W. Strganac. Store-Induced Limit Cycle Oscillations and Internal Resonances in Aeroelastic Systems. *41st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. April 3-6, 2000, Atlanta. AIAA Paper 2000-1413*, 2000.
- [TVD00] S.T. Trickey, L.N. Virgin, and E.H. Dowell. Characterizing Stability of Responses in a Nonlinear Aeroelastic System. *AIAA-2000-1334*, 2000.
- [UE01] E. Umez-Eorini. *Dinámica de Sistemas y Control*. Thomson Learning, 2001.
- [VC05] G.A. Vio and J.E. Cooper. Limit Cycle Oscillation Prediction for Aeroelastic Systems with Discrete Bilinear Stiffness. *Journal of Applied Math. and Mech.*, 3:110–119, 2005.
- [VD54] Milton D. Van Dyke. Subsonic Edges in Thin-Wing and Slender-Body Theory. *NACA Technical Note, No.(3343)*, 1954.

- [VD58] Milton D. Van Dyke. *Second-Order Slender-Body Theory. Axisymmetric Flow. NACA Technical Note, No.(4281)*, 1958.
- [Vep76] R. Vepa. On the Use of Padé Approximants to Represent Unsteady Aerodynamic Loads for Arbitrarily Small Motions of Wings. *AIAA Paper 76-17*, 1976.
- [Vig03] P. Viguier. Wind Tunnel Test of a Non-Linear Flutter Model. *ONERA. Paper presented at IFASD 2003 Amsterdam, June 04-06*, 2003.
- [Váz99] M. Vázquez. *Resistencia de Materiales - Cuarta Edición*. Editorial Noela, 1999.
- [War55] G.N. Ward. *Linearized Theory of Steady High-Speed Flow*. Cambridge University Press, 1955.
- [Wig96] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [WLCM07] Z. Wang, D.D. Liu, P.C. Chen, and D.T. Mook. Tightly-Coupled Nonlinear Aerodynamics/Nonlinear Structure Interaction: A Hale Wing Aeroelastic Case Studied. *International Forum of Structural Dynamics and Aeroelasticity, IFASD2007*, 2007.
- [WLL01] Y.S. Wong, L. Liu, and B.H.K. Lee. Frequency and Amplitude Prediction of Limit Cycle Oscillations of an Airfoil Containing Concentrated Structural Nonlinearities. *42nd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit, Seattle, WA, 16-19 April 2001. AIAA-2001-1293*, 2001.
- [WRA57] D.S. Woolston, H.L. Runyan, and R.E. Andrews. An Investigation of Effects of Certain Type of Structural Nonlinearities on Wing and Control Surface Flutter. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 24(1):57–63, 1957.
- [Yan95] Y.-R. Yang. KBM Method of Analyzing Limit Cycle Flutter of a Wing with an External Store and Comparison with a Wind-Tunnel Test. *Journal of Sound and Vibration*, 187(2):271–280, 1995.
- [ZAE04] ZAERO. *ZAERO 7.2 Theoretical Manual*. ZONA Technology, Inc., 2004.